基礎マクロ：資産価格理論入門

日野将志

一橋大学

2021

資産価格理論のほんの触り部分

資産価格に関する事実：Campbell (2003)

資産価格に関する事実：アメリカ 1947-1998 年

- 株式の平均的な実質リターンは年率 8.1%
- 安全資産 (短期の米国国債) の平均的な実質リターンは年率 0.9%

Research Question

なぜこんなに株式と安全資産のリターンに差があるのだろうか？ (equity premium puzzle, Mehra and Prescott 1985)

- 普通の動学的一般均衡モデルで説明できる？
- **答え**：標準的なモデルで，一般的なパラメータを使うと出来なさそう

資産価格に関する事実：Campbell (2003)

資産価格に関する事実：アメリカ 1947-1998 年

- 株式の平均的な実質リターンは年率 8.1%
- 安全資産 (短期の米国国債) の平均的な実質リターンは年率 0.9%

Research Question

なぜこんなに株式と安全資産のリターンに差があるのだろうか？ (equity premium puzzle, Mehra and Prescott 1985)

- 普通の動学的一般均衡モデルで説明できる？
- 答え：標準的なモデルで，一般的なパラメータを使うと出来なさそう

資産価格に関する事実：Campbell (2003)

資産価格に関する事実：アメリカ 1947-1998 年

- 株式の平均的な実質リターンは年率 8.1%
- 安全資産 (短期の米国国債) の平均的な実質リターンは年率 0.9%

Research Question

なぜこんなに株式と安全資産のリターンに差があるのだろうか？ (equity premium puzzle, Mehra and Prescott 1985)

- 普通の動学的一般均衡モデルで説明できる？
- **答え**：標準的なモデルで，一般的なパラメータを使うと出来なさそう

資産の利回り

資産のリターン：株と債権

例えば株式のリターンは，**配当** (インカムゲイン) と**売却利益** (キャピタルゲイン) によって与えられる．

- **株式**：株価を p_t，配当を d_t とすると，今期 (t 期) 株を 1 つ買って来期 ($t+1$ 期) に得られるリターンは次の通り．

$$\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}$$

- (既習) **債権**は，今期 (t 期) に 1 単位貯蓄すると，来期 ($t+1$ 期) に次のリターンを得る．

$$(1 + r_{t+1})$$

資産のリターン：株と債権

例えば株式のリターンは，**配当** (インカムゲイン) と**売却利益** (キャピタルゲイン) によって与えられる．

- **株式**：株価を p_t，配当を d_t とすると，今期 (t 期) 株を 1 つ買って来期 ($t+1$ 期) に得られるリターンは次の通り．

$$\frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}$$

- (既習) **債権**は，今期 (t 期) に 1 単位貯蓄すると，来期 ($t+1$ 期) に次のリターンを得る．

$$(1+r_{t+1})$$

資産のリターン：株と債権 (cont'd)

前ページのまとめ

	今日の支払い	明日のリターン
株	p_t	$p_{t+1} + d_{t+1}$
債権	1	$1 + r_{t+1}$

したがって，リターンの率 (return rate) は

- 株式：

$$\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}$$

- 債権：

$$1 + r_{t+1}$$

資産のリターン：株と債権 (cont'd)

前ページのまとめ

	今日の支払い	明日のリターン
株	p_t	$p_{t+1} + d_{t+1}$
債権	1	$1 + r_{t+1}$

したがって，リターンの率 (return rate) は

- 株式：

$$\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}$$

- 債権：

$$1 + r_{t+1}$$

無裁定条件：不確実性がないとき

無裁定条件 (no-arbitrage condition)：不確実性も摩擦も無い市場では以下が成り立つ：

$$\underbrace{\frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}}_{\text{株式のリターン}} = \underbrace{1+r_{t+1}}_{\text{債権のリターン}}$$

- もし $(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t > 1+r_{t+1}$ の場合
  債権のリターンの方が低い．なので，皆，債権ではなく株式を買う．すると，株価 p_t が上がって，株のリターンが下がる．その結果，$(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t = 1+r_{t+1}$ になる
- もし $(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t < 1+r_{t+1}$ の場合
  債権のリターンの方が高い．なので，皆，株式ではなく貯蓄をする．すると，株価 p_t が下がって，株のリターンが上がる．その結果，$(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t = 1+r_{t+1}$ になる

