基礎マクロ練習問題の解答例：企業投資

日野将志 *

1 生産技術

1.1 一次同次

$n > 0$ とする．全てのケースに解答方針は，$F(x)$ に対して $F(nx)$ と $nF(x)$ を求めて，一致するかどうか確認すれば良い．

- $F(K) = \alpha K$
  $F(nK) = \alpha nK$ かつ $nF(k) = n\alpha K$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = \alpha K + (1-\alpha)H$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = \alpha nK + (1-\alpha)nH = n[\alpha K + (1-\alpha)H]$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K + (1-\alpha)H]$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = \alpha K + \beta H$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
  $F(nK, nH) = \alpha nK + \beta nH = n[\alpha K + \beta H]$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K + \beta H]$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = (nK)^{\alpha}(nH)^{1-\alpha} = n^{\alpha}K^{\alpha}n^{1-\alpha}H^{1-\alpha} = nK^{\alpha}H^{1-\alpha}$ かつ $nF(K, H) = nK^{\alpha}H^{1-\alpha}$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = K^{\alpha}H^{\beta}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
  $F(nK, nH) = (nK)^{\alpha}(nH)^{\beta} = n^{\alpha}K^{\alpha}n^{\beta}H^{\beta} = n^{\alpha+\beta}K^{\alpha}H^{\beta}$ かつ $nF(K, H) = nK^{\alpha}H^{\beta}$ である．したがってこれらは一致せず，一次同次ではない．
- $F(K, H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = [\alpha(nK)^{\epsilon} + (1-\alpha)(nH)^{\epsilon}]^{1/\epsilon} = [\alpha n^{\epsilon}K^{\epsilon} + (1-\alpha)n^{\epsilon}H^{\epsilon}]^{1/\epsilon} = [n^{\epsilon}\{\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}\}]^{1/\epsilon} = n[\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = [\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
  $F(nK, nH) = [\alpha(nK)^{\epsilon} + \beta(nH)^{\epsilon}]^{1/\epsilon} = [\alpha n^{\epsilon}K^{\epsilon} + \beta n^{\epsilon}H^{\epsilon}]^{1/\epsilon} = [n^{\epsilon}\{\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}\}]^{1/\epsilon} = n[\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$ である．したがって，これらは一致する．
- $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = \min\{\alpha nK, (1-\alpha)nH\} = n \min\min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．かつ，$nF(K, H) = n\min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$ である．したがって，これらは一致する．

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- $F(K,H)=\min\{\alpha K,\beta H\}$．なお，$\alpha+\beta\neq 1$ かつとする
  $F(nK,nH)=\min\{\alpha nK,\beta nH\}=n\min\min\{\alpha K,\beta H\}$．かつ，$nF(K,H)=n\min\{\alpha K,\beta H\}$ である．したがって，これらは一致する．

コメント：ここでは経済学でよく使われる多くの生産関数が一次同次かどうかを確認した．その結果，$F(K,H)=K^{\alpha}H^{\beta}$ だけが一次同次ではないことを確認した．一般にマクロ経済学の教科書で出てくるような関数はほぼ全て一次同次である．

2　静学的な企業の選択

2.1　生産要素 1 つの場合：労働のみ

この最大化問題は，

$$\max_{H}\ H^{\alpha}-wH$$

である．

一階の条件は，

$$\alpha H^{\alpha-1}=w$$

であり，これを変形すると，

$$\Rightarrow H=\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

と H が求まる．

2.2　生産要素 2 つの場合

2.2.1　曲率のある和

この最大化問題は，

$$\max_{K,H}\ K^{\alpha}+H^{\beta}-wH-rK$$

である．

一階の条件は，

$$K\ :\alpha K^{\alpha-1}=r \tag{2.1}$$
$$H\ :\beta H^{\beta-1}=w \tag{2.2}$$

である．

これらをそれぞれ整理すると，

$$K=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$H=\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

となる．

2.2.2　コブ・ダグラス

この最大化問題は，

$$\max_{K,H} \; K^{\alpha}H^{\beta} - wH - rK$$

である．

一階の条件は，

$$K \; : \alpha K^{\alpha-1}H^{\beta} = r \tag{2.3}$$
$$H \; : \beta K^{\alpha}H^{\beta-1} = w \tag{2.4}$$

である．まず一階の条件の 1 本目の式 (2.3) を変更すると

$$K = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} H^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \tag{2.5}$$

と出来る．一階の条件の 2 本目の式 (2.4) も同様に整理すると，

$$H = \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} K^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

であり，これを先ほど求めた (2.5) 式に代入すると，

$$\begin{aligned}
K &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} K^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\
K &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}} K^{\frac{\alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)}} \\
\Rightarrow K^{(1-\beta)(1-\alpha)} &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\beta} K^{\alpha\beta} \\
\Rightarrow K^{1-\beta-\alpha} &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\beta} \\
\Rightarrow K &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}$$

