二回積分型カーネル関数を用いた偏微分方程式の数値解法について II

家田 雅志
みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社
e-mail : mieda.acad@gmail.com

1 はじめに

偏微分方程式 (PDE) の数値解法としてカーネル関数、特に動径基底関数 (RBF) の線型結合を用いる方法がよく知られている。昨年度 [1] は、本手法にて PDE を解く場合の弱点である微分係数の近似精度について二階微分を RBF で近似する方法を提案した。本講演では、これを数理ファイナンスへの応用を見据えてベンチマーク追尾型の確率制御問題に適用し、価値関数および最適戦略が安定的に得られた点について報告する。

2 確率制御問題

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ にて $\{W_t\}_{t\geq 0}$ を n 次元ブラウン運動として、以下の制御付き確率過程を考える。

$$\begin{cases} \dfrac{dX_t}{X_t} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n \pi_t^i\right)\frac{dS_t^0}{S_t^0}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \{\pi_t\}_{0\leq t\leq T} \in \mathcal{A}^{\bar{\pi}}, \\ X_0 = x_0 = s_0^0 + s_0^\top \mathbf{1}, \end{cases}$$

ここで、S は以下のダイナミクスで記述される確率過程である。

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t^0}{S_t^0} = r(t)dt, \\ S_0^0 = s_0^0 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{dS_t^i}{S_t^i} = b^i(t)dt \\ \qquad + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(t) dW_t^j\ , \\ S_0^i = s_0^i > 0, \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \end{cases}$$

ただし、$\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$、$r, : [0,T] \to \mathbb{R}$, $b : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ は確定的関数、$T < \infty$ にて $b^i(t) - r(t) > 0$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $t \in [0,T]$ を仮定する。

制御過程は $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^n)^\top$ であり、$\mathcal{A}$ を以下を満たす確率過程 $\{u_t\}_{0\leq t\leq T}$ の作るクラスとする。

1) $0 \leq u_t^i \leq 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$.
2) $u_t^\top \mathbf{1} = 1$

パフォーマンス評価基準 J は確定的ベンチマーク関数 f と制御対象との下方二乗平均誤差により定義する：

$$\begin{aligned} &J_t^\pi(x) \\ &= \mathbb{E}\Big[\alpha(f(T) - X_T)_+^2 \\ &\quad + (1-\alpha)\frac{1}{T}\int_t^T (f(s) - X_s)_+^2 ds \,\Big|\, X_t = x\Big]. \end{aligned}$$

ただし、$\alpha > 0$ は最終時点でのトラッキングエラーと制御中の累積エラーに対するウェイト・パラメーター、$(x)_+ = x 1_{\{x>0\}}$, $x \in \mathbb{R}$ である。

価値関数を

$$V_t(x) = \inf_{\pi\in\mathcal{A}} J_t^\pi(x),$$

により定義すれば、これは以下の Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程式を満たす [2]。

$$\begin{aligned} &\partial_t V_t(x) + \min_{\pi\in\mathcal{A}}\{\mathscr{L}_t^\pi V_t(x)\} = 0, \qquad (1) \\ &V_T(x) = \alpha(f(T) - x)_+^2 \end{aligned}$$

ただし、$\mathscr{L}_t^\pi$ は確率過程 X の無限小生成作用素で $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_t^\pi \phi(x) \\ &\quad = \left(r(t) + (b(t) - r(t)\mathbf{1})^\top \pi\right) x\partial_x\phi(x) \\ &\qquad + \frac{1}{2}x^2\pi^\top\sigma(t)\sigma(t)^\top\pi\partial_{xx}\phi(x) \\ &\qquad + \frac{1-\alpha}{T}(f(t) - x)_+^2\,, \end{aligned}$$

