基礎マクロ：企業投資

日野将志

一橋大学

2021

簡単な復習と投資理論の位置づけ

前回までに，家計消費 C の理論を学んだ．

今回は

$$C + I + G = Y$$

の投資 I の理論を学ぶ．

- Kurlat 8 章
- 二神・堀 3 章，宮尾 4 章

ロードマップ：それぞれの関係

家計の選択

1．消費と貯蓄

2．消費と労働

企業の選択

1．生産と投資

均衡の理論

1．家計のみの均衡

2．家計と企業の均衡

景気循環入門

資産価格理論入門

経済成長入門

物価・景気循環

・マクロ経済政策

1．貨幣と物価

2．IS-LM モデル

3．AD-AS モデル

投資概論

マクロ経済学において，一般的に，資本 (capital) K とは，労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- 生産要素とは生産に使うもの．主に労働と資本．
- 資本の例：
  - オフィス用品，PC，工具，建物，工場
- 資本でも労働でもないものの例：
  - 経営者の経営手腕，組織運営の効率，秘伝の技術
- 投資 I とは，一般に，資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1-\delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0,1)$ は資本減耗率

- 日常用語との区別：株式投資 $\neq$ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

投資概論

マクロ経済学において，一般的に，資本 (capital) K とは，労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- 生産要素とは生産に使うもの．主に労働と資本．
- 資本の例：
  - オフィス用品，PC，工具，建物，工場
- 資本でも労働でもないものの例：
  - 経営者の経営手腕，組織運営の効率，秘伝の技術
- 投資 I とは，一般に，資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1-\delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0,1)$ は資本減耗率

  - 日常用語との区別：株式投資 $\neq$ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

投資概論

マクロ経済学において，一般的に，資本 (capital) K とは，労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- 生産要素とは生産に使うもの．主に労働と資本．
- 資本の例：
  - オフィス用品，PC，工具，建物，工場
- 資本でも労働でもないものの例：
  - 経営者の経営手腕，組織運営の効率，秘伝の技術
- 投資 I とは，一般に，資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1-\delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0,1)$ は資本減耗率

- 日常用語との区別：株式投資 $\neq$ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

投資概論

マクロ経済学において，一般的に，資本 (capital) K とは，労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- 生産要素とは生産に使うもの．主に労働と資本．
- 資本の例：
  - オフィス用品，PC，工具，建物，工場
- 資本でも労働でもないものの例：
  - 経営者の経営手腕，組織運営の効率，秘伝の技術
- 投資 I とは，一般に，資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1-\delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0,1)$ は資本減耗率

- 日常用語との区別：株式投資 $\neq$ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

投資概論

マクロ経済学において，一般的に，資本 (capital) K とは，労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- 生産要素とは生産に使うもの．主に労働と資本．
- 資本の例：
  - オフィス用品，PC，工具，建物，工場
- 資本でも労働でもないものの例：
  - 経営者の経営手腕，組織運営の効率，秘伝の技術
- 投資 I とは，一般に，資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に所有する資本}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1-\delta)K_t}_{\text{今期から持ち越す分}}$$

$\delta \in (0,1)$ は資本減耗率

- 日常用語との区別：株式投資 $\neq$ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

このスライドで扱う内容

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

- 計算例：K^α

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

もっとも単純な投資

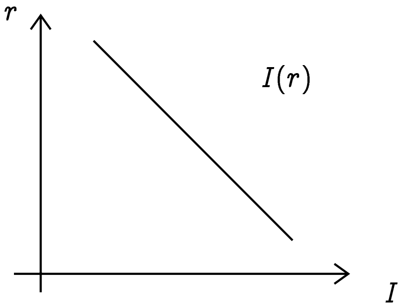
企業の投資は利子率に反応する

- **理由１**：利子率が低いと借入がしやすい
  - 借金をしても利払いの負担が低い
- **理由２**：投資の代わりに資産運用をしても利回りが低い
  - 投資の機会費用が小さい

