# 基礎マクロ練習問題の**解答例**：一般均衡およびリスクがあるときの意思決定

日野将志 *

## 1 動学的な純粋交換経済

### 1.1 2 人の場合

#### 1.1.1 対数効用の計算問題１：同じ人がいる場合

1. 配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ であり，価格は $r$ である．
   競争均衡は，以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 $r$ の組である．
   - 家計 A の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A \\ \text{s.t.} \quad & c_1^A + s^A = y_1 \\ & c_2^A = (1+r)s^A + y_2 \end{aligned}$$

   - 家計 B の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad & \log c_1^B + \beta \log c_2^B \\ \text{s.t.} \quad & c_1^B + s^B = y_1 \\ & c_2^B = (1+r)s^B + y_2 \end{aligned}$$

   - 市場均衡条件

$$\begin{aligned} c_1^A + c_1^B &= 2 \\ c_2^A + c_2^B &= 2\beta \\ s^A + s^B &= 0 \end{aligned}$$

   なお，予算制約を生涯予算制約

$$c_1^i + \frac{c_2^i}{1+r} = y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}$$

   で書いても問題ない．

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

2. 二人の消費関数および貯蓄関数は次のようになる．つまり，$i \in \{A, B\}$ について

$$\begin{aligned} c_1^i &= \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\ c_2^i &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\ s^i &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} \end{aligned}$$

となる．

3. 消費関数か貯蓄関数を市場の均衡条件に代入すれば，利子率が求まる．例えば貯蓄関数を資産市場の均衡条件に代入すると，

$$\begin{aligned} &2\frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} = 0 \\ &\Rightarrow \beta(1+r)y_1 - y_2 = 0 \\ &\Rightarrow r = \frac{y_2}{\beta y_1} - 1 \end{aligned}$$

となる．

4. 均衡利子率を消費関数と貯蓄関数に代入すると，均衡配分が求まる．消費関数と貯蓄関数に代入すると，$i \in \{A, B\}$ について

$$\begin{aligned} c_1^i &= y_1 \\ c_2^i &= y_2 \\ s^i &= 0 \end{aligned}$$

となる．つまり，今期の所得を今期消費し，一切貯蓄を行わないような行動が最適な行動になる．総消費は $c_1 = 2y_1$ かつ $c_2 = 2y_2$ であった．

5. なお，$y_1 = y_2 \equiv y$ のとき，

$$r = \frac{1}{\beta} - 1$$

となる．さらに，$c_1 = c_2 = y$ となる．

6. 最後に，A さんのみが存在する場合を考えよう．このとき，A さんは貸借する相手がいないため，資産市場の均衡条件は，

$$s = \frac{\beta(1+r)2y_1 - 2y_2}{(1+\beta)(1+r)} = 0$$

である．これを解くと，

$$r = \frac{y_2}{\beta y_1} - 1$$

となる．結果として，均衡配分は，

$$\begin{aligned} c_1 &= 2y_1 \\ c_2 &= 2y_2 \end{aligned}$$

となる．これは B さんが存在した時の総消費に一致する．

**コメントおよび問題の主旨**：この問題では，選好や所得が全く同じ個人が複数いる場合，取引が起きないことを示している問題である．つまり，対偶をとって言い換えれば，取引が起こるならば，選好か所得が異なる個人が経済にいるということを示している．このように直観的に当たり前の結果をモデルは綺麗に描写出来る．

また最後の小問では B さんが存在しない経済でも，適切に経済を代表する家計を考えてもらうと，B さんが存在する経済と後者の**代表的家計** (representative household) が存在する経済で同じ均衡を得られることを例示した．このように代表的家計を考えると，数億人いる国家の問題を一人の家計に注目して考えられるため，非常に便利である．

### 1.1.2　対数効用の計算問題２：所得が違う場合

1. 配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ であり，価格は $r$ である．
   競争均衡は，以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 $r$ の組である．
   - 家計 A の効用最大化：

$$\max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad \log c_1^A + \beta \log c_2^A$$
$$\text{s.t. } c_1^A + s^A = 2$$
$$c_2^A = (1+r)s^A$$

   - 家計 B の効用最大化：

$$\max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad \log c_1^B + \beta \log c_2^B$$
$$\text{s.t. } c_1^B + s^B = 0$$
$$c_2^B = (1+r)s^B + 2\beta$$

   - 市場均衡条件

$$c_1^A + c_1^B = 2$$
$$c_2^A + c_2^B = 2\beta$$
$$s^A + s^B = 0$$

   なお，予算制約を生涯予算制約

$$c_1^i + \frac{c_2^i}{1+r} = y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}$$

   で書いても問題ない．
   それではそれぞれの家計 $i$ の効用最大化問題の解き方はすでに学んだ．つまり，予算制約を効用関数に代入して微分すればよい．この一階の条件は，一旦家計のインデックスを落として記述すると，

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2}$$
$$\Rightarrow \quad c_2 = \beta(1+r)c_1$$

である．これを予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\ c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\ s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} (c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{2}{1+\beta}, \frac{2\beta(1+r)}{1+\beta}, \frac{2\beta(1+r)}{(1+\beta)(1+r)}\right) \\ (c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2\beta}{(1+\beta)(1+r)}, \frac{2\beta^2}{1+\beta}, \frac{-2\beta}{(1+\beta)(1+r)}\right) \end{aligned}$$

が最適化の解である．

最後に市場均衡条件を確認する．例えば 1 期の財市場の均衡条件にこの結果を代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{2}{1+\beta} + \frac{2\beta}{(1+\beta)(1+r)} = 2 \\ &\Rightarrow\ 1 + \frac{\beta}{1+r} = 1+\beta \\ &\Rightarrow\ \beta = \beta(1+r) \\ &\Rightarrow\ r = 0 \end{aligned}$$

となる．つまり，均衡金利は $r = 0$ と定まる．

なお，これは 2 期目の財市場均衡条件や資産市場の均衡条件からも同じように求められる．確認として同様に計算しよう．まず 2 期目の財市場条件に家計の消費関数を代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{2\beta(1+r)}{1+\beta} + \frac{2\beta^2}{1+\beta} = 2\beta \\ &\Rightarrow (1+r) + \beta = 1+\beta \\ &\Rightarrow r = 0 \end{aligned}$$

と求まる．

資産市場の場合，

$$\begin{aligned} &\frac{2\beta(1+r)}{(1+\beta)(1+r)} + \frac{-2\beta}{(1+\beta)(1+r)} = 0 \\ &\Rightarrow\ (1+r) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow\ r = 0 \end{aligned}$$

と求まる．

このように均衡価格は $r = 0$ と求まった．

最後に均衡配分を求めるためには，この $r=0$ を消費関数に代入すればいい．すると，

$$
\begin{aligned}
(c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{2}{1+\beta}, \frac{2\beta}{1+\beta}, \frac{2\beta}{(1+\beta)}\right) \\
(c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2\beta}{(1+\beta)}, \frac{2\beta^2}{1+\beta}, \frac{-2\beta}{(1+\beta)}\right)
\end{aligned}
$$

と均衡配分が求まる．

**コメントおよび問題の主旨**：1.1.1 の小問 4 の解答から「純粋交換経済では均衡利子率は各期の初期賦存の比で決まる」という結果を得た．そこで，この問題では，1 期と 2 期の総初期賦存の $(y_2^A+y_2^B)/(y_1^A+y_1^B)=\beta$ とおいている．その結果，$r=0$ というシャープな結果が得られている．また，二人の生涯所得の比率 $Y^B/Y^A=\beta$ となるため，消費も $\beta$ の違いが生まれている．

均衡の計算に慣れるための練習である．なお，この手の 2 期間の純粋交換経済の計算問題は大学院入試で頻出だと思われる (例えば京大令和 2 年度等).