と求まる．これを H の式に代入すると，

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\right]^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta\alpha}{(1-\alpha-\beta)(1-\beta)}+\frac{1}{1-\beta}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}$$

このように，K と H が求まる．

次に rK/Y と wH/Y を求める．これはそれぞれ一階の条件を変形した方が手早く求められる．すなわち，(2.3) より，

$$
\begin{aligned}
&\alpha\frac{K^\alpha H^\beta}{K} = r \\
\Rightarrow\ &\alpha\frac{Y}{K} = r \\
\Rightarrow\ &\alpha = \frac{rK}{Y}
\end{aligned}
$$

と求まる．同様に，(2.4) より $wH/Y = \beta$ も求まる．これらは「生産した価値 Y のうち，α の割合を資本に支払い (rK)，β の割合を労働に支払う (wH)」ことを意味している．

次に，K/H を求める．

$$
\begin{aligned}
\frac{K}{H} &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta+\alpha-1}{1-\alpha-\beta}} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}
\end{aligned}
$$

例えばもし，$r = w$ であれば，K と H の比率は α/β で決まることが分かる．このように，コブダグラス型関数 $K^\alpha H^\beta$ はそれぞれの投入量のシェアを決めるパラメータであることが分かる．

最後に $\beta = 1-\alpha$ の場合を議論する (つまり，$1 = \alpha+\beta$ のケース)．このとき，指数の部分の分母が $1-\alpha-\beta = 0$ となる．したがって，解は定義できない．

コメントおよび問題の主旨：コブ・ダグラスは再頻出の生産関数であるので，その特徴を学んでもらうことがこの問題の目的である．まずコブ・ダグラスの係数が投入量や支払いのシェアを表すパラメータであることを示した．

次に，コブ・ダグラスにおいて $1 = \alpha+\beta$ の時，K と H はそれぞれ一意に定まらないことを示した．コブ・ダグラスの $1 = \alpha+\beta$ のとき，K/H の比しか求まめることができないことは良く知られているので，覚えておくと良い．

2.2.3　CES 関数

最大化問題は，

$$
\max_{K,H}\ [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon} - wH - rK
$$

である．

一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
K:\ &[\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon-1}\,\alpha K^{\epsilon-1} = r \\
H:\ &[\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon-1}\,\beta H^{\epsilon-1} = w
\end{aligned}
$$

である．

次に代替の弾力性を計算する．一階の条件の左辺は，それぞれ F_K と F_H であることを利用すると，一階の条件の左辺を割ると

$$
F_H/F_K = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{1-\epsilon}
$$

である．これを K/H に対して微分を取ると[*1]，

$$\frac{d(F_K/F_H)}{d(K/H)} = (1-\epsilon)\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{-\epsilon}$$

が求まる．したがって，代替の弾力性は，

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon} &= \frac{\frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}}{\frac{K/H}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}} \\
&= \frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}\frac{H}{K}F_H(K/H)/F_K(K/H) \\
&= \frac{1}{(1-\epsilon)\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{-\epsilon}} \times \frac{H}{K} \times \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{1-\epsilon} \\
&= \frac{1}{1-\epsilon}
\end{aligned}$$

と代替の弾力性 $\hat{\epsilon}$ は $1/(1-\epsilon)$ と定数のみで決まることが分かる．

なお，(重要な) 補足であるが

- $\hat{\epsilon} < 1$：(粗) 補完的
- $\hat{\epsilon} > 1$：(粗) 代替的
- $\hat{\epsilon} = 1$：コブ・ダグラス
- $\hat{\epsilon} = \infty$：完全代替的 (線形)
- $\hat{\epsilon} = 0$：完全補完的 (レオンチェフ)

と整理出来る．一般に，応用研究ではコブ・ダグラスを使うことが多いが，補完関係 (つまり $\hat{\epsilon} < 1$) を表したい経済問題を扱うときは CES 型関数を使うことが多い．

さて，一階の条件に戻ろう．二つの一階条件を両辺で割ると，

$$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{H}\right)^{\epsilon-1} = \frac{r}{w}$$

である．この左辺は (技術的) 限界代替率である．

- $\epsilon \searrow 0$ のとき，(技術的) 限界代替率は，

  $$\frac{\alpha}{\beta}\frac{H}{K}$$

  となる．これはコブ・ダグラスのときと一致する．
- $\epsilon \to 1$ のとき，技術的限界代替率

  $$\frac{\alpha}{\beta}$$

  となる．つまり，(K, H) に依存しない．これは線形の場合と同じである．

[*1] K/H を一つの変数と見れば良い．これが分かりづらい場合，例えば，$\omega \equiv K/H$ などと定義すればより分かりやすいだろう．

3　2 期間問題

3.1　生産要素 1 つの場合

最大化問題は，

$$
\begin{aligned}
&\max_{K_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\
&\text{s.t. } \pi_1 = K_1^{\alpha} + (1-\delta)K_1 - K_2 \\
&\qquad \pi_2 = K_2^{\alpha} + (1-\delta)K_2
\end{aligned}
$$

