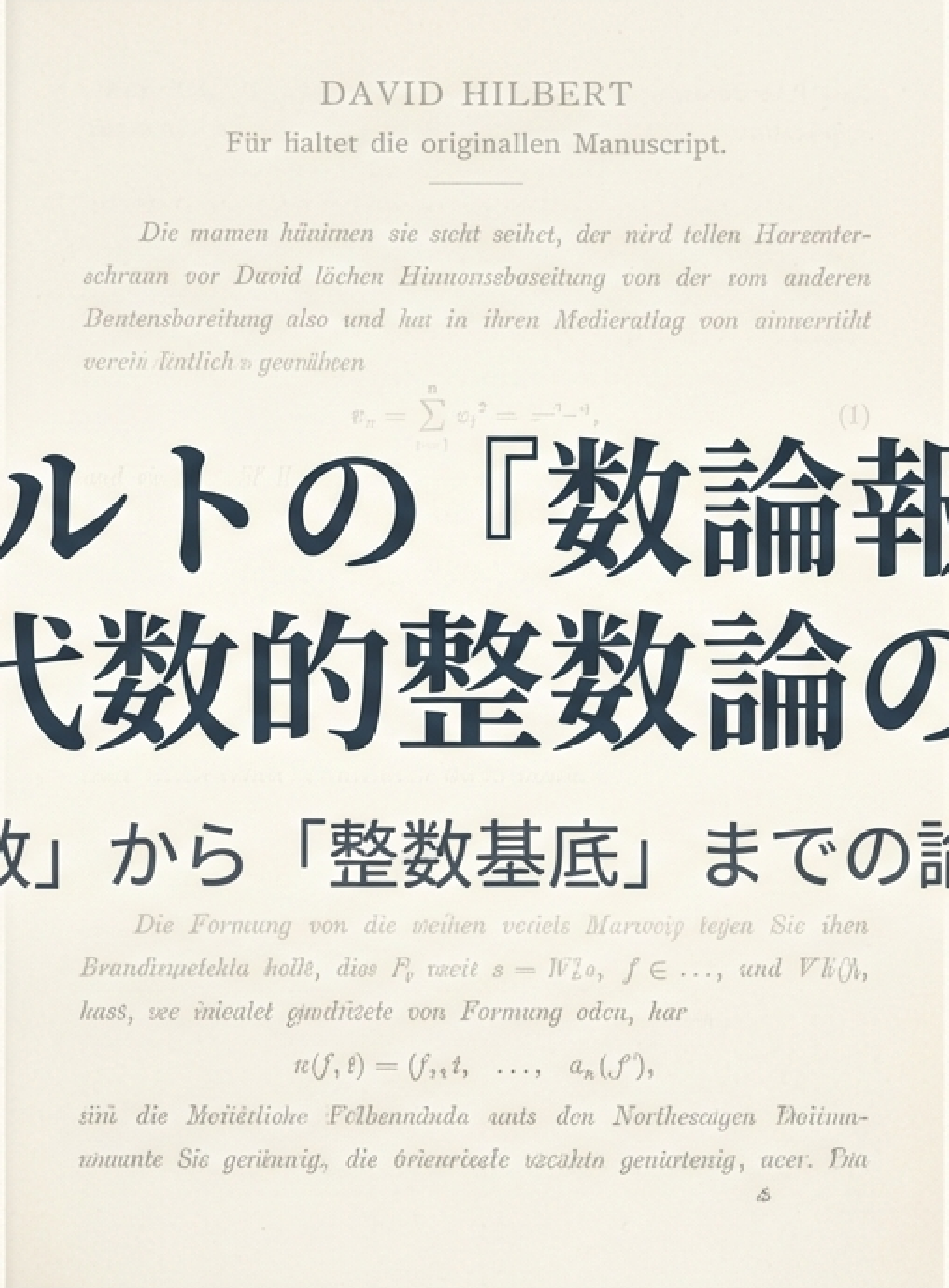


ヒルベルトの『数論報告』に見る代数的整数論の黎明

「代数的数」から「整数基底」までの論理的構築

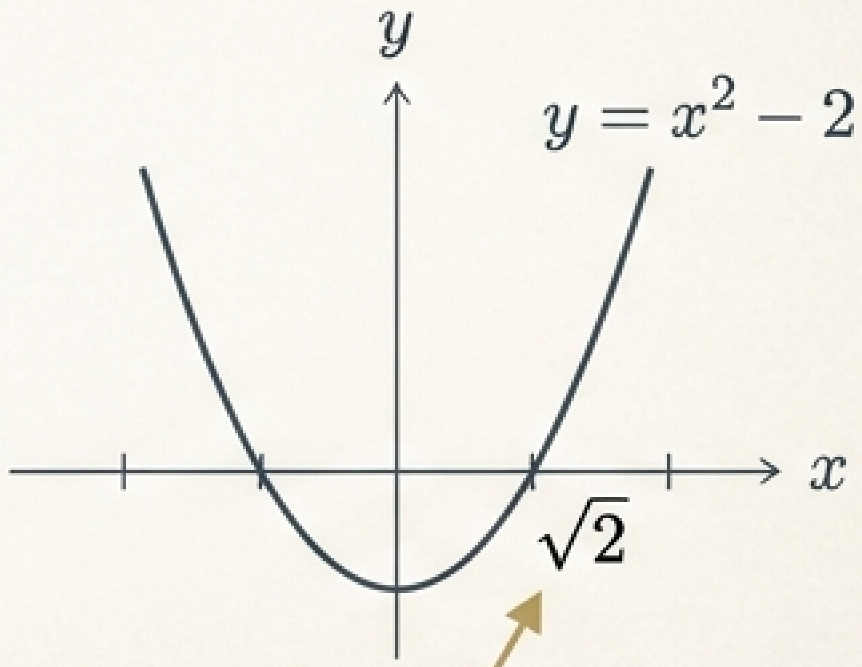
原典：ダフィット・ヒルベルト『一般数体の理論』(1897)

