Euclid 変換
〜3 次元空間の回転と並進を中心として〜

小川　雅弘

2021 年 5 月 23 日

目 次

1　序論 1
1.1　記号の定義 2
2　一般の Euclid 変換 2
3　2 次元 Euclid 変換 3
3.1　公式 3
3.2　具体例 3
4　3 次元 Euclid 変換 4
4.1　行列による回転の表現 4
4.1.1　基底による回転行列の表現 4
4.1.2　roll, pitch, yaw による回転行列の表現 5
4.2　ベクトルによる回転の表現 6
4.2.1　回転ベクトルからの回転行列の作成 6
4.2.2　回転行列からの回転ベクトルの作成 10
4.3　四元数による回転の表現 11
4.3.1　四元数の定義 11
4.3.2　四元数と回転行列 12

1　序論

この記事では、回転と並進で表わされる、Euclid 変換についてまとめる。

1.1 記号の定義

- 各点の位置ベクトルは点の記号を太字で書く。例）$\boldsymbol{x}$
- ベクトルの各座標系での表示をベクトルの右下に/{ 座標系 } で表示する。例）$\boldsymbol{x}_{/A}$：ベクトル $\boldsymbol{x}$ の A 座標系での表示
- ベクトルの、各座標系での表示の転置は、左上添え字に t をつける。例）${}^t\boldsymbol{x}_{/A}$
- 座標系 $\mathcal{O}_i$ の原点は、$\boldsymbol{o}_i$ と表す。
- $\mathcal{O}\{x, y, z\}$： 原点を $\boldsymbol{o}_i$、x,y,z 軸を右手系とした直交直線座標系。
- $\bar{\boldsymbol{x}}$: ベクトル $\boldsymbol{x}$ の、長さを 1 に正規化したベクトル
- E_n: n 次の単位行列
- O_n: n 次のゼロ行列
- $\det(A)$: 行列 A の determinant
- $\mathrm{Tr}(A)$: 行列 A の trace
- $M(n, \mathbb{R})$: 実数を成分とする n 次正方行列の集合
- $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) | A$ は正則 $\}$
- $SO(n) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) | {}^tAA = E_n, \det(A) = 1\}$
- $U(n) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) | A^*A = E_n\}$
- $R(\boldsymbol{r}, \theta)$: 回転軸 $\boldsymbol{r}$、回転量 θ の回転行列
- (A_{ij}): ij 成分が A_{ij} の行列

2 一般の Euclid 変換

対象点 $\boldsymbol{x}$ の、座標系 $\mathcal{O}_1$ から座標系 $\mathcal{O}_2$ への Euclid 座標変換（回転＋並進）は下記のように表わされる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_2} &= R_{\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2} \boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} + \boldsymbol{t}_{\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_2} && (1) \\ &= R(\theta_{\mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_1}) \boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} + \overrightarrow{o_2 o_1}_{/\mathcal{O}_2} && (2) \end{aligned}$$

ここで、$\theta_{\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2}$ は、座標系 $\mathcal{O}_1$ を座標系 $\mathcal{O}_2$ へ重ねる回転角度を表し、$\overrightarrow{o_1 o_2}$ は、$\boldsymbol{o}_1$ から $\boldsymbol{o}_2$ へ向かうベクトル表す。

具体的な形については、次元ごとに次節以降で扱う。

3　2次元 Euclid 変換

3.1　公式

一般の場合の (2) 式がそのまま適用でき、

$$\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_2} = R(\theta_{\mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_1})\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} + \overrightarrow{o_2 o_1}_{/\mathcal{O}_2} \tag{3}$$

となる。

3.2　具体例

本節では、具体的な座標変換で、座標変換公式 (3) を確認する。

2 次元 Euclid 変換の自由度は、回転 1、並進 2 の 3 自由度ある。1 点は 2 つの独立な条件を定めるので、(3) の確認のためには、異なる 2 点が正しく変換されていることを見れば十分である。

- 例 1) 並進

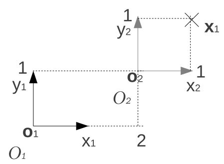

図 1: 例 1 の見取り図

$$\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_2} = \boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} - {}^t(2,1) \tag{4}$$