⇒ 投資は利子率の減少関数

$$I = I(r), \quad I'(r) < 0$$

投資関数の図示



含意：金融政策で r が下がると，投資が増える．

ミクロ的基礎：$I(r)$ の問題点

$I = I(r)$ は単純だけど次のような問題点：ミクロ的基礎の欠如

- ミクロ経済学で学んでいるような，企業の目的や制約が記述されていない
- 拡張可能性
  - 例：「投資減税に企業がどう反応するか？」のような分析には不向き

$\Rightarrow$ 企業の目的と制約を記述して，投資関数を導く

生産技術

生産技術

生産とは，労働 H と資本 K を使って，製品 Y を作ること．
数学的には「労働と資本を投入して，製品が生まれる」ような関数 F

$$Y = F(K, H)$$

F を生産関数と呼ぶ

- 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- 一次同次とすることが多い．$n \in \mathbb{N}$ 次同次とは，パラメータ $\lambda > 0$ に対して，

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

  が成り立つこと (N は自然数の集合)
  - 1 次同次の意味：投入量を λ 倍すれば，生産量も λ 倍になる
  - 例：畑 (K) と農夫 (H) を 2 倍にすれば，農作物 (Y) は 2 倍に
- 生産関数の代表例：
  - コブ・ダグラス型：$F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$

生産技術

生産とは，労働 H と資本 K を使って，製品 Y を作ること．
数学的には「労働と資本を投入して，製品が生まれる」ような関数 F

$$Y = F(K, H)$$

F を生産関数と呼ぶ

- 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- 一次同次とすることが多い．$n \in \mathbb{N}$ 次同次とは，パラメータ $\lambda > 0$ に対して，

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

  が成り立つこと (ℕ は自然数の集合)
  - 1 次同次の意味：投入量を λ 倍すれば，生産量も λ 倍になる
  - 例：畑 (K) と農夫 (H) を 2 倍にすれば，農作物 (Y) は 2 倍に
- 生産関数の代表例：
  - コブ・ダグラス型：$F(K, H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}$

生産技術

生産とは，労働 H と資本 K を使って，製品 Y を作ること．
数学的には「労働と資本を投入して，製品が生まれる」ような関数 F

$$Y = F(K, H)$$

F を生産関数と呼ぶ

- 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- 一次同次とすることが多い．$n \in \mathbb{N}$ 次同次とは，パラメータ $\lambda > 0$ に対して，

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

  が成り立つこと (ℕ は自然数の集合)
  - 1 次同次の意味：投入量を λ 倍すれば，生産量も λ 倍になる
  - 例：畑 (K) と農夫 (H) を 2 倍にすれば，農作物 (Y) は 2 倍に
- 生産関数の代表例：
  - コブ・ダグラス型：$F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$

コブ・ダグラス型

コブ・ダグラス型が一番頻繁に使われる

$$F(K,H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}$$

- 頻繁に使われる背景
  - 現実には，「労働所得分配率 (wH/Y) が一定」だった
  - コブ・ダグラス型場合，労働所得分配率が一定になる

$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha$$

(これの導出は練習問題)

他の生産関数

- CES 型：$F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$
- レオンチェフ型：$F(K,H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$

コブ・ダグラス型

コブ・ダグラス型が一番頻繁に使われる

$$F(K,H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}$$

- 頻繁に使われる背景
  - 現実には，「労働所得分配率 (wH/Y) が一定」だった
  - コブ・ダグラス型場合，労働所得分配率が一定になる

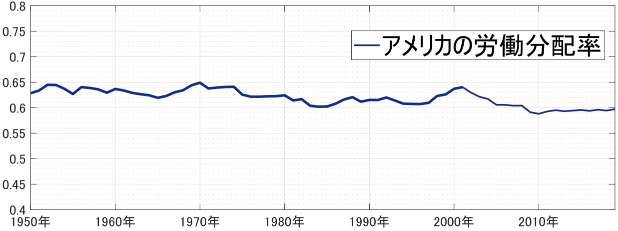
$$\frac{wH}{Y} = 1-\alpha$$

(これの導出は練習問題)

他の生産関数

- **CES 型**：$F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$
- **レオンチェフ型**：$F(K,H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$