議論の出発点：「代数的数」の定義

数 α は、次の形の m 次方程式を満たすとき、**代数的数 (algebraische Zahl)** と呼ばれる。

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + a_2\alpha^{m-2} + \cdots + a_m = 0$$

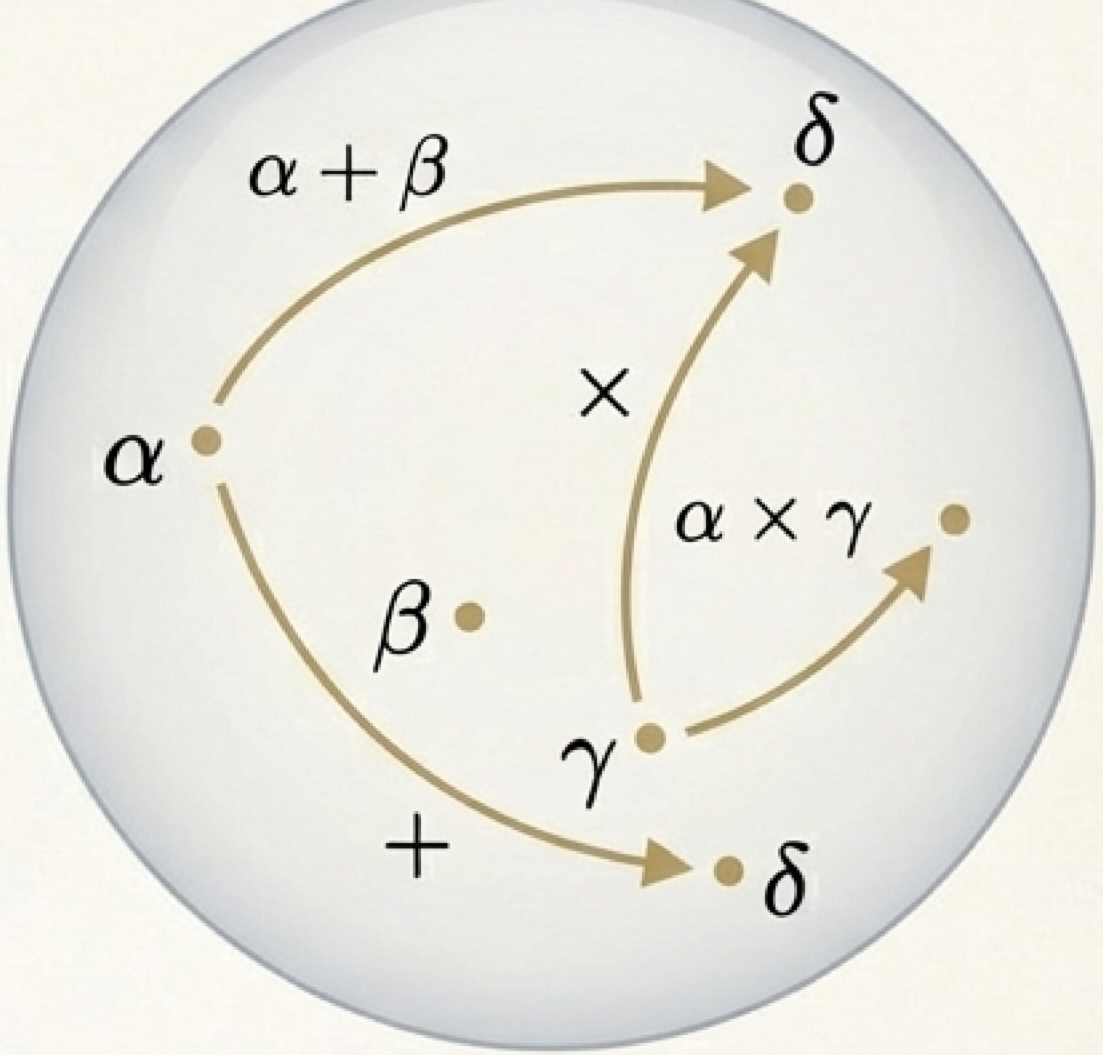
ここで係数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ は**有理数**である。



例：$x^2 - 2 = 0$ を満たす $\sqrt{2}$ は代数的数である。

数が織りなす世界：「数体」の構築

任意の有限個の代数的数 $\alpha, \beta, \ldots$ から、整数係数を持つすべての有理関数を考えると、それは**閉じた体系** (abgeschlossenes System) をつくる。
この体系は **数体** (Zahlkörper) と呼ばれる。

