数体の建築学：ヒルベルト『数論報告』に見る単数群の構造

ディリクレの単数定理への道程

NotebookLM

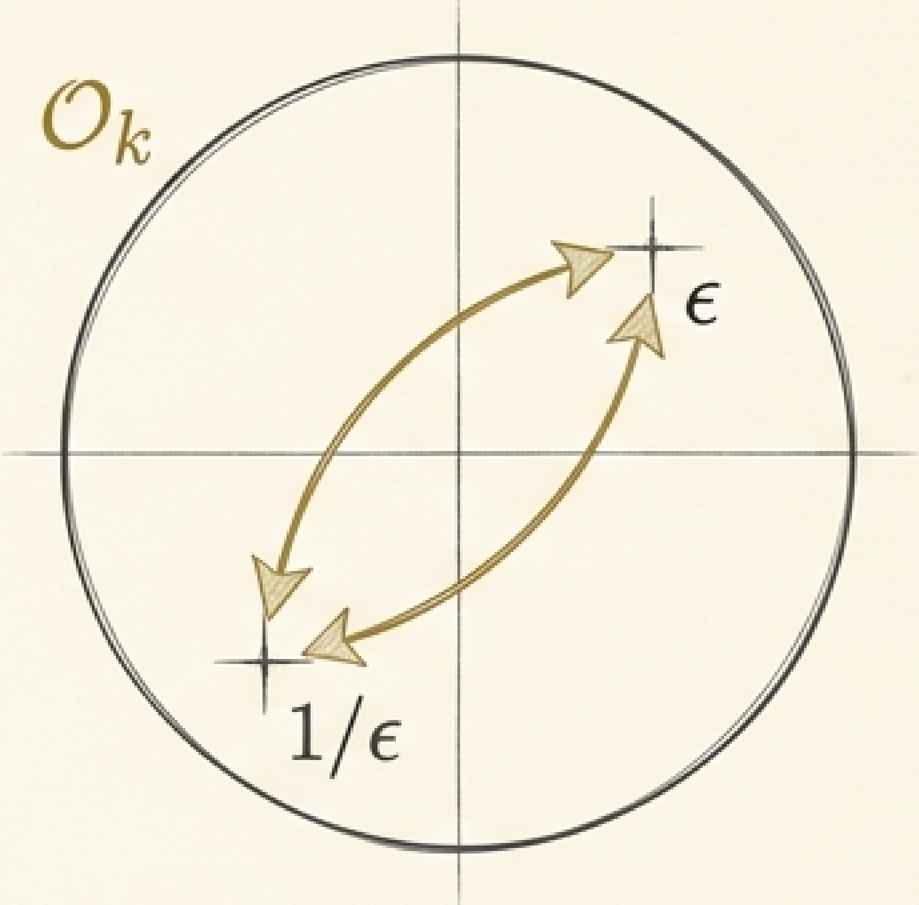
構造の中心にある謎：体の「単数」とは何か？

体 k の整数 ϵ を考える。

もしその逆数 $\dfrac{1}{\epsilon}$ もまた k の整数であるならば、ϵ を**単数（Einheit)** と呼ぶ。

これは、そのノルムが $N(\epsilon) = \pm 1$ であることと同値である。

*(Source: p.214, 「体の単元（Units）の存在に関する定理」)



The Central Question:

