失われた秩序を求めて

ヒルベルト『数論報告』に見るイデアル論の夜明け

David Hilbert, *Zahlbericht*, 1897

19世紀代数的整数論の金字塔を紐解き、現代数学の礎となった『イデアル』の物語を再構築する。

秩序の崩壊：失われた一意分解

Order

有理整数の世界では、すべての数は素数の積として一意に分解できる。これは**算術の基本定理**として知られる、数学の根幹をなす秩序である。

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

この分解は唯一無二

Collapse

しかし、この美しい秩序は、体を拡大すると脆くも崩れ去る。例えば、数体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ を考えると…

$$6 = 2 \times 3$$

$$6$$

$$6 = (1 + \sqrt{-5}) \times (1 - \sqrt{-5})$$

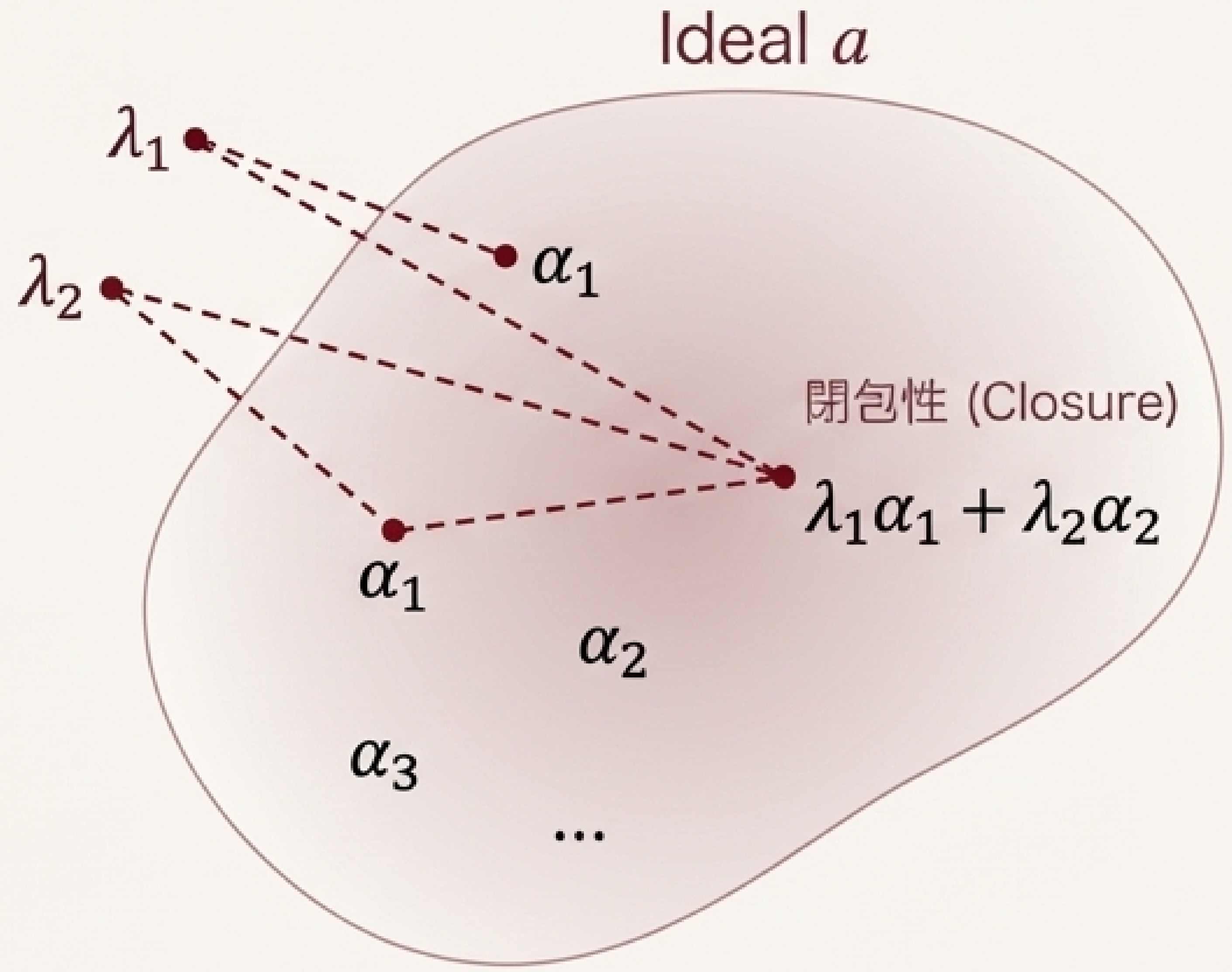
「$2, 3, (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$ はこの体における「素数」のように振る舞うが、6は二通りの分解を持ってしまう。**一意性は失われた**。19世紀の数学者たちは、この**失われた秩序をいかにして回復するのか**という大問題に直面した。」