労働所得分配率

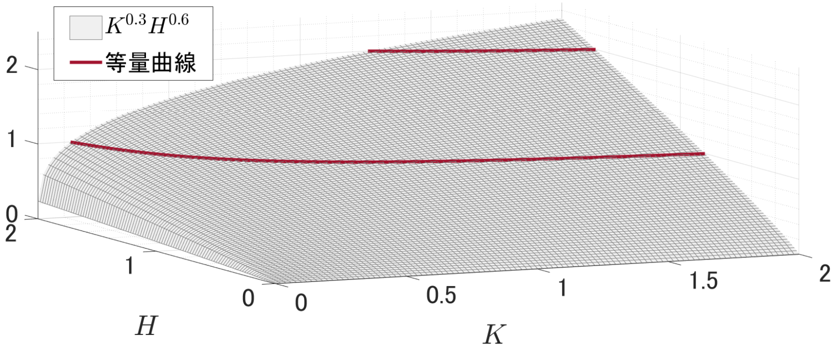


ざっくり見ると，概ね安定して 0.6 – 0.64 程度 ⇒ コブ・ダグラス型で OK そう

細かい論点：

- ズームして見ると，労働所得分配率は下降傾向
- 含意：労働者に回される割合が減っている．格差の一つの要因？

図：生産関数



静学的な企業の選択

静学的な企業

まず静学的な場合から始める．企業は次のようなことを考えるとする

- 家計から，労働を雇い、資本を借りるとする
  - 労働には労働所得 wH を支払う
  - 資本には賃料 rK を支払う
  - 資本は生産に使うことで減耗する (δK)
- 労働と資本を使って生産を行う
- 利潤は生産物から労働所得と資本の賃料，資本の減耗費用を引いたもの

$$\pi = \max_{K,H} F(K,H) - wH - rK - \delta K$$

企業の最適化問題

- 企業は，利潤を最大化するように，資本と労働を選択する
- 価格 (r, w) は所与 ($\Leftrightarrow$ 企業は選べない)

企業の利潤最大化は以下のとおり

$$\max_{K,H} F(K, H) - wH - rK - \delta K$$

企業の最大化問題を解く

K, H についてそれぞれ微分して 0 を求める

$$
\begin{aligned}
K &: F_K(K,H) = r + \delta \\
H &: F_H(K,H) = w
\end{aligned}
$$

この式を覚えていて欲しい．

- 次に見せること：動学的なモデルを考えても，結局この形になる (2 期間)

家計の問題との比較

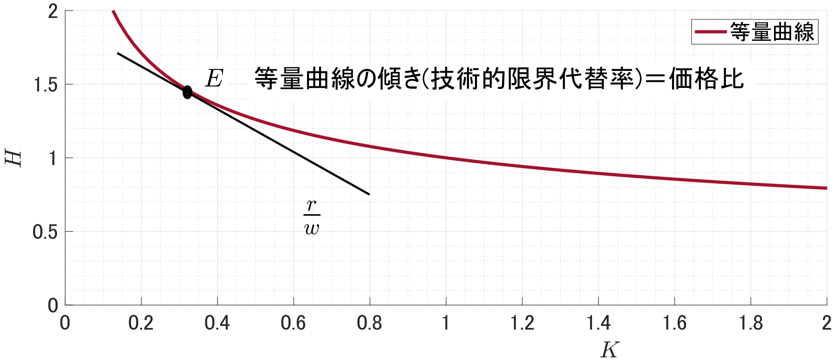
先ほどの一階の条件の 2 式を割ると,

$$\underbrace{\frac{F_K(K,H)}{F_H(K,H)}}_{=\text{等量曲線の傾き}} = \underbrace{\frac{r+\delta}{w}}_{=\text{価格比}}$$

家計の場合 (復習)

$$\underbrace{\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)}}_{\text{無差別曲線の傾き}} = \underbrace{(1+r)}_{\text{価格比}}$$

