基礎マクロ：家計消費と貯蓄 (中級)

日野将志

一橋大学

2021

$\boxed{\text{注：このスライド}}$

このスライドは，家計消費と貯蓄の続きです.

- 主に (大学院に関心のある) 学部 3,4 年生用

このスライドの内容

1. 借入制約

2. 不確実性

3. 異時点間の代替とリスク回避

4. 再帰的効用 (上級)

借入制約

消費分野のパズルの例

- 現実の観察１：若者の消費は，中年期の消費よりも少ない
  - もし恒常所得仮説が正しいならば，ライフサイクルを通じて消費は一定のはず
    - 理由：若い間は借入をして消費を増やし，中年期には返済をする
- 現実の観察２：給付金に対して，消費の増加が大きい (25+%)
  - もし恒常所得仮説が正しいならば，給付金に対してほんの少ししか消費を増やさないはず
    - 生涯年収 (約 2-4 億円) に対して，10 万円の増加は微々たるもの (0.05%)

一つの仮説：借入制約

金融的な制約の種類

金融的な制約は，借入制約以外にもいくつか種類がある

- (最も単純な) 借入制約

  $$s_t \geq \underline{s}$$

  「$\underline{s}(\leq 0)$ よりも借入できない」($\underline{s}$ は外生)
  - $\underline{s} = 0$ の場合が比較的多い
- 頭金制約 (downpayment cons't)
  例えば住宅や車を購入する場合，全体の 1-3 割程度を頭金として支払い，残りを借金する
- 担保制約 (collateral cons't)
  例えば自営業の家計の場合，事業の収益や資産を担保に借入することが出来る

他にもいくつかある．このスライドでは，借入制約のみ．

借入制約のある二期間モデル

仮定：$\beta(1+r)y_1 < y_2$ とする
意味：「若年期の方が収入が少ない」

このときの二期間問題は以下のとおり

$$\max_{c_1, c_2, s} \log c_1 + \beta \log c_2$$
$$\text{s.t. } c_1 + s = y_1$$
$$c_2 = y_2 + (1+r)s$$
$$s \geq 0$$

借入制約があるとどう変わる？

$s \geq 0$ ということは，$c_1 \leq y_1$
意味：「若い時に借入できないので，若いときは所得以上の消費が出来ない」

本来ならば借入をしたい．しかし出来ない！

$$c_1 = y_1$$
$$c_2 = y_2$$

Hand-to-Mouth(その日暮らし)

借入制約の含意

借入制約が消費のパズル (5 頁) を解決する

- 現実の観察 1： 若者の消費は，中年期の消費よりも少ない
  - もし恒常所得仮説が正しいならば，ライフサイクルを通じて消費は一定のはず
    - 理由：若い間は借入をして消費を増やし，中年期には返済をする
  - 若者は借入制約のせいで借入が出来ず消費が少ない
- 現実の観察 2： 給付金に対して，消費の増加が大きい (25+%)
  - もし恒常所得仮説が正しいならば，給付金に対してほんの少ししか消費を増やさないはず
    - 生涯年収 (約 2-4 億円) に対して，10 万円の増加は微々たるもの (0.05%)
  - 借入制約に直面してる家計は，手元の現金が増えると，そのまま消費に使う

借入制約はとても重要

不確実性の導入

不確実性の導入

不確実性

再帰的効用

異時点間の代替とリスク回避の分離
(学部 4 年・院生用)

異時点間の代替とリスク回避の分離

上述のとおり，異時点間の代替とリスク回避度は概念的には別物.
$\Rightarrow$ 分離できるような目的関数が必要：再帰的効用 (Epstein-Zin-Weil 選好)

次のように導入

- u: 異時点間の選好
- v: リスクの選好

再帰的効用への準備：リスクと異時点間区別なし

リスクと異時点間の選好を区別しない場合 (標準的な場合)：
定義：確実性等価 CE

$$CE \equiv u^{-1}\left(\mathbb{E}[u(c)]\right)$$
$$= u^{-1}\left(\sum_z u(c(z))p(z)\right)$$