新たなる主役の登場：イデアル

失われた一意性を回復するため、リヒャルト・デデキントは個々の『数』ではなく、数の無限『集合』を新たな主役とすることを考案した。これが『イデアル』である。

出典：*Zahlbericht*, p. 182

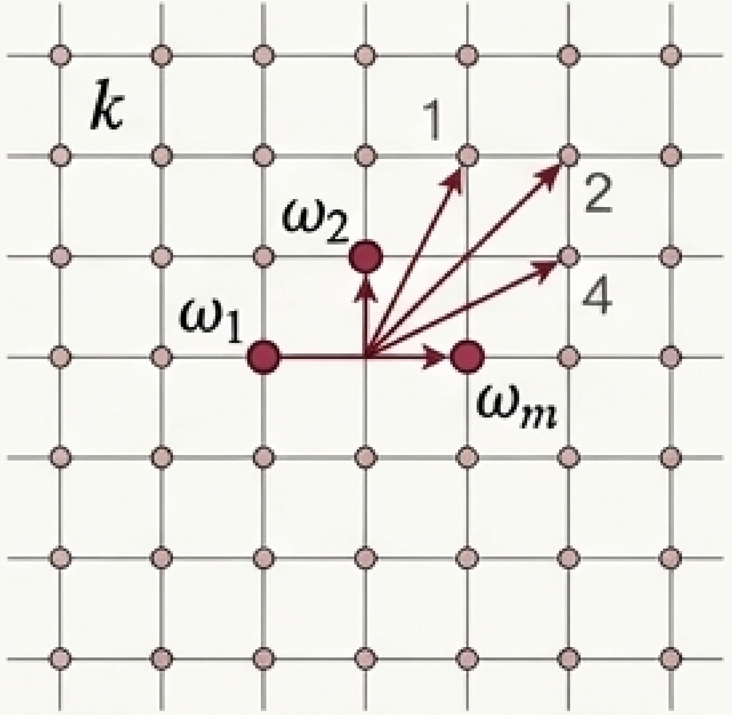
「ある数体 k の、無限に多くの代数的整数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ からなる体系であって、次の性質を持つもの、すなわち $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots$ という任意の線形結合が再びその体系に属する場合、その体系は**イデアル (Ideal) a** と呼ばれる。ここで $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ はすべて数体 k の全代数的整数を意味する。」



