ヒルベルト数論報告の再訪：相対体の不変量

ノルム、ディファレンテ、判別式の一般化

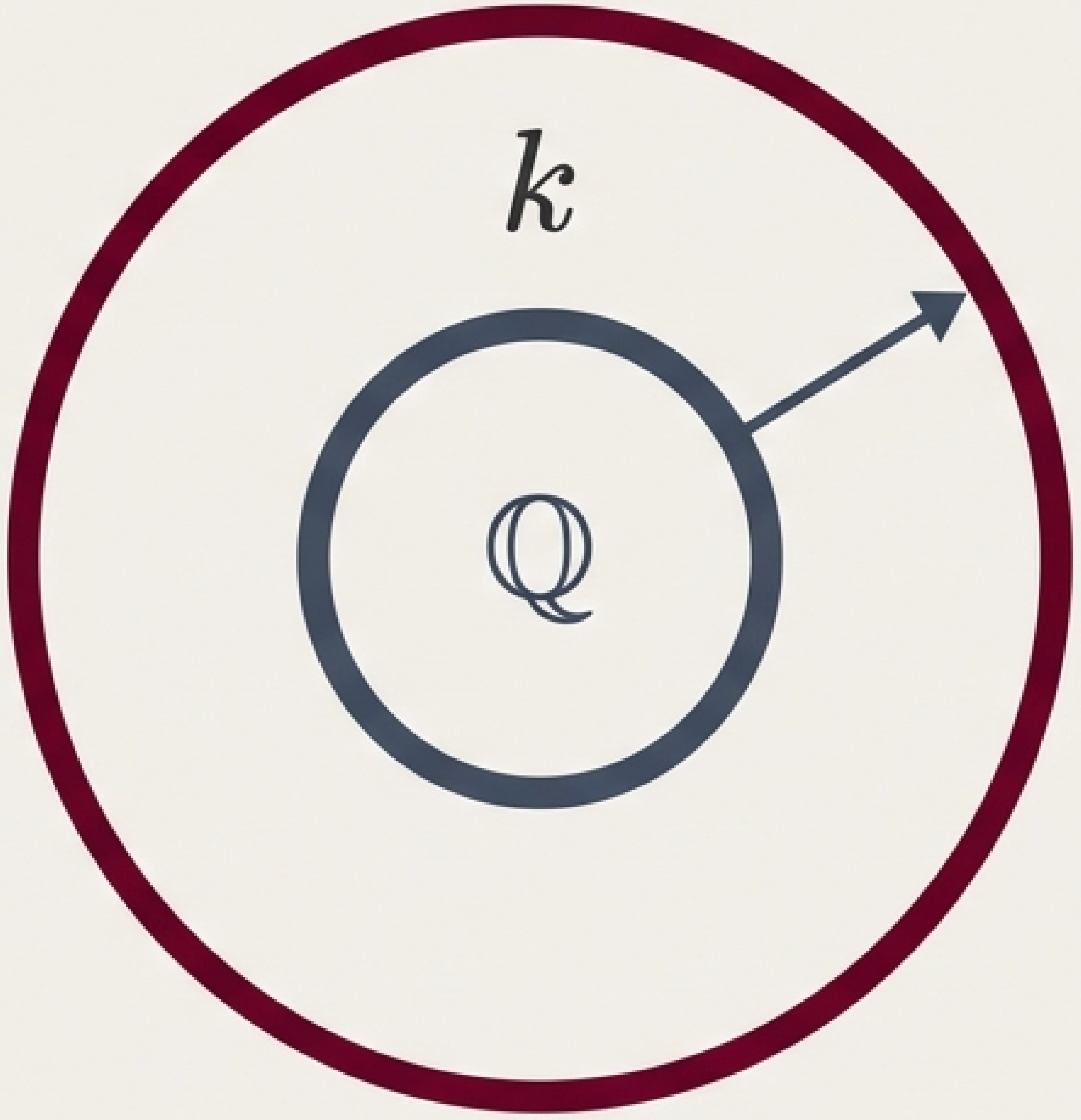
ノルム、ディファレンテ、判別式の一般化

議論の出発点：絶対不変量

代数的整数論において、体 k が有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大であるとき、その構造を捉える基本的な不変量が存在する。

- **ノルム (Norm):** 体の元を $\mathbb{Q}$ の元へ写す。
- **ディファレンテ (Different):** 体の「分岐」を測るイデアル。
- **判別式 (Discriminant):** 体の基本的な不変量であり、分岐の情報を集約する。