### 1.1.3　対数効用の計算問題３：片方が１期間しか生きない場合

配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ であり，価格は $r$ である．

競争均衡は，以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 $r$ の組である．

- 家計 A の効用最大化：

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A \\
\text{s.t. } & c_1^A + s^A = 1 \\
& c_2^A = (1+r)s^A + 1
\end{aligned}
$$

- 家計 B の効用最大化：

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad & \log c_1^B \\
\text{s.t. } & c_1^B + s^B = 1 \\
& c_2^B = (1+r)s^B + 1
\end{aligned}
$$

- 市場均衡条件

$$
\begin{aligned}
c_1^A + c_1^B &= 2 \\
c_2^A + c_2^B &= 2 \\
s^A + s^B &= 0
\end{aligned}
$$

なお，予算制約を生涯予算制約

$$
c_1^i + \frac{c_2^i}{1+r} = y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}
$$

で書いても問題ない．

家計の問題を解くと，

$$
\begin{aligned}
(c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{1}{1+\beta}\frac{2+r}{1+r}, \frac{\beta(2+r)}{1+\beta}, \frac{\beta(1+r)-1}{(1+\beta)(1+r)}\right) \\
(c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2+r}{1+r}, 0, \frac{-1}{1+r}\right)
\end{aligned}
$$

を得る．

先ほどの問題と同様に，これらの消費関数もしくは貯蓄関数を財市場や資産市場の均衡条件に代入すると，

$$r = \frac{2}{\beta}$$

を得る．

これを家計の最適化の解に代入すると，均衡配分が求まる．

$$(c_1^A, c_2^A, s^A) = \left(\frac{2}{2+\beta}, 2, \frac{\beta}{2+\beta}\right)$$
$$(c_1^B, c_2^B, s^B) = \left(\frac{2(1+\beta)}{2+\beta}, 0, \frac{-\beta}{2+\beta}\right)$$

**コメントおよび問題の主旨：** これは，「片方が 1 期間しか生きない」と解釈したが，家計間で割引率 $\beta$ に違いがある場合とも解釈することができる．そして，一般的に $\beta$ に家計間に違いがあるとき，$\beta$ が高い家計 (つまり我慢強い家計) のみが貯蓄を貯めるという結果が良く知られている[*1]．アメリカでは富の不平等が日本よりもずっと大きいことが知られており，そのような大きな富の不平等の一因は $\beta$ の違いが大きな可能性が考えられる．

## 1.2　3 人の場合

競争均衡の定義は次のとおり．配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B, c_1^C, c_2^C, s^C)$ であり，価格は $r$ である[*2]．

競争均衡は，以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B, c_1^C, c_2^C, s^C)$ と価格 $r$ の組である．

- 家計 A の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A \\ \text{s.t.} \quad & c_1^A + s^A = 1 \\ & c_2^A = (1+r)s^A \end{aligned}$$

- 家計 B の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad & \log c_1^B \\ \text{s.t.} \quad & c_1^B + s^B = 0 \\ & c_2^B = (1+r)s^B + 2 \end{aligned}$$

- 家計 C の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^C, c_2^C, s^C} \quad & \log c_1^C + \beta \log c_2^C \\ \text{s.t.} \quad & c_1^C + s^C = 2 \\ & c_2^C = (1+r)s^C + 1 \end{aligned}$$

*1 「我慢強い家計のみが富を独占する」という結果はラムゼー予想と呼ばれたりすることがある．

*2 記法が汚く感じる人は，$(c_1^i, c_2^i, s^i)_{i \in \{A,B,C\}}$ 等とまとめてもよい．

- 市場均衡条件

$$
\begin{aligned}
c_1^A + c_1^B + c_1^C &= 3 \\
c_2^A + c_2^B + c_2^C &= 3 \\
s^A + s^B + s^C &= 0
\end{aligned}
$$

2 人のときと特に違うのは，C さんの効用最大化条件と，市場均衡条件の左辺に C さんの消費や貯蓄も加わった点である．

最適化問題を解くと消費関数と貯蓄関数が求まる．全員，対数効用関数なので，

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\
c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\
s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)}
\end{aligned}
$$

という消費関数と貯蓄関数を持つ[*3]．あとは $(y_1^i, y_2^i)_{i\in\{A,B,C\}}$ を代入すれば，それぞれの家計の消費関数と貯蓄関数が求まる．ここでは省略する．

例えば $c_1$ に A,B,C さんの $(y_1^i, y_2^i)_{i\in\{A,B,C\}}$ を代入して，A,B,C さんの消費関数を求め，それを市場均衡条件に代入すると，次のように均衡利子率が求まる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+\beta}\left[1 + \frac{0}{1+r} + 0 + \frac{2}{1+r} + 2 + \frac{1}{1+r}\right] = 3 \\
&\Rightarrow\ 3\left[1 + \frac{1}{1+r}\right] = 3(1+\beta) \\
&\Rightarrow\ r = \frac{1}{\beta} - 1
\end{aligned}
$$

これで均衡利子率が求まった．

最後にこの均衡利子率を消費関数と貯蓄関数に代入すれば，均衡配分が求まる．

$$
\begin{aligned}
(c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{(1+\beta)}\right) \\
(c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2\beta}{1+\beta}, \frac{2\beta}{1+\beta}, \frac{-2\beta}{(1+\beta)}\right) \\
(c_1^C, c_2^C, s^C) &= \left(\frac{2+\beta}{1+\beta}, \frac{2+\beta}{1+\beta}, \frac{\beta}{(1+\beta)}\right)
\end{aligned}
$$

**コメントおよび問題の主旨**：おそらく市場均衡条件を正しく書くことが出来れば最後まで解ける問題と思われる．市場均衡の考え方,「左辺は使うもの，右辺は作ったものや存在している資源」，が理解できていれば，授業で説明していなくとも解けた人がいるのではないかと期待している．

## 1.3　3 期間の場合

次に 2 人 3 期間の場合である．

[*3] 授業スライドやこれまでの問題参照.