抽象概念への構造の付与：イデアルの基底

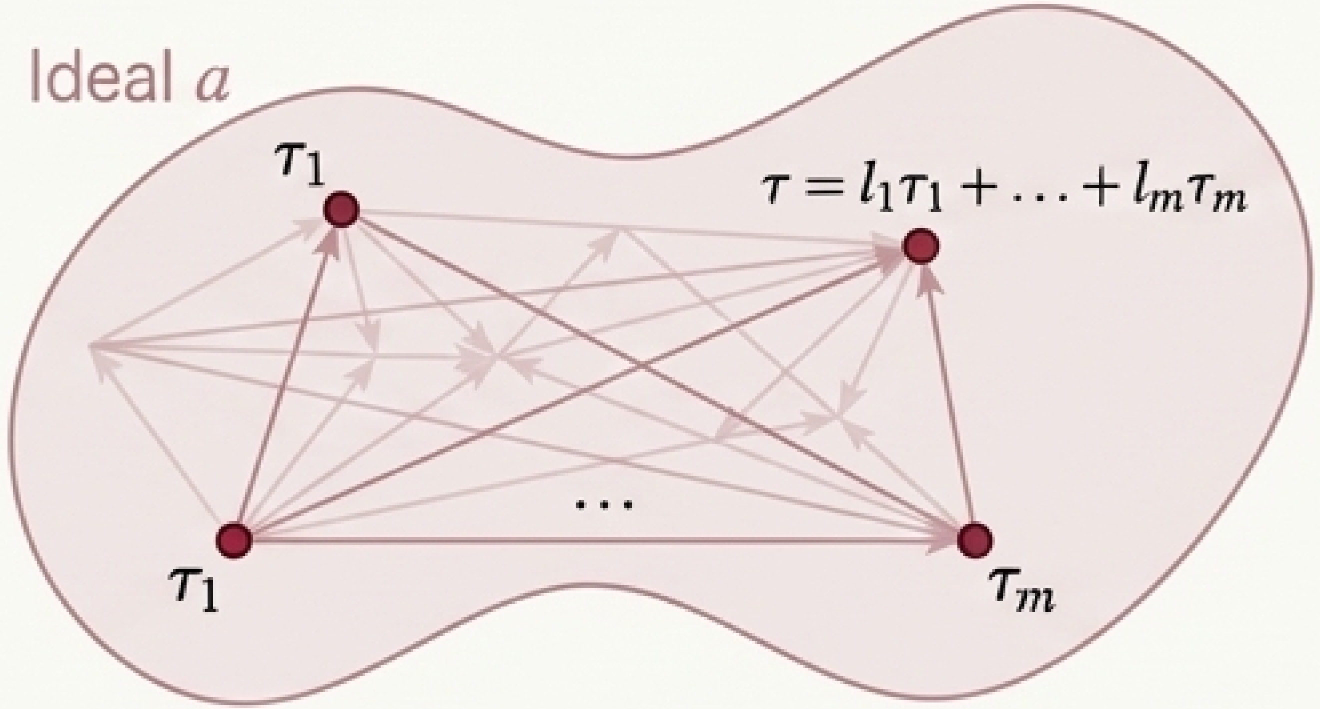
イデアルは無限集合だが、あたかも有限次元のベクトル空間のように、有限個の『基底』によって完全に規定することができる。これにより、イデアルは計算可能な対象となる。

体の基底（Basis des Körpers）



まず、数体 k のすべての整数は、m 個の数 $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の整数係数線形結合で一意に表せる。
この $\omega_1, \ldots, \omega_m$ を**体の基底**と呼ぶ。

定理6（Satz 6）



あるイデアル a には、必ず m 個の数 $\tau_1, \ldots, \tau_m$ が存在し、そのイデアルの任意の整数 τ が、これらの数の線形結合として $\tau = l_1\tau_1 + \ldots + l_m\tau_m$ の形で表される。ここで $l_1, \ldots, l_m$ は整数有理数である。