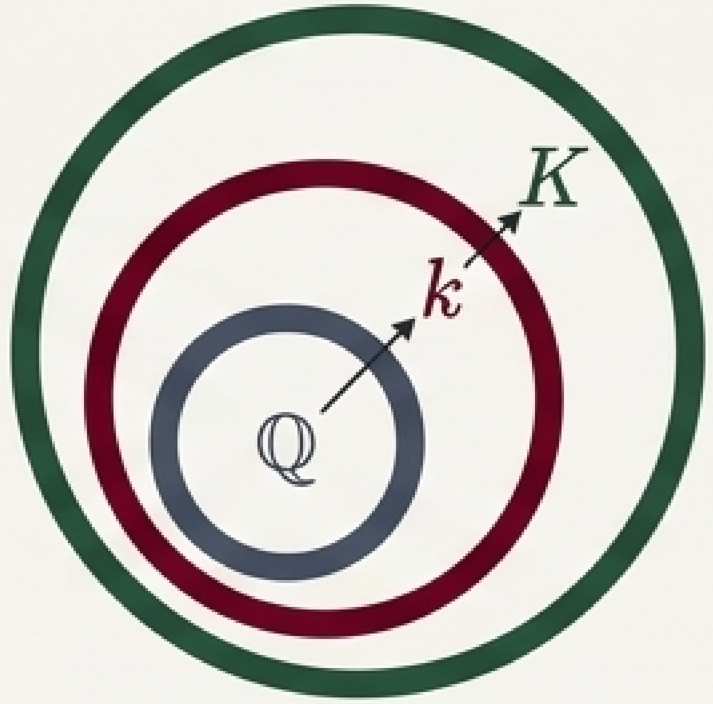
これらの概念は、基底体を $\mathbb{Q}$ から一般的な代数体 k へと拡張した際に、どのように振る舞うだろうか？



ヒルベルトの問い：「重要な一般化は可能か？」

> 「ノルム（Norm）、ディファレンテ（Different）、判別式（Discriminante）という概念は、重要な一般化に適している。」— David Hilbert, *Zahlbericht*

この洞察は、体の構造をより深く理解するための新たな視点を開く。考察の対象を、$\mathbb{Q}$ 上の体から、ある体 k 上の「相対的な」体 K へと移行させる。