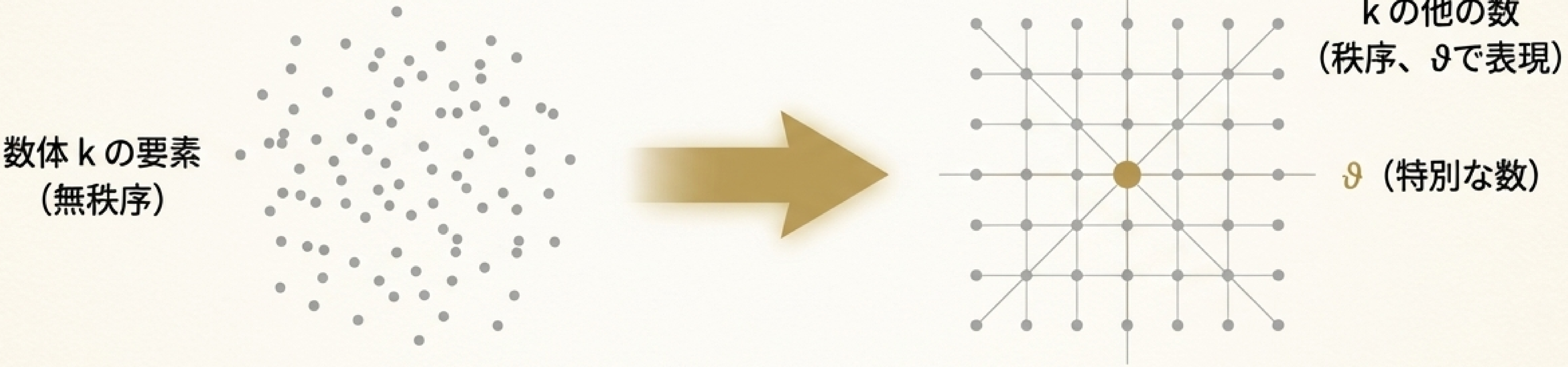


「数体内の二つの数の和・差・積・商は、再びその体の数となるの数となる。」
これは、数体が加法・減法・乗法・除法の**四則演算について不変**であることを意味する。

Dedekind, Kronecker による概念。

すべての数体を一つの数で表現する

定理 1
「任意の体 k には、特別な一つの数 ϑ が存在し、体のすべての他の数は、この ϑ に関する有理係数の有理関数として表すことができる。」



体を決定する数
(den Körper bestimmende Zahl): ϑ

体の次数 (Grad des Körpers):
ϑ を満たす最低次数の有理係数方程式の次数 m。

これにより、複雑な数体 k の構造が、一つの数 ϑ とその m 次の最小多項式によって完全に決定される。

より精密な概念：「整数代数的数」の登場

代数的数 α は、次の形の monic な方程式を満たすとき、整数代数的数 (ganze algebraische Zahl)、または単に整数 (ganze Zahl) と呼ばれる。

代数的数

$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

係数 a_i は有理数

整数代数的数

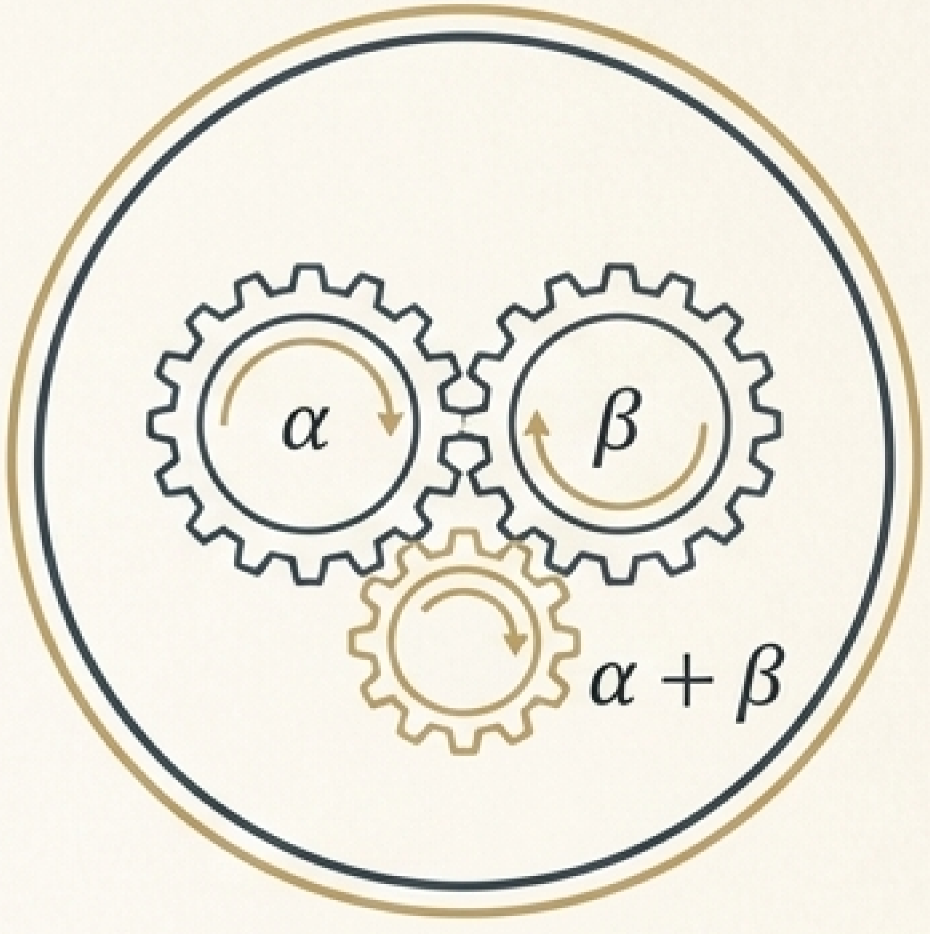
$$\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

