# 基礎マクロ練習問題：消費

日野将志 *

## 1 ケインズ型消費関数

この大問では $0 < c_1 < 1$ とする.

### 1.1 財源

授業では政府支出 $G$ の財源がどのように調達されるか議論しなかった. これは暗黙に、政府は国債を発行することでお金を借りてくることで、税によって調達はしないと仮定していたからである.

#### 1.1.1

次のような消費関数を考える. ここで $T$ は所得税を意味する.

$$C = c_1(Y - T) + c_2$$

$T$ が減少すること、つまり所得減税を考える. このとき $dY/dT$ を求めよ.

コメント：$dY/dT$ は租税乗数などと呼ばれます.

#### 1.1.2

1.1.1 の問題を発展させて次のような環境を考える. まず、先ほどと同様に政府の財源として所得税 $T$ が次のように課されるとする. さらに、この所得税の税収と政府支出は常に一致するとする. これらは方程式で書くと次のようになる.

$$C = c_1(Y - T) + c_2$$
$$G = T$$

このとき、$dY/dG$ はどのような値になるか計算してみよ. また、乗数効果のような解釈を簡単に述べよ.

#### 1.1.3

また 1.1.1 のような環境に戻ろう. 次のような消費関数を考える. ここで $\tau^c$ は消費税を意味する.

$$(1 + \tau^c)C = c_1 Y + c_2$$

$\tau^c$ が減少すること、つまり消費減税を考える. このとき $dY/d\tau^c$ を求めよ.

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください.

#### 1.1.4

政府の財源として消費税 $\tau^c$ が次のように課されるとする.

$$
\begin{aligned}
(1+\tau^c)C &= c_1 Y + c_2 \\
G &= \tau^c C
\end{aligned}
$$

このとき、$dY/dG$ はどのような値になるか計算してみよ．また、乗数効果のような解釈を簡単に述べよ.

## 1.2　乗数効果

授業では限界消費性向 $c_1$ が高いほど乗数効果が高いと述べた．これを微分を使って証明してみよ.

# 2　2 期間モデル

## 2.1　スライドの確認

スライドで扱った対数効用関数の場合を使って、$\beta(1+r)=1$ かつ $y_1=y_2$ のとき $s=0$ かつ $c_1=c_2$ となることを確認せよ．なお，$r>0$(または $\beta<1$) とする.

## 2.2　計算問題

#### 2.2.1

予算制約は授業と同じ

$$
\begin{aligned}
c_1 + s &= y_1 \\
c_2 &= y_2 + (1+r)s
\end{aligned}
$$

とする．このとき、次の問いに答えよ.

- $y_1=y_2=1$ とする．さらに利子率 $r$ は 0 とする．効用関数は
$$u(c_1,c_2)=\log c_1+\log c_2$$
であるとする ($\beta=1$)．このとき $(c_1,c_2,s)$ を求めよ．結果について、1、2 行程度の解釈を加えよ (特に $s$ について).
- $(y_1,y_2)=(1,2)$ とする．さらに利子率 $r$ は 0 とする．効用関数は
$$u(c_1,c_2)=\log c_1+\log c_2$$
であるとする ($\beta=1$)．このとき $(c_1,c_2,s)$ を求めよ．結果について、1、2 行程度の解釈を加えよ (特に $s$ について).
- $(y_1,y_2)=(2,1)$ とする．さらに利子率 $r$ は 0 とする．効用関数は
$$u(c_1,c_2)=\log c_1+\log c_2$$
であるとする ($\beta=1$)．このとき $(c_1,c_2,s)$ を求めよ．結果について、1、2 行程度の解釈を加えよ (特に $s$ について).

ヒント：これらの問題を、一々解くのも練習には良いですが、効率的に答える方法も考えてみましょう.