Annotation: この構造 $K/k/\mathbb{Q}$ が、我々の探求の舞台となる。

新たな舞台：相対体

Core Definitions

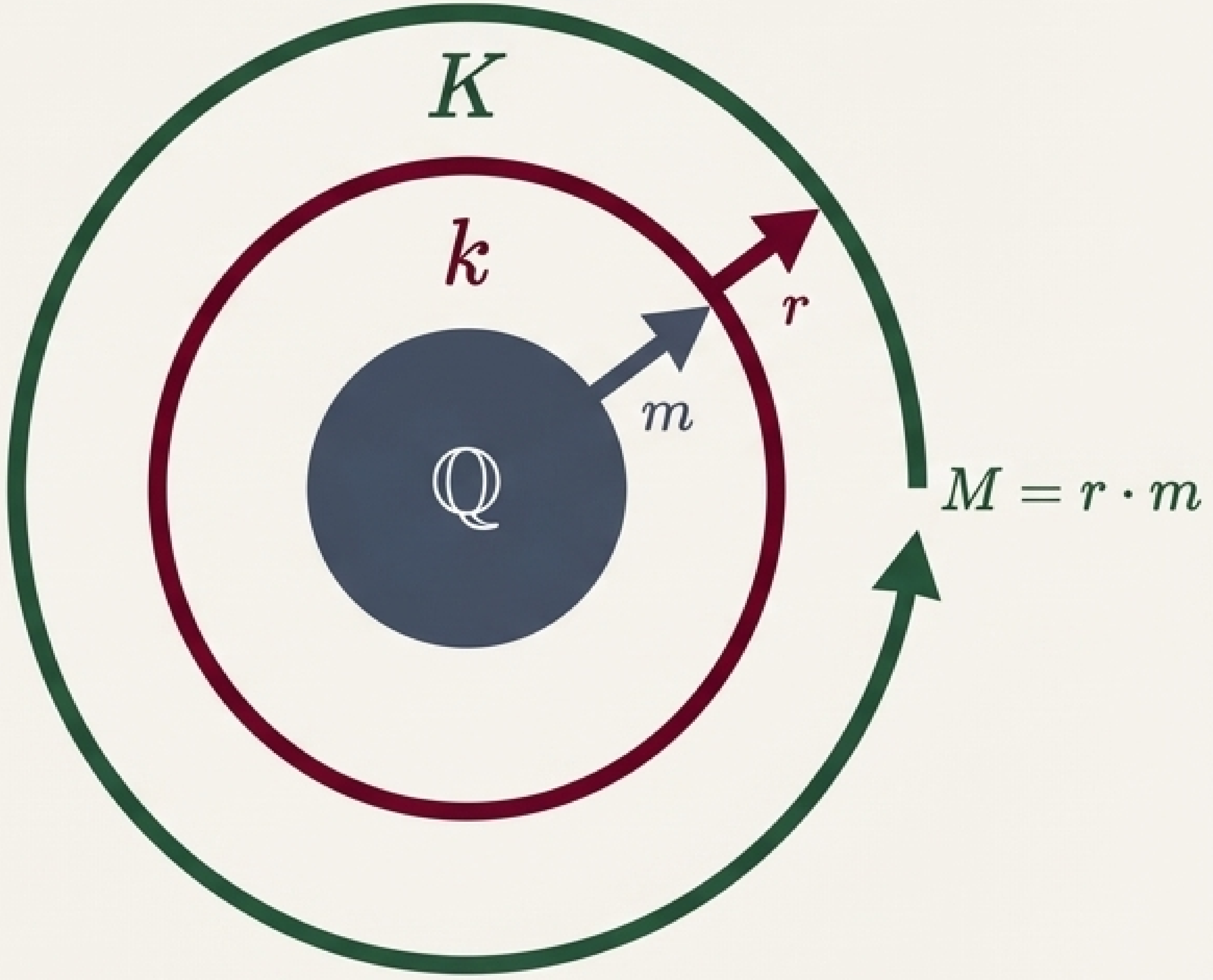
- **部分体 (Unterkörper):** 体 K が体 k の全ての数を含むとき、k を K の部分体と呼ぶ。
- **相対体 (Relativkörper) / 上体 (Oberkörper):** このとき、K を k に関する相対体または上体と呼ぶ。
- **相対次数 (Relativgrad):** K の k に対する拡大次数を $[K:k]=r$ とし、相対次数と呼ぶ。

