# 基礎マクロ：ラグランジュ未定乗数法の使い方

日野将志

一橋大学

2021

# ラグランジュ法のイントロ



ラグランジュ法はとても便利：

- (良い点)：代入法では解けない問題が解ける
  - 逆は成り立たない．つまり，「ラグランジュ法で解けないけど，代入法では解ける」ような問題はない
  - なのでラグランジュ法を覚えた後は，ラグランジュ法のみ使う
  - (例 1)：制約が不等式のときでも使える
  - (例 2)：制約が非線形の関数形でも使える (e.g. 社会的計画者)
- (悪い点)：ラグランジュ法はちょっと理解しにくい (かも)

# 一般的な表記：



これまで2期間モデルや，労働時間の選択を学んだ．また，ミクロ経済学でも最適化を学んでいると思う．それらを一般に次のように表記する．

$$\max_{c} u(c)$$
$$\text{s.t. } g(c) \geq 0$$

- 例
  (1) 生涯予算制約 $g(c_1, c_2) \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r}$
  (2) 静学的な労働 $g(c, h) \equiv wh - c$
- 不等号は等号の一般化
- 制約の範囲内 $g \geq 0$ で $u$ を最大化する $c$ を探す

# ラグランジュ法の計算方法



- 次のような関数をラグランジュ関数 (または Lagrangian) と呼ぶ

$$\mathcal{L} = u(c) + \lambda[g(c)]$$

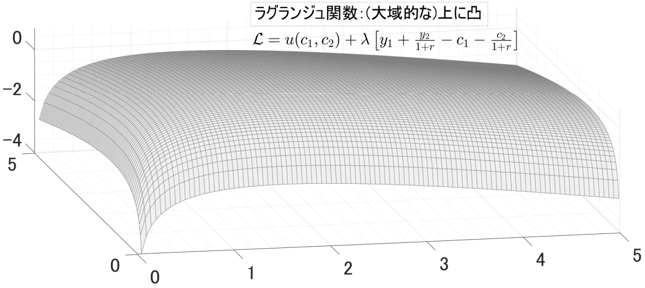
  $\lambda$ はラグランジュ乗数と呼ぶ
  - ラグランジュ関数 = 目的関数 + ラグランジュ乗数 × 予算制約 ($\geq 0$)
  - よく間違える点：$g \leq 0$ の形にしてはいけない
- これを微分して 0

$$u'(c) + \lambda g'(c) = 0$$

  これを満たすような $c$ が最適化の解

# ラグランジュ関数の図示






- 元の $u$ が単調増加関数でも，ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ は上に凸な関数になる
- ラグランジュ関数を「微分して 0」を解けば OK
  - (コメント：必要であれば数学の講義を復習)

# 例：静学的な労働選択



$$\max_{c,l} \ \log(c) + \log(l)$$
$$\text{s.t.} \quad c \leq w(1-l)$$

ラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = \log(c) + \log(l) + \lambda[w(1-l) - c]$$

これを $c$ と $l$ についてそれぞれ微分して 0 とする

$$c : \frac{1}{c} - \lambda = 0$$
$$l : \frac{1}{l} - \lambda w = 0$$

2 本の式を $\lambda$ について代入して，予算制約を代入する (次のページ)

# 例：静学的な労働選択 (cont'd)



2 本の式を $\lambda$ について代入して，予算制約を代入する

$$
\begin{aligned}
&\frac{w}{c} = \frac{1}{l} \\
&\Rightarrow \frac{w}{w(1-l)} = \frac{1}{l} \\
&\Rightarrow l = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

同じ解が得られた．同様に $(c, h)$ も代入法と同じものが得られる．

# 例２：二期間の消費



今度は２本制約式がある

$$\max_{c_1, c_2} \log(c_1) + \beta \log(c_2)$$
$$\text{s.t.} \quad c_1 + s \leq y_1$$
$$c_2 \leq y_2 + (1+r)s$$

このとき，ラグランジュ関数は，

$$\mathcal{L} = \log(c_1) + \beta \log(c_2) + \lambda_1 [y_1 - c_1 - s] + \lambda_2 [y_2 + (1+r)s - c_2]$$

となる．

# 例２：二期間の消費 (cont'd)



ラグランジュ関数 (再掲)

$$\mathcal{L} = \log(c_1) + \beta \log(c_2) + \lambda_1[y_1 - c_1 - s] + \lambda_2[y_2 + (1+r)s - c_2]$$

この一階の条件は,

$$\begin{aligned} c_1 &: \frac{1}{c_1} = \lambda_1 \\ c_2 &: \beta \frac{1}{c_2} = \lambda_2 \\ s &: \lambda_1 = \lambda_2(1+r) \end{aligned}$$

となる．これを解くと，次のようにオイラー方程式を得る (これ以降は代入法と同じ計算)

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2}$$

# 補足：ラグランジュ関数の意味



$$\mathcal{L} = u(c) + \lambda[g(c)]$$

- $\lambda$ は制約 $g(c)$ を破ることによる (内生的な) ペナルティ
  - $\lambda$ が小さい $\Rightarrow$ 制約を破ってしまう ($g(c) < 0$)
  - $\lambda$ が大きい $\Rightarrow$ 制約を守り過ぎる ($g(c) > 0$)
  - $\lambda$ がちょうどいい $\Rightarrow$ ちょうど制約が守られる ($g(c) = 0$)
- $\Rightarrow$ ラグランジュ法はちょうどいい $\lambda$ を選ぶことで，予算をちょうど守りながら，目的を最大化する解を見つける！

証明はやりません (経済学者でも証明をやったことある人は多くない気が…)