2.2.2

同様に次のような問題を考えてみよう．予算制約は

$$\begin{aligned} c_1 + s &= y_1 \\ c_2 &= y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

とする．

効用関数は

$$\log c_1 + \beta \log(c_2)$$

とする．

$y_1 = y_2 = 1$ とする．このとき、どのようなときに、貯蓄 $s$ が正になるか、負になるか条件を述べよ．さらに，消費が成長するかどうかの $(c_2 \gtrless c_1)$ 条件も述べよ．

## 2.3　予算制約の違い

スライドでも記したように、予算制約を 2 本で書いても、1 本で書いても最大化問題の解は同じになる．このことを、次の最大化問題を

$$\begin{aligned} &\max_{c_1, c_2} u(c_1) + \beta u(c_2) \\ &\text{s.t. } c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \end{aligned}$$

を解いて確認せよ．

つまり、

- 同じオイラー方程式が導けることを確認せよ．
- 次に $u(c) = \log(c)$ を仮定して、この最大化問題を解くと、スライドの $(c_1, c_2)$ と同じ消費が得られることを確認せよ．

## 2.4　相対価格と利子率

授業では今期と来期の価格を明示的には導入しなかった．そこで次のような最大化問題を考える．

$$\begin{aligned} &\max_{c_1, c_2} u(c_1) + \beta u(c_2) \\ &\text{s.t. } p_1 c_1 + s = p_1 y_1 \\ &\qquad p_2 c_2 = p_2 y_2 + s \end{aligned}$$

ここでは $c_1$ は 1 期の購入数量であり，$p_1$ は価格であるので，$p_1 c_1$ が 1 期の支出金額となっている．$p_2$ と $c_2$ についても同様.

仮に $(1+r) \equiv p_1/p_2$ という変数を定義しよう．このとき、授業で習った場合とどう異なるか比較せよ．

## 2.5　後ろ向きの解き方

動学的な最適化は，今までとは異なる解き方でも解けることを示す問題として次のことを考えよう．スライドと次の同じ問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,s}\ & \log c_1 + \beta \log c_2 \\
\text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\
& c_2 = (1+r)s + y_2
\end{aligned}
$$

これを次のように『後ろから』解いてみよ．

- 最初に，次のような 2 期の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
V(s) = \max_{c_2}\ & \log(c_2) \\
\text{s.t. } & c_2 = (1+r)s + y_2
\end{aligned}
$$

  ここで，$s$ は 2 期においては所与である[*1]．
  このとき，$c_2$ を求めよ．つまり $c_2$ は $s, \beta, r, y_2$ の関数になるはずである．
  そして，それを目的関数に代入することで，$V(s)$ を求めよ．

- 次に，1 期の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,s}\ & \log(c_1) + \beta V(s) \\
\text{s.t. } & c_1 + s = y_1
\end{aligned}
$$

  なお $V(s)$ は上で解いた関数形を代入すること．その下で，最適な $c_1$ と $s$ を求めよ．
  このとき，スライドの $c_1, c_2, s$ と比べて，異同点を 1，2 行で議論せよ．

## 2.6　様々な効用関数

以下では様々な効用関数の下で、同様の問題を解くことが目的です．

$$u(c_1) + \beta u(c_2)$$

の $u$ の関数形を次のように色々と変えてみる．

コメント：解く際に $Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ と定義すると便利である．

### 2.6.1　対数効用関数

授業で扱ったと似た効用関数として次のような効用関数を考えよう．

$$u(c) = \alpha \log c$$

ここで $\alpha > 0$(かつ $\sigma \neq 1$) は外生変数である．

- この最適化問題を書け

[*1] 所与とは，外生的に与えられているということ

- オイラー方程式を導け
- このときの消費と貯蓄 $(c_1, c_2, s)$ を解いてみよ
  - コメント：「$x$ を解いてみよ」や「$x$ について解け」と言った際、それは $x = f(a, b, c)$ のように左辺に $x$ のみがあり、右辺にはパラメータ $(a, b, c)$ だけが存在するようなものを指します．
    ここでのパラメータは $\beta, r, y_1, y_2$ です．そのため、$s =$ という式の右辺には $\beta, r, y_1, y_2$ のみが出てきて、$c_1, c_2, s$ は出てきてはいけません．
- $\beta(1 + r) = 1$ の場合どうなるか？
- $\beta(1 + r) \neq 1$ であるが $y_1 = y_2$ の場合はどうなるか？
- 限界消費性向を求めよ

