基礎マクロ練習問題：企業投資

日野将志 *

1　生産技術

1.1　一次同次

以下の生産関数が一次同次かどうか答えよ．なお，一次同次ならば一次同次であることを示し，そうでないならば、そうでないことも示すこと．

何も言及しなければ，パラメータは正とする．

- $F(K) = \alpha K$
- $F(K,H) = \alpha K + (1-\alpha)H$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = \alpha K + \beta H$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = K^{\alpha}H^{\beta}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = \min\{\alpha K, \beta H\}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする

2　静学的な企業の選択

2.1　生産要素 1 つの場合

授業では，資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した．一方，ここでは労働だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば,

$$F(K,H) = F(H) = H^{\alpha}$$

を考えてみる．$\alpha \in (0,1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH を行う必要があるとする．

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- 最適な H を求めよ．

2.2　生産要素 2 つの場合

2.2.1　曲率のある和

$$F(K,H) = F(H) = K^{\alpha} + H^{\alpha}$$

を考えてみる．$\alpha \in (0,1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K,H) を求めよ．

2.2.2　コブ・ダグラス

$$F(K,H) = K^{\alpha} H^{\beta}$$

を考えてみる．$\alpha + \beta \neq 1$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K,H) を求めよ．
- $Y = F(K,H)$ と生産量 Y を定義する．このとき，rK/Y および wH/Y を求めよ．
- K/H の比について議論せよ．例えば $r = w$ のときどうなるだろう．
- 仮に，$\beta = 1 - \alpha$ のときにどうなるか，1，2 行で議論せよ．

2.2.3　CES 関数

$$F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + \beta H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$$

を考えてみる．$(\alpha,\beta) \in (0,1)$ かつ $\epsilon > 0$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- この生産関数は CES(constant elasticity substitution) 関数と呼ばれる関数形である．この特徴は，代替の弾力性 (elasticity of substitution) が一定 (constant) であることである．次の代替の弾力性

$$\hat{\epsilon} \equiv \frac{\frac{d(K/H)}{(K/H)}}{\frac{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}} = \frac{\frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}}{\frac{K/H}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}}$$

  を計算してみよ．
- 限界代替率 = 価格比の式を求め，次のケースを比較せよ．
  - CES 関数かつ $\epsilon \searrow 0$ のときの限界代替率と，コブ・ダグラスのときを比較せよ[*1]
  - CES 関数かつ $\epsilon \to 1$ のときの限界代替率と，線形 $(F(K,H) = K + H)$ のときを比較せよ

3　2 期間問題

3.1　生産要素 1 つの場合

授業では，資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した．一方，ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，生産関数が

$$F(K_t) = K_t^\alpha$$

という場合を考えてみる．$\alpha \in (0,1)$ とする．また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な K_2 を求めよ．

3.2　生産要素が 1 つの場合：調整費用

前の問題 (つまり $F(K_t) = K_t^\alpha$) に加えて，次のような調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がある場合を考えてみよう．

$$\Phi(K_1, K_2) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{K_1}\right)^2 K_1$$

ここで $\phi > 0$ とする．この調整費用の意味は，$I \neq 0$ という (負を含む) 投資をするには企業は費用 $\Phi(\cdot)$ を支払う必要があることを意味している．また，前問と同様に $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．

- この調整費用関数が K_1 と K_2 に対して一次同次であることを確認せよ．
- $I > 0$ のとき，この調整費用関数が $\Phi_2(\cdot) > 0$ かつ $\Phi_{22}(\cdot) > 0$ であることを示せ．
- この調整費用関数があるときの最大化問題を書いてみよ
  - ヒント：スライドの補足を参考にすると良い

[*1] $\epsilon \searrow 0$ は「正の値 (つまり直観的には上) から 0 に近づく」という意味である．これは $\epsilon > 0$ だからこうしている．

- 最大化問題の一階条件を書いてみよ．
- この一階条件を調整費用がない場合 ($\phi = 0$ の場合) と比べて，どのように解が異なるか比べてみよ．

4　曲率のある線形和

$$F(K, H) = F(H) = K^\alpha + H^\alpha$$

を考えてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．調整費用はないとする．また $\delta = 0$ とする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K_2, H_1, H_2) を求めよ．
- 最適な解を 2.2.1 の問題と比較せよ

