

Euclid 変換

～ 3 次元空間の回転と並進を中心として～

小川 雅弘

2021 年 5 月 23 日

目 次

1	序論	1
1.1	記号の定義	1
2	一般の Euclid 変換	2
3	2 次元 Euclid 変換	3
3.1	公式	3
3.2	具体例	3
4	3 次元 Euclid 変換	4
4.1	行列による回転の表現	4
4.1.1	基底による回転行列の表現	4
4.1.2	roll, pitch, yaw による回転行列の表現	5
4.2	ベクトルによる回転の表現	6
4.3	四元数による回転の表現	10
4.3.1	四元数の定義	10
4.3.2	四元数と回転行列	11

1 序論

この記事では、回転と並進で表わされる、Euclid 変換についてまとめる。

1.1 記号の定義

- 各点の位置ベクトルは点の記号を太字で書く。例) \boldsymbol{x}

- ベクトルの各座標系での表示をベクトルの右下に/ $\{ \text{座標系} \}$ で表示する。例) $x_{/A}$: ベクトル x の A 座標系での表示
- ベクトルの、各座標系での表示の転置は、左上添え字に t をつける。例) ${}^t x_{/A}$
- 座標系 \mathcal{O}_i の原点は、 o_i と表す。
- $\mathcal{O}\{x, y, z\}$: 原点を o_i 、 x, y, z 軸を右手系とした直交直線座標系。
- \bar{x} : ベクトル x の、長さを 1 に正規化したベクトル
- E_n : n 次の単位行列
- O_n : n 次のゼロ行列
- $\det(A)$: 行列 A の determinant
- $\text{Tr}(A)$: 行列 A の trace
- $M(n, \mathbb{R})$: 実数を成分とする n 次正方行列の集合
- $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) | A \text{ は正則} \}$
- $SO(n) := \{A \in M(n, \mathbb{R}) | {}^t A A = E_n, \det(A) = 1\}$
- $U(n) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) | A^* A = E_n\}$
- $R(r, \theta)$: 回転軸 r 、回転量 θ の回転行列

2 一般の Euclid 変換

対象点 x の、座標系 \mathcal{O}_1 から座標系 \mathcal{O}_2 への Euclid 座標変換 (回転 + 並進) は下記のように表わされる。

$$x_{/\mathcal{O}_2} = R_{\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2} x_{/\mathcal{O}_1} + t_{\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 / \mathcal{O}_2} \quad (1)$$

$$= R(\theta_{\mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{O}_1}) x_{/\mathcal{O}_1} + \overrightarrow{o_2 o_1}_{/\mathcal{O}_2} \quad (2)$$

ここで、 $\theta_{\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2}$ は、座標系 \mathcal{O}_1 を座標系 \mathcal{O}_2 へ重ねる回転角度を表し、 $\overrightarrow{o_1 o_2}$ は、 o_1 から o_2 へ向かうベクトル表す。

具体的な形については、次元ごとに次節以降で扱う。

3 2次元 Euclid 変換

3.1 公式

一般の場合の (2) 式がそのまま適用でき、

$$\mathbf{x}_{/\mathcal{O}_2} = R(\theta_{\mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{O}_1}) \mathbf{x}_{/\mathcal{O}_1} + \overrightarrow{o_2 o_1}_{/\mathcal{O}_2} \quad (3)$$

となる。

3.2 具体例

本節では、具体的な座標変換で、座標変換公式 (3) を確認する。

2次元 Euclid 変換の自由度は、回転 1、並進 2 の 3 自由度ある。1 点は 2 つの独立な条件を定めるので、(3) の確認のためには、異なる 2 点が正しく変換されていることを見れば十分である。

- 例 1) 並進

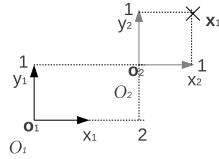


図 1: 例 1 の見取り図

$$\mathbf{x}_{/\mathcal{O}_2} = \mathbf{x}_{/\mathcal{O}_1} - {}^t(2, 1) \quad (4)$$

確認は 2 点で十分だが、念のため、確認用の点として、 $o_1, o_2, \mathbf{x}_{1/\mathcal{O}_1} = {}^t(3, 2)$ の 3 点をとると、

$$\mathbf{o}_{1/\mathcal{O}_1} - {}^t(2, 1) = {}^t(0, 0) - {}^t(2, 1) = -{}^t(2, 1) = \mathbf{o}_{1/\mathcal{O}_2}$$

$$\mathbf{o}_{2/\mathcal{O}_1} - {}^t(2, 1) = {}^t(2, 1) - {}^t(2, 1) = {}^t(0, 0) = \mathbf{o}_{2/\mathcal{O}_2}$$

$$\mathbf{x}_{1/\mathcal{O}_1} - {}^t(2, 1) = {}^t(3, 2) - {}^t(2, 1) = {}^t(1, 1) = \mathbf{x}_{1/\mathcal{O}_2}$$