図解



等量曲線の傾きを技術的限界代替率とも呼ぶ

計算例：$F(K) = K^{\alpha}$

- 本来本節でやりたいことは，資本形成が利子率にどのように反応するか見ること
- 一方，$F(K, H)$ という一般形のままだと，投資関数を導けない

$\Rightarrow$ $F(K, H)$ を簡単な関数形を設定して解いてみる

仮に，単純化のために労働投入は捨象して，

$$F(K, H) = F(K) = K^{\alpha}$$

としてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．

計算例：$F(K) = K^\alpha$

- 本来本節でやりたいことは，資本形成が利子率にどのように反応するか見ること
- 一方，$F(K, H)$ という一般形のままだと，投資関数を導けない

$\Rightarrow$ $F(K, H)$ を簡単な関数形を設定して解いてみる

仮に，単純化のために労働投入は捨象して，

$$F(K, H) = F(K) = K^\alpha$$

としてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．

企業の最適化問題

さらに単純化のために $\delta = 0$ とする．このときの利潤最大化問題は,

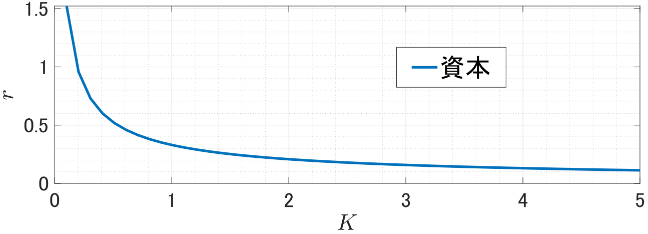
$$\max_K \ K^\alpha - rK$$

である．これの微分して 0 は,

$$\alpha K^{\alpha-1} = r$$

$$\Rightarrow K = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

企業の資本形成



資本は利子率の減少関数

問題点

- 今，導出したのは $K(r)$.
- 本来分析したものは $I(r)$

一方，投資は本来

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

と定義される．投資を議論するためには時間と言う概念が不可欠！

$\Rightarrow$ 二期間モデルへ

2 期間問題：投資の決定

資本の保有権

静学的な企業の場合では，企業は資本を借りていると仮定した

- そのため，賃料 rK を払っていた

次に，企業が資本を保有すると考える．

- 企業は投資 I をすることで，今期費用を払い，来期の資本を増やすことが出来る
- 仮定：企業は K_1 を既に保有しているところから操業を始める
  - K_1 は変更できない

企業の2期間の利潤最大化

- 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - \underbrace{I}_{\text{投資}}$$

$$\text{where } I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

- 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1-\delta)K_2}_{=\text{資本の残存価値}}$$

企業の目的関数

企業は次のように割引現在価値の利潤を最大化するとする．

$$V \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$

そして π_1 と π_2 はそれぞれ次のように決まる (再掲)

- 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - I$$
$$\text{where } I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

- 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1-\delta)K_2}_{=\text{資本の残存価値}}$$

企業の 2 期間の利潤最大化 (続)

企業の二期間の最大化をまとめると次の通り

$$\max_{I,K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r}[F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]$$
$$\text{s.t.} \quad I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

- max の下に K_1 が無いことに注意
  - K_1 は期首の時点で持ってる．変更できない
- 企業の割引因子は $1/(1+r)$ とする

2 期間の利潤最大化を解く

投資の定義式を目的関数に代入すると,

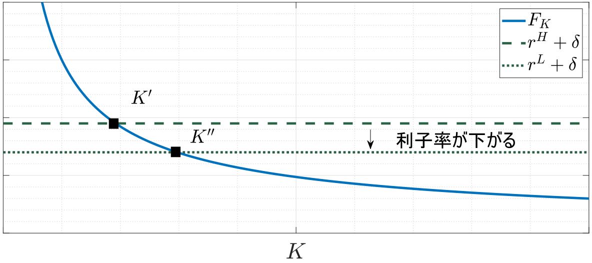
$$\max_{K_2, H_1, H_2} F(K_1, H_1) - wH_1 - [K_2 - (1-\delta)K_1] + \frac{1}{1+r}[F(K_2, H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]$$