である。この HJB 方程式を解くことで価値関数およびそれを実現する最適戦略が得られる。

3 カーネル関数による PDE 解法

上記の HJB 方程式 (1) は π に対する二次計画問題とみなすことができるがクラス $\mathcal{A}$ に課せられた条件により π を解析的に書き下すことは（V を含む形であっても）困難である。そこで、カーネル関数を用いた PDE 解法によりこれを求める。紙面の関係上、非常に大雑把な説明にはなるが $t_k = kh, k = 0, \cdots, n, h := T/n$, $\xi_j^k \in \mathbb{R}$, $\bar{x}_j \in \mathbb{R}$ として、偏微分方程式の解 V を

$$V_{t_k}(x) \simeq \sum_{j=1}^N \xi_j^k \Phi(x, \bar{x}_j)$$

により近似する方法である。計算方法の詳細は[3] 参照。ここで、$\Phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ がカーネル関数と呼ばれるものであるがここでは昨年度の結果より

$$\Phi(x,\bar{x}_j) = \frac{\left(-2\varepsilon^2+(x-\bar{x}_j)^2\right)\sqrt{1+\frac{(x-\bar{x}_j)^2}{\varepsilon}}}{6} + \frac{\varepsilon(x-\bar{x}_j)\sinh^{-1}\left(\frac{x-\bar{x}_j}{\varepsilon}\right)}{2}$$

とする。これは下記のように 2 階微分を multi-quadratic (MQ) RBF により近似していることに相当する：

$$\frac{\partial^2 V_{t_k}}{\partial x^2}(x) \simeq \sum_{j=1}^{N} \xi_j^k \sqrt{1+\frac{(x-\bar{x}_j)^2}{\varepsilon^2}},$$

4　数値計算結果

トラッキング対象を線形関数

$$f(t) = 0.01t$$

とし、$\alpha = 0.5$ と設定した場合についての数値計算結果を示す。主要パラメーターは以下の通りである。

n	2	T	10.0
r	0.01	n	1200
b^1	0.01	N	26
b^2	0.05	$x_{\min}$	11.0
σ^{11}	0.01	$x_{\max}$	61.0
σ^{22}	0.03	ε	8
$\sigma^{12}=\sigma^{21}$	0.0095		

まず、価値関数の二階微分の計算結果を示す。通常のカーネル関数を用いた場合、計算結果が振動する傾向が見受けられるが二回積分形カーネル関数を用いた場合には安定的に解が得られていることが見て取れる。

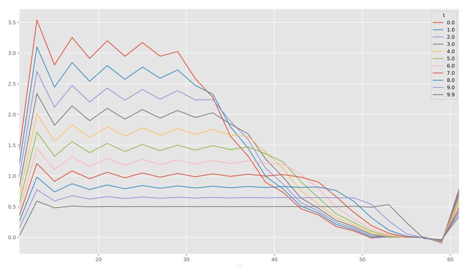

図 1. 二階微分計算結果（カーネル関数）

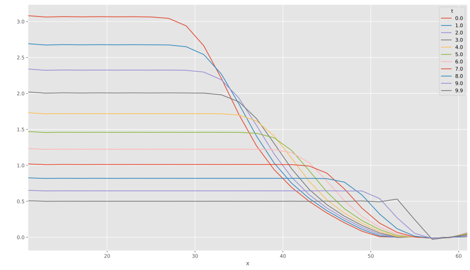

図 2. 二階微分計算結果（二回積分型カーネル関数）

次に、得られた最適戦略は以下の通りである．計算領域の殆どで青色で示された S^2 の選択が支配的に見えるが実際には x の小さい領域に達さないため S^1 も使用される点に注意しておく。（詳細は発表時に別グラフを示す。）

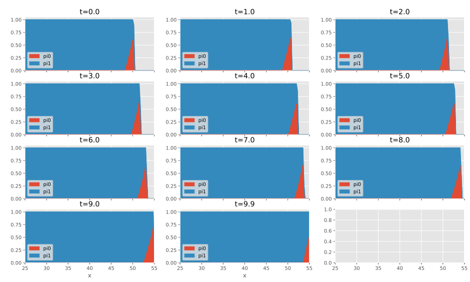

図 3. 最適戦略計算結果

5　免責事項

本稿に示されている意見は、筆者個人に属し、筆者の所属する組織の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者個人に属する。

参考文献

[1] 家田雅志．二回積分型カーネル関数を用いた偏微分方程式の数値解法について. In **日本応用数理学会** *2018* **年 年会**, 2018.

[2] Huyên Pham. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2009.

[3] Yumiharu Nakano. Convergence of meshfree collocation methods for fully nonlinear parabolic equations. *Numerische Mathematik*, 136(3):703–723, jul 2017.