配分は $(c_1^A, c_2^A, c_3^A, s_1^A, s_2^A, c_1^B, c_2^B, c_3^B, s_1^B, s_2^B)$ であり，価格は $r_1, r_2$ である．
競争均衡は，以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 $r$ の組である．

- 家計 A の効用最大化：

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^A, c_2^A, c_3^A, s_1^A, s_2^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A + \beta^2 \log c_3^A \\
\text{s.t. } & c_1^A + s_1^A = 2 \\
& c_2^A + s_2^A = (1+r_1)s_1^A \\
& c_3^A = (1+r_2)s_2^A
\end{aligned}
$$

- 家計 B の効用最大化：

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^B, c_2^B, c_3^A, s_1^B, s_2^B} \quad & \log c_1^B + \beta \log c_2^B + \beta^2 \log c_3^B \\
\text{s.t. } & c_1^B + s_1^B = 0 \\
& c_2^B + s_2^B = (1+r_1)s_1^B + 1 \\
& c_3^B = (1+r_2)s_2^B + 1
\end{aligned}
$$

- 市場均衡条件

$$
\begin{aligned}
c_1^A + c_1^B &= 2 \\
c_2^A + c_2^B &= 1 \\
c_3^A + c_3^B &= 1 \\
s_1^A + s_1^B &= 0 \\
s_1^A + s_1^B &= 0
\end{aligned}
$$

3 期間の問題は，家計消費の練習問題 3 でも出題した．一応，ここでも解き方を復習しておく．最大化問題を解くときのみ，表記を単純化するために家計のインデックス $i \in \{A, B\}$ を落として書く．目的関数に予算制約を代入すると

$$
\max_{s_1, s_2} \log(y_1 - s_1) + \beta \log(y_2 + (1+r_1)s_1 - s_2) + \beta^2 \log(y_3 + (1+r_3)s_2)
$$

となる．これの一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
s_1: \quad & \frac{1}{y_1 - s_1} = \beta(1+r)\frac{1}{y_2 + (1+r_1)s_1 - s_2} \\
s_2: \quad & \frac{1}{y_2 + (1+r_1)s_1 - s_2} = \beta(1+r)\frac{1}{y_3 + (1+r_2)s_2}
\end{aligned}
$$

となる．これを予算制約を使って書き直すと，

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \beta(1+r_1)c_1 \\
c_3 &= \beta(1+r_2)c_2
\end{aligned}
$$

となる．便宜上，これらを消費の成長式と呼ぶ．

さらに 3 期と 2 期の予算制約を 1 期の予算制約に代入すると，次の生涯予算制約を得る．

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r_1} + \frac{c_3}{(1+r_1)(1+r_2)} = y_1 + \frac{y_2}{1+r_1} + \frac{y_3}{(1+r_1)(1+r_2)} \equiv Y$$

この生涯予算制約に，先ほどの消費の成長式を代入すると，

$$c_1\left[1+\beta+\beta^2\right] = Y$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y$$

を得る．これを消費の成長式に代入すると，

$$c_2 = \frac{\beta(1+r_1)}{1+\beta+\beta^2}Y$$
$$c_3 = \frac{\beta^2(1+r_1)(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}Y$$

を得る．

最後に貯蓄関数はこれらを予算制約に代入すると求まる．

$$s_1 = y_1 - c_1 = y_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y$$
$$s_2 = \frac{c_3 - y_3}{1+r_2} = \frac{\beta^2(1+r_1)}{1+\beta+\beta^2}Y - \frac{y_3}{1+r_2}$$

さて，これが一般的な解である．ここで A,B さんそれぞれの問題に戻る．$Y^A$ と $Y^B$ はそれぞれ，

$$Y^A = 2$$
$$Y^B = \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

である．これらを $Y$ に代入することで A, B さんのそれぞれの消費関数と貯蓄関数が求まる．

均衡価格 $(r_1, r_2)$ は次のように求まる．まず $r_1$ は 1 期と 2 期の財市場の均衡上条件より，

$$\frac{1}{1+\beta+\beta^2}[2 + \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}] = 2$$
$$\frac{\beta(1+r_1)}{1+\beta+\beta^2}[2 + \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}] = 1$$

を得る．これを両辺割ると，

$$\frac{1}{\beta(1+r_1)} = 2$$
$$\Rightarrow r_1 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

と均衡利子率 $r_1$ を得る．

次も同様に，2 期と 3 期の財市場の均衡条件の比を取ると，

$$\frac{1}{\beta(1+r_2)} = 1$$
$$\Rightarrow\ r_2 = \frac{1}{\beta} - 1$$

と均衡利子率 $r_2$ が求まる．

これらの均衡利子率 $(r_1, r_2)$ を消費関数に代入すれば，均衡配分が求まる．均衡利子率を $Y^B$ に代入して，先に $Y^B = 2\beta(1+\beta)$ である事を求めておくと，

$$
\begin{aligned}
(c_1^A, c_2^A, c_3^A, s_1^A, s_2^A) &= \left(\frac{2}{1+\beta+\beta^2}, \frac{1}{1+\beta+\beta^2}, \frac{1}{1+\beta+\beta^2}, \frac{2\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2}\right) \\
(c_1^B, c_2^B, c_3^B, s_1^B, s_2^B) &= \left(\frac{2\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, -\frac{2\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, -\frac{\beta}{1+\beta+\beta^2}\right)
\end{aligned}
$$

# 2　静学的な生産経済

家計の最大化問題は

$$
\begin{aligned}
&\max_{c,l}\ \log(c) + B\log(l) \\
&\text{s.t. } c = w(1-l) + \pi
\end{aligned}
$$

である．企業の利潤を受け取りを忘れないこと．

競争均衡は次を満たす，$(c, l, H, w, \pi)$ の組である．

- 家計は次の効用最大化問題を解く．

$$
\begin{aligned}
&\max_{c,l}\ \log(c) + Bl \\
&\text{s.t. } c = w(1-l) + \pi
\end{aligned}
$$

- 企業は次の利潤最大化問題を解く．

$$
\pi = \max_H H^\alpha - wH
$$

- 市場は均衡する．

$$
\begin{aligned}
c &= H^\alpha \\
l &= 1 - H
\end{aligned}
$$

まず家計の最大化問題を解くために制約を目的関数に代入すると，

$$
\max_l \log[w(1-l) + \pi] + Bl
$$

となる．この一階の条件は,

$$
\begin{aligned}
&\frac{w}{w(1-l)+\pi} = B \\
&\Rightarrow \frac{w}{B} = w(1-l) + \pi \\
&\Rightarrow wl = \pi + w - \frac{w}{B} \\
&\Rightarrow l = \frac{\pi}{w} + 1 - \frac{1}{B}
\end{aligned}
$$

である．したがって，予算制約より，

$$
\begin{aligned}
c &= w\left[\frac{1}{B} - \frac{\pi}{w}\right] + \pi \\
&= \frac{w}{B}
\end{aligned}
$$

である．

次に，企業の利潤最大化問題を解くと，

$$
\begin{aligned}
&\alpha H^{\alpha-1} = w \\
&\Rightarrow H = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

を得る．したがって，生産量 $Y$ は,

$$
Y = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
$$

である．利潤は,

$$
\begin{aligned}
\pi &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= Y - \alpha Y \\
&= (1-\alpha)Y = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

である．

まず財市場の市場均衡条件 $c = Y$ より，

$$
\begin{aligned}
&\frac{w}{B} = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&\Rightarrow w = \alpha^{\alpha} B^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

と均衡賃金が求まる．

次に労働市場の均衡条件 $1 - l = H$ より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{B} - \frac{1}{w}\underbrace{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{\pi} = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{B} w^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} w^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{B} w^{\frac{1}{1-\alpha}} = \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} + (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&\Rightarrow w^{\frac{1}{1-\alpha}} = B\left[\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] \\
&\Rightarrow w = B^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}
\end{aligned}
$$

と労働市場の均衡条件からも同様の均衡賃金が求まる．

最後に均衡配分を求める．まず消費は

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{\alpha^{\alpha} B^{1-\alpha}}{B} \\
&= \alpha^{\alpha} B^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

である．労働時間は,

$$
\begin{aligned}
H &= \left(\frac{\alpha}{\alpha^{\alpha} B^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= \frac{\alpha}{B}
\end{aligned}
$$

であり，利潤は,

$$
\begin{aligned}
\pi &= (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\alpha^{\alpha} B^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&= (1-\alpha)\left[\frac{\alpha}{B}\right]^{\alpha}
\end{aligned}
$$

である．労働時間を使い,

$$
l = 1 - \frac{\alpha}{B}
$$

と余暇時間も求まる.

