基礎マクロ練習問題の**解答例**：リスクがあるときの意思決定と資産価格理論入門

日野将志 *

目次

1 **資産価格理論入門の入門** 2
1.1 資産価格 . . . 2

2 **不確実性・意思決定・資産価格** 3
2.1 効用関数とリスク選好 . . . 3
2.2 効用関数とリスク回避度 . . . 3
2.3 所得のリスク：安全資産 . . . 4
2.4 所得のリスク：アロー証券 . . . 6
2.5 ポートフォリオ問題 . . . 8
2.6 2 期間のルーカス・ツリー . . . 9

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

	今期	来期
利子率	1	$1+r$
資産価格	q	1

1　資産価格理論入門の入門

1.1　資産価格

1.1.1　準備

解答は,

$$q = \frac{1}{1+r}$$

である．

これは，例えば次の表を見ると分かりやすいかもしれない．このような関係になっているので，$1/(1+r)$ という割引現在価値が資産価格に該当する．数値的な例でいうと，利子率 1% に近似的に似ている資産価格とは，今期 $q = 0.99$ 円支払うと，来期 1 円もらえるようなものである．

このとき，講義スライドの無裁定条件のページと同様にして，$q > 1/(1+r)$ と $q < 1/(1+r)$ のとき，どちらかの資産のみに需要が偏るような状況が出ることが説明できる．

1.1.2　長期資産

解答は,

$$r_2 = (1+r)^2 - 1$$

である．

つまり，もし,

$$1 + r_2 > (1+r)^2$$

ならば長期資産のほうが来々期に大きなリターンを持つので，皆長期資産を買う．$1 + r_2 > (1+r)^2$ が成り立つ限り，長期資産への超過需要が生じ，結果的に，$1 + r_2 = (1+r)^2$ となる．逆もしかりである．

コメントおよび問題の主旨：一般的な常識から考えれば,「$(1+r)^2 = 1 + r_2$ のときに，長期資産を保有すると，資産を引き出せず，財産を塩漬けにしてしまうことになる．それならば，1 期資産のほうが望ましいのでは？」のようなことを考えてしまうかもしれない．このように考えるのは，暗黙に「短期に資金が必要になるかもしれない状況」という摩擦を考えてしまっているからである．ここでは，そのような邪念を一旦除いて，クリーンな理論で考える練習をしてもらうための問題である．

現実には，長期資産は様々な観点からリスキーである．　例えば，家計からすると定期資産，個人年金，生命保険が現実には長期資産と呼べるだろう．長期間資産が換金可能になるまでの期間を残存期間という．長期資産で貯金をするということは，残存期間中に資金が必要になっても引き出せないリスクや，残存期間中に何か経済に大きな変動が起こるリスクなどがある．そのため，長期資産は短期資産よりも高い利回りを持つことが一般的である．なお，残存期間と利回りを描いた図をイールド・カーブ (Yield Curve 利回り曲線) と呼ぶ.

2　不確実性・意思決定・資産価格

2.1　効用関数とリスク選好

これを確認するには，$u'(c) > 0$ に加えて $u''(c)$ の符号を確認すれば，上に凸か線形か下に凸かが分かる．

1. 対数効用：

$$u'(c) = \frac{1}{c} > 0$$
$$u''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0$$

したがって，リスク回避的である

2. CRRA 型：

$$u'(c) = c^{-\sigma}$$
$$u''(c) = -\sigma c^{-\sigma-1} < 0$$

したがって，リスク回避的である

3. 2 次効用

$$u'(c) = \alpha - \gamma c$$
$$u''(c) = -\gamma < 0$$

したがって，リスク回避的である

4. CARA 型

$$u'(c) = \exp(-\gamma c)$$
$$u''(c) = -\gamma \exp(-\gamma c)$$

したがって，リスク回避的である

このように代表的な効用関数はすべてリスク回避的である

コメントおよび問題の主旨：これはウォームアップの問題である．次の問題に引き続き取り組んでほしい．

2.2　効用関数とリスク回避度

1. 対数効用

$$\sigma_R = -c\frac{-1}{c^2}\frac{c}{1} = 1$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \frac{1}{c}$$