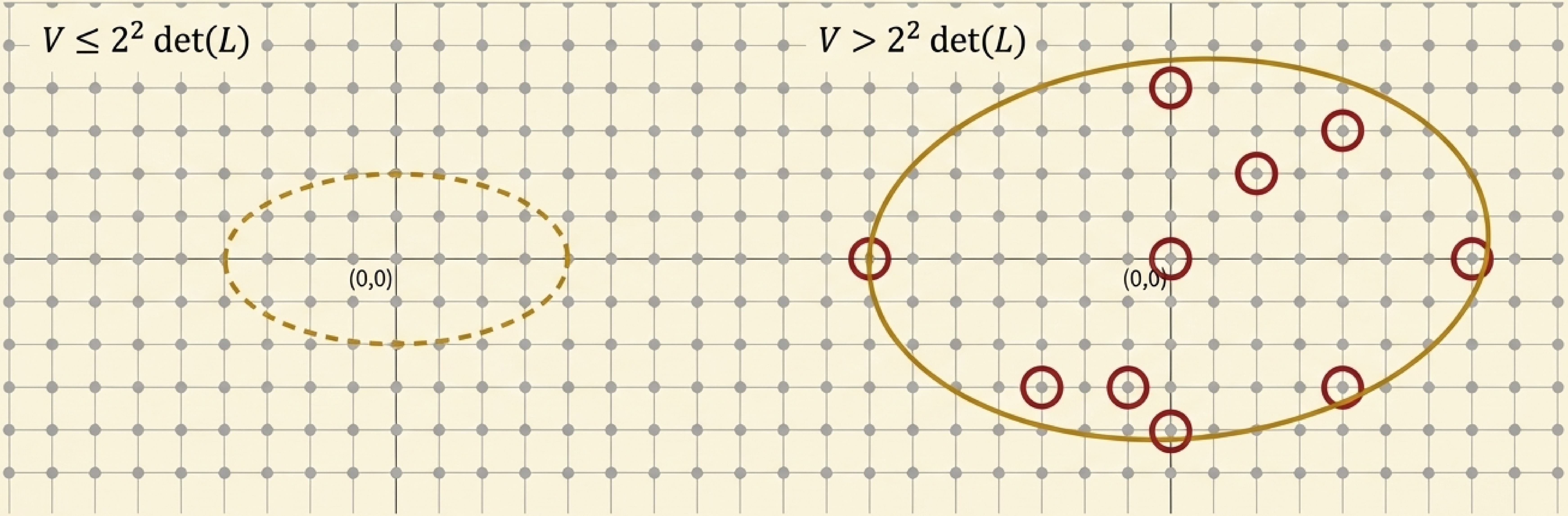
体 k の全ての単数がなす集合 O_k^* は、乗法について群をなす。

この**単数群 (unit group)** O_k^* は、一体どのような代数構造を持っているのだろうか？

NotebookLM

新たな礎石：数論への幾何学の導入

ヘルマン・ミンコフスキーによる**「数の幾何学」**は、代数的な問題を幾何学的な空間で捉え直す。



The Fundamental Tool: ミンコフスキーの格子点定理 (Minkowski's Lattice Point Theorem)

補助定理6 (Hilfssatz 6): n次元空間 $\mathbb{R}^n$ 内の体積 V の凸な対称集合 K と、基本領域の体積が $\det(L)$ である格子 L を考える。もし $V > 2^n \det(L)$ であれば、K は少なくとも一つの非自明な格子点を含む。

*(Modern interpretation of the principle from Hilfssatz 6 & 7, p.210)

NotebookLM

幾何学と代数学を繋ぐ架け橋

代数的世界
(Algebraic World)

数体 k の整数環
O_k とその元 α

1. 埋め込み
(Embedding)

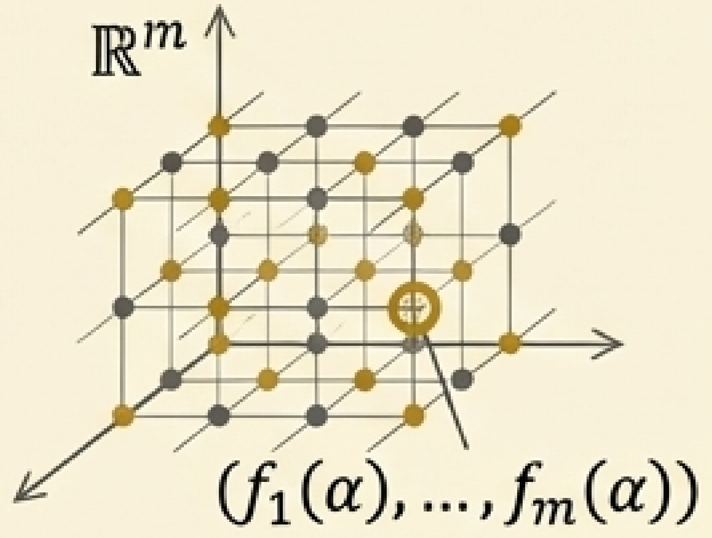
$\sigma_i : k \to \mathbb{C}$
(r_1 実, r_2 複素ペア)

線形形式
(Linear Forms)

α から $m = r_1 + r_2$
個の実線形形式 f_s
を構成する

写像
(Mapping)

幾何学的世界
(Geometric World)



O_k は $\mathbb{R}^m$ 内の**格子**をなす

この対応の威力

α の代数的な性質（例：ノルム $|N(\alpha)|$）が、対応するベクトルの幾何学的な性質（例：ベクトルの大きさ）に翻訳される。ミンコフスキーの定理を使えば、望ましい性質を持つ整数 α の**存在**を幾何学的に証明できる。

NotebookLM

第一の柱：体の非自明性を示す

定理44 (Satz 44)

$$|d| > 1$$

(ただし $k \neq \mathbb{Q}$)

*(Source: p.211,「定理 44. 数体の判別式の絶対値は常に ±1 ではない」)

この定理の意義 - Significance

- 判別式は体の「複雑さ」を測る指標である。
- $|d| > 1$ は、整数環 O_k が分岐する素数を持つことを意味し、$\mathbb{Z}$ とは異なる豊かな構造を持つことを保証する。

証明の核心 - Core of the Proof

- ミンコフスキーの定理を応用し、$1 \leq |N(\alpha)| < \sqrt{|d|}$ を満たす非ゼロ整数 α の存在を示す。
- もし $|d| = 1$ であったと仮定すると、$|N(\alpha)| \geq 1$ という事実と矛盾する。

*(Distilled from the argument on p.213)

NotebookLM

第二の柱：世界の有限性を証明する

定理45（Satz 45）

与えられた判別式`d´を持つ n 次の代数体は、有限個しか存在しない。

*(Source: p.212,「定理 45. 与えられた判別式をもつ n 次の体は、有限個しか存在しない。」)

この定理の意義 - Significance

- この定理がなければ、代数体の分類は不可能であった。
- これにより、数体が持つ基本的な不変量（次数 n と判別式 d）によって、数体を「整理」できることが保証される。