# 3 自営業

## 3.1 自営業のモデル１：2 期間 Kiyotaki(1998) の準備 (難しい)

1. 競争均衡は，次の条件を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, c_1^B, c_2^B, s^A, s^B, k^A, k^B)$ と価格 $r$ の組である
   - 家計 A の効用最大化

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^A, c_2^A, s^A, k^A} \quad & \log(c_1^A) + \beta \log(c_2^A) \\
\text{s.t.} \quad & c_1^A + s^A + k^A = y \\
& c_2^A = z^A k^A + (1+r) s^A
\end{aligned}
$$

   - 家計 B の効用最大化

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^B, c_2^B, s^B, k^B} \quad & \log(c_1^B) + \beta \log(c_2^B) \\
\text{s.t.} \quad & c_1^B + s^B + k^B = y \\
& c_2^B = z^B k^B + (1+r) s^B
\end{aligned}
$$

   - 市場の均衡条件

$$
\begin{aligned}
& c_1^A + c_2^A + k^A + k^B = 2y \\
& c_2^A + c_2^B = z^A k^A + z^B k^B \\
& s^A + s^B = 0
\end{aligned}
$$

   背理法を使って，端点解が解となることを示そう．家計 A と B ともに内点解を仮定する．すると家計 A の一階条件は,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_1^A} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_2^A} \\
\frac{1}{c_1^A} &= \beta z^A \frac{1}{c_1^A}
\end{aligned}
$$

であり，家計 B の一階条件は，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_1^B} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_2^B} \\
\frac{1}{c_1^B} &= \beta z^B \frac{1}{c_1^B}
\end{aligned}
$$

である．

まず二人の一階条件の前者より，$c_2^A/c_1^A = c_2^B/c_1^B$ であることが分かる．さらに後者の一階条件が成り立つならば，

$$z^A = z^B$$

が成り立たないといけない．しかし，$z^A > z^B$ である．これは元々の仮定に反する．したがって，内点解は解とならない．

これはつまり，(1) どちらか 1 つの家計は「$k$ か $s$ かのどちらかしかもたない」，もしくは (2) 両方の家計は「$k$ か $s$ のどちらかしかもたない」という 2 つの可能性が考えられる．

3. 以下では 5 つの場合が考えられる．$z^B < z^A$ を基準に，(1)$1+r > z^A$ の場合，(2)$1+r = z^A$ の場合，(3)$1+r \in (z^B, z^A)$ の場合，(4)$1+r = z^B$ の場合，(5)$1+r < z^B$ の場合である．しかし，実は重要な場合分けは，(1) と (2) とそれ以外という分け方で十分である．以下ではそれを示す．
   - (1)$1+r > z^A(> z^B)$ の場合
     この場合， どちらの家計からしても資本を購入するよりも，貯蓄で運用した方が必ずリターンが高い．したがって，$s^A > 0$ かつ $s^B > 0$ となる．すると，$s^A + s^B = 0$ という均衡を満たすことができない．
   - (3),(4),(5) の場合：$1+r < z^A$ の場合
     $1+r < z^A$ のとき家計 A にとっては「$s^A < 0$ と借り入れをして，$k^A$ で運用すると常に必ず利益が生まれる」ことになる．したがって，負の無限大に $s^A$ を選び，正の無限大に $k^A$ を選ぶことで，無限大の利ザヤを取ることができる[*4]．これでは最適化を定義できないという問題が生じる．そのため，均衡の定義を満たさない

   したがって，結果的に残るのは (2) の $1+r = z^A$ の場合のみである．このとき家計 A は資本と貯蓄のリターンが同じであるため両方で資産を運用し，家計 B は貯蓄のみで資産を運用するのが最適になる．
4. 家計 B は資本 $k^B$ を保有しないことが前問で分かった．そのため，これは普通の家計の最適化問題になる．したがって，解は，

$$
\begin{aligned}
c_1^B &= \frac{y}{1+\beta} \\
c_2^B &= \frac{\beta z^A y}{1+\beta} \\
s^B &= \frac{\beta y}{1+\beta}
\end{aligned}
$$

[*4] 分かりにくい場合，もう少し噛み砕いた例は次のようになる．借入金利が 1% であり，資本のリターンが 3% としよう．このとき，$x$ 万円借り入れをして，資本で運用すると，$(3-1)\% \times x$ の利益が出る．したがって，$x$ を無限大にすれば，利益も無限大に出来る．

となる．

5. 家計 A の最適化問題を $a \equiv k + s$ を使って書き直すと，

$$\max_{c_1^A, c_2^A, s^A, k^A} \quad \log(c_1^A) + \beta \log(c_2^A)$$
$$\text{s.t. } c_1^A + a = y$$
$$c_2^A = (1+r)a$$

と書ける．なお，$z^A = (1+r)$ を使っていることに注意.

すると，これも，ここまで何度も解いた普通の最大化問題である．解は,

$$c_1^A = \frac{y}{1+\beta}$$
$$c_2^A = \frac{\beta z^A y}{1+\beta}$$
$$a = \frac{\beta y}{1+\beta}$$

となる．

さらに均衡では，$s^A + s^B = 0$ でなければならないので,

$$s^A = -s^B$$
$$= -\frac{\beta y}{1+\beta}$$

となる．したがって，$k^A = a - s^A$ なので,

$$k^A = 2\frac{\beta y}{1+\beta}$$

となる．つまり家計 A は家計 B から借り入れを行い，そのお金を用いて資本を投資する．

ここで $t = 1, 2$ のどちらでも $c_t^A = c_t^B$ となっていることに注目してほしい．直感的に,「A さんのほうが高い生産技術を持っているのだから，$c_t^A > c_t^B$ となりそう」だが，ここでは生産性に優位を持つ $A$ さんに生産活動を任せ，$B$ さんは生産を行わず資産を貯蓄で運用することで，効率的かつ均等な均衡を達成している．

6. 1 期の財の均衡条件に先ほど求めた消費関数と最適な資本の保有量を代入すると,

$$\underbrace{2\frac{y}{1+\beta}}_{=c_1^A + c_1^B} + \underbrace{2\frac{\beta y}{1+\beta}}_{=k^A} = 2y$$
$$\Rightarrow 2y = 2y$$

となり，1 期の財の均衡条件を満たすことが分かる

2 期の財の均衡条件に先ほど求めた消費関数と最適な資本の保有量を代入すると,

$$\underbrace{2\frac{\beta z^A y}{1+\beta}}_{=c_2^A + c_2^B} = \underbrace{z^A 2\frac{\beta y}{1+\beta}}_{=z^A k^A}$$

となる．

$s^A + s^B = 0$ はすでに前問の導出過程で使ったので，確認する必要がない.