この $\tau_1, \ldots, \tau_m$ を **イデアル a の基底 (Basis des Ideals a)** と呼ぶ。

表記法

r 個の数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ で生成されるイデアルを

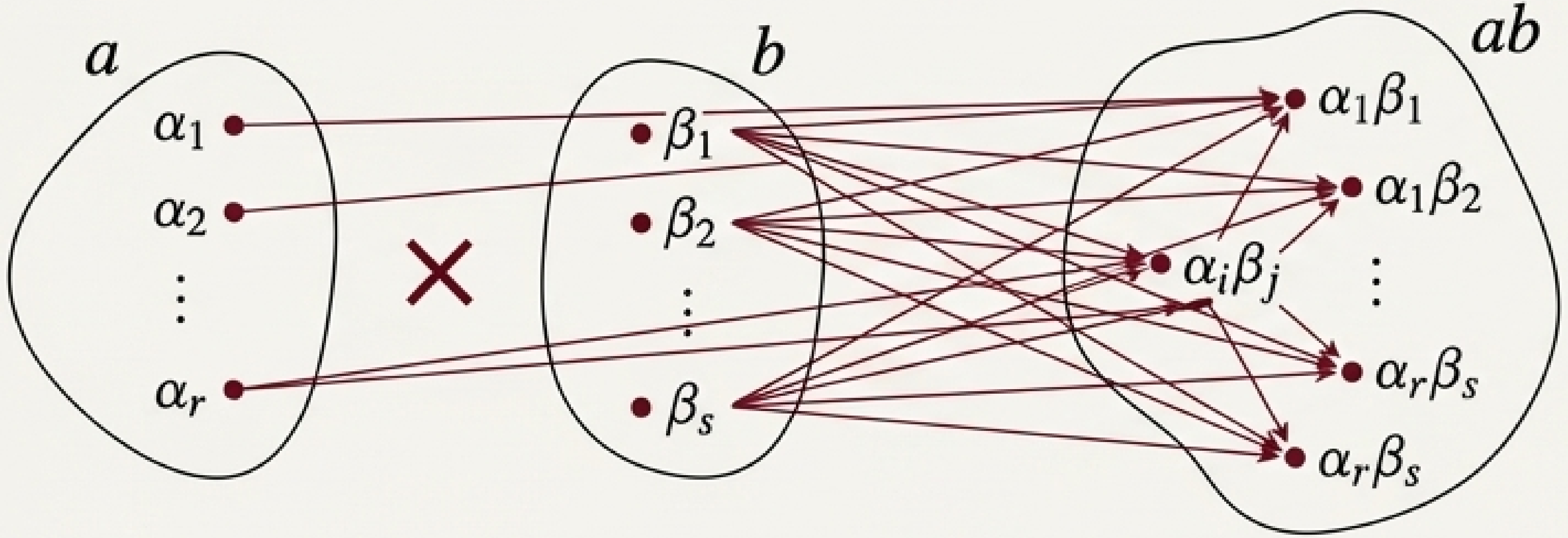
$$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

と簡潔に記す。

イデアルの算術：積、合同、整除性

イデアルに数の如き算術、特に『積』を定義することで、分解への道が拓かれる。

定義: イデアルの積（Produkt der beiden Ideale）



イデアル $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ の任意の数と、別のイデアル $b = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ の任意の数を掛け合わせ、それらから得られるすべての数をもつイデアルを、**二つのイデアルの積** と呼び、次のように記す。

$$ab = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_1\beta_s, \ldots, \alpha_r\beta_1, \ldots, \alpha_r\beta_s)$$