Key Relationship

体の次数の間には、塔のような関係が成り立つ。

$$[K:\mathbb{Q}] = [K:k]\cdot[k:\mathbb{Q}]$$

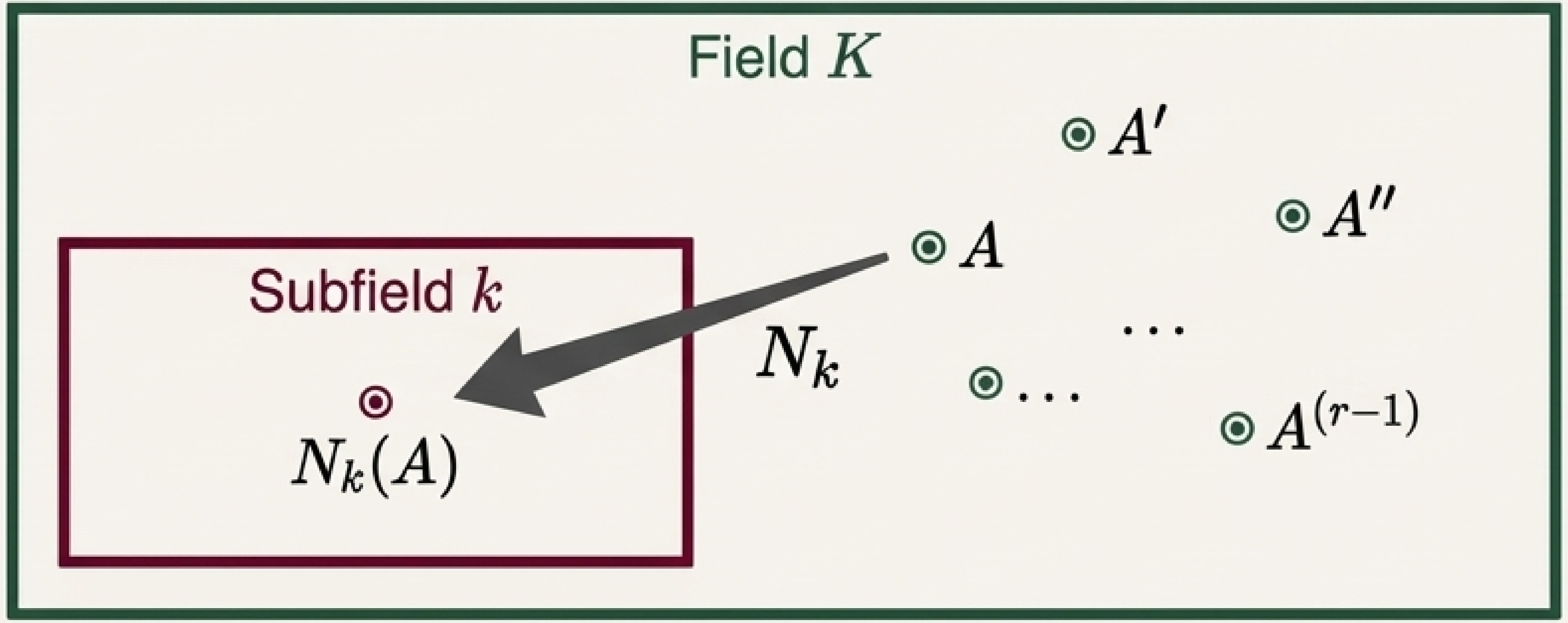
ヒルベルトの記法では: $M = r\cdot m$



新たな道具①：相対共役と相対ノルム

Definition 1: 相対共役数 (Relative Conjugate Numbers)
K の元 Θ の、k 上の最小多項式（次数 r）を考える。
この多項式の他の根 $\Theta', \Theta'', \ldots, \Theta^{(r-1)}$ を、「Θ の k に対する**相対共役数**」と呼ぶ。

Definition 2: 数の相対ノルム (Relative Norm of a Number)
K の任意の数 A に対し、その相対共役数 $A', \ldots, A^{(r-1)}$ との積を、A の k に関する**相対ノルム**と定義する。
Formula: $N_k(A) = A \cdot A' \cdot \ldots \cdot A^{(r-1)}$
Crucial Property: $N_k(A)$ は、部分体 k の数となる。



新たな道具②：相対ディファレンテと相対判別式

Definition 3: 相対ディファレンテ (Relative Different)

数 $A \in K$ の相対ディファレンテは、その相対共役数との差の積として定義される。

Formula: $\Delta_k(A) = (A - A')(A - A'') \cdots (A - A^{(r-1)})$

この概念は、体のイデアルである**相対ディファレンテ** $\mathfrak{D}_k$ へと拡張される。

Definition 4: 相対判別式 (Relative Discriminant)

体の基底 $\Omega_1, \ldots, \Omega_M$ を用いて定義される行列式の二乗。

Formula: $\mathfrak{D}_k = \gcd\left(\det\begin{pmatrix} \Omega_1 & \cdots & \Omega_M \\ \Omega_1' & \cdots & \Omega_M' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_1^{(r-1)} & \cdots & \Omega_M^{(r-1)} \end{pmatrix}\right)^2$

Crucial Property: $\mathfrak{D}_k$ は、部分体 k のイデアルとなる。

絶対から相対へ：概念の対比

特性 (Characteristic)	絶対不変量 (Absolute Invariants)	相対不変量 (Relative Invariants)
基底体 (Base Field)	有理数体 $\mathbb{Q}$	任意の部分体 k
文脈 (Context)	体 $k/\mathbb{Q}$	体 K/k
ノルム (Norm)	$N_{k/\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Q}$	$N_{K/k}(A) \in k$
ディファレンテ (Different)	$\mathfrak{D}_{k/\mathbb{Q}}$ (kのイデアル)	$\mathfrak{D}_{K/k}$ (Kのイデアル)
判別式 (Discriminant)	$d_{k/\mathbb{Q}}$ ($\mathbb{Q}$のイデアル, $\mathbb{Z}$の元)	$\mathfrak{D}_{K/k}$ (kのイデアル)

Key Takeaway: 相対不変量は、絶対不変量の概念を、基底体を $\mathbb{Q}$ から一般的な k へと自然に拡張したものである。

最初の到達点：相対不変量の内的関係

定理38 (Theorem 38)