となり、(3) 式の正しさが確認できる。

- 例 2) 回転と並進

$$\mathbf{x}_{/\mathcal{O}_2} = R \mathbf{x}_{/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1, 2) \quad (5)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

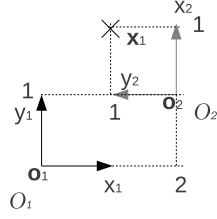


図 2: 例 2 の見取り図

確認用の点として、 $\mathbf{o}_1, \mathbf{o}_2, \mathbf{x}_{1/\mathcal{O}_1} = {}^t(1, 2)$ の 3 点をとると、

$$R\mathbf{o}_{1/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1, 2) = R^t(0, 0) + {}^t(-1, 2) = {}^t(-1, 2) = \mathbf{o}_{1/\mathcal{O}_2}$$

$$R\mathbf{o}_{2/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1, 2) = R^t(2, 1) + {}^t(-1, 2) = {}^t(0, 0) = \mathbf{o}_{2/\mathcal{O}_2}$$

$$R\mathbf{x}_{1/\mathcal{O}_1} + {}^t(-1, 2) = R^t(1, 2) + {}^t(-1, 2) = {}^t(1, 1) = \mathbf{x}_{1/\mathcal{O}_2}$$

となり、(3) 式の正しさが確認できる。

4 3次元 Euclid 変換

3 次元 Euclid 変換も、(2) で表され、並進についてはこの表現で定まるが、回転についてはいくつかの表示がありうる。そこで本章では、3 次元空間の回転 ($R_{\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2}$) について扱っていく。

4.1 行列による回転の表現

4.1.1 基底による回転行列の表現

回転は、座標系 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ の基底ベクトルをそれぞれ、 $e_{1x}, e_{1y}, e_{1z}, e_{2x}, e_{2y}, e_{2z}$ とすると、

$$R_{\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2} = \begin{bmatrix} {}^t e_{2x/\mathcal{O}_1} \\ {}^t e_{2y/\mathcal{O}_1} \\ {}^t e_{2z/\mathcal{O}_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

これは、 R, t は合計 6 自由度なので、2 本の独立なベクトルの変換が正しくできていることを確かめれば、6 個の拘束条件がつくため十分であり、2 本のベクトルとして、 e_{2x}, e_{2y} を、式 (2) の $x_{/\mathcal{O}_1}$ に代入すれば確かめられる。

4.1.2 roll, pitch, yaw による回転行列の表現

X,Y,Z 各軸の正方向を軸とした、右ねじ方向への回転角をそれぞれ、roll, pitch, yaw と呼ぶ。座標系 \mathcal{O}_2 を、座標系 \mathcal{O}_2 での yaw, pitch, roll の順に回転すると、座標系 \mathcal{O}_1 に重なるとする。これを、Tate-Bryant の分解という。これを図で表したものが、図 3 である。

