「長期投資の理論と実践」勉強会要約資料

2021年1月7日

# 多期間モデルにおけるリスクと効用関数

　2019年度に実施した勉強会の範囲であるため，簡単に復習，要約する．

* 2章の目的

多期間モデルの導入に向けた準備を行うため，1期間モデルから多期間モデルに拡張する上での問題点を整理する．

* 1期間と多期間の違い
  + 1期間問題
    - 期末に実現する投資をすべて消費

⇒ 投資比率の最適化＝消費水準の最適化

* + 多期間問題
    - 消費決定：期間数と同じ回数，投資決定：期間数－1回

⇒ 投資比率の最適化≠消費水準の最適化（別々に決定）

* 多期間モデルはなぜ必要か
  + なぜ1期間では駄目なのか

1期間とは「投資機会集合および投資家の選好が変化しない時間的な区間」．

* + - 個人

ライフサイクルを通じて，長期の投資ホライズンを前提とした投資戦略が必要

* + - 生命保険株式会社

デュレーションが長い商品性から，投資環境の変化，積立比率など財務状況の変化に応じた投資戦略が必要（ALM）

* ポイント
  + 多期間モデルには2つのリスクが存在

1. 同一時点における状態によって消費水準が変動するリスク（1期間モデルにおけるリスク）

⇒ 相対的リスク回避度RRA

1. 将来の異なる期間において消費水準が変動するリスク（多期間モデル固有のリスク）

⇒ 異時点間代替弾力性EIS（異時点間限界代替率に対する消費成長率の感度）

* + - べき型や対数型の効用関数では上記のリスクが1つのパラメータに集約されてしまう

⇒ 再帰的効用関数の必要性，特にEpstein=Zin効用関数を紹介

Epstein=Zin効用関数：第2の変数が確実性等価関数であると明示して定式化

* + 多期間モデルでは投資機会集合が変化する

1. 無リスク利子率の変化
2. リスクプレミアムの変化
3. リスク資産の価格が長期的に平均回帰性（もしくは乖離）を持つこと
4. インフレによる実質収益の変化

* 多期間モデルの歴史
  + SamuelsonとMertonによる近視眼的投資（1969）
    - 下記いずれかの条件下における多期間モデルの最適戦略は1期間の期待効用最大化戦略の繰り返しと一致

1. べき型の効用関数かつリスク資産の投資収益が独立同一分布に従う
2. 対数型効用関数であること

# 多期間における最適な消費と投資の意思決定

* 3章の目的

1～3節 ：多期間モデルを考えるためのフレームワークを確認（Samuelson，Hakansson，Ingersoll）

　特定のケースで最適消費と最適投資の意思決定プロセスを確認

4,5節 ：多期間モデルにおけるリスクプレミアム，理論価格を求めるため，いくつかの効用関数についてプライシングカーネルを導出

* 1節の目的

特定の効用関数を仮定しない一般的ケースでは，最適消費と最適投資を独立には決定することはできない．

## 多期間モデルの一般的性質：①特定の効用関数を仮定しないケース

* CAPM等の投資ホライズンが1期間とする分析の枠組みの問題点

1期間問題では，無リスク金利は一定，リスク資産の確率分布は既知．一方で，現実には時間とともに変動

⇒ 投資機会集合の変化を取り入れた，消費と投資の多期間モデルの必要性

### 1期間から多期間へ：SamuelsonとMertonの貢献

上記記載の通り，特定の条件下で近視眼的投資が多期間においても最適

### 仮定，第期，効用，遺産および生涯効用

* 期における消費者の効用関数

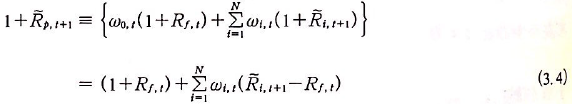
消費者の効用は0期からT-1期までの消費と死亡時点T期での遺産と仮定．時間分離可能な効用を仮定すると，消費水準に対する効用関数と遺産関数の和で書ける．



* 期における予算制約

消費者は時点における富と労働による所得を用いて消費を行い，貯蓄を金融資産に投資する．なお，利用可能な金融資産は無リスク資産（0番目資産）とN種類のリスク資産を想定し，番目の資産の投資収益率を，投資比率をとすると，予算制約は下記のように書ける．