となる. それぞれ微分を取って, 導関数 $=0$ を解くと以下を得る.

$$\begin{aligned} K_2 &: F_K(K_2, H_2) = r + \delta \\ H_1 &: F_H(K_1, H_1) = w \\ H_2 &: F_H(K_2, H_2) = w \end{aligned}$$

静学的な場合 (静学的) と同じ! $\Rightarrow$ 多くの場合で静学的なモデルを使う

利子率の変化と投資 (図示)



利子率が下がると，資本 K_2(したがって投資 I) が上がる ($K' \to K''$)

応用例

- 中央銀行が r を下げると，投資が活発になる

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

トービンのQ理論

投資理論のメッセージ

- 「$F_K = r + \delta$ で投資が決まる」
- 問題点：F_K は観察できない

もう少し，観察できるような指標はないだろうか？

- ⇒ トービンのQ理論
  - 資本の増加が，費用以上に企業価値を増やすかどうかが大事

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}(\text{企業価値})}{\mathrm{d}(\text{保有する資本の価値})}}_{\text{トービンの q (限界 q)}} \gtreqless 1\ (=\text{ここでの資本の価格})$$

で企業が投資するかどうか決める

トービンのQ理論の概要

各期の**企業価値**は利潤の割引現在価値の総和

企業の価値 $V(K_1)$, $V(K_2)$

$$V(K_1) \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$V(K_2) \equiv \max \pi_2$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由：期首において K_t は所与だから．

次のように変数 q と Q(トービンの限界 q，トービンの平均 Q) を定義する．

$$q \equiv \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}, \quad Q \equiv \frac{1}{1+r}\frac{V(K_2)}{K_2}$$

$q > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している

トービンの Q 理論の概要

各期の**企業価値**は利潤の割引現在価値の総和

企業の価値 $V(K_1)$，$V(K_2)$

$$V(K_1) \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$V(K_2) \equiv \max \pi_2$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由：期首において K_t は所与だから．

次のように変数 q と Q(トービンの限界 q，トービンの平均 Q) を定義する．

$$q \equiv \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}, \quad Q \equiv \frac{1}{1+r}\frac{V(K_2)}{K_2}$$

$q > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している

トービンのQ：限界 q と平均 Q

- $q > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している
  - $q > 1$ ならば投資すべき
- $q < 1$ は「資本を増やしても，コストの方が企業価値の増加より大きい」ことを意味している
  - $q < 1$ ならば投資は控えるべき（むしろ資本を売却してもよい）

$\Rightarrow$ トービンの限界 q は投資判断に役に立つ！

問題点：でもやっぱり，トービンの限界Qは観察できない…．$\Rightarrow$ 平均Qは観察できる

2期間モデル再び

$$V(K_1) = \max_{I,K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r}\underbrace{[F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]}_{=V(K_2)}$$

$$\text{s.t.} \quad I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

一階の条件は，次の通り

$$\begin{aligned} K_2 &: \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = 1 \\ H_1 &: F_H(K_1,H_1) = w \\ H_2 &: F_H(K_2,H_2) = w \end{aligned}$$

$\Rightarrow q = 1$

(※もう少し計算すると，$q = Q$ となることも分かる．補足)

理論と実証：古典的な Q-regression

理論が言っている事：

- $q = Q$. 平均 Q だけを見れば，限界 q も分かる！
- $Q \gtrless 1$ が投資の符号を決定する
  - $Q > 1$：企業価値 V を投資によって高められる．したがって投資すべき
  - $Q < 1$：企業価値 V は投資をすると下がる．したがって投資は控えるべき
- マイナーコメント：この分野は Hayashi 先生や，Yoshikawa 先生が活躍した古典