と求まる．したがって，対数効用は相対的リスク回避度が 1 となる関数であることが分かる．

2. CRRA 型

$$\sigma_R = -c(-\sigma c^{-\sigma-1})\frac{1}{c^{-\sigma}} = \sigma$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \frac{\sigma}{c}$$

と求まる．したがって，対数効用は相対的リスク回避度が σ となる関数であることが分かる．なお，このように相対的リスク回避度 (RRA, Relative Risk Aversion) が一定 (constant) な関数であるため，Constant Relative Risk Aversion 効用，CRRA 効用と呼ばれる．

3. 2 次効用

$$\sigma_R = -c(-\gamma)\frac{1}{\alpha-\gamma c} = \frac{\gamma c}{\alpha-\gamma c}$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \frac{\gamma}{\alpha-\gamma c}$$

となる．このように 2 次効用の場合，相対的リスク回避度も絶対的リスク回避度もパラメータだけでは求まらない．

4. CARA 型

$$\sigma_R = -c(-\gamma\exp(-\gamma c))\frac{1}{\exp(-\gamma c)} = \gamma c$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \gamma$$

となる．このように，絶対的リスク回避度がパラメータだけで求まる．なお，この効用関数は，絶対的リスク回避度 (ARA, Absolute Risk Aversion) が一定 (Constant) になることから，Constant Absolute Risk Aversion，CARA 型効用と呼ばれる．

2.3　所得のリスク：安全資産

1. 最大化問題は以下の通り．

$$\max_{c_1,c_2^h,c_2^l,s} u(c_1) + \beta\underbrace{\left[pu(c_2^h)+(1-p)u(c_2^l)\right]}_{\equiv\mathbb{E}[u(c_2)]}$$
$$\text{s.t. } c_1 + s = y_1$$
$$c_2^h = y_2^h + (1+r)s$$
$$c_2^l = y_2^l + (1+r)s$$

なお，原理原則として，予算制約に確率的な要素は書かないこと．予算制約とは，「X が起きた時 (今の場合，y_2^h, y_2^l が実現した時) に，どういう制約になるか」を記述するものである．確率的な要素は効用関数に反映される．

2. 最大化問題を記述できたら，一階条件を求める手続きはいつも通りである．つまり，まず制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_s \frac{[y_1-s]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\left[p\frac{[y_2^h+(1+r)s]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + (1-p)\frac{[y_2^l+(1+r)s]^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right]$$

となる．この一階条件は,

$$[y_1-s]^{-\sigma}=\beta(1+r)\left[p[y_2^h+(1+r)s]^{-\sigma}+(1-p)[y_2^l+(1+r)s]^{-\sigma}\right]$$

となる．

もし $p=1$(または $p=0$) であれば，右辺の第二項 (または第一項) が消え，リスクのない問題に帰着できる．しかし，$p\in(0,1)$ のとき，この最大化問題は $-\sigma$ が指数としてあるせいで s について解くことが出来ない．したがって，これ以降の計算ができず c_1, c_2 も解くことができない．

3. 念のため最大化問題を書くと，以下の通り．

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2^h,c_2^l,s}\ &\left(\alpha c_1-\frac{\gamma c_1^2}{2}\right)+\beta\left[p\left(\alpha c_2^h-\frac{\gamma(c_2^h)^2}{2}\right)+(1-p)\left(\alpha c_2^l-\frac{\gamma(c_2^l)^2}{2}\right)\right]\\ \text{s.t. }& c_1+s=y_1\\ & c_2^h=y_2^h+(1+r)s\\ & c_2^l=y_2^l+(1+r)s\end{aligned}$$