合同（Congruent）

二つの数 α と β の差がイデアル a に属するとき、$\alpha \equiv \beta \pmod{a}$ と書く。

整除性（Teilbar）

$ac = b$ となるイデアル c が存在するならば、イデアル b はイデアル a によって割り切れる（teilbar）という。

主イデアル（Hauptideal）

単一の数 α で生成されるイデアル (α) は**主イデアル**と呼ばれる。これは、元の数の世界とイデアルの世界を結びつける重要な概念である。

新秩序の構成要素：素イデアル

有理整数の分解が素数によって行われるように、イデアルの分解は『**素イデアル**』という基本的な構成要素によって行われる。

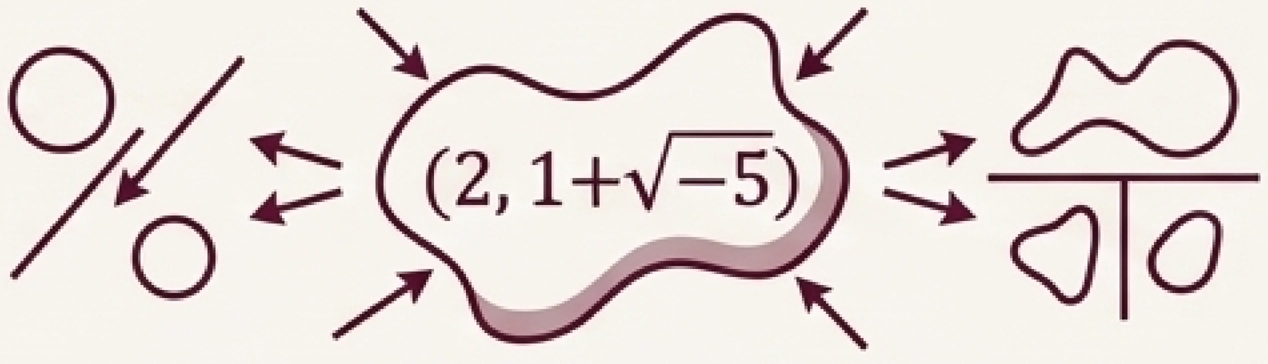
> 「他のいかなるイデアルによっても割り切れず、ただ自分自身とイデアル 1（単位イデアル）にのみ割り切れるイデアルは、**素イデアル (Primideal)** と呼ばれる。」
>
> **Zahlbericht*, p. 184

有理整数の世界

素数（例：$2, 3, 5, 7\ldots$）

1 と自分自身以外に約数を持たない数。

イデアルの世界



素イデアル（例：$(2, 1+\sqrt{-5})$`）

(1) と自分自身以外に約イデアルを持たないイデアル。

失われた秩序の回復：イデアルの一意分解

定理7 (Satz 7) - 算術の基本定理

出典: *Zahlbericht*, p. 184

任意のイデアル I は、常に、かつただ一通りに、素イデアルの積として表すことができる。

$$I = P_1^{e^1} P_2^{e^2} \ldots P_k^{ek}$$

数の世界で失われた一意性は、イデアルの世界で完全に、そしてより一般化された形で回復された。

一意性の論理的支柱

分解の『一意性』は、素数（素イデアル）が持つある重要な性質に依存する。ヒルベルトはこの性質を定理11として確立した。

定理11 (Satz 11)