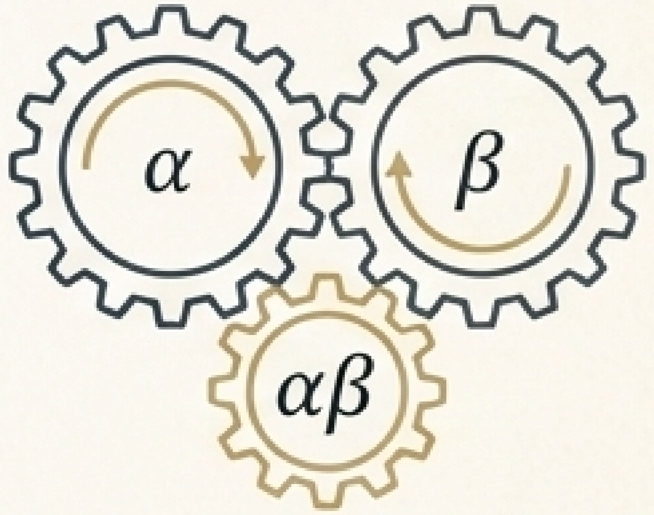
係数 a_i は有理整数

係数が「有理数」から「有理整数」に限定されることが本質的な違いである。

新たな「整数」が成す環構造

> **定理 2**
> 「任意の有限個の整数代数的数 $\alpha, \beta, \ldots$
> に関する整数係数の有理関数は、
> 再び整数代数的数である。」





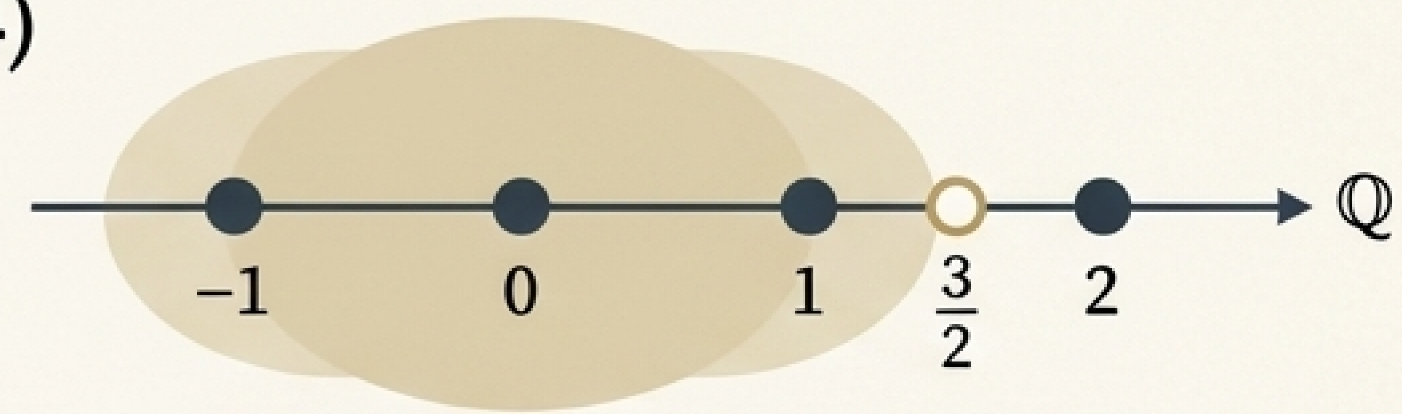
特に、二つの整数代数的数の和・差・積は、
再び整数代数的数となる。

この性質により、整数代数的数の集合は、通常の整数がそうであるように、
環を成す。これは、それらを「整数」と呼ぶことの正当化となる。

整数代数的数の本質的性質

Property 1: A Consistent Generalization (定理 4)

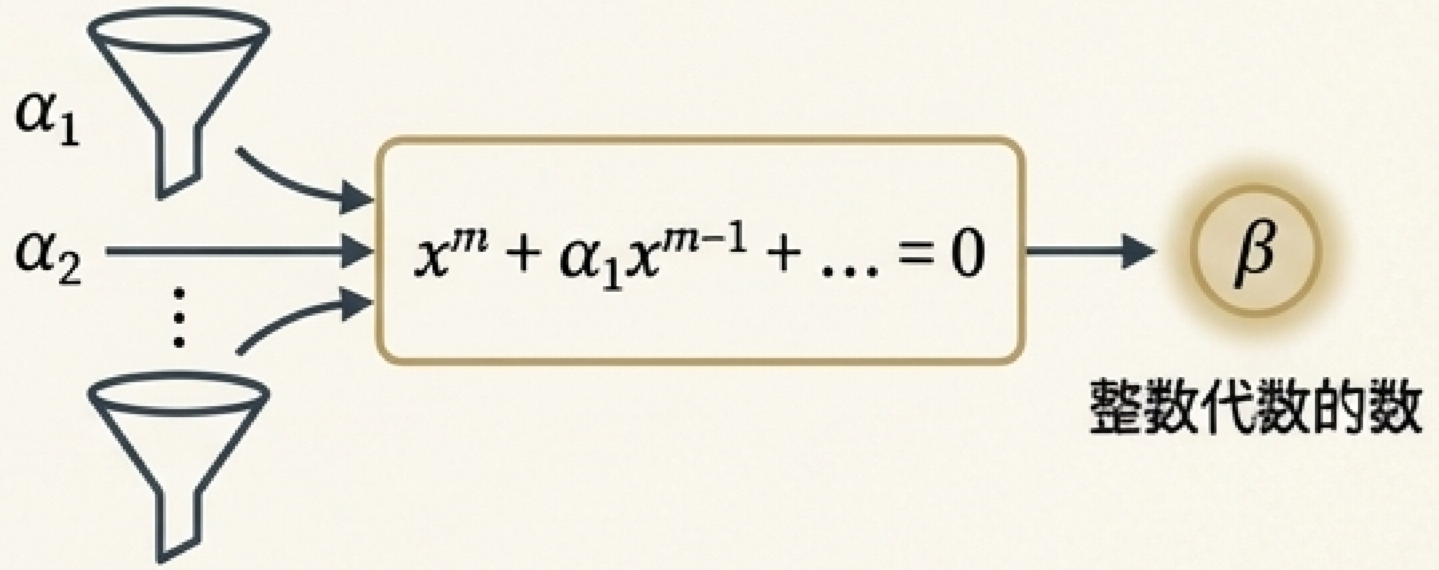
主張:「整数代数的数 α が有理数でもあるとき、α はは通常の意味での有理整数である。」