次に，予算制約を目的関数に代入すると，

$$\begin{aligned}\max_s\ &\left(\alpha[y_1-s]-\frac{\gamma[y_1-s]^2}{2}\right)\\ &+\beta\left[p\left(\alpha[y_2^h+(1+r)s]-\frac{\gamma[y_2^h+(1+r)s]^2}{2}\right)+(1-p)\left(\alpha[y_2^l+(1+r)s]-\frac{\gamma[y_2^l+(1+r)s]^2}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

となる．この一階の条件は,

$$\begin{aligned}&\alpha-\gamma[y_1-s]=\beta(1+r)\left[p(\alpha-\gamma[y_2^h+(1+r)s])+(1-p)(\alpha-\gamma[y_2^h+(1+r)s])\right]\\ &\Rightarrow(\alpha-\gamma y_1)+\gamma s=-\beta(1+r)\gamma(1+r)s+\beta(1+r)\left[\alpha-\gamma\underbrace{[py_2^h+(1-p)y_2^l]}_{\equiv\mathbb{E}[y_2]}\right]\\ &\Rightarrow[\gamma+\beta(1+r)^2\gamma]s=[\beta(1+r)-1]\alpha+\gamma\left[y_1-\beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]\right]\\ &\Rightarrow s=\frac{[y_1-\beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1+\beta(1+r)^2}+\frac{[\beta(1+r)-1]\alpha}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\end{aligned}$$

となる．

4. 消費関数は貯蓄関数を予算制約を目的関数に代入すると求まる．つまり,

$$\begin{aligned}c_1&=y_1-s\\ &=y_1-\left[\frac{[y_1-\beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1+\beta(1+r)^2}+\frac{[\beta(1+r)-1]\alpha}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\right]\\ &=\frac{\beta(1+r)^2[y_1+\frac{\mathbb{E}[y_2]}{1+r}]}{[1+\beta(1+r)^2]}+\frac{[1-\beta(1+r)]}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\alpha\\ &=\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta(1+r)^2}Y+\frac{[1-\beta(1+r)]}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\alpha\end{aligned}$$

これは家計の消費の章の 2.6.3 の解答に一致する．つまり，生涯的な所得の割引現在価値の定義を，所得の期待値に微修正したという違いはあるが，1 期の消費は恒常所得仮説のときと変わらない．

5. c_2^h, c_2^l もそれぞれ，予算制約を使えば解くことが出来る．

$$\begin{aligned} c_2^h &= y_2^h + (1+r)s \\ &= y_2^h + (1+r)\left[\frac{[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1+\beta(1+r)^2} + \frac{[\beta(1+r)-1]\alpha}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\right] \end{aligned}$$

これは y_2^h が登場し，うまく Y に含めるように整理することもできない．そのため家計の消費の章の 2.6.3 の解答の c_2 に一致しない．

同様に，所得が低いときは，

$$\begin{aligned} c_2^l &= y_2^l + (1+r)s \\ &= y_2^l + (1+r)\left[\frac{[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1+\beta(1+r)^2} + \frac{[\beta(1+r)-1]\alpha}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\right] \end{aligned}$$

であり，$(1+r)s$ の項は同じなので，c_2^h と c_2^l の大きさの違いは，y_2^h と y_2^l のみで決定される．したがって，$c_2^h > c_2^l$ である．

6. $\beta(1+r) = 1$ とすると，

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1+r}{2+r}Y \\ c_2^h &= y_2^h + \frac{1+r}{2+r}[y_1 - \mathbb{E}[y_2]] \\ c_2^l &= y_2^l + \frac{1+r}{2+r}[y_1 - \mathbb{E}[y_2]] \end{aligned}$$

となる．このように，$\beta(1+r) = 1$ であっても，$c_1 = c_2$ とはならなくなる．この点は次の問題で対照的な結果が得られることにも注意してほしい．