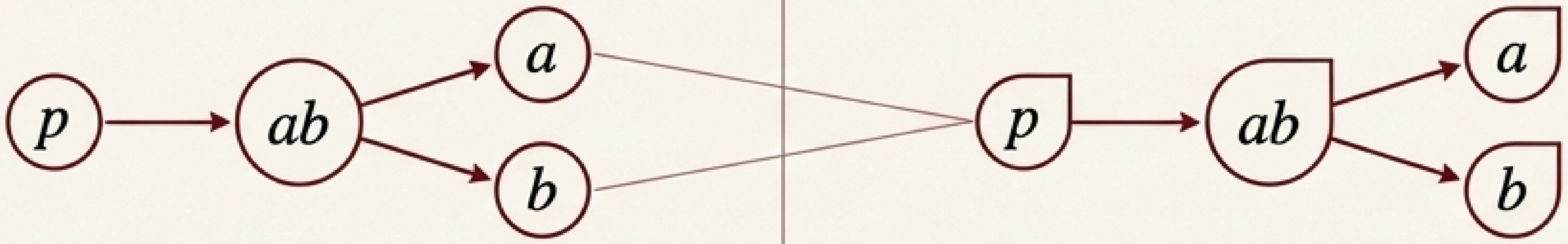
**Zahlbericht*, p. 185

もし二つのイデアル a と b の積 ab が素イデアル p によって割り切れるなら、少なくともイデアル a または b のいずれかは p によって割り切れる。

解説

左列：整数

右列：イデアル



もし素数 p が ab を割り切るなら、p は a を割り切るか、p は b を割り切る。

もし素イデアル p が ab を割り切るなら、p は a を割り切るか、p は b を割り切る。

この定理が、分解が一通りしかないことを保証する鍵となる。

並行する世界：クロネッカーの形式理論

デデキントが『集合』で問題を解決した一方、レオポルト・クロネッカーは『多項式（形式）』を用いた別のアプローチを構築していた。ヒルベルトは『数論報告』で、この二つの理論が本質的に同等であることを示した。

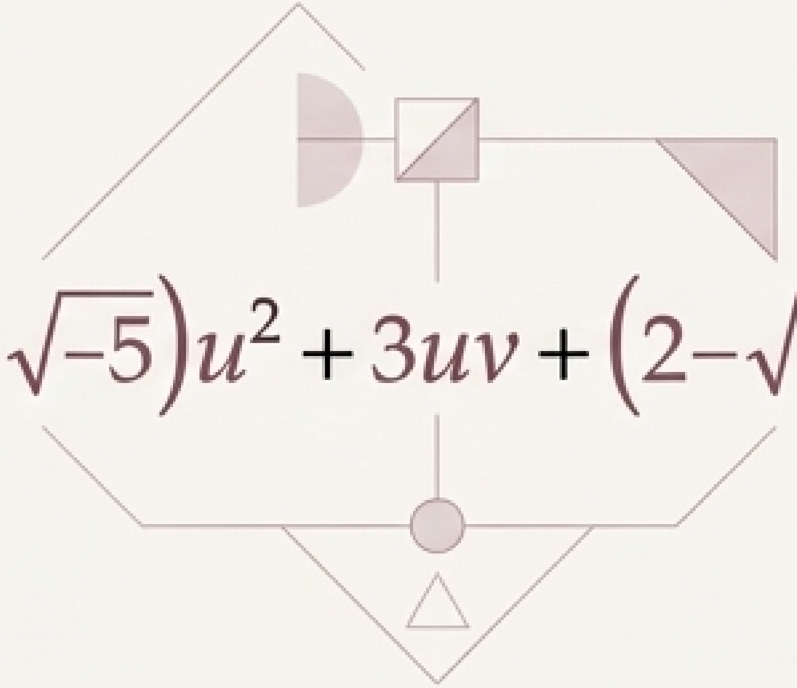
クロネッカーの基本概念

体の形式（Form des Körpers k）

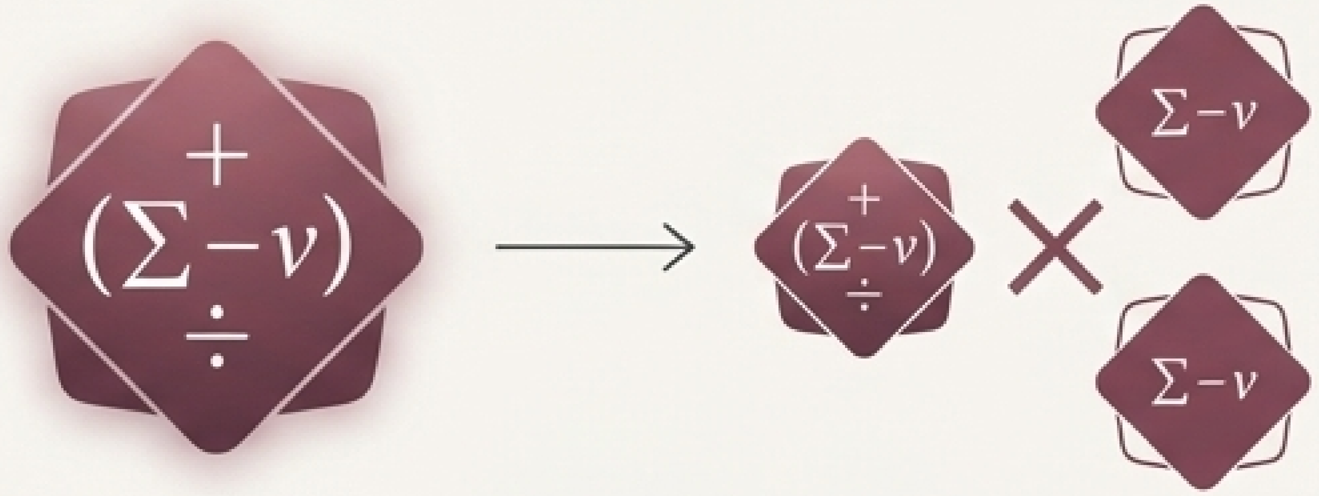
係数が数体 k の代数的整数であるような、変数 $u, v, \dots$ に関する有理整関数 $F(u, v, \dots)$。