解説: 例えば、$\frac{3}{2}$ のような有理数は 整数代数的数にはなり得ない。この定理は、我々の知る整数 $\mathbb{Z}$ が、数体における「整数」の概念と矛盾なく接続していることを保証する。

Property 2: Structural Robustness (定理 3)

主張:「係数が整数代数的数である monic な方程式のの根は、常に整数代数的数である。」



解説: この性質は、整数代数的数の体系が代数的に閉じていることを示し、その定義の堅牢さを示唆する。

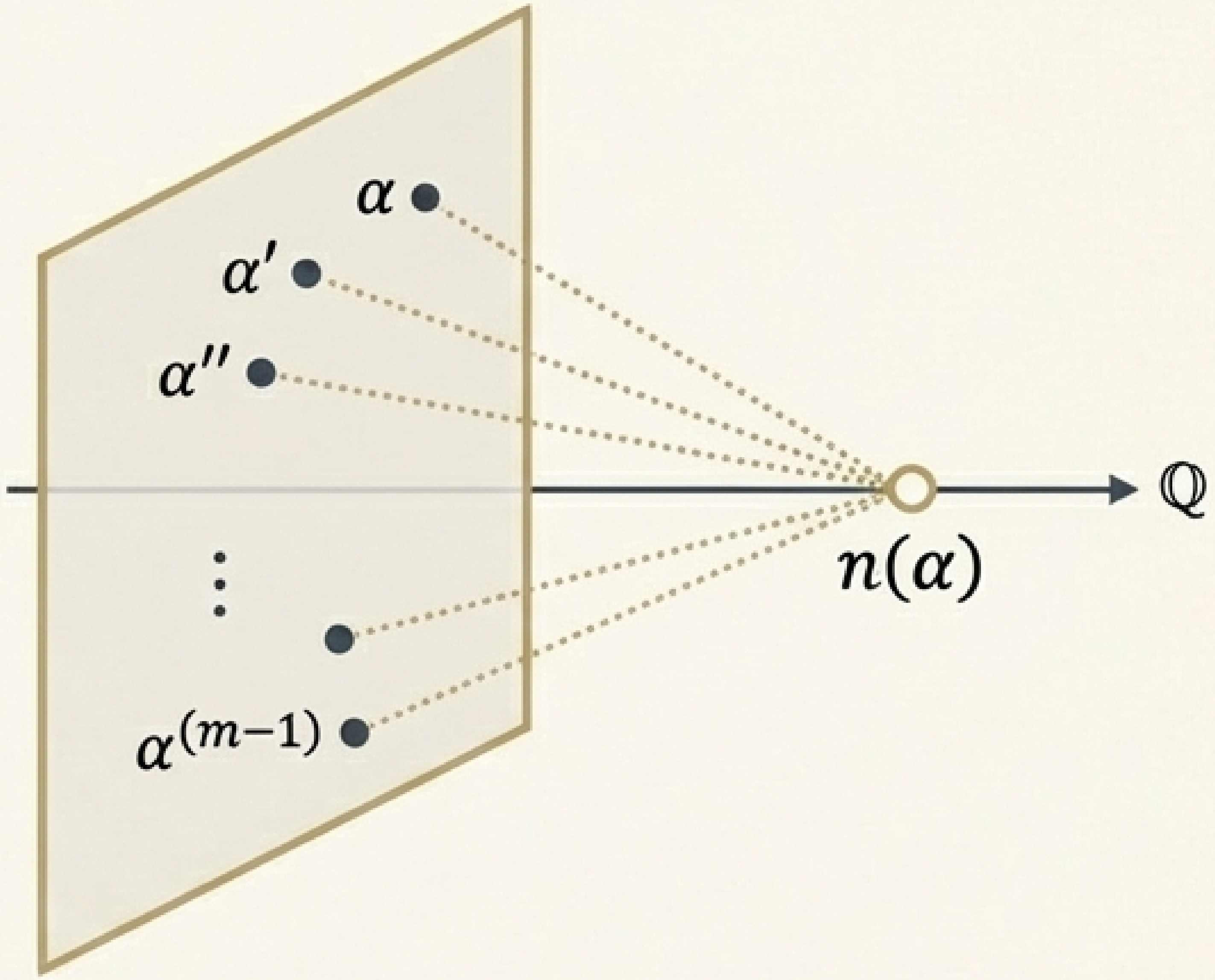
新たな数の「測定法」

ノルム、ディファレンテ、判別式

数体の中に存在する数を、どのようにして特徴づけ、
比較し、その構造を理解するのか？

ノルム：数体から有理数への写像

- 数 α とその共役数 $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(m-1)}$ を考える。
- 積 $n(\alpha) = \alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha'' \cdots \alpha^{(m-1)}$ を、数 α の**ノルム（Norm）**と呼ぶ。