コメントおよび問題の主旨：この問題では，期待効用のもとでの最大化問題の設定・解法に慣れてもらうのが狙いである．まず，「リスクを導入したところで，最大化問題を記述するうえで変更すべき点は，効用を期待効用に変えるだけ」ということを学んでもらい，リスクの導入は概念的にはとても簡単であることを学んでもらった．しかし，CRRA 型の場合，期待値のせいで一階条件が解けないことも確認してもらった．このように「概念的に導入することは簡単でも，計算することは簡単ではない」問題があることを学んでもらうことがこの問題の前半の狙いである．

この問題の後半では，2 次効用を使って，問題を解いてもらった．2 次効用は，限界効用が線形になる．そのため，CRRA 効用のときに起きたような面倒な問題が起きず，リスクがあっても解析的に解くことができる．これはとても特殊な特徴である．

2.4　所得のリスク：アロー証券

1. 最大化問題は以下の通り．

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2^h, c_2^l, s^h, s^l} \ & u(c_1) + \beta \underbrace{\left[pu(c_2^h) + (1-p)u(c_2^l)\right]}_{\equiv \mathbb{E}[u(c_2)]} \\ \text{s.t. } & c_1 + s^h + s^l = y_1 \\ & c_2^h = y_2^h + (1+r^h)s^h \\ & c_2^l = y_2^l + (1+r^l)s^l \end{aligned}$$

2. CRRA 効用とする．また制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_{s^h,s^l} \frac{[y_1 - s^h - s^l]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\left[p\frac{[y_2^h + (1+r^h)s^h]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + (1-p)\frac{[y_2^l + (1+r^l)s^l]^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right]$$

となる．そして，s^h と s^l，それぞれの一階条件は，

$$\begin{aligned} s^h &: [y_1 - s^h - s^l]^{-\sigma} = \beta p(1+r^h)[y_2^h + (1+r^h)s^h]^{-\sigma} \\ s^h &: [y_1 - s^h - s^l]^{-\sigma} = \beta(1-p)(1+r^l)[y_2^l + (1+r^l)s^l]^{-\sigma} \end{aligned}$$

となる．これは前問の安全資産がある場合と異なり，右辺に期待値が出てきていない．そのため，CRRA 効用の場合でも解くことができる．
実際，これら予算制約を使って整理すると，s^h と s^l の一階条件は

$$c_2^h = [\beta p(1+r^h)]^{\frac{1}{\sigma}} c_1 \tag{2.1}$$
$$c_2^l = [\beta(1-p)(1+r^l)]^{\frac{1}{\sigma}} c_1 \tag{2.2}$$

となる．
さらに 1 期の予算制約に，2 本の 2 期目の予算制約を代入すると，

$$c_1 + \frac{c_2^h}{1+r^h} + \frac{c_2^l}{1+r^l} = y_1 + \frac{y_2^h}{1+r^h} + \frac{y_2^l}{1+r^l}$$

と生涯予算制約が求まる．この右辺を Y と定義する．これに先ほどの一階条件 (2.1) と (2.2) を代入すると，

$$\begin{aligned} c_1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_1 + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_1 = Y \\ \Rightarrow c_1 = \frac{1}{1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

と c_1 の消費関数が求まる．なお，再度，家計の消費の問題 2.6.2 と比較すると，答えは一致しないが，関数形は似ていることに気づいてほしい．
これを先ほどの一階条件 (2.1) と (2.2) に再度代入すると，

$$\begin{aligned} c_2^h &= \frac{[\beta p(1+r^h)]^{\frac{1}{\sigma}}}{1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \\ c_2^l &= \frac{[\beta(1-p)(1+r^l)]^{\frac{1}{\sigma}}}{1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