証明の核心 - Core of the Proof

ミンコフスキーの道具
→ α の全ての共役が有界

↓

α の最小多項式の係数が有界

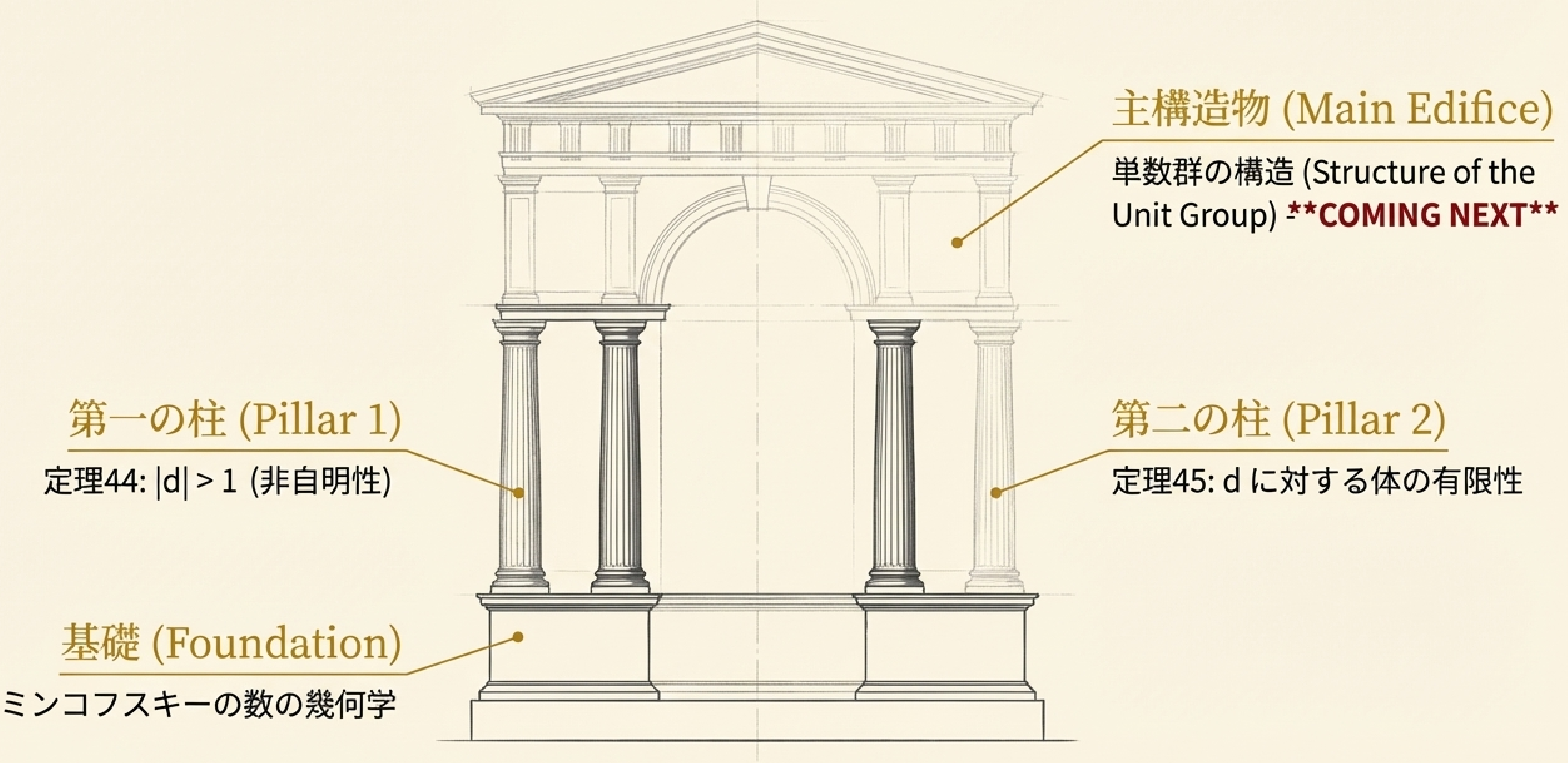
↓

そのような多項式は有限個
→ 対応する体も有限個

*(Logic from Satz 43 and proof sketch on p.213)

NotebookLM

建築計画の現在地



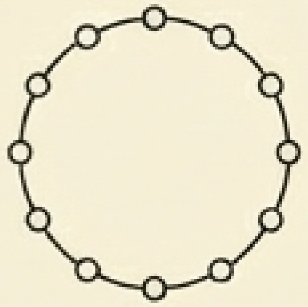
NotebookLM

主構造物の完成：ディリクレの単数定理

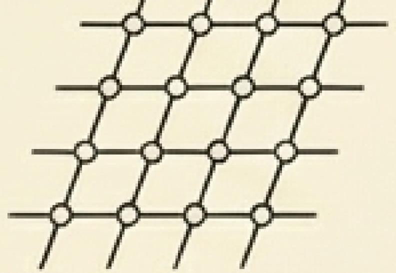
定理47 (Satz 47): k を代数体とし、実埋め込みの数を r_1、複素共役埋め込みのペアの数を r_2 とする。このとき、単数群 $\mathcal{O}_k^*$ は以下の構造を持つ。