である．ここで max の下に K_1 がないことに注意．

この制約式を目的関数に代入すると，

$$
\max_{K_2} K_1^{\alpha} + (1-\delta)K_1 - K_2 + \frac{1}{1+r}\left[K_2^{\alpha} + (1-\delta)K_2\right]
$$

となる．この一階の条件は，次のとおり．それをそのまま変形もすると，

$$
\begin{aligned}
&-1 + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 0 \\
&\Rightarrow K_2 = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と，最適な K_2 も求まる．

3.2　生産要素が一つの場合：調整費用

まず調整費用関数 $\Phi(K_1, K_2)$ が一次同次であることぉ確認する．$\lambda > 0$ をパラメータとすると，

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda K_1, \lambda K_2) &= \frac{\phi}{2}\left(\frac{\lambda K_2 - (1-\delta)\lambda K_1}{\lambda K_1}\right)^2 \lambda K_1 \\
&= \frac{\phi}{2}\left(\frac{\lambda(K_2 - (1-\delta)K_1)}{\lambda K_1}\right)^2 \lambda K_1 \\
&= \lambda\frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 \\
&= \lambda\Phi(K_1, K_2)
\end{aligned}
$$

と一次同次であることが確認できる．

次に，この偏導関数を取ると，

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(K_1, K_2) &= \phi\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)\frac{1}{K_1}K_1 \\
&= \phi\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)
\end{aligned}
$$

であるため，$I = K_2 - (1-\delta)K_1 > 0$ ならば，$\Phi_2 > 0$ であることが分かる．

次に，二階の偏導関数も同様に取ると，

$$
\Phi_{22}(K_1, K_2) = \frac{\phi}{K_1}
$$

が求まる．$\phi > 0$ かつ $K_1 > 0$ なので，この二階の偏導関数も正である．

最大化問題は，

$$\begin{aligned} &\max_{K_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\ &\text{s.t. } \pi_1 = K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 - \underbrace{\frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2-(1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1}_{=\Phi(K_1,K_2)} \\ &\pi_2 = K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 \end{aligned}$$

である．

目的関数に制約式を代入すると，

$$\max_{K_2} K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2-(1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2]$$

でる．これの一階条件は，

$$-1 - \phi\left(\frac{K_2^\alpha + (1-\delta)K_1}{K_1}\right) + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + 1 - \delta] = 0$$

である．なお，これは K_2 について手で解き切ることは出来ない．

そこで，一階の条件を使って，調整費用がないケース (前問 3.1) と比較する．もし，$\phi = 0$ の場合，一階条件は，

$$-1 + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + 1 - \delta] = 0$$

である．これは前問の一階条件と一致する．したがって，調整費用があるケースは調整費用のないケースの一般化と考えられる．

3.3　曲率のある線形和

この最大化問題は

$$\begin{aligned} &\max_{K_2,H_1,H_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\ &\text{s.t. } \pi_1 = K_1^\alpha + H_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 \\ &\pi_2 = K_2^\alpha + H_2^\alpha + (1-\delta)K_2 \end{aligned}$$

である．

制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_{K_2,H_1,H_2} K_1^\alpha + H_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 - wH_1 + \frac{1}{1+r}\left[K_2^\alpha + H_2^\alpha + (1-\delta)K_2 - wH_2\right]$$

となる．

一階条件は，

$$\begin{aligned} &K_2 :\ -1 + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 0 \\ &H_1 : \alpha H_1^{\alpha-1} = w \\ &H_2 : \alpha H_1^{\alpha-1} = w \end{aligned}$$

である．これを解くと，

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
H_1 &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
H_2 &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と求められる．

4　3 期間問題

本質的には 2 期間から 3 期間に延長しても問題は変わらない．そのため，2 期間をよく理解していれば解けるのではないかと思う．この最大化問題は，

$$
\begin{aligned}
\max_{K_2, K_3}\ & \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 + + \frac{1}{(1+r)^2}\pi_2 \\
\text{s.t. } & \pi_1 = K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 \\
& \pi_2 = K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 - K_3 \\
& \pi_3 = K_3^\alpha + (1-\delta)K_3
\end{aligned}
$$

である．

したがって，制約式を目的関数に代入すると，

$$
\max_{K_2, K_3}\ K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 - K_3] + \frac{1}{(1+r)^2}[K_3^\alpha + (1-\delta)K_3]
$$

とできる．この一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
K_2 :\ & \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 1 \\
K_3 :\ & \frac{1}{1+r}[\alpha K_3^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 1
\end{aligned}
$$

である．これらは両方，

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
K_3 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

となる．