確認は 2 点で十分だが、念のため、確認用の点として、$\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \boldsymbol{x}_{1/\mathcal{O}_1} = {}^t(3,2)$ の 3 点をとると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o}_{1/\mathcal{O}_1} - {}^t(2,1) &= {}^t(0,0) - {}^t(2,1) = -{}^t(2,1) = \boldsymbol{o}_{1/\mathcal{O}_2} \\ \boldsymbol{o}_{2/\mathcal{O}_1} - {}^t(2,1) &= {}^t(2,1) - {}^t(2,1) = {}^t(0,0) = \boldsymbol{o}_{2/\mathcal{O}_2} \\ \boldsymbol{x}_{1/\mathcal{O}_1} - {}^t(2,1) &= {}^t(3,2) - {}^t(2,1) = {}^t(1,1) = \boldsymbol{x}_{1/\mathcal{O}_2} \end{aligned}$$

となり、(3) 式の正しさが確認できる。

- 例 2) 回転と並進

$$\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_2} = R\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1,2) \tag{5}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

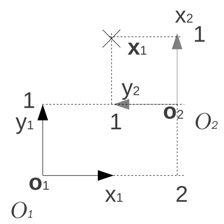

図 2: 例 2 の見取り図

確認用の点として、$\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \boldsymbol{x}_{1/\mathcal{O}_1} = {}^t(1,2)$ の 3 点をとると、

$$R\boldsymbol{o}_{1/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1,2) = R^t(0,0) + {}^t(-1,2) =^t (-1,2) = \boldsymbol{o}_{1/\mathcal{O}_2}$$
$$R\boldsymbol{o}_{2/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1,2) = R\ {}^t(2,1) +^t (-1,2) =^t (0,0) = \boldsymbol{o}_{2/\mathcal{O}_2}$$
$$R\boldsymbol{x}_{1/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1,2) = R\ {}^t(1,2) +^t (-1,2) =^t (1,1) = \boldsymbol{x}_{1/\mathcal{O}_2}$$

となり、(3) 式の正しさが確認できる。

4 3 次元 Euclid 変換

3 次元 Euclid 変換も、(2) で表され、並進についてはこの表現で定まるが、回転についてはいくつかの表示がありうる。そこで本章では、3 次元空間の回転 ($R_{\mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2}$) について扱っていく。

4.1 行列による回転の表現

4.1.1 基底による回転行列の表現

回転は、座標系 $\mathcal{O}_1$、$\mathcal{O}_2$ の基底ベクトルをそれぞれ、$\boldsymbol{e_{1x}}, \boldsymbol{e_{1y}}, \boldsymbol{e_{1z}}$、$\boldsymbol{e_{2x}}, \boldsymbol{e_{2y}}, \boldsymbol{e_{2z}}$ とすると、

$$R_{\mathcal{O}1 \to \mathcal{O}2} = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{e}_{2x/\mathcal{O}1} \\ {}^t\boldsymbol{e}_{2y/\mathcal{O}1} \\ {}^t\boldsymbol{e}_{2z/\mathcal{O}1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

これは、$R, \boldsymbol{t}$ は合計 6 自由度なので、2 本の独立なベクトルの変換が正しくできていることを確かめれば、6 個の拘束条件がつくため十分であり、2 本のベクトルとして、$\boldsymbol{e_{2x}}, \boldsymbol{e_{2y}}$ を、式 (2) の $\boldsymbol{x}_{/O1}$ に代入すれば確かめられる。

4.1.2 roll, pitch, yaw による回転行列の表現

X,Y,Z 各軸の正方向を軸とした、右ねじ方向への回転角をそれぞれ、roll, pitch, yaw と呼ぶ。座標系 $\mathcal{O}_2$ を、座標系 $\mathcal{O}_2$ での yaw, pitch, roll の順に回転すると、座標系 $\mathcal{O}_1$ に重なるとする。これを、Tate-Bryant の分解という。これを図で表したものが、図 3 である。