$$\mathcal{O}_k^* \cong \mu(k) \times \mathbb{Z}^r$$

ここで $r = r_1 + r_2 - 1$



$\mu(k)$ (ねじれ部分 Torsion Part):
体 k に含まれる**1のべき根 (roots of unity)** のなす有限巡回群。



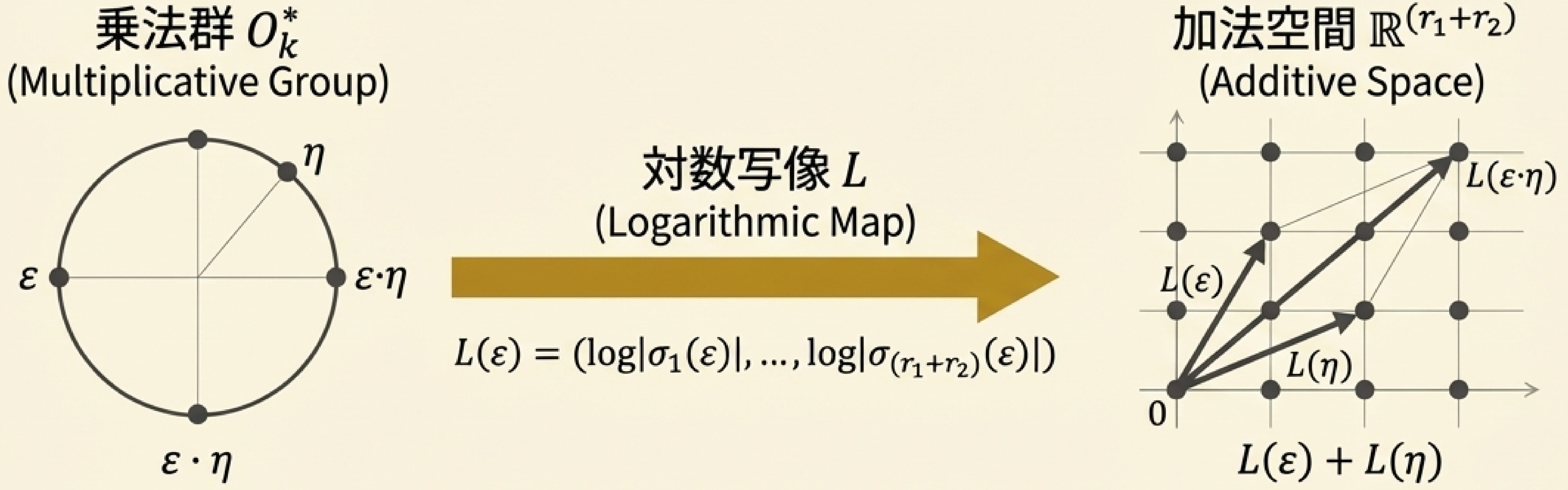
$\mathbb{Z}^r$ (自由部分 Free Part):
r 個の**基本単数** (fundamental units) $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ によって生成される自由アーベル群。

In Essence: k の全ての単数 ε は、$\varepsilon = \zeta \cdot \varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_r^{a_r}$ の形で一意に書ける。

*(Source: p.214, Satz 47)

NotebookLM

天才の一手：対数空間への写像



乗法 $\varepsilon\cdot\eta$ は、対数空間ではベクトルの**加法** $L(\varepsilon) + L(\eta)$ に対応する。

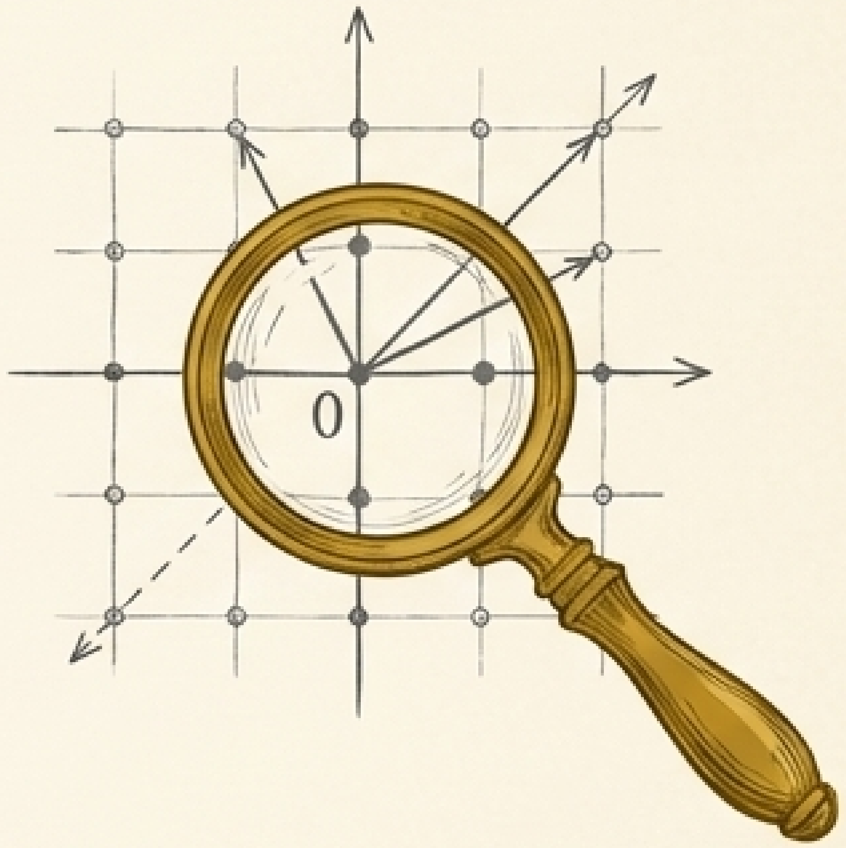
$$l_s(\varepsilon\eta) = l_s(\varepsilon) + l_s(\eta)$$ (Source: p.216)