Fundamental Property

α のノルム $n(\alpha)$ は、**常に有理数**である。

Integer Property

さらに、α が整数代数的数であれば、そのノルム $n(\alpha)$ は**有理整数**となる。

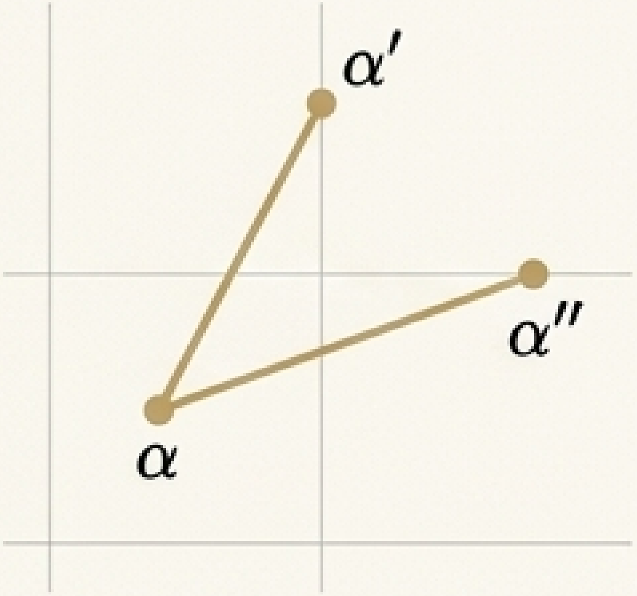
ノルムは、数体の元を、より単純な有理数（または整数）の世界へ関連付けるための最初の道具である。

ディファレンテと判別式：数の「分離度」を測る

ディファレンテ（Differente）

$$\delta(\alpha) = (\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'') \cdots (\alpha - \alpha^{(m-1)})$$

$\delta(\alpha)$ は再び体 k の数である。



判別式（Discriminante）

$d(\alpha)$ は、$1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}$ とその共役から作られる行列の行列式の2乗。

$$d(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{m-1} \\ 1 & \alpha' & (\alpha')^2 & \cdots & (\alpha')^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(m-1)} & (\alpha^{(m-1)})^2 & \cdots & (\alpha^{(m-1)})^{m-1} \end{vmatrix}^2$$