「株式のリターンと債権のリターンが等号…？でも，現実には株式の方がリターン高いよね？」

無裁定条件：不確実性がないとき

無裁定条件 (no-arbitrage condition)：不確実性も摩擦も無い市場では以下が成り立つ：

$$\underbrace{\frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}}_{\text{株式のリターン}} = \underbrace{1+r_{t+1}}_{\text{債権のリターン}}$$

- もし $(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t > 1+r_{t+1}$ の場合
  債権のリターンの方が低い．なので，皆，債権ではなく株式を買う．すると，株価 p_t が上がって，株のリターンが下がる．その結果，$(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t = 1+r_{t+1}$ になる
- もし $(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t < 1+r_{t+1}$ の場合
  債権のリターンの方が高い．なので，皆，株式ではなく貯蓄をする．すると，株価 p_t が下がって，株のリターンが上がる．その結果，$(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t = 1+r_{t+1}$ になる

「株式のリターンと債権のリターンが等号…？でも，現実には株式の方がリターン高いよね？」

無裁定条件：不確実性がないとき

無裁定条件 (no-arbitrage condition)：不確実性も摩擦も無い市場では以下が成り立つ：

$$\underbrace{\frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}}_{\text{株式のリターン}} = \underbrace{1+r_{t+1}}_{\text{債権のリターン}}$$

- もし $(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t > 1+r_{t+1}$ の場合
  債権のリターンの方が低い．なので，皆，債権ではなく株式を買う．すると，株価 p_t が上がって，株のリターンが下がる．その結果，$(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t = 1+r_{t+1}$ になる
- もし $(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t < 1+r_{t+1}$ の場合
  債権のリターンの方が高い．なので，皆，株式ではなく貯蓄をする．すると，株価 p_t が下がって，株のリターンが上がる．その結果，$(p_{t+1}+d_{t+1})/p_t = 1+r_{t+1}$ になる

「株式のリターンと債権のリターンが等号…？でも，現実には株式の方がリターン高いよね？」

不確実性の役割：入門

不確実性の役割 (入門)

資産のリターンは現実には幅がある (Campbell 2003)

- 株式のリターンはとても振れ幅が大きい．年率の標準偏差は 15.6%
- 国債のリターンは振れ幅が小さい．年率の標準偏差は 1.7% 未満

言葉の定義：

- リスキー資産：リターンが大きい代わりに，リターンの分散も大きい
  - 代表例：株
- 安全資産：リターンは小さい代わりに，リターンの分散がゼロ
  - 代表例：債権（特に国債）

不確実性の役割 (入門)

資産のリターンは現実には幅がある (Campbell 2003)

- 株式のリターンはとても振れ幅が大きい．年率の標準偏差は 15.6%
- 国債のリターンは振れ幅が小さい．年率の標準偏差は 1.7% 未満

言葉の定義：

- リスキー資産：リターンが大きい代わりに，リターンの分散も大きい
  - 代表例：株
- 安全資産：リターンは小さい代わりに，リターンの分散がゼロ
  - 代表例：債権（特に国債）

不確実性と家計の選択

設定：不確実性下の簡単な家計の意思決定として，次の 2 つの**クジ** (lottery) を考える．

1. 安全なクジ：確実に c_1 がもらえる
2. リスキーなクジ：確率 0.5 で c_0，0.5 で c_2 がもらえる

条件

- $c_0 < c_1 < c_2$ とする
- 二つのクジの期待リターンは同じとする ($c_1 = 0.5c_0 + 0.5c_2$)
- クジは両方無料で，どちらかを選ばないといけない