### 2.6.2　CRRA 効用関数

次のような効用関数を考えよう．

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

ここで $\sigma > 0$(かつ $\sigma \neq 1$) は外生変数である．このような効用関数は CRRA 型と呼ばれ、マクロ経済学で最も標準的な効用関数である．

- CRRA 型効用関数が $u'(c) > 0$ かつ $u''(c) < 0$ を満たすことを示せ ($c > 0$ とする)
- CRRA 型効用関数の場合の最適化問題を書け
- オイラー方程式を導け
- このときの消費と貯蓄 $(c_1, c_2)$ を解いてみよ
- $\beta(1 + r) = 1$ の場合，$c_1$ と $c_2$ の関係はどうなるか？
- $\beta(1 + r) \neq 1$ であるが $y_1 = y_2$ の場合はどうなるか？主に $c_1$ と $c_2$ の関係について述べよ．
- 限界消費性向を求めよ

### 2.6.3　2 次効用関数

次のような効用関数を考えよう．

$$u(c) = \alpha c - \frac{\gamma c^2}{2}$$

とする．ここで $\alpha > 0$ かつ $\gamma \geq 0$ ($\alpha/\gamma$ はとても大きいとする)．このような関数形を、二次効用関数と呼ぶ．

- 2 次効用関数が、特定の範囲で、$u'(c) > 0$ かつ $u''(c) < 0$ を満たすことを示せ．$u'(c) > 0$ の範囲を示せ．
- 二次効用関数の場合の最適化問題を書け
- オイラー方程式を導け
- このときの消費と貯蓄 $(c_1, c_2)$ を解いてみよ
- $\beta(1 + r) = 1$ の場合，$c_1$ と $c_2$ の関係はどうなるか？
- 限界消費性向を求めよ

#### 2.6.4　CARA 型効用関数

$$u(c) = -\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c)$$

という効用関数を考える．これは CARA 型効用関数と呼ばれるものである．$\gamma > 0$ とする．

- CARA 型効用関数が $u'(c) > 0$ かつ $u''(c) < 0$ を満たすことを示せ ($c \geq 0$ とする)
- CARA 型効用関数の場合の最適化問題を書け
- オイラー方程式を導け
- このときの消費と貯蓄 $(c_1, c_2)$ を解いてみよ
- $\beta(1+r) = 1$ の場合，$c_1$ と $c_2$ の関係はどうなるか？
- $\beta(1+r) \neq 1$ であるが $y_1 = y_2$ の場合はどうなるか？
- 限界消費性向を求めよ

### 2.7　財政政策

二期間モデルと財政政策のパートでは、消費関数を解かなかった．そこで、ここでは消費関数を解くことによって講義を補足する．

つまり、授業で扱ったケース

$$\max_{c_1,c_2} \ \log(c_1) + \beta\log(c_2)$$
$$\text{s.t. } c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r}$$

を解いて、$(c_1, c_2)$ を求めよ．また、

$$\frac{\partial c_1}{\partial G_1}, \frac{\partial c_1}{\partial G_2}, \frac{\partial c_2}{\partial G_1}, \frac{\partial c_1}{\partial G_2}$$

を求めよ．これらの符号は正か負か確認せよ．乗数効果 ($\frac{\partial c_1}{\partial G_1} \geq 1$) は存在するか？

## 3　3 期間モデル

経済が三期間続くとしよう．

家計は三期間の消費から効用を得る．そして家計は次の効用関数をもっているとする．

$$\log(c_1) + \beta\log(c_2) + \beta^2\log(c_3)$$

さらに、家計の予算制約は、それぞれの時点において次のモノとする．

- $t = 1$

$$c_1 + s_1 = y_1$$

- $t = 2$

$$c_2 + s_2 = y_2 + (1+r)s_1$$

- $t = 3$

$$c_3 = y_3 + (1+r)s_2$$

このとき、次の問いに答えよ．なお，回答する際には，

$$Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r} + \frac{y_3}{(1+r)^2}$$

とすると便利である (しなくても良いが，解答例ではそうしている).