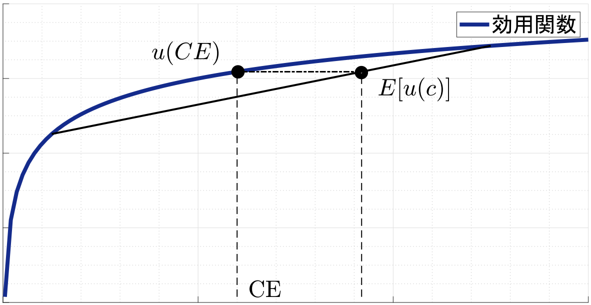
特徴：u は狭義の凹関数なので，以下が成り立つ．

$$CE < \sum_z c(z)p(z)$$

確実性等価を使うことで，次のように目的関数を書き直せる．

$$u(c_1) + \beta\mathbb{E}u(c_2)$$
$$\Leftrightarrow u(c_1) + \beta u(CE_2)$$

図示：確実性等価



$$u(CE) = \mathbb{E}[u(c)]$$

再帰的効用：リスクと異時点間区別あり

リスクと異時点間の選好を区別する場合：

定義：確実性等価 CE

$$CE \equiv v^{-1}(\mathbb{E}[v(c)]) = v^{-1}\left(\sum_z v(c(z))p(z)\right)$$

確実性等価を使うことで，次のように目的関数を書き直せる．

$$\begin{aligned}U_1 =& u(c_1) + \beta u(CE_2) \\ =& u(c_1) + \beta u \circ v^{-1}\left(\sum_z v(c_2(z))p(z)\right) \\ =& u(c_1) + \beta u \circ v^{-1}\left(\sum_z v \circ u^{-1} \circ u(c_2(z))p(z)\right)\end{aligned}$$

(続)

再帰的効用

$$\begin{aligned}U_1 =& u(c_1) + \beta u \circ v^{-1}\left(\sum_z v \circ u^{-1} \circ u(c_2(z))p(z)\right)\\ =& u(c_1) + \beta u \circ v^{-1}\left(\sum_z v \circ u^{-1} \underbrace{(U_2)}_{\equiv u(c_2(z))} p(z)\right)\\ =& u(c_1) + \beta u \circ v^{-1}\left(\mathbb{E}[v \circ u^{-1}(U_2)]\right)\end{aligned}$$

これを $V_1 = u^{-1}(U_1)$ と $V_2 = u^{-1}(U_2)$ とすると，

$$V_1 = u^{-1}\left[u(c_1) + \beta u \circ v^{-1}\left(\mathbb{E}[v(V_2)]\right)\right]$$

これを Epstein-Zin(-Weil) 選好 (EZW 効用) と呼ぶ (V_1 と V_2 が再帰的になっている).

再帰的効用：CRRA 型の関数形

例えば，次のような関数形とする．

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$
$$v(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

このとき，

$$U_1 = \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{1}{1-\sigma} \left(\sum_z c_2(z)^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

$$V_1 = \left[c_1^{1-\sigma} + \beta \left(\sum_z V_2^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

再帰的効用と標準的 CRRA

標準的 CRRA 効用

$$\frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \sum_z \frac{c_2(z)^{1-\sigma}}{1-\sigma} p(z)$$

もし，EZW 効用は，$\sigma = \gamma$ のとき，この標準的 CRRA 効用と一致する．

- 標準的なケースは，EZW 効用の特殊ケース ($\sigma = \gamma$)

再帰的効用の効能

(検討中)

- タイミングの問題
  - 次の二択はどっちが良い？ ($c_h > c_l$)
    - 2 期に確率 p で将来ずっと c_h か，確率 $1-p$ で将来ずっと c_l となる
    - 毎期確率 p で c_h か，確率 $1-p$ で c_l
  - 期待効用だと二つの選択肢は同じはず．一方，心理的な直観では後者の方が好まれやすい．
- 反循環的な利子率およびリスク・プレミアム
  -
- 低い安全利子率

ポートフォリオ問題

- 所得は1期のみ．$y_1 > 0$．これをどう運用するかという問題
- J 種類の証券 ω_j がある．
- 各証券 ω_j は，次期に z が実現するとリターン $R_j(z)$ を生む

$$c_1 + \sum_{j=1}^{J} \tilde{\omega}_j = y_1$$

$$c_2(z) = \sum_{j=1}^{J} \tilde{\omega}_j R_j(z)$$

ポートフォリオ問題：書き換え

この問題を書き換えた方が便利.

$$\omega_j \equiv \frac{\tilde{\omega}_j}{y_1 - c_1}$$

これを使うと，予算制約は次のように書き換えられる.

$$c_2(z) = (y_1 - c_1) \sum_{j=1}^{J} \omega_j R_j(z)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \omega_j = 1$$