どういう家計がどちらのクジを選ぶ？

不確実性と家計の選択

設定：不確実性下の簡単な家計の意思決定として，次の 2 つの**クジ** (lottery) を考える．

1. 安全なクジ：確実に c_1 がもらえる
2. リスキーなクジ：確率 0.5 で c_0，0.5 で c_2 がもらえる

条件

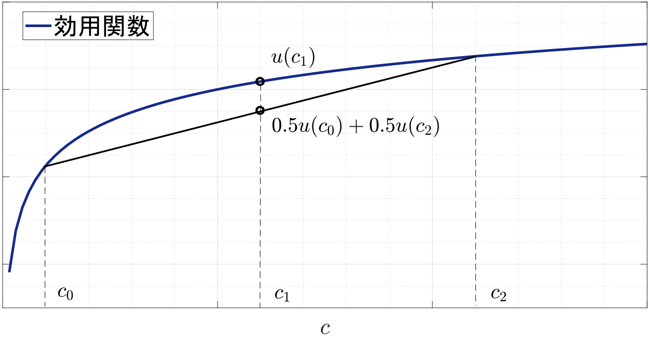
- $c_0 < c_1 < c_2$ とする
- 二つのクジの期待リターンは同じとする ($c_1 = 0.5c_0 + 0.5c_2$)
- クジは両方無料で，どちらかを選ばないといけない

どういう家計がどちらのクジを選ぶ？

リスク回避度

- リスク回避的な家計：上に凸な効用関数 (例：対数や CRRA 等)
- リスク中立的な家計：線形な効用関数 (例：$u(c) = \alpha c$)
- リスク愛好的な家計：下に凸な効用関数

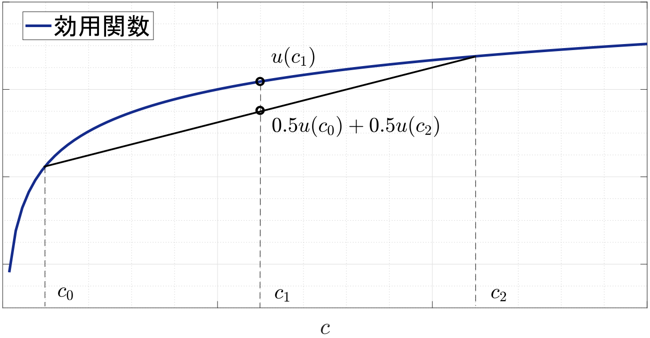
リスク回避的な家計は，期待リターンが同じであれば，安全な選択肢を選ぶ $(u(c_1) > 0.5u(c_0) + 0.5u(c_2))$.



リスク回避度

- リスク回避的な家計：上に凸な効用関数 (例：対数や CRRA 等)
- リスク中立的な家計：線形な効用関数 (例：$u(c) = \alpha c$)
- リスク愛好的な家計：下に凸な効用関数

リスク回避的な家計は，期待リターンが同じであれば，安全な選択肢を選ぶ ($u(c_1) > 0.5u(c_0) + 0.5u(c_2)$).



