基礎マクロ練習問題の解答例：ソローモデル

日野将志 *

1

1.1 生産性の成長のあるソローモデルの生産要素

企業の最大化問題は静学的なので，時間の添え字は落として書く．最大化問題は，

$$\begin{aligned}
&\max_{K,L}\ F(K,AL) - wL - (r+\delta)K \\
&\max_{K,L}\ AL\left[F(K,AL)/AL - wL/AL - (r+\delta)K/AL\right] \\
&\max_{\tilde{k},L}\ AL[f(\tilde{k}) - w/A - (r+\delta)\tilde{k}]
\end{aligned}$$

と書き直すことが出来る．

この一階の条件は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{k}:\ f'(\tilde{k}) = r+\delta \qquad (1.1) \\
&L:\ A[f(\tilde{k}) - w/A - \underbrace{(r+\delta)}_{f'(\tilde{k})}\tilde{k}] + AL[\underbrace{f'(\tilde{k}) - (r+\delta)}_{\text{equation (1.1)}}]\frac{\partial\tilde{k}}{\partial L} = 0 \\
&\Leftrightarrow A[f(\tilde{k}) - \tilde{k}f'(\tilde{k})] = w
\end{aligned}$$

と書くことが出来る．この賃金はスライド 27 ページ (移行動学のパート) の部分に該当する．

定常状態において r は

$$r = f'(\tilde{k}^*) - \delta$$

と定数で決まる．したがって，一切成長しない．

一方，定常状態において w は，

$$\begin{aligned}
&w = A[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)] \\
&\Rightarrow \frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)]}{[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)]} \\
&\frac{w_{t+1}}{w_t} = (1+g^A)
\end{aligned}$$

と成長する．

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

コメント：つまり家計サイドに立つと，ソローモデルの定常状態において利子率は成長しないが，賃金は成長する．結果的に利子所得 rK は K が g^A の率で成長し，労働所得 wL も L が一定なので，g^A の率で成長する．

1.2 生産性の成長のないソローモデル

$$
\begin{aligned}
&K' = sF(K,N) + (1-\delta)K \\
&\Rightarrow \frac{K'}{N'}\frac{N'}{N} = \frac{sF(K,N)}{N} + (1-\delta)\frac{K}{N} \\
&\Rightarrow k' = sf(k) + (1-\delta)k
\end{aligned}
$$

この三本目の式が基本方程式．

定常状態は $k' = k$ であるので

$$
\begin{aligned}
k &= sf(k) + (1-\delta)k \\
&\Rightarrow sf(k) = \delta k
\end{aligned}
$$

である．ここで δ および s は動かないので，k は定常状態で動かない ($k' = k$ の定義より，k が動かないのは自明と言えば自明)．

1.3 コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

まずコブ・ダグラス型生産関数は

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{K}{N},1\right) &= \frac{F(K,N)}{N} \\
&= \frac{K^\alpha N^{1-\alpha}}{N} \\
&= K^\alpha N^{-\alpha} \\
&= \left(\frac{K}{N}\right)^\alpha \\
&= k^\alpha
\end{aligned}
$$

となる．

つぎに，講義スライドより，基本方程式は

$$
\begin{aligned}
k' &= sf(k) + (1-\delta)k \\
k' &= sk^\alpha + (1-\delta)k
\end{aligned}
$$

と求められる．

これが定常状態では，$k' = k$ なので，

$$
\begin{aligned}
&sk^\alpha = \delta k \\
&\Rightarrow k^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta} \\
&\Rightarrow k = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

となる．この k が黄金律の k である．

最後に，この黄金律における消費を求める．まず，消費は，

$$
\begin{aligned}
&C = (1-s)Y \\
&\Rightarrow \frac{C}{N} = (1-s)\frac{Y}{N} \\
&\Rightarrow c = (1-s)f(k) \\
&\Rightarrow c = (1-s)k^{\alpha} \\
&\Rightarrow c = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と一人当たり消費が得られる．

1.4　人口成長

人口成長があるとき，基本方程式の導出に少しだけ注意が必要である．つまり，講義スライドより，

$$K' = sF(K,N) + (1-\delta)K$$

を思い出してほしい．これの両辺を N で割る．

$$\frac{K'}{N'}\underbrace{\frac{N'}{N}}_{1+n} = sf(k) + (1-\delta)k$$

を得る．この左辺に注目すると，左辺の二番目の分数部分が人口成長率になっていることが分かる．したがって，

$$(1+n)k' = sf(k) + (1-\delta)k$$

が基本方程式となる．

黄金律は，

$$
\begin{aligned}
nk &= sf(k) - \delta k \\
sf(k) &= (n+\delta)k
\end{aligned}
$$

を満たすような k である．

1.5　生産性の成長

コブ・ダグラス型生産関数の場合，ハロッド中立，ヒックス中立，ソロー中立の全てを満たす．なぜなら，

$$
F(K,AN) = \begin{cases}
K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha} & (\text{ハロッド中立}) \\
A^{1-\alpha}K^{\alpha}N^{1-\alpha} & (\text{ソロー中立}) \\
A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}K)N^{1-\alpha} & (\text{ヒックス中立})
\end{cases}
$$