実証：回帰式 (Tobin's Q-regression)

$$\frac{I}{K} = \alpha + \beta Q + \epsilon$$

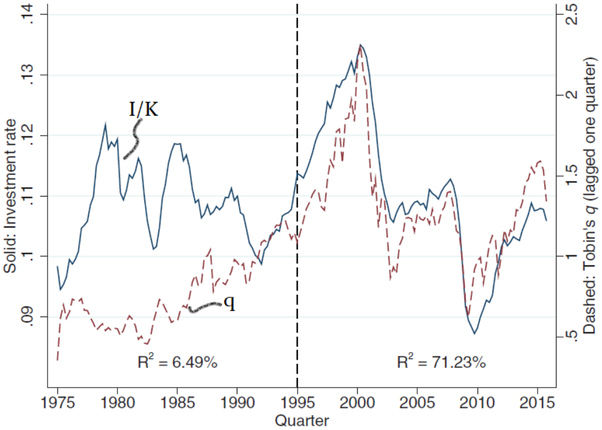
意味「投資の決定がトービンの平均 Q だけで決まっているか」

(※被説明変数を I ではなく，I/K とする理由は補足もしくは練習問題参照)

実証：古典的な Q-regression(con'd)

Andrei, Mann and Moyen(2019)

- 1995 年まで：Q 理論は的外れ
- 1995 年以降：Q 理論は割と正しい



コメント：

- 「$q \gtrless 1$ が投資の符号を決定する」という条件は，学部だけで教えられており，あまり大学院以降では出てこなくなる
  - 理由：伝統的には，Q 理論は「実証的に的外れ」という風潮だった
  - 例：Adda and Cooper (2003)
  - 大学院では，むしろ，「Q^M が投資 I を決定するための十分な情報量になる」ということを教える．
    - 一応，このスライドの補足でも，そういう解説を付けているので、興味がある人は読んでみてください

投資理論のまとめ

- 投資とは資本の購入 (または売却)
- 静学的なモデルでも，動学的なモデルでも (基本的なケースでは) 同じになる．

補足：トービンの Q 理論と凸型調整費用

注意事項

注意：この補足は他の補足よりも難しいかもしれません．大学院進学に関心がある人のみ読むと良いかもしれません．

トービンのQ理論の概要 (続)

前節で Q^M が投資の決定において重要なことは分かった.

- 問題点：限界的な概念は実証的に観察がほぼ不可能.
  - 限界トービンのQ(Q^M) は，仮に1単位資本が増えたら，企業価値が増えるかどうか

Abel(1979) や Hayashi(1982) は,『特定の条件の下で，投資を判断するうえで平均的な指標 Q^A さえ見れば良い』ことを示した.

$$Q^A \equiv \frac{1}{1+r}\frac{V(K)}{K}$$

特定の条件 (および前節の拡張)

- 条件：生産関数が1次同次
- 拡張：一次同次の調整費用関数 $\Phi(K_1, I)$ と資本の購入価格 p

トービンのQ理論：モデル

2期間モデルの拡張として，次のように，投資をするためには調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がかかるとする．

$$
\begin{aligned}
\pi_1 =& F(K_1, H_1) - wH_1 - pI - \Phi(K_1, I) \\
\text{where } I = K_2 - (1-\delta)K1 \\
& \Phi_2(K_1, I) > 0, \quad \Phi_{22}(K_1, I) < 0, \\
& \Phi(\cdot) \text{ は一次同次関数}
\end{aligned}
$$

調整費用の意味

- 投資 $I \neq 0$ をすると，費用 Φ を払わなければいけない
  - 資本を買うにも，売るにも費用がかかる
- 代表的な関数形の例：

$$
\Phi(K_1, I) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{K_1}\right)^2 K_1 = \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1
$$

最大化問題

$$V(K_1) = \max_{K_2, H_1, H_2} F(K_1, H_1) - wH_1 - p[K_2 - (1-\delta)K_1] - \Phi(K_1, I) + \frac{1}{1+r}\underbrace{[F(K_2, H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]}_{V(K_2)}$$

この一階の条件は,

$$K_2 \ : \ \frac{1}{1+r}\underbrace{[F_K(K_2, H_2) + (1-\delta)]}_{=\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}} = p + \Phi_2(K_1, I) \tag{1}$$

$$H_1 \ : \ F_H(K_1, H_1) = w$$

$$H_2 \ : \ F_H(K_2, H_2) = w$$

計算手順 (1)：労働の整理

補題

ある微分可能な関数 $F(x)$ が n 次同次のとき，導関数 $F_x(x)$ は $n-1$ 次同次になる (証明は 50)