**コメントおよび問題の主旨：**問題文の冒頭でも述べたが，起業家はマクロ経済にとって非常に重要な問題である．そこで，起業家を扱うようなモデルの基本的な要素になじんでもらうことがこの問題の狙いである．

Kiyotaki(1998) や Kiyotaki and Moore(1997) をはじめ，清滝先生のモデルはマクロ経済の応用では非常に用いられる．一方で，このようなモデルの解説は大学院でもあまり教えられず，「いつの間にか全員が知っているべき知識」となっている．基本的な部分であれば学部生でも理解できる内容だと思われるので，こういった問題を通じて少しずつ慣れてほしい．

# 4　政府の役割

## 4.1　所得再分配政策

1. 家計 A の効用最大化問題は,

$$\max_{c_1^A, c_2^A} \ c_1^A + \log(c_2^A)$$
$$\text{s.t. } p_1 c_1^A + p_2 c_2^A = p_1(50 - \tau)$$

   である．
   家計 B の効用最大化問題は,

$$\max_{c_1^B, c_2^B} \ \log(c_1^B) + c_2^B$$
$$\text{s.t. } p_1 c_1^B + p_2 c_2^B = p_1 \tau + p_2 40$$

   である．

2. それぞれ財 1 と財 2 の市場の均衡条件は

$$c_1^A + c_1^B = 50$$
$$c_2^A + c_2^B = 40$$

   である．

3. 家計 A の制約条件を目的関数に代入すると,

$$\max_{c_1^A} \ (50 - \tau) - \frac{p_2}{p_1} c_2^A + \log(c_2^A)$$

   となり，この一階条件は,

$$c_2^A = \frac{p_1}{p_2} \tag{4.1}$$

   となる．
   同様に，家計 B の一階条件は,

$$\frac{1}{c_1^B} = \frac{p_1}{p_2} \tag{4.2}$$

   となる．

この二人の限界代替率が同じになる条件は，

$$c_2^A = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{c_1^B}$$

である．

4. 家計 A の財 2 の需要関数はすでに前問の (4.1) 式で求まっている．それを予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} &p_1 c_1^A + p_1 = p_1(50-\tau) \\ &c_1^A = 49 - \tau \end{aligned}$$

と家計 A の財 1 の需要関数が求まる．

同様に，家計 B の財 1 の需要関数も (4.2) で求まっている．それを予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} &p_2 + p_2 c_2^B = p_1\tau + 40p_2 \\ \Rightarrow\ \ &c_2^B = 39 + \frac{p_1}{p_2}\tau \end{aligned}$$

と家計 B の財 2 の需要関数が求まる．

5. 仮に，財 1 の市場均衡条件を使うと，

$$\begin{aligned} &c_1^A + c_1^B = 50 \\ &\Rightarrow 49 - \tau + \frac{p_2}{p_1} = 50 \\ &\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \tau \end{aligned}$$

と価格比が求まる．

6. 均衡需要量は

$$\begin{aligned} (c_1^A, c_2^A) &= (49-\tau, \frac{1}{1+\tau}) \\ (c_1^B, c_2^B) &= (1+\tau, 39 + \frac{\tau}{1+\tau}) \end{aligned}$$

となる．

7. 均衡需要量を目的関数に代入すると，A さんの効用水準は

$$49 - \tau + \log\left(\frac{1}{1+\tau}\right)$$

であり，B さんの効用水準は

$$\log(1+\tau) + 39 + \frac{\tau}{1+\tau}$$

である．

A さんの効用水準は $\tau$ の減少関数であり，B さんの効用水準は $\tau$ の増加関数である．つまり，増税をして $\tau$ を上げると，A さんの効用は下がる．すなわち，$\tau$ を上げるような配分の変更はパレート改善ではない．

| | 今期 | 来期 |
|---|---|---|
| 利子率 | $1$ | $1+r$ |
| 資産価格 | $q$ | $1$ |

# 5　資産価格理論入門

## 5.1　資産価格

### 5.1.1　準備

解答は,

$$q = \frac{1}{1+r}$$

である.

これは，例えば次の表を見ると分かりやすいかもしれない．このような関係になっているので，$1/(1+r)$ という割引現在価値が資産価格に該当する．数値的な例でいうと，利子率 1% に近似的に似ている資産価格とは，今期 $q = 0.99$ 円支払うと，来期 1 円もらえるようなものである．

このとき，講義スライドの無裁定条件のページと同様にして，$q > 1/(1+r)$ と $q < 1/(1+r)$ のとき，どちらかの資産のみに需要が偏るような状況が出ることが説明できる．

### 5.1.2　長期資産

解答は,

$$r_2 = (1+r)^2 - 1$$

である.

つまり，もし,

$$1 + r_2 > (1+r)^2$$

ならば長期資産のほうが来々期に大きなリターンを持つので，皆長期資産を買う．$1 + r_2 > (1+r)^2$ が成り立つ限り，長期資産への超過需要が生じ，結果的に，$1 + r_2 = (1+r)^2$ となる．逆もしかりである．

**コメントおよび問題の主旨：**一般的な常識から考えれば，「$(1+r)^2 = 1 + r_2$ のときに，長期資産を保有すると，資産を引き出せず，財産を塩漬けにしてしまうことになる．それならば，1 期資産のほうが望ましいのでは？」のようなことを考えてしまうかもしれない．このように考えるのは，暗黙に「短期に資金が必要になるかもしれない状況」という摩擦を考えてしまっているからである．ここでは，そのような邪念を一旦除いて，クリーンな理論で考える練習をしてもらうための問題である．

現実には，長期資産は様々な観点からリスキーである．　例えば，家計からすると定期資産，個人年金，生命保険が現実には長期資産と呼べるだろう．長期間資産が換金可能になるまでの期間を残存期間という．長期資産で貯金をするということは，残存期間中に資金が必要になっても引き出せないリスクや，残存期間中に何か経済に大きな変動が起こるリスクなどがある．そのため，長期資産は短期資産よりも高い利回りを持つことが一般的である．なお，残存期間と利回りを描いた図をイールド・カーブ (Yield Curve 利回り曲線) と呼ぶ.