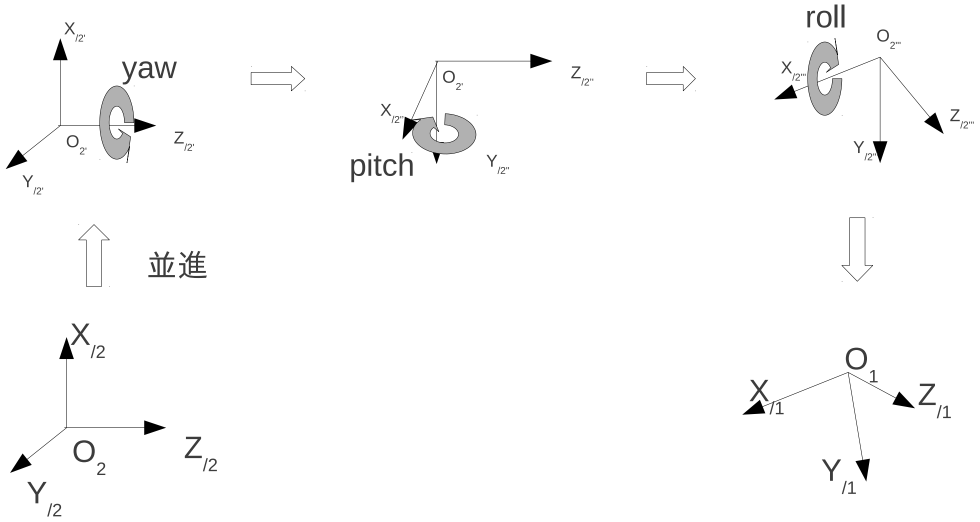

図 3: Euclid transformation from O1 to O2

今、

$$R(roll) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(roll) & -\sin(roll) \\ 0 & \sin(roll) & \cos(roll) \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$R(pitch) := \begin{pmatrix} \cos(pitch) & 0 & \sin(pitch) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(pitch) & 0 & \cos(pitch) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$R(yaw) := \begin{pmatrix} \cos(yaw) & -\sin(yaw) & 0 \\ \sin(yaw) & \cos(yaw) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

としたとき、回転行列は、この roll, pitch, yaw の組み合わせで、下記のように表わされる。(分かり易さのため、並進も併せて表す。)

$$\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} = R(-roll)R(-pitch)R(-yaw)(\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_2} - \overrightarrow{o_2o_1}_{/\mathcal{O}_2}) \tag{11}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_2} = R(yaw)R(pitch)R(roll)\boldsymbol{x}_{/\mathcal{O}_1} + \overrightarrow{o_2o_1}_{/\mathcal{O}_2} \tag{12}$$

$$\Rightarrow R_{\mathcal{O}1\rightarrow\mathcal{O}2} = R(yaw)R(pitch)R(roll) \tag{13}$$

4.2　ベクトルによる回転の表現

回転は、回転軸中心と、その軸周りの回転量でも表わされる。
回転ベクトル $\boldsymbol{r}$ を、向き $\frac{\boldsymbol{r}}{||\boldsymbol{r}||} = \bar{\boldsymbol{r}}$ が回転軸方向で、大きさ $||\boldsymbol{r}|| =: \theta$ が、回転量を表すベクトルとして定義する。以下では、この $\boldsymbol{r}$ と回転行列の関係を調べる。

4.2.1　回転ベクトルからの回転行列の作成

まず、$\boldsymbol{r}$ から回転行列を作る。

定義 4.1.

$$\boldsymbol{r}_{/\mathcal{O}} = {}^t(r_1, r_2, r_3) \tag{14}$$

$$[\boldsymbol{r}]_\times := \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$e^{[\boldsymbol{r}]_\times} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{[\boldsymbol{r}]_\times}^n}{n!} \tag{16}$$

と定義したとき、次の命題が成り立つ。

命題 4.1. $e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ は回転行列であり、その回転軸は $\boldsymbol{r}$、回転角度は $||\boldsymbol{r}||$ である。

つまりこの命題によれば、回転ベクトル $\boldsymbol{r}$ が分かっているとき、$e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ が、$\boldsymbol{r}$ に対応する回転行列になる、ということである。命題 4.1 を証明するため、以下の補題を示す。

補題 4.1. $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ *s.t.(such that)* $AB = BA$ に対し、

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B} \tag{17}$$

証明.

$$
\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m A^m B^{n-m} \qquad (\because AB = BA) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{A^m B^{n-m}}{m!(n-m)!} \\
&= (E_3 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \ldots) + \frac{A}{1!}(E_3 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \ldots) \\
&\quad + \frac{A^2}{2!}(E_3 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \ldots) + \ldots \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!})(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}) \\
&= e^A e^B = e^B e^A
\end{aligned}
$$

□

補題 4.2. $A \in M_3(\mathbb{R})$ に対し、

$$
\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)} \tag{18}
$$

証明.

$$
\exists P \in GL(3, \mathbb{R}) \qquad s.t.\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(e^A) &= \det(P^{-1}e^A P) \\
&= \det(e^{P^{-1}AP}) \\
&= \det(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & * & * \\ 0 & \lambda_2^n & * \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}) \\
&= \det \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & * & * \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} & * \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_3^n}{n!} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & * \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \\
&= e^{\mathrm{Tr}(P^{-1}AP)} \\
&= e^{\mathrm{Tr}(A)}
\end{aligned}
$$