と c_2^h と c_2^l の消費関数が得られる．これらも，家計の消費の問題 2.6.2 と比較すると，やはり関数形は似ていることが確認できるだろう．

3. $\beta p(1+r^h) = \beta(1-p)(1+r^l) = 1$ のとき，

$$c_1 = c_2^h = c_2^l$$

となる．特に後者の関係は，安全資産のみが利用可能な時とは，対照的な結果である．安全資産のみが利用可能なときは，r や p の値に関わらず必ず $c_2^h > c_2^l$ であった．しかし，アロー証券が利用可能な場合，$c_2^h = c_2^l$ が達成可能であることを示している．このように，所得のリスクがあっても，同じ消費の水準を達成できることを**完全保険** (pefect insurance) という．

4. アロー証券から安全資産を作ることは可能である．つまり，s^h と s^l を両方買っておくことと，安全資産 s を買っておくことは同じである．

$$s^h = \frac{1+r}{1+r^h}s$$
$$s^l = \frac{1+r}{1+r^l}s$$

となるように s^h と s^l を買うことは，s 単位の安全資産を買うことと同じである．このようにアロー証券から安全資産は作れる．しかし，逆はその限りではない．

コメントおよび問題の主旨：素朴に考えると，「リスクがある経済でも安全資産が利用可能な経済が，最も単純で美しい経済」と思えるかもしれない．しかし，リスクがある経済の場合，アロー証券のある経済のほうが綺麗な結果が得られることを確認してもらった．実際，安全資産の場合，CRRA 効用では解析的に解くことさえできなかった．しかし，アロー証券がある世界では解を得ることができる．

また，実はリスクの実現の数と利用可能な証券の数はとても重要である．もし利用可能な証券のほうが少ない場合，市場は**不完備** (incomplete) であると言われる[*1]．一方，利用可能な証券がリスクの実現の数以上の場合，市場は**完備** (complete) であるという．前問のように安全資産しか利用可能でない場合は，まさに市場が不完備な場合である．このとき，家計は所得のリスクをうまく分散することができなかった．しかし，この問題ではリスクの実現の数 (y_2^h と y_2^l の 2 つ) だけ証券 (s^h と s^l の 2 つ) が利用可能であり，市場は完備である．すると，これらのリスクを完全に排除して，完全な消費の平準化ができることを確認してもらった．

2.5　ポートフォリオ問題

1. 家計の目的関数は，効用の期待値である．したがって，

$$\mathbb{E}[\log(c)] = p\log(c^h) + (1-p)\log(c^l)$$

である．

2. 効用最大化問題は，

$$\begin{aligned}\max_{c^l,c^h,a^f,a^h,a^l}\ & p\log(c^h) + (1-p)\log(c^l) \\ \text{s.t. }\ & a^f + a^r = y \\ & c^h = (1+r^f)a^f + (1+r^h)a^r \quad \text{when } r^h \\ & c^l = (1+r^f)a^f + (1+r^l)a^r \quad \text{when } r^l\end{aligned}$$

となる．

なお，原理原則として，予算制約に確率的な要素は書かないこと．予算制約とは，「X が起きた時 (今の場合，r^h, r^l が実現した時) に，どういう制約になるか」を記述するものである．確率的な要素は効用関数に反映される．

[*1] 不完全 (imperfect) とは違うことに気を付けてほしい．市場が不完全というと，外部性・公共財や不完全競争 (独占や寡占) を示唆する．

3. 予算制約を目的関数に代入すると,

$$\begin{aligned}&\max_{a^f}\ p\log\left((1+r^f)a^f+(1+r^h)[y-a^f]\right)+(1-p)\log\left((1+r^f)a^f+(1+r^l)[y-a^f]\right)\\ \Rightarrow\ &\max_{a^f}\ p\log\left((r^f-r_h)a^f+(1+r^h)y\right)+(1-p)\log\left((r^f-r_l)a^f+(1+r^l)y\right)\end{aligned}$$