- 最大化問題を定義せよ．
- 消費と貯蓄 $(c_1, c_2, c_3)$ を解いてみよ．
- 限界消費性向を求めよ．なお同時点に対するものだけでよい．つまり $(\partial c_1/\partial y_1, \partial c_2/\partial y_2, \partial c_3/\partial y_3)$ を求めよ．

# 4　発展：借入制約

**背景**：一般的に家計は借入を自由にすることが出来ない．例えば住宅ローンや車の購入のローンなどは存在するが，遊ぶお金のための借金などはそもそもサービスが存在していなかったりするだろう．このようなことから，家計は自由に資金を借りられず，消費の平準化が達成できないことがある．そのような状況をモデルを使って考えてみるのが，この問題の狙いである．

そこで，これまで学んだモデルに次のような追加的な制約を課してみよう．

$$s \geq 0$$

これは「貯金 $s \geq 0$ は出来るが，借金 $s < 0$ は不可能」という制約である．このような制約を借入制約 (borrowing constraint) と呼ぶ[*2]．

効用関数は，単純化のために，最も扱いやすい対数効用関数 $u(c) = \log c$ としよう．この経済には 2 期間続くとする．次の問に答えよ．

1. 効用最大化問題を定式化せよ．なお $y_1 \neq y_2$ とすること．また，予算制約線と無差別曲線を図示してみよ．なお，無差別曲線は借入制約にひっかかるような家計の無差別曲線を描いてみよ．
2. $s \geq 0$ という不平等制約を無視した時の消費関数，貯蓄関数を一度整理せよ．仮にこのときの $s$ を $s^*$ というように，このときの解を $*$ 付きでと定義する．
3. $s \geq 0$ という不平等制約があるとき，一階条件を求めよ．なお，借入制約が引っかかる場合 $(s < 0)$ とそうでない場合に分けて整理せよ．
4. 最適な $s$ を求めよ．
5. この小問では $\beta = 1$ かつ $r = 0$ とする．次の二つの場合に，$s$ はどのような値をとるか答え，簡単な解釈を加えよ．
    - $(y_1, y_2) = (2, 1)$ の場合
    - $(y_1, y_2) = (1, 2)$ の場合

[*2] 借入が出来ない制約であるため無借入制約 (no-borrowing constraint) や，負債の限界という意味で debt limit と呼ぶこともある．

さらにこの回答から，より一般に $y_1$ と $y_2$ の大小関係でどのように結果が変わるか，簡単に議論せよ．

6. (前問の $\beta$ や $r$ の条件は忘れて，)$s^*$ はどのようなパラメータのときに，正，ゼロ，負の値をとるか，まとめよ．
7. 最適な消費関数を求めよ
8. 借入制約が引っかかるような場合の限界消費性向を求めよ

### 4.1

次の問題は解答例はないが，借入制約の理解を深めたい学生は試してみると良いと思う．

- 借入制約の一般化：$s \geq 0$ ではなく，$\underline{s} \leq 0$ というパラメータに対して，$s \geq \underline{s}$ という借入制約がある場合で，さきほどの問いに答えてみよ．
- 効用関数の変更：効用関数を対数から，CRRA や 2 次，CARA 型効用関数にして解いてみよ

## 4.2　発展：利子率の違い (とても難しい)

現実には，貯蓄と借入の利子率が違うということが考えられる．例えば，普通預金で貯金する際の利子率は 0.001% であったりするが，クレジットカードのカードローン，マイカーローン等は 3% 以上の利子率を取っている．

このようなことをモデル化することを考えよう．これは次のようにすればモデル化できる．

$$r(s) = \begin{cases} r^l & \text{if } s \geq 0 \\ r^h & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

ここで $r^l < r^h$ とする．これはつまり，貯蓄をしている $(s \geq 0)$ ときの利子率は $r^l$ であり，借り入れをしているときは高い利子率 $r^h$ であることを意味している．

効用関数は，単純化のために，最も扱いやすい対数効用関数 $u(c) = \log c$ としよう．この経済には 2 期間続くとする．次の問に答えよ．

このとき次の解いに答えよ．

1. 最適化問題を書いてみよ．また無差別曲線と予算制約線を図示してみよ．
2. $s \gtreqless 0$ によって場合分けを行い，一階条件を書いてみよ
3. $s \geq 0$ のときと，$s < 0$ のときで最適な $s$ を求めよ
4. 最適な消費を求めよ