

基礎マクロ練習問題解答例：数学

日野将志 *

1 微分の計算

1. $f'(x) = 0$
2. $f'(x) = a/x$
3. $f'(x) = x^{-a}$
4. $f'(x) = ax^{a-1}y^b$
5. $f'(x) = [x^a + y^a]^{1/a-1}x^{a-1}$
6. $f'(x) = \exp(-ax)$

2 最適化と高階の微分

1. 目的関数が

$$\log x - 2x$$

のとき、この一階の条件 (微分して 0 の条件) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - 2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。さらに、二階の条件を調べると、

$$-\frac{1}{x^2} < 0$$

であるから、これは上に凸であることが分かる。したがって、これは $x = 1/2$ で最大値を取る。

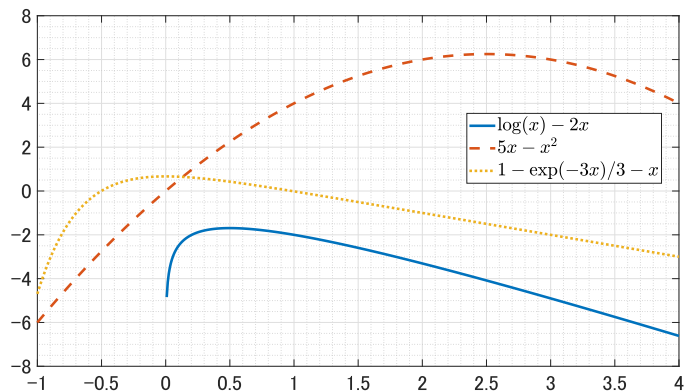
- 2.

$$5x - x^2$$

のとき、この一階の条件は、

$$\begin{aligned}5 - 2x &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。



である。さらに、二階の条件を調べると、

$$-2 < 0$$

である。したがって、この目的関数は上に凸であり、 $x = \frac{5}{2}$ で最大値を取ることが分かる。

3. 目的関数が

$$1 - \exp(-3x)/3 - x$$

のとき、一階の条件は、

$$\begin{aligned} \exp(-3x) - 1 &= 0 \\ \Rightarrow -3x &= \log(1) \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かる。さらに二階の条件を調べると、

$$-3 \exp(-3x) < 0$$

であるので、これも $x = 0$ で最大値を取ることがわかる。

最後に、それぞれの目的関数を図示すると次のようになっている。

3 多変数の微分

3.1 偏微分

1. $f_x(x, y) = ax^{a-1}y^b$, $f_y(x, y) = bx^ay^{b-1}$
2. $f_x(x, y) = ab/x$, $f_y(x, y) = ab/y$
3. $f_x(x, y) = a/x$, $f_y(x, y) = b/y$
4. $f_x(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b-1}ax^{b-1}$, $f_y(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b-1}(1-a)y^{b-1}$

3.2 全微分

詳しい回答は省略する。いずれも

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

と全微分をし、この $f_x(\cdot)$ と $f_y(\cdot)$ の部分に、上記の解答を代入すれば良い。

4 多変数の最適化

1. 目的関数が

$$\max_{x,y} 2 \log x + 3 \log y - 2x - 3y$$

のときの一階の条件は、

$$\begin{aligned} x : \frac{2}{x} - 2 &= 0 \\ y : \frac{3}{y} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

である*1。これらをそれぞれ解くと、

$$(x, y) = (1, 1)$$

となる。つまり、 $x = y = 1$ で最大値を取る。

2. 目的関数が

$$\max_{x,y} x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y$$

のとき、一階の条件は、

$$\begin{aligned} x : \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5} &= 0 \\ y : \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{3}{5}} - \frac{2}{5} &= 0 \end{aligned}$$

である。この2式を両辺で割ると

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x &= 2y \end{aligned}$$

と求まる。これを一階の条件の2式目に代入する

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{\frac{1}{5}} &= 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{(2y)^2}{y^3}\right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{4}{y} &= 1 \\ \Rightarrow y &= 4 \end{aligned}$$

と $x = 8$ が求まる。

*1 ここでは $x :$ という表記は、「 x に対する一階条件」という意味で使っている。

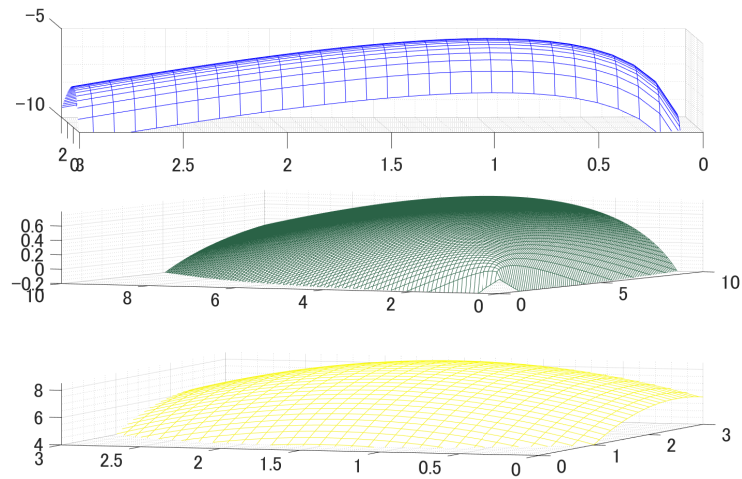


図 1 多変数の最適化の目的関数

3.

$$\max_{x,y} 5x - x^2 + 3y - y^2$$

が目的関数の時、この一階の条件は、

$$x : 5 - 2x = 0$$

$$y : 3 - 2y = 0$$

であるので、これを解くと、

$$(x, y) = (5/2, 3/2)$$

が求まる。

最後に、図 1 が上から 1, 2, 3 の目的関数の図示である。