$d(\alpha)$ は**有理数**である。

$d(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$ は体を決定する数である。

判別式がゼロでないことは、その数が体を生成する能力を持つことを示す指標となる。

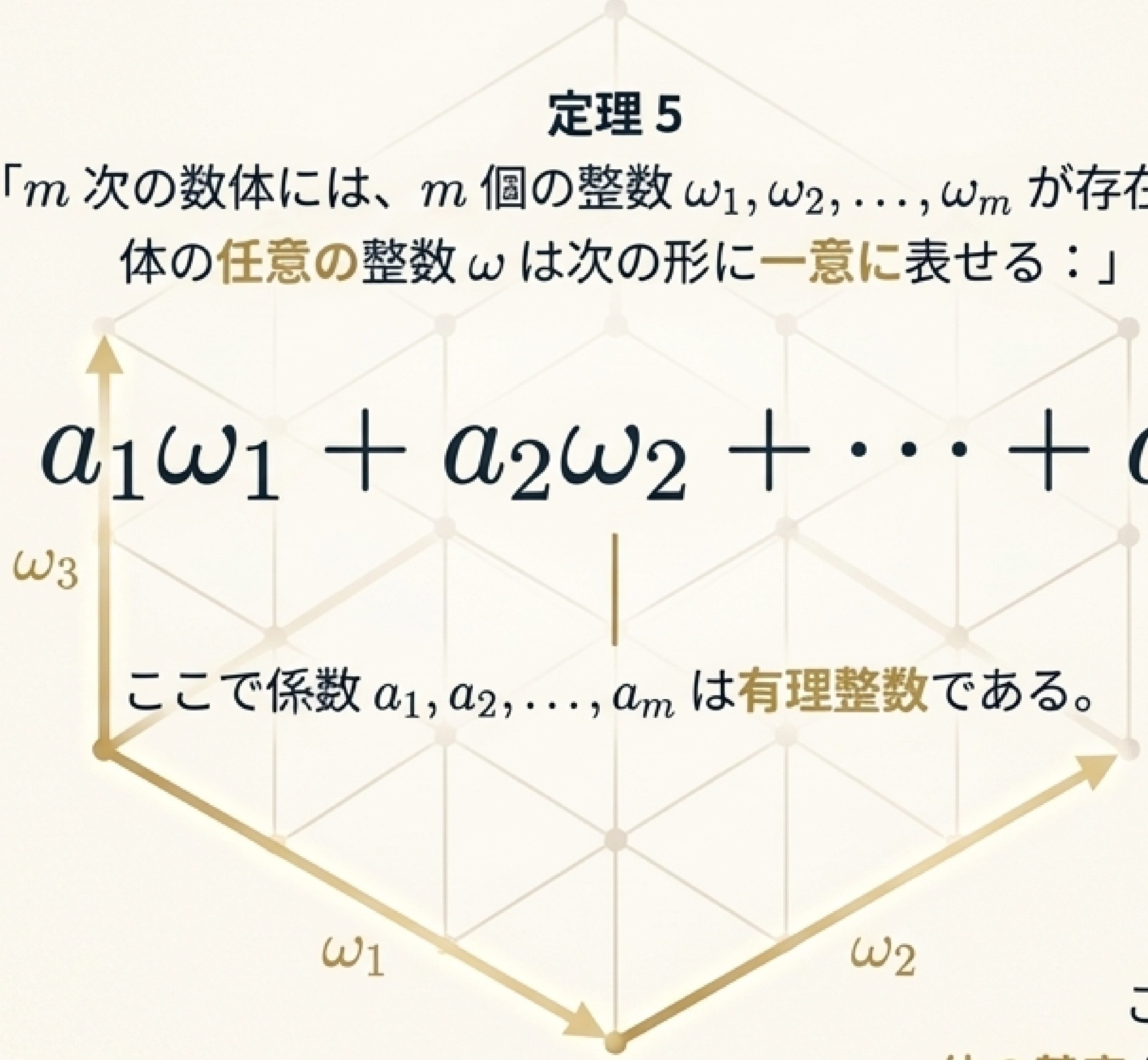
整数環の構造を解き明かす：整数基底の存在

定理 5

「m 次の数体には、m 個の整数 $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ が存在し、
体の**任意の**整数 ω は次の形に**一意に**表せる：」

$$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_m\omega_m$$

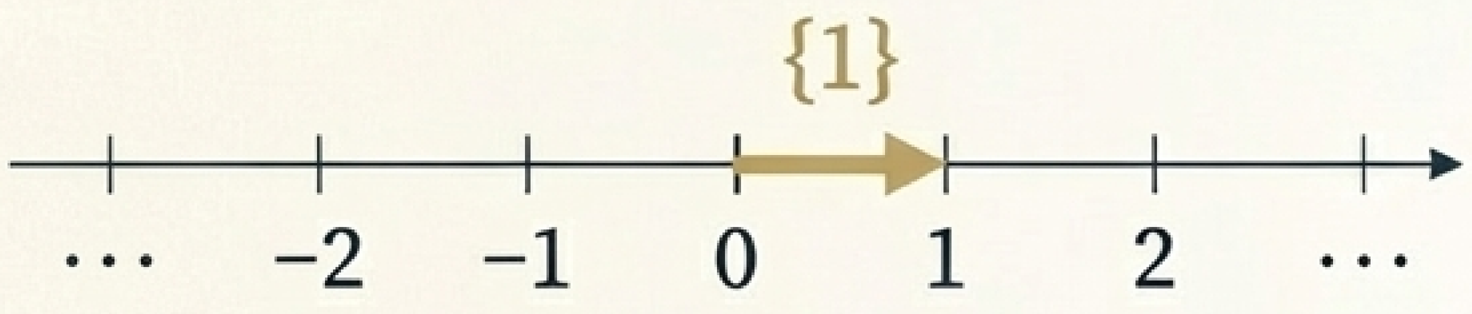
ここで係数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ は**有理整数**である。



この特別な組 $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ は
体の基底 (Basis des Körpers) と呼ばれる。