最適化問題

このポートフォリオ問題は，次のとおり．

$$\max_{c_1, \{c_2(z)\}_z, \{\omega_j\}_j} \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{1}{1-\sigma} \left(\sum_z c_2(z)^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

$$\text{s.t. } c_2(z) = (y_1 - c_1) \sum_{j=1}^{J} \omega_j R_j(z)$$

$$\sum_{j=1}^{J} \omega_j = 1$$

予算制約を目的関数に代入すると，

$$\max_{c_1, \{\omega_j\}_j} \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(y_1 - c_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \left(\sum_z \left[\sum_{j=1}^{J} \omega_j R_j(z) \right]^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

最適化問題：分解

$$\max_{c_1,\{c_2(z)\}_z,\{\omega_j\}_j} \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(y_1 - c_1)^{1-\gamma}}{1-\sigma} \left(\sum_z \left[\sum_{j=1}^{J} \omega_j R_j(z) \right]^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

この問題は次の 2 つに分解して解くことが出来る

- ポートフォリオ選択部分：$\{\omega_j\}_j$ の j (上の青部分)
- 消費と貯蓄問題：c_1 と貯蓄 (ω_j の和)

ポートフォリオ選択部分の問題

$$\tilde{V} \equiv \max_{\{\omega_j\}_j} \sum_z \left[\sum_{j=1}^{J} \omega_j R_j(z) \right]^{1-\gamma} p(z)$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{J} \omega_j = 1$$

これを解くと，最適な資産量 ω_j^* と，そのときの目的関数の値 $\tilde{V}$ が求まる．

消費と貯蓄問題

$$\max_{c_1} \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(y_1 - c_1)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tilde{V}^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

一階の条件：

$$c_1^{-\sigma} = \beta (y_1 - c_1)^{-\sigma} \tilde{V}^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

EZW 効用では，ポートフォリオの配分 ($\tilde{V}$) が，消費と貯蓄に影響する

Stochastic Discount Factor

次に，Stochastic Discount Factor(SDF) を求める．再度，最適化問題を解く．

$$\max_{c_1,\{c_2(z)\}_z,\{\tilde{\omega}_j\}_j} V_1 = \left[c_1^{1-\sigma} + \beta \left(\sum_z V_2^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

$$\text{s.t. } c_1 + \sum_{j=1}^{J} \tilde{\omega}_j = y_1$$

$$c_2(z) = \sum_{j=1}^{J} \tilde{\omega}_j R_j(z)$$

SDF(続)

ラグランジュ関数は,

$$\mathcal{L} = V_1 + \lambda_1 \left(y_1 - c_1 - \sum_{j=1}^{J} \tilde{\omega}_j \right) + \beta \sum_z \lambda(z) p(z) \left[\sum_{j=1}^{J} \tilde{\omega}_j R_j(z) - c_2(z) \right]$$

一階条件は次のとおり.

$$\begin{aligned} c_1 : \ & \frac{\partial V_1}{\partial c_1} = \lambda_1 \\ c_2(z) : \ & \frac{\partial V_1}{\partial c_2} = \beta \lambda(z) p(z) \\ \omega_j(z) : \ & \lambda_1 = \sum_z \beta \lambda(z) p(z) R_j(z) \end{aligned}$$

これらを組み合わせると...(次頁)

SDF(続)

一階条件を組み合わせると，

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_z \left[\frac{\partial V_1 / \partial c_2(z)}{\partial V_1 / \partial c_1} \frac{1}{p(z)} R_j(z) p(z) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{\partial V_1 / \partial c_2(z)}{\partial V_1 / \partial c_1} \frac{1}{p(z)} R_j(z) \right]
\end{aligned}
$$

したがって，SDF は $\frac{\partial V_1/\partial c_2(z)}{\partial V_1/\partial c_1} \frac{1}{p(z)}$.
これを具体的に解くと，

$$
\mathrm{SDF} = \beta \left(\sum_z \left[\frac{c_2(z)}{c_1} \right]^{1-\gamma} p(z) \right)^{\frac{\gamma-\sigma}{1-\sigma}} \left[\frac{c_2(z)}{c_1} \right]^{-\gamma}
$$

を得る.

無限期間

無限期間の場合は次のようになる．

$$U_t = (1-\beta)\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta\left(\mathbb{E}_t\left[U_{t+1}^{\frac{1-\gamma}{1-\sigma}}\right]\right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}$$

$$V_t = \left[(1-\beta)c_t^{1-\sigma} + \beta\left(\mathbb{E}_t\left[V_{t+1}^{1-\gamma}\right]\right)^{\frac{1-\sigma}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

また右辺から $1/(1-\sigma)$ が消えてる点にも注意．

(コメント：EZW 効用は，比率 β と代替 $1-\sigma$ の CES 型の変形とも見える)