新たな目標

単数群 $O_k{}^*$ の像 $L(O_k^*)$ が、$\mathbb{R}^{(r_1+r_2)}$ 内の**階数 r の格子**をなすことを証明する。

NotebookLM

証明の解剖（1）：写像の核と1のべき根



Question:

対数写像 L でゼロベクトル (0, 0, …, 0) に写される単数 ε は何か？

$$L(\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \log|\sigma_i(\varepsilon)| = 0 \text{ for all } i$$

Answer:

これは、全ての共役 $\sigma_i(\varepsilon)$ の絶対値が 1 であることを意味する。

$$|\sigma_i(\varepsilon)| = 1 \text{ for all } i$$

Conclusion:

この条件を満たす代数的整数は、**1のべき根** (Einheitswurzel) に限られる。（クロネッカーの定理）

したがって、$\mathrm{Ker}(L) = \mu(k)$、すなわち単数群のねじれ部分である。

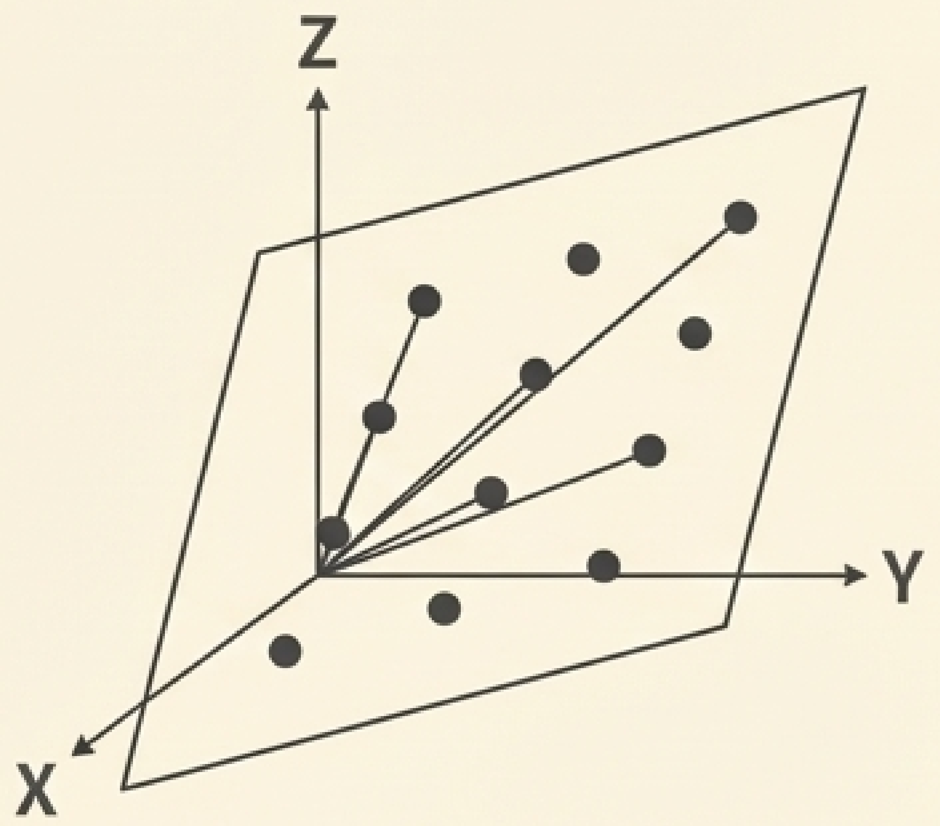
*(Connects to Satz 48, p.221)

NotebookLM

証明の解剖（2）：像と基本単数の存在

$L(O_k^*)$ が $r = r_1 + r_2 - 1$ 次元の空間（超平面 $\sum x_i = 0$）を張る格子であることを示す。

1. **離散性（Discreteness）**：$L(O_k^*)$ が格子、すなわち離散部分群であることを示す。これは、ノルムが± 1であることから導かれる。
2. **階数（Rank）**：格子の階数が r であることを示す。これが証明の最難関部分である。