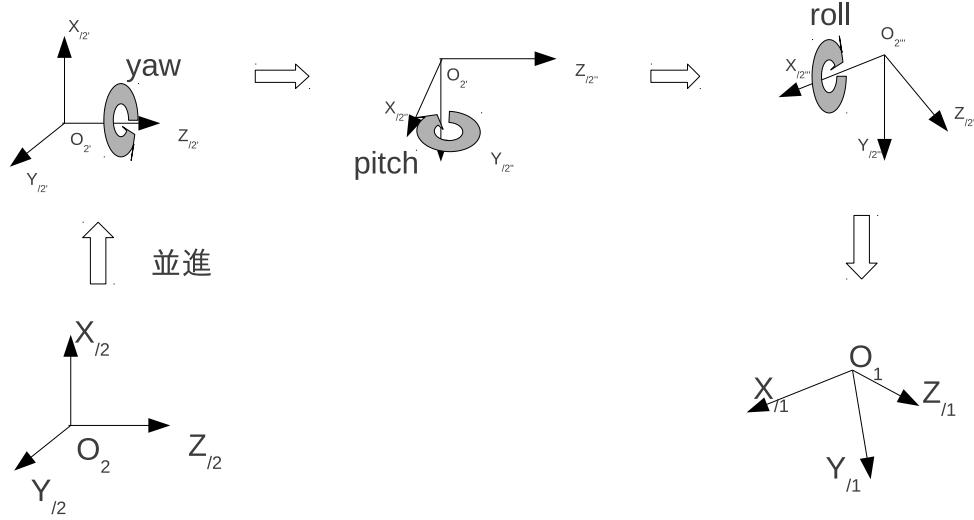


図 3: Euclid transformation from \mathcal{O}_1 to \mathcal{O}_2

今、

$$R(roll) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(roll) & -\sin(roll) \\ 0 & \sin(roll) & \cos(roll) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$R(pitch) := \begin{pmatrix} \cos(pitch) & 0 & \sin(pitch) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(pitch) & 0 & \cos(pitch) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$R(yaw) := \begin{pmatrix} \cos(yaw) & -\sin(yaw) & 0 \\ \sin(yaw) & \cos(yaw) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

としたとき、回転行列は、この roll, pitch, yaw の組み合わせで、下記のように表わされる。(分かり易さのため、並進も併せて表す。)

$$\mathbf{x}_{/\mathcal{O}_1} = R(-roll)R(-pitch)R(-yaw)(\mathbf{x}_{/\mathcal{O}_2} - \overline{o_2 o_1}_{/\mathcal{O}_2}) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}_{/\mathcal{O}_2} = R(yaw)R(pitch)R(roll)\mathbf{x}_{/\mathcal{O}_1} + \overline{o_2 o_1}_{/\mathcal{O}_2} \quad (12)$$

$$\Rightarrow R_{\mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2} = R(yaw)R(pitch)R(roll) \quad (13)$$

4.2 ベクトルによる回転の表現

回転は、回転軸中心と、その軸周りの回転量でも表わされる。

回転ベクトル r を、向き $\frac{r}{\|r\|} = \bar{r}$ が回転軸方向で、大きさ $\|r\| =: \theta$ が、回転量を表すベクトルとして定義する。以下では、この r と回転行列の関係を調べる。

まず、 r から回転行列を作る。

定義 4.1.

$$r/O = {}^t(r_1, r_2, r_3) \quad (14)$$

$$[r]_{\times} := \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$e^{[r]_{\times}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r]_{\times}^n}{n!} \quad (16)$$

と定義したとき、次の命題が成り立つ。

命題 4.1. $e^{[r]_{\times}}$ は回転行列であり、その回転軸は r 、回転角度は $\|r\|$ である。

つまりこの命題によれば、回転ベクトル r が分かっているとき、 $e^{[r]_{\times}}$ が、 r に対応する回転行列になる、ということである。命題 4.1 を証明するため、以下の補題を示す。

補題 4.1. $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ s.t. (such that) $AB = BA$ に対し、

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B} \quad (17)$$

証明.

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} \quad (18)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n {}_n C_m A^m B^{n-m} \quad (\because AB = BA) \quad (19)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{A^m B^{n-m}}{m!(n-m)!} \quad (20)$$

$$= (E_3 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots) + \frac{A}{1!} (E_3 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots) + \frac{A^2}{2!} (E_3 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots) + \dots \quad (21)$$

$$= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}) (\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!}) \quad (22)$$

$$= e^A e^B = e^B e^A \quad (23)$$

□

補題 4.2. $A \in M_3(\mathbb{R})$ に対し、

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)} \quad (24)$$

証明.

$$\exists P \in GL(3, \mathbb{R}) \quad s.t. \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\det(e^A) = \det(P^{-1}e^AP) \quad (26)$$

$$= \det(e^{P^{-1}AP}) \quad (27)$$

$$= \det\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & * & * \\ 0 & \lambda_2^n & * \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}\right) \quad (28)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!} & * & * \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^n}{n!} & * \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_3^n}{n!} \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & * \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$= e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (31)$$

$$= e^{\text{Tr}(P^{-1}AP)} \quad (32)$$

$$= e^{\text{Tr}(A)} \quad (33)$$

□

補題 4.3. 回転ベクトルが \mathbf{r} の回転行列 $R(\bar{\mathbf{r}}, \theta)$ ($\theta := \|\mathbf{r}\|$) の固有値は、 $1, e^{\pm i\theta}$

証明. 任意の回転に対し、その回転軸 \mathbf{r} を z 軸とするような Euclid 変換が存在する。これを行列で表すと、

$$\exists P \in SO(3) \quad s.t. \quad P^{-1}R(\bar{\mathbf{r}}, \theta)P = R(\mathbf{z}, \theta) \quad (34)$$