リスク回避とリスク・プレミアム

リスク回避的（上に凸）な効用関数を考えるのが，経済学では一般的．理由：

- 消費の平準化と一貫性
- 多くの人は，危険資産をさほど持ったり，危険な人生選択をしない

リスク回避的な家計を考える．この家計は，期待リターンが同じならば安全資産を選ぶ

$\Rightarrow$ リスク回避的な家計であっても，十分にリスキー資産の期待リターンが高いならば，安全資産とリスキー資産を同程度に好むはず

$\Rightarrow$ このように，リスキー資産と安全資産が同程度に好まれるように，リスキー資産の高くなった超過リターンのことを，リスク・プレミアムと呼ぶ．

注意：リスク・プレミアム（理論的な概念）$\neq$ エクイティ・プレミアム（現実的な観察）

リスク回避とリスク・プレミアム

リスク回避的（上に凸）な効用関数を考えるのが，経済学では一般的．理由：

- 消費の平準化と一貫性
- 多くの人は，危険資産をさほど持ったり，危険な人生選択をしない

リスク回避的な家計を考える．この家計は，期待リターンが同じならば安全資産を選ぶ

$\Rightarrow$ リスク回避的な家計であっても，十分にリスキー資産の期待リターンが高いならば，安全資産とリスキー資産を同程度に好むはず

$\Rightarrow$ このように，リスキー資産と安全資産が同程度に好まれるように，リスキー資産の高くなった超過リターンのことを，リスク・プレミアムと呼ぶ．

注意：リスク・プレミアム（理論的な概念）$\neq$ エクイティ・プレミアム（現実的な観察）

リスク回避とリスク・プレミアム

リスク回避的（上に凸）な効用関数を考えるのが，経済学では一般的．理由：

- 消費の平準化と一貫性
- 多くの人は，危険資産をさほど持ったり，危険な人生選択をしない

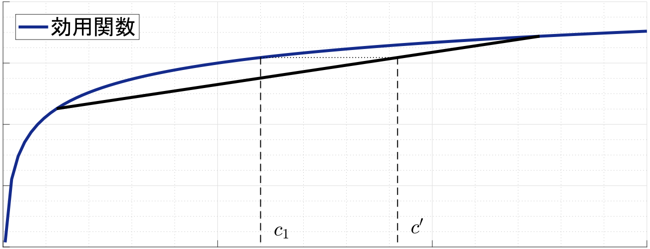
リスク回避的な家計を考える．この家計は，期待リターンが同じならば安全資産を選ぶ

$\Rightarrow$ リスク回避的な家計であっても，十分にリスキー資産の期待リターンが高いならば，安全資産とリスキー資産を同程度に好むはず

$\Rightarrow$ このように，リスキー資産と安全資産が同程度に好まれるように，リスキー資産の高くなった超過リターンのことを，リスク・プレミアムと呼ぶ．

注意：リスク・プレミアム（理論的な概念）$\neq$ エクイティ・プレミアム（現実的な観察）

プレミアムのあるくじの例



- 安全なくじ：確実に c_1 が得られる
- 別のリスキーなくじ：期待リターンが c' であるくじ

リスク・プレミアム $= c' - c$

このとき，リスク回避的な家計であっても安全なくじとリスキーなくじは無差別

不確実性下の家計の選択のまとめ

- 上に凸な効用関数を持つ家計は，リスク回避的である．

⇒ リスク回避的な家計は，安全な選択肢を選ぶ傾向にある

⇒ そのため，同じ期待リターンならばリスキーな株式より安全な債権が好まれる

⇒ リスキーな資産は期待リターンが高くなければ買い手がつかない

結果的に，市場ではリスキーな資産のリターンが高くなる．つまり，

$$\mathbb{E}\left[\frac{p_{t+1}+d_{t+1}}{p_t}\right] > \mathbb{E}\left[1+r_{t+1}\right]$$

が現実で成り立つのは，不確実性を考えると自然．

基本的な結果

資産価格に関する事実 (再掲)：アメリカ 1947-1998 年

- 株式の平均的な実質リターンは年率 8.1%
- 安全資産 (短期の米国国債) の平均的な実質リターンは年率 0.9%

基本的な結果 (Mehra and Prescott 1985)：標準的なモデルにおいてプレミアムはもっと小さい．現実で見られるほど大きなエクイティ・プレミアムを標準的なモデルは説明できない．

$\Rightarrow$ 90 年代から 00 年代に盛んに研究が行われた．

マクロ一般均衡モデルのまとめ

ものすごく大雑把に言うと

- 景気循環論の結論：標準的なモデルは，数量を説明するのは割と得意
- 資産価格理論の結論：標準的なモデルは，価格を説明するのはとても苦手

なお，これらは 1980 年代の結論

補論

リスク・プレミアムと確実性等価の定義

あるクジが確率 p_i で C_i というリターンが実現するとする．u が上に凸であることから，一般に

$$u(\mathbb{E}[C]) > \mathbb{E}[u(C)]$$

が成り立つ．
ここで，確実性等価 CE およびリスク・プレミアム μ とは，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(C)] &= u(CE) \\ &= u(\mathbb{E}[C] - \mu)\end{aligned}$$

基本的な期間構造

殆どの場合，マクロ経済学では１期間の資産 ($\approx$ 短期の資産) だけを考える．
この理由は，摩擦がないならば，１期間の資産で２回貯蓄することと，２期間の資産で貯蓄することは同じはずだからである．つまり，

- リターン r^s の１期間の資産を１期から２期，２期から３期に貯蓄すると，

$$(1 + r^s) \times (1 + r^s)$$

- リターン r^l の２期間の資産を１期から３期に貯蓄すると，

$$(1 + r^l)$$

摩擦がない経済では，無裁定条件より

$$(1 + r^s) \times (1 + r^s) = (1 + r^l)$$

が成り立つ．

Lucas Tree モデル (試験範囲外)

Lucas Tree モデル (Consumption based CAPM)

- 最も標準的なマクロの資産価格モデル
- モデルの特徴
  - リスキー資産 s

$$c_t + p_t s_{t+1} = (p_t + d_t) s_t$$

  - 純粋交換経済
    資産価格 p_t が均衡で決まる
  - 無限期間