Minkowski's Triumphant Return

この階数の証明には、ミンコフスキーの定理を巧妙に利用して、対数空間で望ましい性質を持つ単数が存在することを示す必要がある。

補助定理9 (Hilfssatz 9) は、このために「特定の方向に大きい」単数を構成する重要なステップである。*(Source: p.216)*

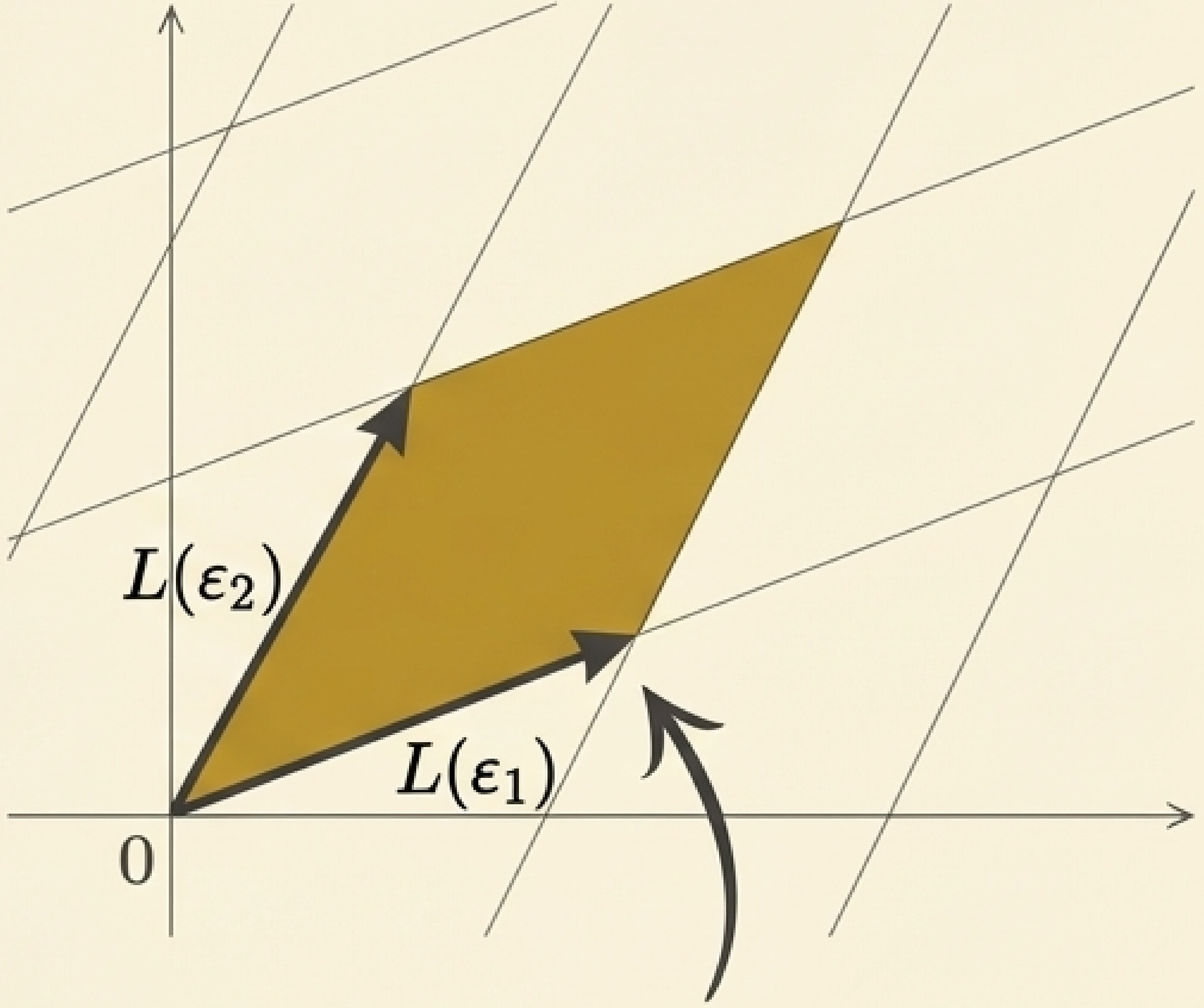
この補助定理を繰り返し用いることで、線形独立な r 個の単数ベクトルが見つかり、格子の階数が r であることが証明される。*(Source: p.218)*

NotebookLM

構造を測る：基本単数とレギュレーター

基本単数の体系 (System von Grundeinheiten) :
O_k^* の自由部分を生成する r 個の単数 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ の組。
この体系は一意ではないが、その選択が重要な不変量を定義する。
(Source: p.221, 「基礎単元の体系」)

体のレギュレーター (Regulator des Körpers k) :
対数空間における格子 $L(O_k^*)$ の**基本領域の体積**。
これは、$r \times r$ 行列式の絶対値として定義される。
$R_k = \left|\det\left(l_i(\varepsilon_j)\right)_{i,j=1\ldots r}\right|$
R_k は k のみに依存する基本的な不変量であり、単数群の「大きさ」や「密度」を測る指標となる。
(Source: p.221, formula for R)