□

補題 4.3. 回転ベクトルが $\boldsymbol{r}$ の回転行列 $R(\bar{\boldsymbol{r}},\theta)$ $(\theta := ||\boldsymbol{r}||)$ の固有値は、$1, e^{\pm i\theta}$

証明. 任意の回転に対し、その回転軸 $\boldsymbol{r}$ を z 軸とするような Euclid 変換が存在する。これを行列で表すと、

$$\exists P \in SO(3)\ s.t. \quad P^{-1}R(\bar{\boldsymbol{r}},\theta)P = R(\boldsymbol{z},\theta) \tag{19}$$

となる。すると、求めたい $R(\bar{\boldsymbol{r}},\theta)$ の固有値は、$R(\boldsymbol{z},\theta)$ の固有値と同じであり、それを λ とおくと、

$$\begin{aligned} 0 &= \det(R(\boldsymbol{z},\theta)-\lambda E_3) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1) \\ \Rightarrow \lambda &= 1, e^{\pm i\theta} \end{aligned} \tag{20}$$

□

以上で準備ができたので、命題 4.1 の証明を行う。

証明. $e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ が回転行列であることを示すには、$\det(e^{[\boldsymbol{r}]_\times}) = 1$、$e^{[\boldsymbol{r}]_\times}\,{}^t(e^{[\boldsymbol{r}]_\times}) = E_3$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} \det(e^{[\boldsymbol{r}]_\times}) &= e^{\mathrm{Tr}([\boldsymbol{f}]_\times)} && (\because \text{補題 } 4.2) \\ &= e^0 = 1 \\ e^{[\boldsymbol{r}]_\times}\,{}^t(e^{[\boldsymbol{r}]_\times}) &= e^{[\boldsymbol{r}]_\times + {}^t[\boldsymbol{r}]_\times} && (\because \text{補題 } 4.1) \\ &= e^{[\boldsymbol{r}]_\times - [\boldsymbol{r}]_\times} = e^{O_3} = E_3 \end{aligned}$$

回転軸が $\boldsymbol{r}$ であることを示すには、$\boldsymbol{r}$ が $e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ の固有ベクトルになっていることを示せばよい。

$$\begin{aligned} e^{[\boldsymbol{r}]_\times}\boldsymbol{r} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{[\boldsymbol{r}]_\times}^n}{n!}\Big)\boldsymbol{r} \\ &= \frac{{[\boldsymbol{r}]_\times}^0}{0!}\boldsymbol{r} && (\because [\boldsymbol{r}]_\times \boldsymbol{r} = 0) \\ &= \boldsymbol{r} \end{aligned}$$

回転角度が $||\boldsymbol{r}||(=\theta)$ であることを示すには、補題 4.3 より、$e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ の固有値が $1, e^{\pm i\theta}$ であることを示せばよい。$[\boldsymbol{r}]_\times$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると、$[\boldsymbol{r}]_\times$

を対角化する $U \in U(3)$ があり、

$$
\begin{aligned}
U^{-1}e^{[\boldsymbol{r}]_\times}U &= U^{-1}\sum_n \frac{[\boldsymbol{r}]_\times{}^n}{n!}U \\
&= e^{U^{-1}[\boldsymbol{r}]_\times U} \\
&= \exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \\
&= \sum_n \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

一方、$[\boldsymbol{r}]_\times$ の固有値 λ は、

$$
\begin{aligned}
0 = \det([\boldsymbol{r}]_\times - \lambda E_3) = -\lambda(\lambda^2 + \theta^2) \\
\Rightarrow \lambda = 0, \pm i\theta \qquad (22)
\end{aligned}
$$

だから、$e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ の固有値は、$1, e^{\pm i\theta}$ となる。以上により、命題 4.1 が示された。 □

実際に $\boldsymbol{r}$ から回転行列 $e^{[\boldsymbol{r}]_\times}$ を得る場合、直接定義式 (16) を計算することはできないので、以下の公式を利用する。

命題 4.2. *(Rodriguess の公式)*

$$
e^{[\boldsymbol{r}]_\times} = E_3 + \sin\theta[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times + (1-\cos\theta)[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times^2 \qquad (23)
$$

証明.