と書き換えることが出来る．

上の問題と同様に，

$$K' = sF(K,AN) + (1-\delta)K$$

から始める．この両辺を AN で割ると，

$$\begin{aligned}&\frac{K'}{A'N'}\frac{A'N'}{AN}=s\frac{F(K,AN)}{AN}+(1-\delta)\frac{K}{AN}\\&\Rightarrow (1+a)\tilde{k}'=sf(\tilde{k})+(1-\delta)\tilde{k}\\&\Rightarrow (1+a)\tilde{k}'=s\tilde{k}^{\alpha}+(1-\delta)\tilde{k}\end{aligned}$$

となる．なお，ここで $f(\tilde{k},1)=F(K/AN,1)$ である．これが基本方程式である．

定常状態において，

$$\tilde{k}=\tilde{k}'$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{K}{AN}=\frac{K'}{A'N'}\\&\Rightarrow \frac{K}{N}\frac{1}{A}=\frac{K'}{N'}\frac{1}{A'}\\&\Rightarrow k\frac{1}{A}=k'\frac{1}{A'}\\&\Rightarrow \frac{k'}{k}=\frac{A'}{A}=(1+a)\end{aligned}$$

である．したがって，k は成長率 a で成長する．

上の問題と同様に黄金律は，

$$\begin{aligned}&s\tilde{k}^{\alpha}=(a+\delta)\tilde{k}\\&\Rightarrow \tilde{k}=\left(\frac{s}{a+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

と求まる．

もし a が変わると，

$$\frac{d\tilde{k}}{da}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{s}{a+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\frac{-s}{(a+\delta)^2}<0$$

と $\tilde{k}$ は下がる．

黄金律における一人当たり消費は

$$\begin{aligned}&C=(1-s)F(K,AN)\\&\Rightarrow \frac{C}{AN}=(1-s)f(\tilde{k})\\&\Rightarrow \frac{c}{A}=(1-s)\left(\frac{s}{\delta+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\\&c=A\,(1-s)\left(\frac{s}{\delta+a}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

である．

r は次のように決まる．

$$
\begin{aligned}
r &= F_K(K, AN) - \delta \\
&= \alpha K^{\alpha-1}(AN)^{1-\alpha} - \delta \\
&= \alpha \tilde{k}^{\alpha-1} - \delta
\end{aligned}
$$

したがって，定常状態では $\tilde{k}$ は動かないので，r も動かない．

次に w は次のように決まる．

$$
\begin{aligned}
w &= F_N(K, AN) \\
&= (1-\alpha)K^{\alpha}A^{1-\alpha}(N)^{-\alpha} \\
&= (1-\alpha)A\tilde{k}^{\alpha}
\end{aligned}
$$

定常状態では $\tilde{k}$ は動かないが，A が成長を続ける．そのため，賃金は A の成長率で伸びていくことが分かる．

つまり，ソローモデルでは，(定常状態にいると考えられる) 先進国では，経済成長によって利子率は変化しないが賃金が伸びていくと予想される．

コメントおよび問題の主旨：特に二番目の小問に注目したい．多くの先進国はすでに十分な成長をしており，定常状態の近くにいると考えられる．しかし，アメリカのような先進国は年率 2% 前後で今でも成長を続けている．この小問では，例えアメリカのような先進国であっても生産性が成長していれば，一人当たり資本 k も成長することを示している．一人当たり資本が成長するということは，一人当たり所得 $y = Af(k)$ も成長するということである．さらに，その結果，一人当たり消費も成長する．

2 連続時間

2.1

スライド通りにやれば直ちに求まる．すなわち，時間の単位を Δ とすると，

$$
\begin{aligned}
& A_{t+\Delta} - A_t = \Delta g A_t \\
& \Rightarrow \frac{A_{t+\Delta} - A_t}{\Delta} = g A_t
\end{aligned}
$$

とできる．これを $\Delta \to 0$ という極限を取ると，

$$
\dot{A}_t = g A_t
$$

とできる．

コメント：連続時間では，

$$
\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g
$$

というのは，成長率の式なので，比較的よく出てくる．

2.2　連続時間と離散時間の違い

基本方程式の導出はスライドにのっている．すなわち，基本方程式は，

$$\dot{\tilde{k}}_t = sf(\tilde{k}_t) - (a+\delta)\tilde{k}_t$$

である．ここで定常状態の定義 $\dot{\tilde{k}}_t = 0$ を適用すると，

$$sf(\tilde{k}) = (a+\delta)\tilde{k}$$

である．さらに，コブ・ダグラス型生産関数を仮定すると，離散時間のときと同様に，

$$s\tilde{k}^{\alpha} = (a+\delta)\tilde{k}$$
$$\Rightarrow \tilde{k} = \left(\frac{s}{a+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

と黄金律の $\tilde{k}$ が求まる．

これは離散時間のときと同じである．つまり，時間の単位が変わろうが，定常状態の性質は変わらない．直観的には，離散時間と連続時間は時間の流れに関する仮定が違うだけである．一方，定常状態とは時間が止まったような状態なので，定常状態では離散時間と連続時間の違いが効いてくるようなことはほとんどない．