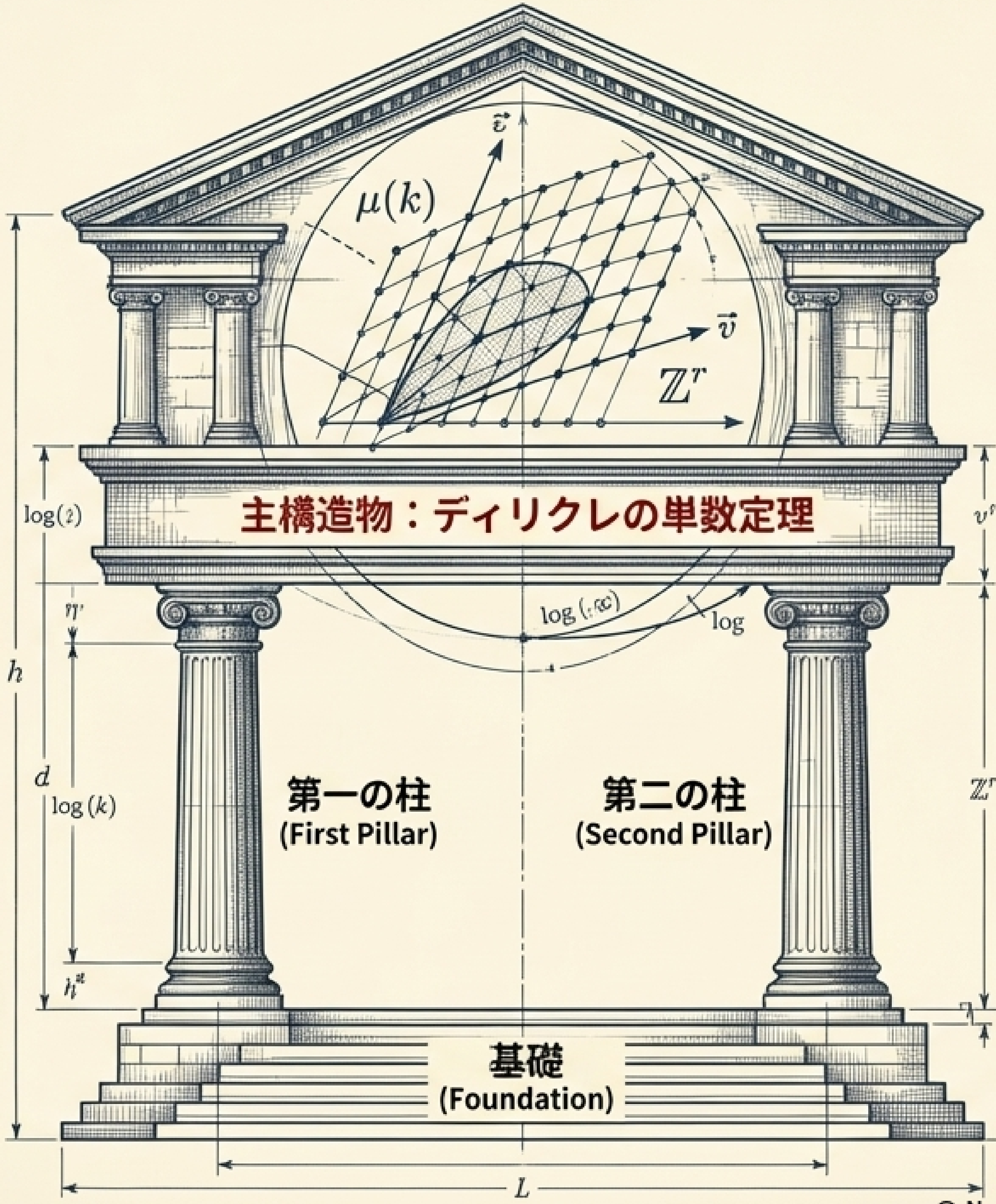
基本領域 (Fundamental Domain)
体積 = **レギュレーター R_k**

NotebookLM

完成された建築

1. 出発点 (Starting Point): 単数群 O_k^* の構造という代数的な謎。
2. 礎石 (Foundation): ミンコフスキーの数の幾何学という強力な道具。
3. 柱 (Pillars): 判別式と体の有限性に関する基本的な定理を構築。
4. 主構造 (Main Edifice) : 対数写像を用いて、O_k^* がねじれ部分と自由部分からなることを解明。

Hilbert's Triumph: これは、個々の問題を解くだけでなく、数学的対象の**内在的な構造**を明らかにする、ヒルベルトの構造主義的アプローチの勝利である。