となる．この一階条件は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}&p\frac{r^f-r^h}{(r^f-r^h)a^f+(1+r^h)y}+(1-p)\frac{r^f-r^l}{(r^f-r^l)a^f+(1+r^l)y}=0\\ &\Rightarrow p\frac{-\epsilon^h}{-\epsilon^h a^f+(1+r^h)y}+(1-p)\frac{\epsilon^l}{\epsilon^l a^f+(1+r^l)y}=0\\ &\Rightarrow p\epsilon^h[\epsilon^l a^f+(1+r^l)y]=(1-p)\epsilon^l[-\epsilon^h a^f+(1+r^h)y]\\ &\Rightarrow [p\epsilon^h\epsilon^l+(1-p)\epsilon^h\epsilon^l]a^f=(1-p)\epsilon^l(1+r^h)y-p\epsilon^h(1+r^l)y\\ &\Rightarrow a^f=\frac{(1-p)\epsilon^l(1+r^h)y-p\epsilon^h(1+r^l)y}{\epsilon^h\epsilon^l}\end{aligned}$$

4. 最適な危険資産の保有量は，予算制約 $y=a^f+a^r$ より,

$$a^r=y-\frac{(1-p)\epsilon^l(1+r^h)y-p\epsilon^h(1+r^l)y}{\epsilon^h\epsilon^l}$$

と直ちに求まる．

5. この解答は，直感的には自明である．つまり「リスク資産の良い利回りが実現する確率 p が増えたのだから，リスク資産をもっと持った方が良い」と考えられる．これを計算に基づいて求める．a^f の最適な保有量を見ると，p の項には必ずマイナスがついていることが分かる．したがって，p が上がると a^f が下がる．さらに，a^r も同様の計算によって，p が上がると a^r が上がることが分かる．このように直感的に自明なことをきちんと示すことができた．

2.6　2 期間のルーカス・ツリー

1. 効用最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s_1,s_2}\ &\frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\beta\mathbb{E}\frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}\\ &c_1+p_1s_1=[p_1+d_1]\\ &c_2+p_2s_2=[p_2+d_2]s_1\end{aligned}$$

となる．ここでは，d に関する確率分布の情報を問題で書いていないので，目的関数の 2 期目の部分は期待値で書く必要がある[*2].

2. 目的関数に制約条件を代入すると,

$$\max_{s_1,s_2}\ \frac{(p_1+d_1-p_1s_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\beta\mathbb{E}\frac{([p_2+d_2]s_1-p_2s_2)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

となる．なお，ここで，目的関数を s_2 に関して見ると,

$$-p_2\beta\mathbb{E}([p_2+d_2]s_1-p_2s_2)^{-\sigma}<0$$

[*2] 期待値は定義できると仮定している．

となる事が分かる．つまり，s_2 は少なければ少ない方が良いことになる．ここで，家計は借金を残して死ぬことができないので，$s_2=0$ が s_2 が最小である．