この補題を使うと，$F_H(K_t, H_t)$ は 0 次同次であることが分かる．したがって，次のことが成り立つ．

$$w = F_H(K_t, H_t) = F_H(K_t/H_t, 1) \quad \left(\text{両方の要素を } H_1 \text{ で割っている}\right)$$

次に，F_H は単調 (減少) 関数なので，逆関数が取れる．したがって，

$$\frac{K_t}{H_t} = F_H^{-1}(w, 1) \equiv \hat{F}$$
$$\Rightarrow \quad K_t = \hat{F} H_t$$

このように K は H の線形関数であることが分かる．

(コメント：これは静学的な労働の問題だけ先に解いてるのと同じ)

計算手順 (2)：K だけの問題の定義

前頁の結果より，H_t を K_t に置き換えて最適化問題を定義できる．

$$V(K_1) = \max_{K_2} F(K_1, K_1\hat{F}^{-1}) - wK_1\hat{F}^{-1} - p[K_2 - (1-\delta)K_1] - \Phi(K_1, I) + \frac{1}{1+r}\underbrace{[F(K_2, K_2\hat{F}^{-1}) - wK_2\hat{F}^{-1} + (1-\delta)K_2]}_{=V(K_2)}$$

さらにこれは生産関数の一次同次性より，

$$V(K_1) = \max_{K_2} F(1, \hat{F}^{-1})K_1 - wK_1\hat{F}^{-1} - p[K_2 - (1-\delta)K_1] - \Phi(K_1, I) + \frac{1}{1+r}\underbrace{[F(1, \hat{F}^{-1})K_2 - wK_2\hat{F}^{-1} + (1-\delta)K_2]}_{=V(K_2)=\hat{v}K_2}$$

と出来る．$V(K_2)$ が K_2 の線形関数となっていることが分かる．

限界 Q^M と平均 Q^A

$V(K_2)$ が K_2 の線形関数 $\hat{v}K_2$ と表せることが分かった．したがって，

$$Q^M \equiv \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = \frac{1}{1+r}\hat{v} = \frac{1}{1+r}\frac{V(K_2)}{K_2} \equiv Q^A$$

となることが分かる．

したがって，生産関数と調整費用が一次同次のとき，Q^M が測定できずとも，Q^A をその代理変数 (proxy) として測定すれば十分であることを示している．

(コメント：なお $V(K_1)$ が K_1 の線形関数になることも示すことが出来る．特に，無限期間の時には，$V(K_1)$ の線形性も示すことが必要になる．が，今は必要ないので割愛．)

トービンの回帰式について

$q = Q$ を用いて (1) 式を再掲する．そして，再度，ゼロ次同次を使うと，次のように出来る．

$$
\begin{aligned}
& Q = p + \Phi_2(K_1, I) \\
& \Rightarrow Q = p + \Phi_2(1, I/K_1) \\
& \Rightarrow \frac{I}{K_1} = \hat{\Phi}_2^{-1}(Q - p)
\end{aligned}
$$

ここで $\hat{\Phi}_2(I/K_1) \equiv \Phi_2(1, I/K_1)$ である．

補題の証明

$F(x_1, x_2)$ が n 次同次なので，定義より次を満たす．

$$\lambda^n F(x_1, x_2) = F(\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \forall\, x_1, x_2, \&\ \lambda > 0$$

したがって左辺と右辺の偏導関数は

$$\frac{\partial \lambda^n F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda^n F_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{\partial \lambda F(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\partial x_1} = \lambda F_1(\lambda x_1, \lambda x_2)$$

この左辺と右辺は常に等しいので，

$$\lambda^n F_1(x_1, x_2) = \lambda F_1(\lambda x_1, \lambda x_2)$$
$$\Rightarrow \lambda^{n-1} F_1(x_1, x_2) = F_1(\lambda x_1, \lambda x_2)$$