マルチンゲール・アプローチ入門勉強会1.1節~1.3節まとめ

2020年度9月14日

理論時価を学ぶ上で最初に読むべき本．

# マルチンゲール・アプローチ入門によるBlack-Scholes式の導出

* **1章の目的**

1. Black-Scholes式の導出を通して，マルチンゲール・アプローチの使い方の基礎を学ぶ．

無裁定→マルチンゲール測度が存在→資産のモデリング（実確率Pの下で）→割引資産価格の確率過程（伊藤の公式）→ギルザノフの定理による測度変換（確率Qへの変換）→.・・・

### 1.2.1 資産価格の基本定理Ⅰ

**Stiemkeの補題より証明可能，**

* 解釈

が種類の資産で，が各資産の保有量（時点までの情報を基に決定するので可予測過程）⇒ ：満期でのポートフォリオの損益．

(1)式：損益が負にならず，正となるシナリオが存在しない⇒裁定機会が存在しない（無裁定）

(2)式：マルチンゲール測度が存在⇒リスク中立確率が存在

**無裁定マルチンゲール測度が存在**

基本定理Ⅱ：市場が完備マルチンゲール測度が一意に存在

### 1.2.2 マルチンゲールについて

**マルチンゲールの定義**

フィルター付き確率空間で，確率過程が以下を満たすとき

**→ マルチンゲール性**

* 重要なマルチンゲールの例

ブラウン運動2次変分，指数マルチンゲール，条件付き期待値

## Black-Scholesの世界への基本定理の適用

### 1.3.1 ニューメレールの選択

資産価格の基本定理Ⅰは割引資産ベースで表現されているため，ニューメレールを設定する

マルチゲール・アプローチの強み：状況に応じてニューメレールを選択できる（株式or預金）

### 1.3.2 基本定理Ⅰの適用

### 1.3.3 デリバティブのプライシング

基本定理Ⅰにより，

無裁定⇒割引資産価格がマルチンゲールになる確率が存在

よって，

→ 期待値を計算するための確率を求める

→

# 参考

## 2.1 資産価格の基本定理Ⅰの証明

* Stiemkeの補題

**定理**

の行列に対してとなるのが存在するための必要条件は，となるが存在しないことである

**証明**

まずは以下の補題を証明する

の線形部分空間とその直交補空間に対して，以下は同値である．

1. ：の各成分がすべて正である全体の集合
2. **：**の各成分がすべて非負である全体の集合

・(2)→(1)

より，かつとなる．よって，任意のに対して，内積であり，とは直交しない．よって，と直交するの非負ベクトルは0ベクトルしかないため，が成り立つ．

・(1)→(2)：背理法

のとき，分離超平面定理よりとを分離する超平面が存在する．の法線ベクトル（に直行するベクトル）で次の条件を満たすものを考える．

これより，ならばとなり，とは直行するので，となる．また，より，ならば(1)に矛盾する．

ここで，，より， ，となる．よって，とは互いに直行補空間となる．

ここで，として，(1),(2)を書き換えると



となり，これはStiemkeの補題そのものである．

・参考にした文献

状態価格，リスク中立確率， そして確率的割引ファクター 相 模 裕 一

<http://repository.seinan-gu.ac.jp/bitstream/handle/123456789/1152/ec-v49n2_3-p217-226-sag.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

## 条件付き期待値がマルチンゲールであることの確認

条件付き期待値がマルチンゲールの性質(3)を満たすことを確認する．

として，Tower Propertyより，

となり，(3)の性質を満たすことが確認できる．