となる。すると、求めたい $R(\bar{\mathbf{r}}, \theta)$ の固有値は、 $R(\mathbf{z}, \theta)$ の固有値と同じであり、それを λ とおくと、

$$0 = \det(R(\mathbf{z}, \theta) - \lambda E_3) \quad (35)$$

$$= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\cos(\theta)\lambda + 1) \quad (36)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, e^{\pm i\theta} \quad (37)$$

□

以上で準備ができたので、命題 4.1 の証明を行う。

証明. $e^{[r]_{\times}}$ が回転行列であることを示すには、 $\det(e^{[r]_{\times}}) = 1$ 、 $e^{[r]_{\times}t}(e^{[r]_{\times}}) = E_3$ を示せばよい。

$$\det(e^{[r]_{\times}}) = e^{\text{Tr}([f]_{\times})} \quad (\because \text{補題 4.2}) \quad (38)$$

$$= e^0 = 1 \quad (39)$$

$$e^{[r]_{\times}t}(e^{[r]_{\times}}) = e^{[r]_{\times} + {}^t[r]_{\times}} \quad (\because \text{補題 4.1}) \quad (40)$$

$$= e^{[r]_{\times} - [r]_{\times}} = e^{O_3} = E_3 \quad (41)$$

回転軸が r であることを示すには、 r が $e^{[r]_{\times}}$ の固有ベクトルになっていることを示せばよい。

$$e^{[r]_{\times}} r = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r]_{\times}^n}{n!} \right) r \quad (42)$$

$$= \frac{[r]_{\times}^0}{0!} r \quad (\because [r]_{\times} r = 0) \quad (43)$$

$$= r \quad (44)$$

回転角度が $\|r\| (= \theta)$ であることを示すには、補題 4.3 より、 $e^{[r]_{\times}}$ の固有値が $1, e^{\pm i\theta}$ であることを示せばよい。 $[r]_{\times}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると、 $[r]_{\times}$ を対角化する $U \in U(3)$ があり、

$$U^{-1} e^{[r]_{\times}} U = U^{-1} \sum_n \frac{[r]_{\times}^n}{n!} U \quad (45)$$

$$= e^{U^{-1} [r]_{\times} U} \quad (46)$$

$$= \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^n \quad (48)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \quad (49)$$

一方、 $[r]_{\times}$ の固有値 λ は、

$$0 = \det([r]_{\times} - \lambda E_3) = -\lambda(\lambda^2 + \theta^2) \quad (50)$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, \pm i\theta \quad (51)$$

だから、 $e^{[r]_{\times}}$ の固有値は、 $1, e^{\pm i\theta}$ となる。以上により、命題 4.1 が示された。 \square

実際に r から回転行列 $e^{[r]_{\times}}$ を得る場合、直接定義式 (16) を計算することはできないので、以下の公式を利用する。

命題 4.2. (Rodriguess の公式)

$$e^{[r]_{\times}} = E_3 + \sin \theta [\bar{r}]_{\times} + (1 - \cos \theta) [\bar{r}]_{\times}^2 \quad (52)$$

証明.

$$[r]_{\times}^3 = -\theta [r]_{\times} \quad (53)$$

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n}, \quad \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \quad (54)$$

を用いると、

$$e^{[r]_{\times}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r]_{\times}^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{[r]_{\times}^{2m}}{(2m)!} + \frac{[r]_{\times}^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \quad (55)$$

$$= E_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{m-1} [r]_{\times}^2}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^m [r]_{\times}}{(2m+1)!} \quad (\because (53)) \quad (56)$$

$$= E_3 + (-\theta^2)^{-1} [r]_{\times}^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} - 1 \right) \\ + \theta^{-1} [r]_{\times} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \quad (57)$$

$$= E_3 - \frac{[r]_{\times}^2}{\theta^2} (\cos \theta - 1) + \frac{[r]_{\times}}{\theta} \sin \theta \quad (\because (54)) \quad (58)$$

$$= E_3 + \frac{\sin \theta}{\theta} [r]_{\times} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} [r]_{\times}^2 \quad (59)$$

$$= E_3 + \sin \theta [\bar{r}]_{\times} + (1 - \cos \theta) [\bar{r}]_{\times}^2 \quad (60)$$

□

この公式から、 $e^{[r]_{\times}} r = r$ がすぐに確かめられるので、ここでも、 r が回転軸方向であることが確かめられる。

次に、回転行列 R から回転ベクトル r を作ることを考える。

命題 4.3. 回転行列 R に対し、その i, j 成分を r_{ij} とするとき、対応する回転ベクトル r の回転角度を θ 、回転軸を \bar{r} とすると、