# 6　不確実性と意思決定

## 6.1　効用関数とリスク選好

これを確認するには，$u'(c) > 0$ に加えて $u''(c)$ の符号を確認すれば，上に凸か線形か下に凸かが分かる．

1. 対数効用：

$$u'(c) = \frac{1}{c} > 0$$
$$u''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0$$

したがって，リスク回避的である

2. CRRA 型：

$$u'(c) = c^{-\sigma}$$
$$u''(c) = -\sigma c^{-\sigma-1} < 0$$

したがって，リスク回避的である

3. 2 次効用

$$u'(c) = \alpha - \gamma c$$
$$u''(c) = -\gamma < 0$$

したがって，リスク回避的である

4. CARA 型

$$u'(c) = \exp(-\gamma c)$$
$$u''(c) = -\gamma \exp(-\gamma c)$$

したがって，リスク回避的である

このように代表的な効用関数はすべてリスク回避的である

**コメントおよび問題の主旨：**これはウォームアップの問題である．次の問題に引き続き取り組んでほしい．

## 6.2　効用関数とリスク回避度

1. 対数効用

$$\sigma_R = -c\frac{-1}{c^2}\frac{c}{1} = 1$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \frac{1}{c}$$

と求まる．したがって，対数効用は相対的リスク回避度が 1 となる関数であることが分かる．

2. CRRA 型

$$\sigma_R = -c(-\sigma c^{-\sigma-1})\frac{1}{c^{-\sigma}} = \sigma$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \frac{\sigma}{c}$$

と求まる．したがって，対数効用は相対的リスク回避度が $\sigma$ となる関数であることが分かる．なお，このように相対的リスク回避度 (RRA, Relative Risk Aversion) が一定 (constant) な関数であるため，Constant Relative Risk Aversion 効用，CRRA 効用と呼ばれる．

3. 2 次効用

$$\sigma_R = -c(-\gamma)\frac{1}{\alpha-\gamma c} = \frac{\gamma c}{\alpha-\gamma c}$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \frac{\gamma}{\alpha-\gamma c}$$

となる．このように 2 次効用の場合，相対的リスク回避度も絶対的リスク回避度もパラメータだけでは求まらない．

4. CARA 型

$$\sigma_R = -c(-\gamma\exp(-\gamma c))\frac{1}{\exp(-\gamma c)} = \gamma c$$
$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{c} = \gamma$$

となる．このように，絶対的リスク回避度がパラメータだけで求まる．なお，この効用関数は，絶対的リスク回避度 (ARA, Absolute Risk Aversion) が一定 (Constant) になることから，Constant Absolute Risk Aversion，CARA 型効用と呼ばれる．

## 6.3　所得のリスク：安全資産

1. 最大化問題は以下の通り．

$$\max_{c_1,c_2^h,c_2^l,s} u(c_1) + \beta\underbrace{\left[pu(c_2^h)+(1-p)u(c_2^l)\right]}_{\equiv\mathbb{E}[u(c_2)]}$$
$$\text{s.t. } c_1 + s = y_1$$
$$c_2^h = y_2^h + (1+r)s$$
$$c_2^l = y_2^l + (1+r)s$$

なお，原理原則として，予算制約に確率的な要素は書かないこと．予算制約とは，「X が起きた時 (今の場合，$y_2^h, y_2^l$ が実現した時) に，どういう制約になるか」を記述するものである．確率的な要素は効用関数に反映される．

2. 最大化問題を記述できたら，一階条件を求める手続きはいつも通りである．つまり，まず制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_s \frac{[y_1-s]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\left[p\frac{[y_2^h+(1+r)s]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + (1-p)\frac{[y_2^l+(1+r)s]^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right]$$

となる．この一階条件は,

$$[y_1 - s]^{-\sigma} = \beta(1+r)\left[p[y_2^h + (1+r)s]^{-\sigma} + (1-p)[y_2^l + (1+r)s]^{-\sigma}\right]$$

となる．

もし $p = 1$(または $p = 0$) であれば，右辺の第二項 (または第一項) が消え，リスクのない問題に帰着できる．しかし，$p \in (0,1)$ のとき，この最大化問題は $-\sigma$ が指数としてあるせいで $s$ について解くことが出来ない．したがって，これ以降の計算ができず $c_1, c_2$ も解くことができない．

3.　念のため最大化問題を書くと，以下の通り．

$$\begin{aligned}
\max_{c_1, c_2^h, c_2^l, s} \quad & \left(\alpha c_1 - \frac{\gamma c_1^2}{2}\right) + \beta\left[p\left(\alpha c_2^h - \frac{\gamma (c_2^h)^2}{2}\right) + (1-p)\left(\alpha c_2^l - \frac{\gamma (c_2^l)^2}{2}\right)\right] \\
\text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\
& c_2^h = y_2^h + (1+r)s \\
& c_2^l = y_2^l + (1+r)s
\end{aligned}$$

次に，予算制約を目的関数に代入すると,

$$\begin{aligned}
\max_s \ & \left(\alpha[y_1 - s] - \frac{\gamma[y_1 - s]^2}{2}\right) \\
& + \beta\left[p\left(\alpha[y_2^h + (1+r)s] - \frac{\gamma[y_2^h + (1+r)s]^2}{2}\right) + (1-p)\left(\alpha[y_2^l + (1+r)s] - \frac{\gamma[y_2^l + (1+r)s]^2}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

となる．この一階の条件は,

$$\begin{aligned}
& \alpha - \gamma[y_1 - s] = \beta(1+r)\left[p(\alpha - \gamma[y_2^h + (1+r)s]) + (1-p)(\alpha - \gamma[y_2^h + (1+r)s])\right] \\
& \Rightarrow (\alpha - \gamma y_1) + \gamma s = -\beta(1+r)\gamma(1+r)s + \beta(1+r)\left[\alpha - \gamma \underbrace{[p y_2^h + (1-p) y_2^l]}_{\equiv \mathbb{E}[y_2]}\right] \\
& \Rightarrow [\gamma + \beta(1+r)^2\gamma]s = [\beta(1+r) - 1]\alpha + \gamma\left[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]\right] \\
& \Rightarrow s = \frac{[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1 + \beta(1+r)^2} + \frac{[\beta(1+r) - 1]\alpha}{\gamma[1 + \beta(1+r)^2]}
\end{aligned}$$

となる．

4. 消費関数は貯蓄関数を予算制約を目的関数に代入すると求まる．つまり,

$$\begin{aligned}
c_1 &= y_1 - s \\
&= y_1 - \left[\frac{[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1 + \beta(1+r)^2} + \frac{[\beta(1+r) - 1]\alpha}{\gamma[1 + \beta(1+r)^2]}\right] \\
&= \frac{\beta(1+r)^2[y_1 + \frac{\mathbb{E}[y_2]}{1+r}]}{[1 + \beta(1+r)^2]} + \frac{[1 - \beta(1+r)]}{\gamma[1 + \beta(1+r)^2]}\alpha \\
&= \frac{\beta(1+r)^2}{1 + \beta(1+r)^2}Y + \frac{[1 - \beta(1+r)]}{\gamma[1 + \beta(1+r)^2]}\alpha
\end{aligned}$$

これは家計の消費の章の 2.6.3 の解答に一致する．つまり，生涯的な所得の割引現在価値の定義を，所得の期待値に微修正したという違いはあるが，1 期の消費は恒常所得仮説のときと変わらない．

5. $c_2^h, c_2^l$ もそれぞれ，予算制約を使えば解くことが出来る．

$$\begin{aligned} c_2^h &= y_2^h + (1+r)s \\ &= y_2^h + (1+r)\left[\frac{[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1+\beta(1+r)^2} + \frac{[\beta(1+r)-1]\alpha}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\right] \end{aligned}$$

これは $y_2^h$ が登場し，うまく $Y$ に含めるように整理することもできない．そのため家計の消費の章の 2.6.3 の解答の $c_2$ に一致しない．
同様に，所得が低いときは，

$$\begin{aligned} c_2^l &= y_2^l + (1+r)s \\ &= y_2^l + (1+r)\left[\frac{[y_1 - \beta(1+r)\mathbb{E}[y_2]]}{1+\beta(1+r)^2} + \frac{[\beta(1+r)-1]\alpha}{\gamma[1+\beta(1+r)^2]}\right] \end{aligned}$$