4.1　3 期間問題

4.2　生産要素 1 つの場合

次に 3 期間あるとする．ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，生産関数が

$$F(K_t) = K_t^\alpha$$

という場合を考えてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．また $\delta = 0$ としよう．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な K_2 を求めよ．

5　発展：企業金融

5.1　Equity Finance: 株式発行による資金調達

企業の最大化問題を

$$\begin{aligned}
\max_{k_2}\ & \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\
& \pi_1 = z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 \\
& \pi_2 = z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2
\end{aligned}$$

とする．なお，$\alpha \in (0, 1]$ とする．

1. 最適な資本のもとでの利潤 π_1, π_2 を求めよ
2. もし π_1 と π_2 の符号が変わるような条件を求めよ．

5.2　Corporate Bond：社債が追加されたケース

企業の最大化問題を

$$\max_{k_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$\pi_1 = z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 + b$$
$$\pi_2 = z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 - (1+(1-\tau)r)b$$

とする．引き続き，$\alpha \in (0,1]$ とする．b は社債である．つまり，$b>0$ のときは，企業は社債を発行して資金調達していることを意味する．また τ は利子所得税である．

1. $\tau = 0$ とする．このとき b の範囲を考えよ．さらに，π_1 が負となる場合を考え，b と π_1 の関係を議論せよ．
2. $\tau > 0$ とする．このとき b の範囲を考えよ．同様に，b と π_1 の関係を議論せよ．

これ以降の問題は授業のレベルを大きく超えるかもしれない．進んだ勉強に関心がある学生のみに推奨する．

6　発展：非可逆性

背景：これまで資本の購入と売却は同じ価格であり，資本の価格は 1 と暗黙に仮定してきた．しかし，現実には資本の購入価格と売却価格は異なる．例えば，トヨタが車の生産のために使っている資本 (工場や機械) をパナソニックに売却しても，パナソニックからすればほとんど再利用不可能な資本であり，ほとんど価値がないだろう．したがって，そもそも企業の資本は売却が難しく，売却できたとしても買い手が交渉力を発揮して値下げを要求することが想像できる．このような結果，企業の資本の売却価格は購入価格よりも低いことが一般的である．

このような現実をモデルを使って反映するために，次のような制約を考えよう．

$$\begin{cases} I & \text{if } I \geq 0 \\ qI & \text{if } I < 0 \end{cases}$$

ここで $q \in [0,1)$ はパラメータである．これは，正の投資をする (つまり資本を購入する) ときは，今まで通り，価格 1 で資本を購入できるが，負の投資をする (つまり資本を売却する) ときは，低い価格 q でしか売却できないことを意味している．このような制約を投資の非可逆性 (irreversibility) と呼ぶ[*2]．

この制約を問題 3.1 に追加して解いてみることを考えよう．つまり，企業は 2 期間操業し，生産関数は $F(K) = K^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ であり，$K_1 > 0$ は所与である．

このように正負の投資に応じて制約式が異なることになる．そのため最大化問題を定式化するためには，まず正の投資をするときと負の投資をするときで場合分けした最大化問題を定式化する必要がある．そして，それぞれの解を用いて，総合的に正の投資をすべきか負の投資をすべきか比較することになる．

このような作業を，次の問題の指示に従って行ってみよ．

1. 正の投資をするときと，負の投資をするときの最大化問題をそれぞれ書いてみよ．それぞれのときの生涯利潤の割引現在価値を $V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ と定義せよ[*3]．そして，$V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ を比較し，望ましい方を選ぶという式も書いてみよ．
2. それぞれの最大化問題を解いて，それぞれの場合の最適な K_2 を求めよ．なお，不等式制約の解き方は次のようにすればよい．
   - 一旦，不等式制約を無視して解いてみる．このときの解を，正の投資のときは $\bar{k}^*$，負の投資のときは $\underline{k}^*$ と定義せよ
   - そのあとで，不等式制約が関係するかどうかを確認する
3. $\bar{k}^*$ と $\underline{k}^*$ の大小関係を比較せよ
4. $V^u(K_1), V^d(K_1)$ を求め，$V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ の大小関係を比較せよ．特に大小関係が切り替わる点がある場合，その閾値を求めよ．　．この関係を用いて，それぞれの最適な K_2 を整理して報告せよ．
5. $q = 1$ のときどうなるか

[*2] 非可逆とは，費用なしには元に戻せないといった意味である．

[*3] V^u は the Value of the firm when Upward investing から来てると思うと，記法が覚えやすいかもしれない．