> 「体 K の、部分体 k に関する相対判別式は、k における相対ディファレンテの相対ノルムと等しい。」

$$\mathfrak{D}_k = N_k(\mathfrak{D}_k)$$

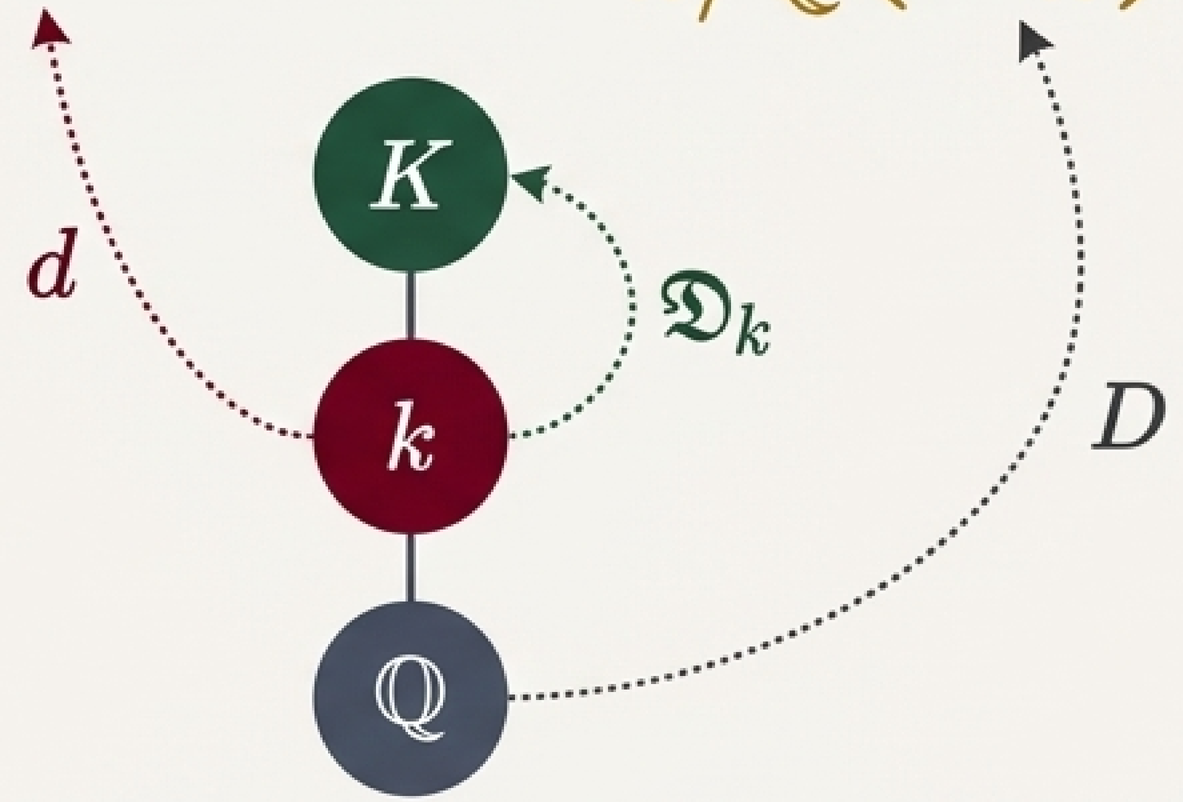
$\mathfrak{D}_k$: 体 K の k に関する**相対判別式** (k のイデアル)
$N_k(\cdots)$: k に関する**相対ノルム** (Kのイデアルをkのイデアルへ写す)
$\mathfrak{D}_k$: 体 K の k に関する**相対ディファレンテ** (K のイデアル)

Significance: この定理は、相対判別式が、より基本的な構成要素である相対ディファレンテから導かれることを示している。

統合法則①：判別式の塔定理

定理39（Theorem 39） D を上体 K（の $\mathbb{Q}$ に対する）判別式、d を下体 k（の $\mathbb{Q}$ に対する）判別式、$\mathfrak{D}_k$ を相対判別式（K/k）とする。このとき、これらの間には次の関係が成立する。

$$D = d^{[K:k]} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{D}_k)$$



Interpretation: 絶対判別式 D は、下の体の判別式 d と、相対的な情報（相対判別式のノルム）によって完全に決定される。

統合法則②：ディファレンテの塔定理

定理41 (Theorem 41) $\mathfrak{D}$ を体 K (の $\mathbb{Q}$ に対する) ディファレンテ、$\mathfrak{d}$ を体 k (の $\mathbb{Q}$ に対する) ディファレンテ、$\mathfrak{D}_k$ を相対ディファレンテ (K/k) とする。このとき、驚くほど単純な積の公式が成り立つ。