であり，$(1+r)s$ の項は同じなので，$c_2^h$ と $c_2^l$ の大きさの違いは，$y_2^h$ と $y_2^l$ のみで決定される．したがって，$c_2^h > c_2^l$ である．

6. $\beta(1+r) = 1$ とすると，

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1+r}{2+r}Y \\ c_2^h &= y_2^h + \frac{1+r}{2+r}[y_1 - \mathbb{E}[y_2]] \\ c_2^l &= y_2^l + \frac{1+r}{2+r}[y_1 - \mathbb{E}[y_2]] \end{aligned}$$

となる．このように，$\beta(1+r) = 1$ であっても，$c_1 = c_2$ とはならなくなる．この点は次の問題で対照的な結果が得られることにも注意してほしい．

**コメントおよび問題の主旨：**この問題では，期待効用のもとでの最大化問題の設定・解法に慣れてもらうのが狙いである．まず，「リスクを導入したところで，最大化問題を記述するうえで変更すべき点は，効用を期待効用に変えるだけ」ということを学んでもらい，リスクの導入は概念的にはとても簡単であることを学んでもらった．しかし，CRRA 型の場合，期待値のせいで一階条件が解けないことも確認してもらった．このように「概念的に導入することは簡単でも，計算することは簡単ではない」問題があることを学んでもらうことがこの問題の前半の狙いである．

この問題の後半では，2 次効用を使って，問題を解いてもらった．2 次効用は，限界効用が線形になる．そのため，CRRA 効用のときに起きたような面倒な問題が起きず，リスクがあっても解析的に解くことができる．これはとても特殊な特徴である．

## 6.4　所得のリスク：アロー証券

1. 最大化問題は以下の通り．

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2^h, c_2^l, s^h, s^l} \quad & u(c_1) + \beta \underbrace{\left[pu(c_2^h) + (1-p)u(c_2^l)\right]}_{\equiv \mathbb{E}[u(c_2)]} \\ \text{s.t.}\quad & c_1 + s^h + s^l = y_1 \\ & c_2^h = y_2^h + (1+r^h)s^h \\ & c_2^l = y_2^l + (1+r^l)s^l \end{aligned}$$

2. CRRA 効用とする．また制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_{s^h, s^l} \frac{[y_1 - s^h - s^l]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \left[ p\frac{[y_2^h + (1+r^h)s^h]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + (1-p)\frac{[y_2^l + (1+r^l)s^l]^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right]$$

となる．そして，$s^h$ と $s^l$，それぞれの一階条件は，

$$\begin{aligned} s^h &: [y_1 - s^h - s^l]^{-\sigma} = \beta p(1+r^h)[y_2^h + (1+r^h)s^h]^{-\sigma} \\ s^h &: [y_1 - s^h - s^l]^{-\sigma} = \beta(1-p)(1+r^l)[y_2^l + (1+r^l)s^l]^{-\sigma} \end{aligned}$$

となる．これは前問の安全資産がある場合と異なり，右辺に期待値が出てきていない．そのため，CRRA 効用の場合でも解くことができる．
実際，これら予算制約を使って整理すると，$s^h$ と $s^l$ の一階条件は

$$c_2^h = [\beta p(1+r^h)]^{\frac{1}{\sigma}} c_1 \tag{6.1}$$
$$c_2^l = [\beta(1-p)(1+r^l)]^{\frac{1}{\sigma}} c_1 \tag{6.2}$$

となる．
さらに 1 期の予算制約に，2 本の 2 期目の予算制約を代入すると，

$$c_1 + \frac{c_2^h}{1+r^h} + \frac{c_2^l}{1+r^l} = y_1 + \frac{y_2^h}{1+r^h} + \frac{y_2^l}{1+r^l}$$

と生涯予算制約が求まる．この右辺を $Y$ と定義する．これに先ほどの一階条件 (6.1) と (6.2) を代入すると，

$$\begin{aligned} & c_1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_1 + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} c_1 = Y \\ \Rightarrow\ & c_1 = \frac{1}{1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

と $c_1$ の消費関数が求まる．なお，再度，家計の消費の問題 2.6.2 と比較すると，答えは一致しないが，関数形は似ていることに気づいてほしい．
これを先ほどの一階条件 (6.1) と (6.2) に再度代入すると，

$$\begin{aligned} c_2^h &= \frac{[\beta p(1+r^h)]^{\frac{1}{\sigma}}}{1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \\ c_2^l &= \frac{[\beta(1-p)(1+r^l)]^{\frac{1}{\sigma}}}{1 + [\beta p]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + [\beta(1-p)]^{\frac{1}{\sigma}}(1+r^h)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

と $c_2^h$ と $c_2^l$ の消費関数が得られる．これらも，家計の消費の問題 2.6.2 と比較すると，やはり関数形は似ていることが確認できるだろう．

3. $\beta p(1+r^h) = \beta(1-p)(1+r^l) = 1$ のとき，

$$c_1 = c_2^h = c_2^l$$

となる．特に後者の関係は，安全資産のみが利用可能な時とは，対照的な結果である．安全資産のみが利用可能なときは，$r$ や $p$ の値に関わらず必ず $c_2^h > c_2^l$ であった．しかし，アロー証券が利用可能な場合，$c_2^h = c_2^l$ が達成可能であることを示している．このように，所得のリスクがあっても，同じ消費の水準を達成できることを**完全保険** (pefect insurance) という．

4. アロー証券から安全資産を作ることは可能である．つまり，$s^h$ と $s^l$ を両方買っておくことと，安全資産 $s$ を買っておくことは同じである．

$$s^h = \frac{1+r}{1+r^h} s$$
$$s^l = \frac{1+r}{1+r^l} s$$

となるように $s^h$ と $s^l$ を買うことは，$s$ 単位の安全資産を買うことと同じである．このようにアロー証券から安全資産は作れる．しかし，逆はその限りではない．

**コメントおよび問題の主旨：**素朴に考えると，「リスクがある経済でも安全資産が利用可能な経済が，最も単純で美しい経済」と思えるかもしれない．しかし，リスクがある経済の場合，アロー証券のある経済のほうが綺麗な結果が得られることを確認してもらった．実際，安全資産の場合，CRRA 効用では解析的に解くことさえできなかった．しかし，アロー証券がある世界では解を得ることができる．

また，実はリスクの実現の数と利用可能な証券の数はとても重要である．もし利用可能な証券のほうが少ない場合，市場は**不完備** (incomplete) であると言われる[*5]．一方，利用可能な証券がリスクの実現の数以上の場合，市場は**完備** (complete) であるという．前問のように安全資産しか利用可能でない場合は，まさに市場が不完備な場合である．このとき，家計は所得のリスクをうまく分散することができなかった．しかし，この問題ではリスクの実現の数 ($y_2^h$ と $y_2^l$ の 2 つ) だけ証券 ($s^h$ と $s^l$ の 2 つ) が利用可能であり，市場は完備である．すると，これらのリスクを完全に排除して，完全な消費の平準化ができることを確認してもらった．