$$
[\boldsymbol{r}]_\times^3 = -\theta[\boldsymbol{r}]_\times \qquad (24)
$$

$$
\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}, \qquad \sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} \qquad (25)
$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
e^{[\boldsymbol{r}]_\times} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\boldsymbol{r}]_\times^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{[\boldsymbol{r}]_\times^{2m}}{(2m)!} + \frac{[\boldsymbol{r}]_\times^{2m+1}}{(2m+1)!}) \\
&= E_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{m-1}[\boldsymbol{r}]_\times^2}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^m [\boldsymbol{r}]_\times}{(2m+1)!} \qquad (\because (24)) \\
&= E_3 + (-\theta^2)^{-1}[\boldsymbol{r}]_\times^2 (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} - 1) \\
&\quad + \theta^{-1}[\boldsymbol{r}]_\times (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!}) \\
&= E_3 - \frac{[\boldsymbol{r}]_\times^2}{\theta^2}(\cos\theta - 1) + \frac{[\boldsymbol{r}]_\times}{\theta}\sin\theta \qquad (\because (25)) \\
&= E_3 + \frac{\sin\theta}{\theta}[\boldsymbol{r}]_\times + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{r}]_\times^2 \\
&= E_3 + \sin\theta[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times + (1-\cos\theta)[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times^2
\end{aligned}
$$

□

この公式から、$e^{[\boldsymbol{r}]_\times}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ がすぐに確かめられるので、ここでも、$\boldsymbol{r}$ が回転軸方向であることが確かめられる。

ここで、Rodriguess の公式を、行列成分でも書いておくと、

$$
[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times^2 = \begin{pmatrix} -\bar{r}_2^2 - \bar{r}_3^2 & \bar{r}_1\bar{r}_2 & \bar{r}_1\bar{r}_3 \\ \bar{r}_2\bar{r}_1 & -\bar{r}_3^2 - \bar{r}_1^2 & \bar{r}_2\bar{r}_3 \\ \bar{r}_3\bar{r}_1 & \bar{r}_3\bar{r}_2 & -\bar{r}_1^2 - \bar{r}_2^2 \end{pmatrix} = (\bar{r}_i\bar{r}_j) - E_3 \tag{26}
$$

だから、

$$
\begin{aligned}
R &= E_3 + \sin\theta[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times + (1-\cos\theta)((\bar{r}_i\bar{r}_j) - E_3) \\
&= \cos\theta E_3 + \sin\theta[\bar{\boldsymbol{r}}]_\times + (1-\cos\theta)(\bar{r}_i\bar{r}_j) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta + \bar{r}_1^2(1-\cos\theta) & -\bar{r}_3\sin\theta + \bar{r}_1\bar{r}_2(1-\cos\theta) & \bar{r}_2\sin\theta + \bar{r}_1\bar{r}_3(1-\cos\theta) \\ \bar{r}_3\sin\theta + \bar{r}_2\bar{r}_1(1-\cos\theta) & \cos\theta + \bar{r}_2^2(1-\cos\theta) & -\bar{r}_1\sin\theta + \bar{r}_2\bar{r}_3(1-\cos\theta) \\ -\bar{r}_2\sin\theta + \bar{r}_3\bar{r}_1(1-\cos\theta) & \bar{r}_1\sin\theta + \bar{r}_3\bar{r}_2(1-\cos\theta) & \cos\theta + \bar{r}_3^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{27}
$$

4.2.2 回転行列からの回転ベクトルの作成

次に、回転行列 R から回転ベクトル $\boldsymbol{r}$ を作ることを考える。

命題 4.3. 回転行列 R に対し、その i,j 成分を r_{ij} とするとき、対応する回転ベクトル $\boldsymbol{r}$ の回転角度を θ、回転軸を $\bar{\boldsymbol{r}}$ とすると、

$$
\theta = \arccos(\frac{\mathrm{Tr}(R) - 1}{2}),\ \theta \in [0, \pi] \tag{28}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||} \qquad s.t.\ \boldsymbol{a} := {}^t(r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12}) \tag{29}
$$

証明.

$$\exists P \in SO(3) \quad s.t.\ P^{-1}R(\bar{\boldsymbol{r}},\theta)P = R(\boldsymbol{z},\theta) \tag{30}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}(R) = \mathrm{Tr}(P^{-1}RP) = \mathrm{Tr}(R(\boldsymbol{z},\theta)) = 2\cos\theta + 1 \tag{31}$$