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{Tr}(R) - 1}{2}\right), \quad \theta \in [0, \pi] \quad (61)$$

$$\bar{r} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad s.t. \quad \mathbf{a} := {}^t(r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12}) \quad (62)$$

証明.

$$\exists P \in SO(3) \quad s.t. \quad P^{-1} R(\bar{r}, \theta) P = R(\mathbf{z}, \theta) \quad (63)$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(R) = \text{Tr}(P^{-1} R P) = \text{Tr}(R(\mathbf{z}, \theta)) = 2 \cos \theta + 1 \quad (64)$$

ここで、 $\theta \in [0, \pi]$ とすると、

$$\theta = \arccos\left(\frac{\text{Tr}(R) - 1}{2}\right) \quad (65)$$

また、

$$R\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}, \quad {}^tR\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}} \quad (66)$$

$$\Rightarrow 0 = (R - {}^tR)\bar{\mathbf{r}} \quad (67)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & r_{12} - r_{21} & r_{13} - r_{31} \\ & 0 & r_{23} - r_{32} \\ \text{anti-sym.} & & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathbf{r}} \quad (68)$$

$$= [\mathbf{a}]_{\times} \bar{\mathbf{r}} \quad s.t. \quad \mathbf{a} := {}^t(r_{32} - r_{23}, r_{13} - r_{31}, r_{21} - r_{12}) \quad (69)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\| \quad (70)$$

□

4.3 四元数による回転の表現

4.3.1 四元数の定義

四元数は、 \mathbb{R} を係数とした、4つの基底 $1, i, j, k$ の線形結合で表わされる。
また、 i, j, k には関係式があり、記号で書くと、以下のような集合である。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\} \quad (71)$$

このとき、

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik \quad (72)$$

が示される。

また、 $q_i = (a_i, b_i, c_i, d_i) = (a_i, \mathbf{b}_i) \in \mathbb{H}$ としたとき、四元数の和と積は、上記 i, j, k の関係式を用いると、

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2) = (a_1 + a_2, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \quad (73)$$

$$q_1 \times q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 - b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2, \\ a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 - d_1b_2, a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2) \quad (74)$$

$$= (a_1a_2 - \mathbf{b}_1\mathbf{b}_2, a_1\mathbf{b}_2 + a_2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) \quad (75)$$

であることが示される。

四元数 $q = (a, \mathbf{b})$ の共役 q^* は、

$$q^* := (a, -\mathbf{b}) \quad (76)$$

で定義される。さらに q のノルム $\|q\|$ は、

$$\|q\| := \sqrt{q \times q^*} = \sqrt{q^* \times q} = \sqrt{a^2 + \|\mathbf{b}\|^2} \quad (77)$$

で定義される。

4.3.2 四元数と回転行列

命題 4.4. 回転ベクトルを \boldsymbol{r} としたとき、

$$q := (\cos \frac{\|\boldsymbol{r}\|}{2}, \sin(\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{2})\bar{\boldsymbol{r}}) \quad (78)$$

で定義される四元数に対し、任意のベクトル \boldsymbol{v} の、 \boldsymbol{r} による回転後のベクトル $R\boldsymbol{v}$ に関して、

$$(0, R\boldsymbol{v}) = q \times (0, \boldsymbol{v}) \times q^* \quad (79)$$

が成り立つ。

証明.

$$\theta := \|\boldsymbol{r}\| \quad (80)$$

とする。

$$R\boldsymbol{v} = e^{[\boldsymbol{r}] \times} \boldsymbol{v} \quad (81)$$

$$= \boldsymbol{v} + \sin \theta (\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v}) + (1 - \cos \theta) \bar{\boldsymbol{r}} \times (\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v}) \quad (82)$$

$$(83)$$

一方、

$$q \times (0, \boldsymbol{v}) \times q^* = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin(\frac{\theta}{2})\bar{\boldsymbol{r}}) \times (0, \boldsymbol{v}) \times (\cos \frac{\theta}{2}, -\sin(\frac{\theta}{2})\bar{\boldsymbol{r}}) \quad (84)$$

$$= (0, \boldsymbol{v} + \sin \theta (\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v}) + (1 - \cos \theta) \bar{\boldsymbol{r}} \times (\bar{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{v})) \quad (85)$$

よって、式 (79) が成り立つ。 \square

さらに式 (79) から、 R は q により、

$$R = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix} \quad (86)$$

と表される。

参考文献

[1] 徐剛、辻三郎, ”三次元ビジョン”, 共立出版

[2] ”Quaternion”, Wikipedia

[3] Olivier Faugeras, ”Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint”, MIT Press, 1993