## 6.5　ポートフォリオ問題

1. 家計の目的関数は，効用の期待値である．したがって，

$$\mathbb{E}[\log(c)] = p\log(c^h) + (1-p)\log(c^l)$$

である．

2. 効用最大化問題は，

$$\begin{aligned}
\max_{c^l, c^h, a^f, a^h, a^l} \quad & p\log(c^h) + (1-p)\log(c^l) \\
\text{s.t.} \quad & a^f + a^r = y \\
& c^h = (1+r^f)a^f + (1+r^h)a^r \quad \text{when } r^h \\
& c^l = (1+r^f)a^f + (1+r^l)a^r \quad \text{when } r^l
\end{aligned}$$

となる．

なお，原理原則として，予算制約に確率的な要素は書かないこと．予算制約とは，「X が起きた時 (今の場合，$r^h, r^l$ が実現した時) に，どういう制約になるか」を記述するものである．確率的な要素は効用関数に反映される．

*5 不完全 (imperfect) とは違うことに気を付けてほしい．市場が不完全というと，外部性・公共財や不完全競争 (独占や寡占) を示唆する．

3. 予算制約を目的関数に代入すると，

$$\begin{aligned}&\max_{a^f}\ p\log\left((1+r^f)a^f+(1+r^h)[y-a^f]\right)+(1-p)\log\left((1+r^f)a^f+(1+r^l)[y-a^f]\right)\\ \Rightarrow\ &\max_{a^f}\ p\log\left((r^f-r_h)a^f+(1+r^h)y\right)+(1-p)\log\left((r^f-r_l)a^f+(1+r^l)y\right)\end{aligned}$$

となる．この一階条件は，次のとおりである．

$$\begin{aligned}&p\frac{r^f-r^h}{(r^f-r^h)a^f+(1+r^h)y}+(1-p)\frac{r^f-r^l}{(r^f-r^l)a^f+(1+r^l)y}=0\\ &\Rightarrow p\frac{-\epsilon^h}{-\epsilon^h a^f+(1+r^h)y}+(1-p)\frac{\epsilon^l}{\epsilon^l a^f+(1+r^l)y}=0\\ &\Rightarrow p\epsilon^h[\epsilon^l a^f+(1+r^l)y]=(1-p)\epsilon^l[-\epsilon^h a^f+(1+r^h)y]\\ &\Rightarrow [p\epsilon^h\epsilon^l+(1-p)\epsilon^h\epsilon^l]a^f=(1-p)\epsilon^l(1+r^h)y-p\epsilon^h(1+r^l)y\\ &\Rightarrow a^f=\frac{(1-p)\epsilon^l(1+r^h)y-p\epsilon^h(1+r^l)y}{\epsilon^h\epsilon^l}\end{aligned}$$

4. 最適な危険資産の保有量は，予算制約 $y=a^f+a^r$ より，

$$a^r=y-\frac{(1-p)\epsilon^l(1+r^h)y-p\epsilon^h(1+r^l)y}{\epsilon^h\epsilon^l}$$

と直ちに求まる．

5. この解答は，直感的には自明である．つまり「リスク資産の良い利回りが実現する確率 $p$ が増えたのだから，リスク資産をもっと持った方が良い」と考えられる．これを計算に基づいて求める．$a^f$ の最適な保有量を見ると，$p$ の項には必ずマイナスがついていることが分かる．したがって，$p$ が上がると $a^f$ が下がる．さらに，$a^r$ も同様の計算によって，$p$ が上がると $a^r$ が上がることが分かる．このように直感的に自明なことをきちんと示すことができた．

## 6.6 2 期間のルーカス・ツリー

1. 効用最大化問題は，

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s_1,s_2}\ &\frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\beta\mathbb{E}\frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma}\\ &c_1+p_1s_1=[p_1+d_1]\\ &c_2+p_2s_2=[p_2+d_2]s_1\end{aligned}$$

となる．ここでは，$d$ に関する確率分布の情報を問題で書いていないので，目的関数の 2 期目の部分は期待値で書く必要がある[*6]．

2. 目的関数に制約条件を代入すると，

$$\max_{s_1,s_2}\ \frac{(p_1+d_1-p_1s_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma}+\beta\mathbb{E}\frac{([p_2+d_2]s_1-p_2s_2)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

となる．なお，ここで，目的関数を $s_2$ に関して見ると，

$$-p_2\beta\mathbb{E}([p_2+d_2]s_1-p_2s_2)^{-\sigma}<0$$

[*6] 期待値は定義できると仮定している．

となる事が分かる．つまり，$s_2$ は少なければ少ない方が良いことになる．ここで，家計は借金を残して死ぬことができないので，$s_2 = 0$ が $s_2$ が最小である．

3. 前の問題の結果を使って，再度目的関数を整理すると，

$$\max_{s_1} \frac{(p_1 + d_1 - p_1 s_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \mathbb{E} \frac{([p_2 + d_2]s_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

となる．

この一階条件は，

$$s_1 \ : \ p_1(p_1 + d_1 - p_1 s_1)^{-\sigma} = \beta \mathbb{E}(p_2 + d_2)([p_2 + d_2]s_1)^{-\sigma} \tag{6.3}$$

となる．

4. この問題はワルラス法則を確認してもらう問題である．ワルラス法則とは，「経済に $n$ つの市場があるとき，$n-1$ つの市場が均衡すれば，$n$ つの市場はすべて均衡する」というものである．

元々の予算制約に $s_t = 1$ を代入する．すると，

$$c_1 = d_1$$
$$c_2 = d_2$$

となる．これが財市場の均衡条件である．つまり，均衡で家計は配当分のみ消費する．

5. 2 期目の貯蓄 $s_2$ の価格 $p_2$ について検討する．家計は $s_2$ を全く持たないことが最適であることを学んだ．一方，市場には $s_2 = 1$ の初期賦存が存在する．すると，常に，$s_2$ の超過供給が存在し，$s_2$ の価格 $p_2$ は正の値からゼロに向かってずっと下がっていくことが分かる．結果的に，$p_2$ はゼロになることが推論できる．

6. 家計のオイラー方程式 (6.3) に予算制約を代入すると，

$$p_1 = \beta \mathbb{E} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{-\sigma} [p_2 + d_2]$$

となる．さらに，小問 4 の結果より，$p_2 = 0$ となるので，

$$p_1 = \beta \mathbb{E} \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{-\sigma} d_2$$

となることが分かる．これは，「現在の資産価格 $p_1$ は将来の配当の割引現在価値で決まる」ことを表している．また，ここで資産価格を割り引く際には，$\beta \mathbb{E}(c_2/c_1)^{-\sigma}$ という割引因子を使う必要があることに気づいてほしい．これを一般に確率的割引因子 (stochastic discount factor) と呼ぶ．この確率的割引因子の重要性は資産価格理論やマクロ経済でたびたび重要になるので，高いレベルに関心がある学生は，ここでは言葉だけでも覚えておくと良いと思われる．

**コメントおよび問題の主旨：**ルーカス・ツリーモデルは，単純な一般均衡のモデルにおいて，「資産価格は将来の配当の割引現在価値になる」というファイナンス理論で基本となる方程式を導く．そのため，マクロ経済的な資産価格理論の最も基本的なモデルと考えられている．