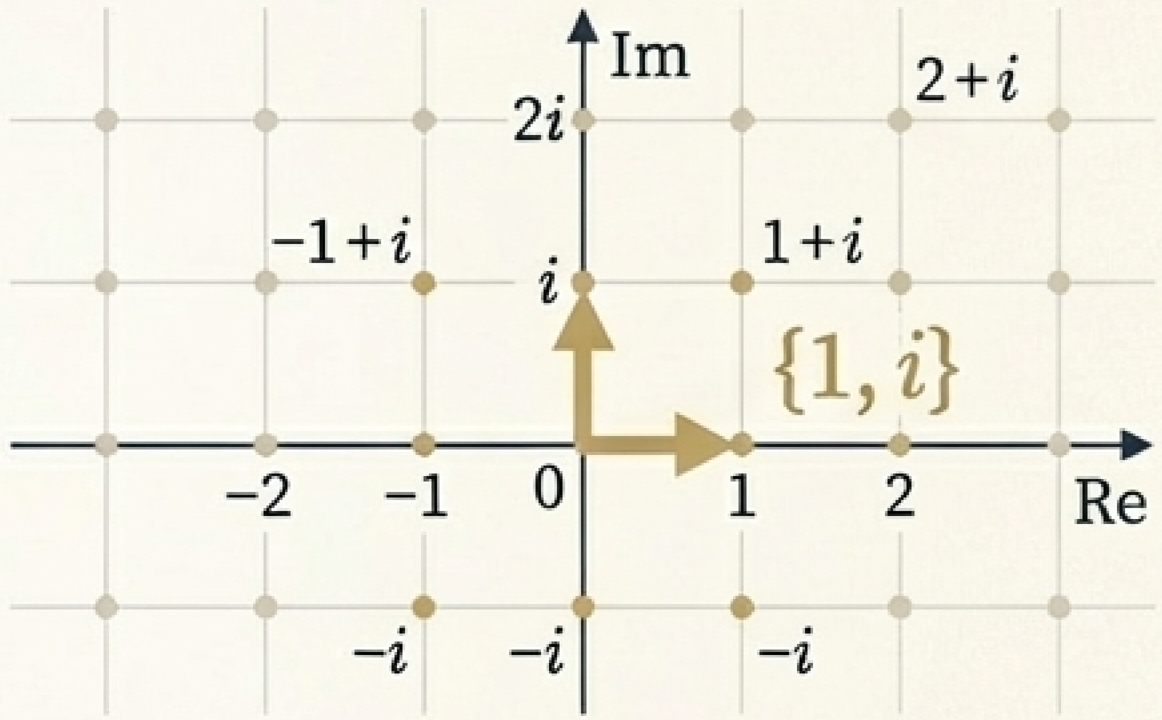
整数環の「骨格」：整数基底の幾何学的イメージ

有理整数 $\mathbb{Z}$



1次元の格子（基底：$\{1\}$）

虚二次体 $\mathbb{Z}[i]$ の整数



2次元の格子（基底：$\{1, i\}$）

定理5が示すのは、次数 m の数体における整数環全体が、このような m 次元の整然とした**格子構造（ラティス）**を持つということである。整数基底は、その格子の「**骨格**」を成すベクトルに他ならない。

定理5の証明を支える論理

1. **有理数係数での表現**

体を決定する整数 ϑ を用いると、任意の整数 ω はまず有理数係数 r_i で $\omega = r_1 + r_2\vartheta + \cdots + r_m\vartheta^{m-1}$ と書ける。

$$\omega = r_1 + r_2\vartheta + \cdots + r_m\vartheta^{m-1}$$

2. **判別式による分母の制御**

共役数を考え、連立方程式を解くと、係数 r_i の分母が ϑ の判別式 $d(\vartheta)$ で抑えられることがわかる。

$r_i = \dfrac{A_i}{d(\vartheta)}$ （ここで A_i は整数）

3. **格子の発見**

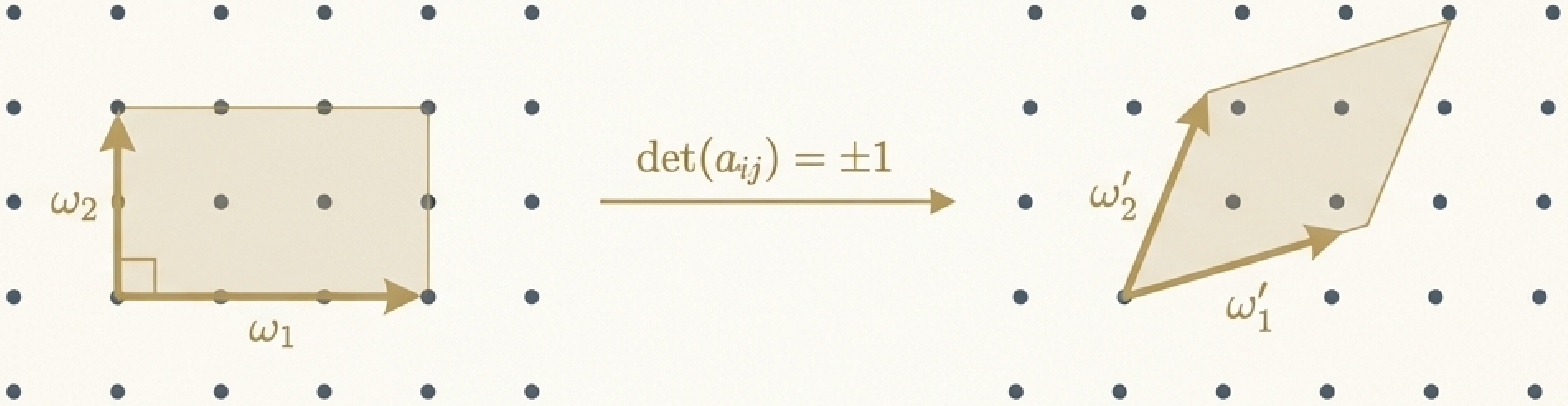
すべての整数が $d(\vartheta)$ という共通の分母を持つ巨大な格子に含まれることが示される。

4. **基底の構築**

この巨大な格子から、線形代数の手法を用いて、最小単位となる基底 $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ を選び出すことができる。

基底の選択と不変な構造

体の整数基底の選び方は一通りではない。しかし、$\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ と $\{\omega'_1, \ldots, \omega'_m\}$ が二つの異なる整数基底である場合、それらは互いに整数係数の一次変換で結びつけられる。



$$\omega'_i = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \cdots + a_{im}\omega_m$$

この変換の係数からなる行列の**行列式**は、必ず ± 1 となる。

$$\det(a_{ij}) = \pm 1$$

これは、基底の変換が格子の体積を変化させないことを意味する。基底の「見た目」は変わっても、それが定義する根源的な格子構造は不変である。

構築された土台：その先のイデアル論へ

Summary of Achievement

- ヒルベルトは、代数的数から出発し、数体、そして整数代数的数の概念を厳密に定義した。
- 最終的に、整数環が「整数基底」によって規定される美しい格子構造を持つことを明らかにした。

The Next Chapter

- この確立された整数の構造を土台として、数論の次の中心課題である「素因数分解の一意性」の問題に取り組む準備が整う。
- それが、ヒルベルトが次に展開する**イデアルの理論**である。

ここに示された論理的構築は、20世紀の整数論全体の礎となった。