素形式（Primform）

内容的な等しさの意味で、1 以外のいかなる形式によっても割り切れず、ただ自分自身によってのみ割り切れる形式。



$$F(u,v) = \left(1+\sqrt{-5}\right)u^2 + 3uv + \left(2-\sqrt{-5}\right)v^2$$



クロネッカーは、これらの『形式』の世界で一意分解定理を打ち立てようとした。

二つの世界の架け橋：「形式の内容」

一見すると全く異なる二つの理論は、『形式の内容』という概念を通じて、深く結びついている。

定義: 形式の内容 (Inhalt der Form F)

形式 F の係数 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ によって生成されるイデアル $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ を、形式 F の**内容**と呼ぶ。

定理13 (Satz 13)

核心： 二つの形式の積の内容は、各形式の内容の積に等しい。

$$\text{Inhalt}(FG) = \text{Inhalt}(F) \times \text{Inhalt}(G)$$

解説：

この定理は、形式の『積』とイデアルの『積』という操作が、完全に連動していることを保証する。これにより、形式の分解とイデアルの分解がパラレルな現象であることが示される。

同じ真実、異なる言語

『**形式の内容**』を介して、クロネッカーの形式理論は、デデキントのイデアル理論と完全に並行する構造を持つことが明らかになる。ヒルベルトはこれを明確に示した。

Zahlbericht, p. 188.「これらの定理は、**イデアル論の定理8、11**および**基本定理7**と**完全に並行する**。」

デデキントのイデアル理論	クロネッカーの形式理論
基本対象 : イデアル	基本対象 : 形式 (Form)
素元 : 素イデアル p	素元 : 素形式 P
ユークリッドの補題 (Satz 11) : $p \mid ab \;\Rightarrow\; p \mid a$ または $p \mid b$	ユークリッドの補題 (Satz 15) : $P \mid \overline{FG} \;\Rightarrow\; P \mid F$ または $P \mid G$
基本定理 (Satz 7) : すべてのイデアルは、素イデアルの積に一意に分解される。	基本定理 (Satz 16) : すべての形式は、素形式の積に（内容的な等価性の意味で）一意に分解される。

総合と遺産：ヒルベルトによる代数的整数論の体系化

ヒルベルトの『数論報告』は、デデキントのイデアルとクロネッカーの形式という、異なる頂から同じ高みを目指した二つのアプローチを統合し、その見事な対応関係を白日の下に晒した。

これは単なる過去の理論のまとめではない。抽象的な『構造』そのものに着目することで、20世紀の抽象代数学（環論、加群論）への扉を開いた、数学史における画期的な著作であった。

「数の世界で崩壊した秩序は、より抽象的な構造の世界で、より普遍的な形で再発見された。
ヒルベルトが示したのは、その発見に至る論理の道筋そのものであった。」