3. 前の問題の結果を使って，再度目的関数を整理すると，
$$\max_{s_1}\ \frac{(p_1+d_1-p_1s_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\beta\mathbb{E}\frac{([p_2+d_2]s_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$
となる．
この一階条件は,
$$s_1\ :\ p_1(p_1+d_1-p_1s_1)^{-\sigma}=\beta\mathbb{E}(p_2+d_2)([p_2+d_2]s_1)^{-\sigma} \tag{2.3}$$
となる．
4. この問題はワルラス法則を確認してもらう問題である．ワルラス法則とは,「経済に n つの市場があるとき，$n-1$ つの市場が均衡すれば，n つの市場はすべて均衡する」というものである．
元々の予算制約に $s_t=1$ を代入する．すると，
$$c_1=d_1$$
$$c_2=d_2$$
となる．これが財市場の均衡条件である．つまり，均衡で家計は配当分のみ消費する．
5. 2 期目の貯蓄 s_2 の価格 p_2 について検討する．家計は s_2 を全く持たないことが最適であることを学んだ．一方，市場には $s_2=1$ の初期賦存が存在する．すると，常に，s_2 の超過供給が存在し，s_2 の価格 p_2 は正の値からゼロに向かってずっと下がっていくことが分かる．結果的に，p_2 はゼロになることが推論できる．
6. 家計のオイラー方程式 (2.3) に予算制約を代入すると，
$$p_1=\beta\mathbb{E}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\sigma}[p_2+d_2]$$
となる．さらに，小問 4 の結果より，$p_2=0$ となるので，
$$p_1=\beta\mathbb{E}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{-\sigma}d_2$$
となることが分かる．これは,「現在の資産価格 p_1 は将来の配当の割引現在価値で決まる」ことを表している．また，ここで資産価格を割り引く際には，$\beta\mathbb{E}(c_2/c_1)^{-\sigma}$ という割引因子を使う必要があることに気づいてほしい．これを一般に確率的割引因子 (stochastic discount factor) と呼ぶ．この確率的割引因子の重要性は資産価格理論やマクロ経済でたびたび重要になるので，高いレベルに関心がある学生は，ここでは言葉だけでも覚えておくと良いと思われる．

コメントおよび問題の主旨：ルーカス・ツリーモデルは，単純な一般均衡のモデルにおいて,「資産価格は将来の配当の割引現在価値になる」というファイナンス理論で基本となる方程式を導く．そのため，マクロ経済的な資産価格理論の最も基本的なモデルと考えられている．

2.6.1　ルーカス・ツリーの消費的側面

1. 2 期目の予算制約を次のように整理する．
$$\frac{p_1}{p_2+d_2}c_2+\frac{p_1}{p_2+d_2}p_2s_2=p_1s_1$$

これを 1 期目の予算制約の両辺に足すと，

$$c_1 + \frac{p_1}{p_2 + d_2}c_2 + \frac{p_1}{p_2 + d_2}p_2 s_2 = p_1 + d_1$$

となる．なお，前問と同様に，$s_2 = 0$ が最適になるため，

$$c_1 + \frac{p_1}{p_2 + d_2}c_2 = p_1 + d_1$$

と書いてもよい．

2. 改めて最適化問題を解くと，

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2}\beta\frac{p_2 + d_2}{p_1}$$

となる．これがオイラー方程式である．

3. なお，$1 + r \equiv (p_2 + d_2)/p_1$ とおき，$Y \equiv p_1 + d_1$ と定義すると，家計の消費の時と全く同じ問題になる．

4. オイラー方程式を c_2 について解き，先ほどの生涯予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} c_1[1+\beta] &= p_1 + d_1 \\ \Rightarrow\ c_1 &= \frac{1}{1+\beta}[p_1 + d_1] \end{aligned}$$

と 1 期の消費関数が求まる．

また，2 期の消費関数も，

$$c_2 = \frac{\beta}{1+\beta}\frac{p_2 + d_2}{p_1}[p_1 + d_1]$$

と求まる．

5. 消費関数の偏導関数を取ると簡単に求まる．すなわち，

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_1} = \frac{1}{1+\beta}$$

である．

これは，家計の消費と貯蓄で学んだ 2 期間モデルの対数効用の場合の所得に対する限界消費性向と一致している．

コメントおよび問題の主旨：現実を見ると，資産価格の上昇と所得の上昇は，経済現象として全く異なるように聞こえるだろう．しかし，このような単純なモデルでは，資産価格の上昇と所得の上昇は消費に対して同じような効果を持つことを確認してもらうことが問題の狙いである．

一方，株，土地のような資産を保有している家計は少ないが，労働所得を受け取っている家計は多いこと，土地のような資産は担保に入れることが出来ることなど，所得と資産には違いがある．そういった違いが現実には強く影響しているため，資産価格の上昇と所得の上昇は消費に異なる影響を及ぼしていると考えられる．