### 価値関数

価値関数 ：時点における富を所与とし，消費と投資を最適に決定した場合の多期間期待効用の現在価値

下記と定義し，時点から逐次的に最適な消費とポートフォリオを決定する（時点では1期間問題）．



* 投資収益率がマルコフ過程に従うという仮定

状態変数がマルコフ過程に従う ⇒ 投資収益率がマルコフ過程に従う

状態変数ベクトル ：全ての金融資産の投資収益率の変動をもたらす経済変数等の要因

投資収益率ベクトル

* + そもそもなぜ仮定が必要か？

マルコフ過程：

⇒ 時点以前の情報が不要であり動的計画法に適しているため，収益率がマルコフ過程に従うと仮定

* + マルコフ過程の仮定は適切か？

短期投資（投資実務）：投資集合は不変であり確率分布がとみなせる

長期投資（本書目的）：平均回帰(乖離)性等，の仮定は適切でない ⇒ マルコフ過程を仮定

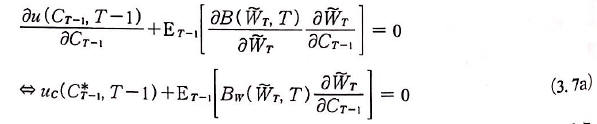
### 時点における最適消費と最適投資の決定：一般的ケース

時点における価値関数（目的関数）は下記式となる．



* **最適消費**

消費に関する最適化の1階条件は，目的関数をで偏微分して，



ここで，(3.3)，(3.4)式よりを計算し，代入すると下記のように消費と投資比率の関数が得られる．



また，下記に記載の投資に関する最適条件下で，とおくと，



* **最適投資**

最適消費の下で，投資比率関する最適化の1階条件は，目的関数をで偏微分して，





ただし，



それゆえ，最適な消費と投資比率は(3.9b)と(3.10)式より求めることができる．

⇒ 最適な消費と投資比率は相互に依存し，独立に決定することは不可能

また，最適な消費と投資比率を求めるためには以下を特定する必要がある．

1. 1期間効用関数および遺産関数の関数形
2. リスク資産収益率および状態変数ベクトルの確率分布（条件付き期待値の計算用）

* **最適消費と最適投資比率の条件式の解釈**
  + 最適消費

最適投資収益率とすると，



左辺：時点に立つ消費者の最適な現在消費の限界効用

右辺：1時点将来の富がもたらす遺産関数の限界効用を最適投資収益率で拡大した値の条件付き期待値

⇒ 期の最適消費は最適投資収益率および状態変数の同時確率分布に依存して決定される

* + 最適投資

(3.9a)式の両辺にを乗じ，リスク資産について総和をとると





左辺：最適消費の右辺

右辺：遺産関数の限界効用の期待値を無リスク利子率で拡大した値

⇒ 消費に対する限界効用と遺産に対する限界効用によって，消費および投資額が決定する

　 例：遺産関数が水平（遺産に効用を感じない）のとき，消費をできるだけ多く行う

* **包絡線条件（価値関数と富の関係）**

最適な消費と投資比率の下で価値関数は





価値関数をで微分すると





赤線部：富の増加が最適消費に及ぼす間接的効果（最適な消費において）

青線部：富の増加が最適投資に及ぼす間接的効果（最適な投資比率において）

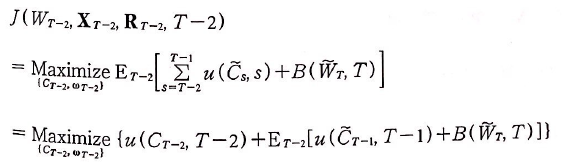
⇒ 包絡線の定義そのものであり，包絡線条件と呼ばれる．

以上をまとめると，包絡線条件は下記のように書ける．



### 任意の時点における最適消費と最適投資の決定：一般的ケース

時点における価値関数は



時点にいる消費者は実現値**，**の情報をもとにを決定する必要がある．

一方で，時点でははまだ決定できる変数ではない．．．

⇒ Bellman(1957)の最適性原理を利用

* **最適性原理による任意の時点の価値関数表現**

最適性原理：初期時点の意思決定によって実現した結果が好ましいか好ましくないかにかかわらず，引き続く意思決定はその結果の下で常に最適でなければならない．

⇒ 最適性原理を踏まえると，時点における価値関数は時点の価値関数を用いて下記となる．



従って，任意の時点における価値関数は



* **最適消費と最適投資は独立には決定できない**

(3.18)式は時点における価値関数(3.6)式と同じ形なので，消費と投資比率の最適条件は下記になる．





⇒ 時点と同様に，最適な消費と投資比率は相互に依存し，独立に決定することは不可能

従って，独立に決定するためには効用関数ないし投資機会を表す確率変数に強い制約を課す必要

* 議論

Q．「任意の時点における包絡線条件(3.21c)式はどのように導出するのか，定性的な解釈は？」

A．

最適投資の条件(3.9a)より

両辺にを乗じ，まで総和をとると

したがって，