現代ファイナンス理論勉強会

3.3 一般均衡モデルとの関係

4 ファイナンス理論の基本定理と相対価格付け

■ 目的

資産の価格付け（相対価格付け）に用いる「状態価格」の存在に関する条件を示すための「ファイナンス理論の基本定理」を導出する．

➢ 資産の価格付け方法

伝統的ファイナンス理論：“ポートフォリオ”を中心に展開
価格のわかる原資産で目的資産を複製する**ポートフォリオ**を考える．

現代的ファイナンス理論：“状態価格”，“確率的割引ファクター”を中心に展開
目的資産のペイオフと**原資産から求めた状態価格**を考える

⇒ 状態価格の存在に関する定理である「ファイナンス理論の基本定理」をまず証明する．

4.1 ファイナンス理論の基本定理

内容の要約

① ファイナンス理論の基本定理の導出（Farkas の補題を使用した導出）
② ファイナンス理論の基本定理の別の形の導出（Stiemke の補題を使用した導出）
③ 双対定理によるファイナンス理論の基本定理の証明

① ファイナンス理論の基本定理の導出（Farkas の補題を使用した導出）

■ **Farkas の補題**

ファイナンス理論の基本定理を証明するのに使用

定理

$\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^K, \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^S, \boldsymbol{V}$は$S \times K$の行列とするとき，以下のいずれか一方が必ず成り立つ

A) 方程式$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\mu}$が非負の解$\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^S$を持つ ※ファイナンス理論の基本定理

B) $\boldsymbol{V}\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$かつ$\boldsymbol{q}'\boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}$である$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^K$を持つ

証明の概要（図示による直感的な照明のみしか記載なし）

$\boldsymbol{V}'\boldsymbol{\mu}$がペイオフ$\boldsymbol{V}$の列ベクトルの線形結合であることから， $\boldsymbol{q}$が角錐に含まれるか否かで場合分け

含まれる場合 → A)が成り立つ

含まれない場合 → B)が成り立つ※

定理（別の形）

方程式$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\mu}$が負の解$\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^S$を持つ必要十分条件は$\boldsymbol{V}\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$であるすべての$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^K$に対して，$\boldsymbol{q}'\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$である

※ 下線部 B)の否定

■ <u>ファイナンス理論の基本定理</u>

<u>定理</u>
S個の状態，K個の資産があるとし，資産のペイオフVが$S \times K$の行列，資産の価格$q \in \boldsymbol{R^K}$とする．このとき，qが第２種無裁定条件を満たすのであれば，そのときに限り$\boldsymbol{q = V'\mu}$を満たす非負の解$\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R^S}$が存在する．

<u>証明の概要</u>

第２種無裁定条件※の定義および Farkas の補題により証明可能

※第２種裁定条件：$qb < 0$かつ$\boldsymbol{Vb} \geqq \boldsymbol{0}$

② ファイナンス理論の基本定理の別の形の導出（Stiemke の補題を使用した導出）

■ Stiemke の補題

<u>定理</u>
$\boldsymbol{T}$が$K \times (S+1)$の行列，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R^{S+1}}$のベクトルとするとき，以下のいずれか一方が必ず成り立つ

A） $\boldsymbol{Tx = 0}$が$\boldsymbol{x > 0}$の解を持つ

B） $\boldsymbol{b'T \geq 0}$を満たす$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R^K}$が存在する

↓

$\boldsymbol{T} = (-\boldsymbol{q} \quad \boldsymbol{V'}), \boldsymbol{x} = (1 \quad \boldsymbol{\mu})'$とすると以下が成り立つ

<u>定理</u>
$\boldsymbol{V}$は$S \times K$の行列，$\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R^K}, \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R^S}$のとき，以下のいずれか一方が必ず成り立つ

A） $\boldsymbol{q = V'\mu}$が$\boldsymbol{\mu} > 0$の解を持つ

B） ①$\boldsymbol{q'b \leq 0}$であり，$V\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$である$b \in \boldsymbol{R^K}$が存在する，または，②$\boldsymbol{q'b < 0}$であり，$V\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$である$b \in \boldsymbol{R^K}$が存在する

① ：第１種の裁定条件，②：第２種の裁定条件

↓

<u>定理：ファイナンス理論の基本定理の別の形</u>
$\boldsymbol{q = V'\mu}$が$\boldsymbol{\mu} > 0$の解を持つ必要十分条件は$\boldsymbol{q}$が無裁定条件を満たすことである

③ 双対定理によるファイナンス理論の基本定理の証明

<u>証明</u>

以下のような，双対問題を考える．

<u>主問題（問題 P）</u>

ポートフォリオのペイオフ$\boldsymbol{Vb}$に下限制約を加えて，購入額$\boldsymbol{q'b}$を最小化する

$$\min \boldsymbol{q'b}$$
$$s.t\ \boldsymbol{Vb} \geqq \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$$

<u>双対問題（問題 D）</u>

各状態のペイオフの価値$\boldsymbol{\mu}$として，評価価格$\boldsymbol{V'\mu}$が実際の価格$\boldsymbol{q}$上回らないという条件下で，$\boldsymbol{v'\mu}$（主問題の下限）を最大化

$$\max \boldsymbol{v'\mu}$$
$$s.t\ \boldsymbol{V'\mu} \leqq \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu} \geqq \boldsymbol{0}$$

このとき，第２種無裁定条件を仮定し，$\boldsymbol{v}$をゼロベクトルとする．

⇒ 第２種無裁定条件より，$\boldsymbol{Vb} \geqq \boldsymbol{0}$ならば，$\boldsymbol{q'b} \geq \boldsymbol{0}$となるので，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$となり，<u>制約は等号で成立する</u>

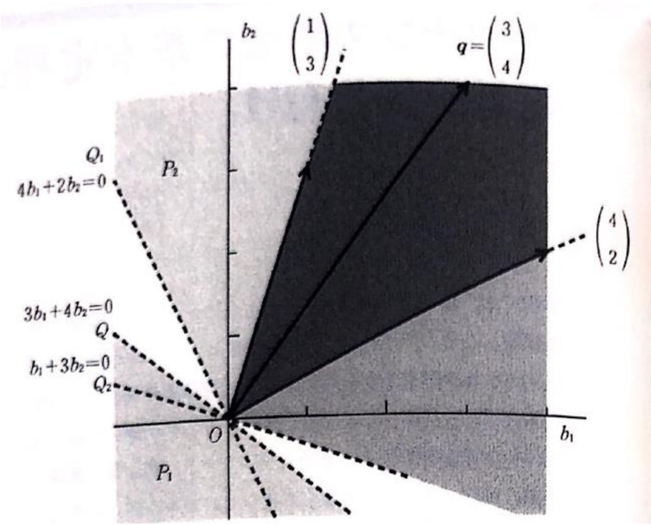
⇒ 双対定理より，<u>双対問題の制約も等号で成立する</u>

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{q}$を満たす$\boldsymbol{\mu} \geqq \boldsymbol{0}$の解が存在

■　参考

■　<u>Farkas の補題</u>

A)



B)

※分離超平面定理を使用

分離超平面定理（1）
$B \subset R^s$ が凸閉集合であるとし，$\boldsymbol{x} \notin B$ であるとする．すると，つぎの条件を満たす $\boldsymbol{p} \in R^s$，$\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ と $c \in R$ が存在する．

(1)　$\boldsymbol{px} > c$

(2)　すべての $\boldsymbol{y} \in B$ に対して $\boldsymbol{py} \leq c$

$p \rightarrow b, c \rightarrow 0, x \rightarrow q, y \rightarrow \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\mu}$