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_k \cdot \mathfrak{d}$$

Hilbert's Interpretation:
> 「上位の体のディファレンテは、下位の体のディファレンテに、対応する相対ディファレンテを掛けたものになるのである。」

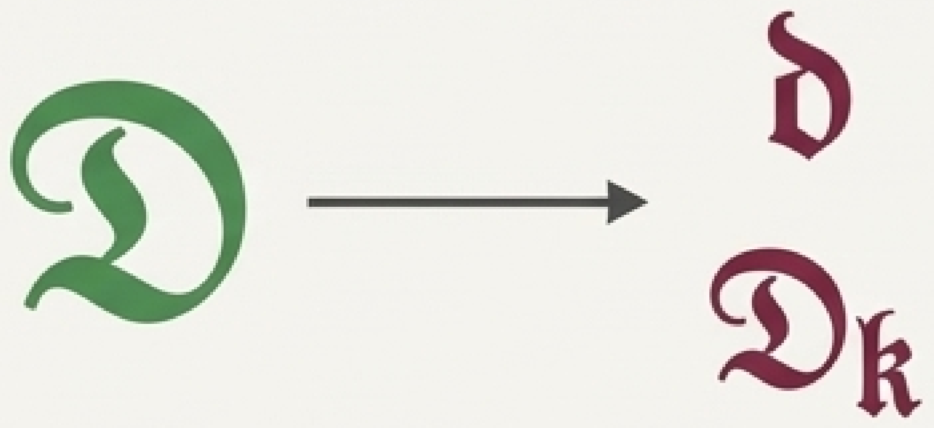
Significance: この簡潔な等式は、体の拡大における分岐構造が、各段階でどのように「積み重なって」いくかを直接的に示している。

塔定理が語ること：構造の継承と分解

Core Insight: ヒルベルトの相対不変量と塔定理は、体の算術的性質（特に分岐）が、体の塔を通じてどのように振る舞うかを精密に記述する。

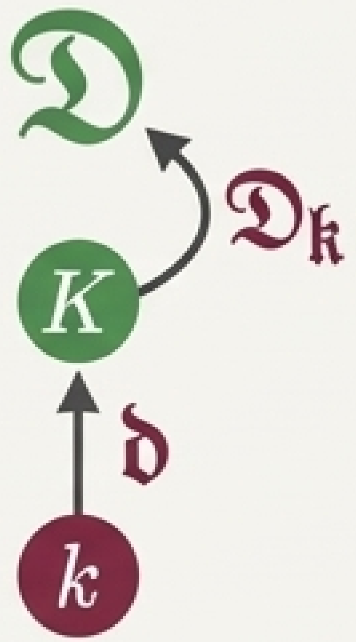
1. 分解（Decomposition）

大きな体 $K/\mathbb{Q}$ の不変量（$D, \mathfrak{D}$）は、より単純な構成要素である $k/\mathbb{Q}$ の不変量と、K/k で新たに生じる「相対的な」情報に分解できる。



2. 継承（Inheritance）

下の体 k の持つ算術的性質は、上の体 K へと引き継がれ、相対ディファレンテ $\mathfrak{D}_k$ と相対判別式 $\mathfrak{D}_k$ がその拡大で加わる「新しい」情報を捉える。



Key Concept : 相対不変量は、体の拡大における「情報の増分」そのものである。

ヒルベルトの遺産：代数的整数論の礎

**Summary of the Journey*:

- 我々は、絶対不変量という馴染み深い概念から出発した。
- ヒルベルトの導きにより、それを「相対体」という新たな文脈へと一般化した。
- その結果、体の塔の構造を貫く、判別式とディファレンテに関する普遍的な法則を発見した。

Enduring Impact:

- The Language of Modern Number Theory: 相対ノルム、相対トレース、相対判別式は、現代の類体論や岩澤理論など、代数的整数論のあらゆる分野で必須の語彙となっている。
- A Foundation for Deeper Questions: ヒルベルトの一般化は、単なる形式的な拡張ではなく、数の世界のより深い構造を解明するための、不可欠な一歩であった。

$$\begin{array}{c} K \\ \uparrow \\ k \\ \uparrow \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$$D = d^{[K:k]} \cdot N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{D}_k)$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_k \cdot \mathfrak{d}$$