ここで、$\theta \in [0,\pi]$ とすると、

$$\theta = \arccos(\frac{\mathrm{Tr}(R)-1}{2}) \tag{32}$$

また、

$$\begin{aligned}
R\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}}, \qquad {}^{t}R\bar{\boldsymbol{r}} = \bar{\boldsymbol{r}} & & \quad (33)\\
\Rightarrow 0 &= (R - {}^{t}R)\bar{\boldsymbol{r}} \quad (34)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & r_{12}-r_{21} & r_{13}-r_{31} \\ & 0 & r_{23}-r_{32} \\ unti-sym. & & 0 \end{pmatrix}\bar{\boldsymbol{r}} \quad (35)\\
&= [\boldsymbol{a}]_{\times}\bar{\boldsymbol{r}} \quad s.t.\ \boldsymbol{a} := {}^{t}(r_{32}-r_{23}, r_{13}-r_{31}, r_{21}-r_{12}) \quad (36)\\
\Rightarrow \bar{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{a}/||\boldsymbol{a}|| \quad (37)
\end{aligned}$$

□

4.3 四元数による回転の表現

4.3.1 四元数の定義

四元数は、$\mathbb{R}$ を係数とした、４つの基底 1,i,j,k の線形結合で表わされる。また、i,j,k には関係式があり、記号で書くと、以下のような集合である。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\} \tag{38}$$

このとき、

$$ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik \tag{39}$$

が示される。

また、$q_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) = (a_i, \mathbf{b_i}) \in \mathbb{H}$ としたとき、四元数の和と積は、上記 i,j,k の関係式を用いると、

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2) = (a_1+a_2, \mathbf{b_1}+\mathbf{b_2}) \quad (40)\\
q_1 \times q_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 - b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2,\\
&\quad a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) \quad (41)\\
&= (a_1a_2 - \mathbf{b_1}\mathbf{b_2}, a_1\mathbf{b_2} + a_2\mathbf{b_1} + \mathbf{b_1}\times\mathbf{b_2}) \quad (42)
\end{aligned}$$

であることが示される。

四元数 $q=(a,\boldsymbol{b})$ の共役 q^* は、

$$q^* := (a, -\boldsymbol{b}) \tag{43}$$

で定義される。さらに q のノルム $||q||$ は、

$$||q|| := \sqrt{q \times q^*} = \sqrt{q^* \times q} = \sqrt{a^2 + ||\boldsymbol{b}||^2} \tag{44}$$

で定義される。

4.3.2 四元数と回転行列

命題 4.4. 回転ベクトルを $\boldsymbol{r}$ としたとき、

$$q := (\cos\frac{||\boldsymbol{r}||}{2}, \sin(\frac{||\boldsymbol{r}||}{2})\bar{\boldsymbol{r}}) \tag{45}$$

で定義される四元数に対し、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ の、$\boldsymbol{r}$ による回転後のベクトル $R\boldsymbol{v}$ に関して、

$$(0, R\boldsymbol{v}) = q \times (0, \boldsymbol{v}) \times q^* \tag{46}$$

が成り立つ。

証明.

$$\theta := ||\boldsymbol{r}|| \tag{47}$$

とする。

$$\begin{aligned} R\boldsymbol{v} &= e^{[\boldsymbol{r}]_\times}\boldsymbol{v} && (48)\\ &= \boldsymbol{v} + \sin\theta(\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v}) + (1-\cos\theta)\bar{\boldsymbol{r}} \times (\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v}) && (49)\\ & && (50) \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} q \times (0,\boldsymbol{v}) \times q^* &= (\cos\frac{\theta}{2}, \sin(\frac{\theta}{2})\bar{\boldsymbol{r}}) \times (0,\boldsymbol{v}) \times (\cos\frac{\theta}{2}, -\sin(\frac{\theta}{2})\bar{\boldsymbol{r}}) && (51)\\ &= (0, \boldsymbol{v} + \sin\theta(\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v}) + (1-\cos\theta)\bar{\boldsymbol{r}} \times (\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v})) && (52) \end{aligned}$$

よって、式 (46) が成り立つ。 □

さらに式 (46) から、R は q により、

$$R = \begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2(bc-ad) & 2(bd+ac) \\ 2(bc+ad) & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2(cd-ab) \\ 2(bd-ac) & 2(cd+ab) & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

と表される。

参考文献

[1] 徐剛、辻三郎, ”三次元ビジョン”, 共立出版

[2] ”Quaternion”,Wikipedia

[3] Olivier Faugeras,”Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint”,MIT Press,1993