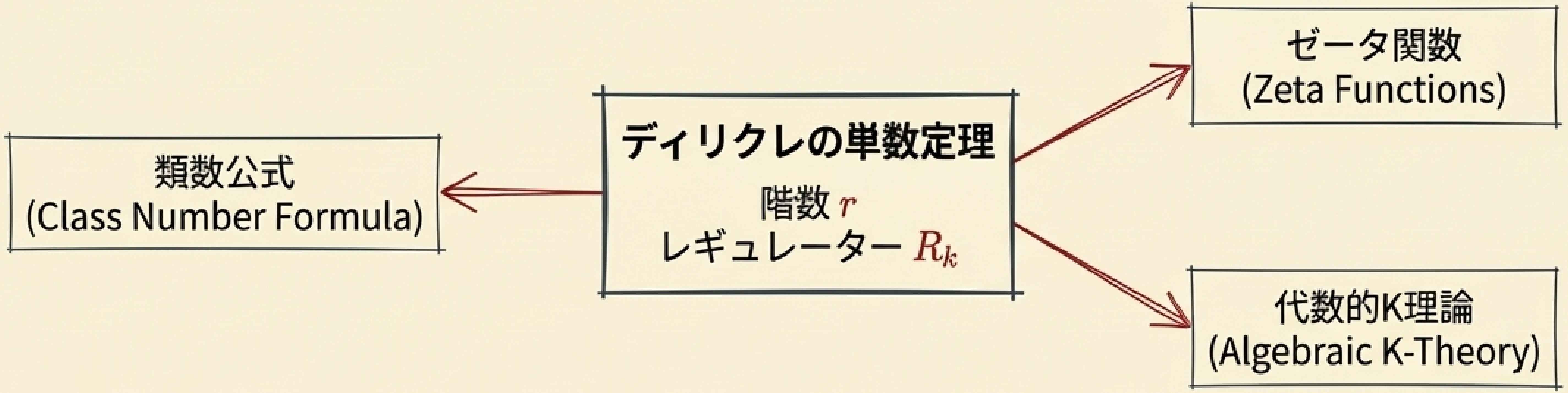
NotebookLM

数論の地平を拓く

単数群の階数 $r = r_1 + r_2 - 1$ とレギュレーター R_k は、代数体 k の基本的な不変量となった。

これらの不変量は、より高度な理論、特に類数公式 (Class Number Formula) において中心的な役割を果たし、体の整数論における他の重要な不変量 (類数、ゼータ関数など) と深く結びついている。

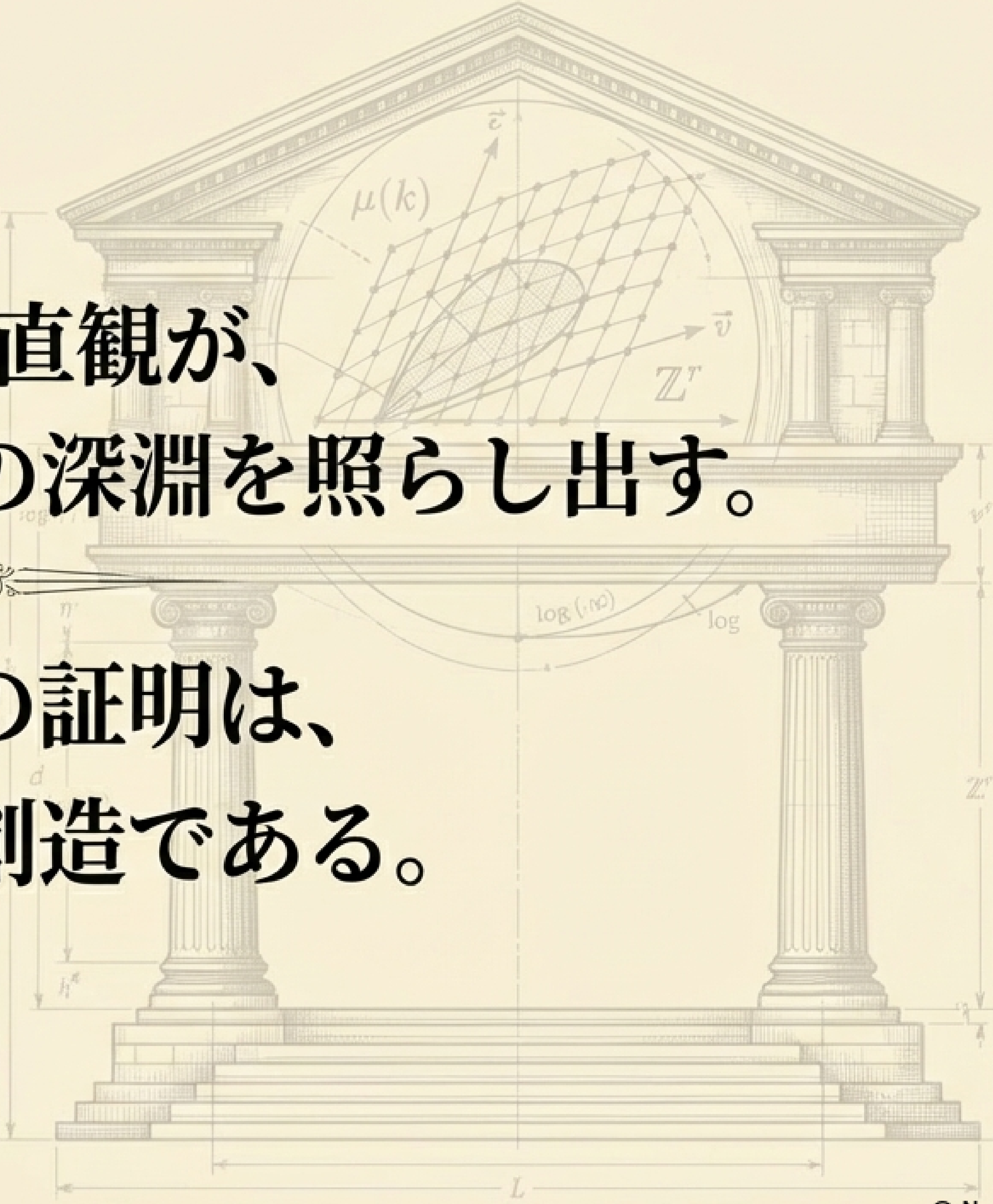
ヒルベルトが示したこの構造は、現代代数的整数論の全ての研究の基礎となっている。



NotebookLM

幾何学的な直観が、
最も純粋な代数的構造の深淵を照らし出す。

一つの定理の証明は、
一つの世界の創造である。



NotebookLM