基礎マクロ練習問題**解答例**：AD-AS モデル

日野将志 *

1 AD-AS

2 独占と価格の硬直性

2.1 生産関数と費用関数

費用関数はそれぞれ

1. $C(q) = wq$
2. $C(q) = q^2$
3. $C(q) = wq^{1/\alpha}$

である．

コメントおよび問題の主旨：企業の費用関数を求める計算問題は生産要素が１つの場合と２つの場合で解き方が異なる．これは計算問題を解く際に混乱を招く可能性がある．

多くの場合，企業の生産関数は $q = F(K, H)$ のように２つ以上の生産要素があるときを考える．このとき，直感的には「最適な生産を行うために K と H の最適な組み合わせ」を考えなければならない．なので，最適化問題を解かなければ費用関数を求められない．一方，生産要素が１つのときはこのような組み合わせの問題がないので，最適化を解くことなく簡単に費用関数が求められる．なお，２つ以上の生産要素があるときの費用関数の導出は初級または中級のミクロで学ぶものと思う．

2.2 独占の計算問題１

- 限界費用は２
- 企業の最大化問題は

  $$\max_p p(12-p) - 2(12-p)$$

  もしくは

  $$\max_q (12-q)q - 2q$$

  である．どちらでも良い (スライドは前者となるように書いている)．

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- 前者の最大化問題をといたとき，一階の条件は,

$$\begin{aligned} 2p - 12 &= 2 \\ \Rightarrow p &= 7 \end{aligned}$$

となる．したがって，$q = 5$．さらに，限界費用が 2 であることを考えると，マークアップ率 $\mathcal{M}$ は,

$$\begin{aligned} p &= \mathcal{M} \times mc \\ \Rightarrow\ 7 &= 2\mathcal{M} \\ \Rightarrow\ \mathcal{M} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と求まる．
なお，後者の最大化問題を解いた場合は，一階条件は

$$\begin{aligned} 12 - 2q &= 2 \qquad \text{(限界収益 = 限界費用)} \\ \Rightarrow q &= 5 \end{aligned}$$

と同様に最適な生産量やマークアップ率が求まる．

- 家計の需要の価格弾力性は,

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{dq(p)}{dp}\frac{p}{q} \\ &= -(-1) * p/q \\ &= 7/5 \end{aligned}$$

と求まる．したがって,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{1-\mu} &= \frac{7/5}{7/5-1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる．これはマークアップ率に一致している．

- まず価格が変えられるケースを考える．需要が増えたので，再度最適化問題を定義する．

$$\max_q (24 - q)q - 2q$$

このとき，一階条件は,

$$\begin{aligned} 24 - 2q &= 2 \\ \Rightarrow q &= 11 \end{aligned}$$

であり，最適な生産量が求まる．さらに価格は，$p = 24 - q = 13$ となる．このように需要の定数項が倍増したことによって，価格と生産量は倍近く増える．さらに，マークアップ率は,

$$\mathcal{M} = 13/2$$

となる．

次に，価格が硬直的であり，変更できない場合を考える．このとき，企業は，$p = 7$ から変更できない．したがって生産量のみを選ぶ次のような最大化問題を考える．

$$\max_q 7q - 2q$$
$$\text{s.t.} q \leq 17$$

この最適化問題の目的関数を見ると q は多ければ多いほど単調に良いことが分かる．したがって，生産量は,

$$q = 17$$

と需要を満たす限界まで生産することが最適になる．このときマークアップ率は,

$$\mathcal{M} = \frac{7}{2}$$

であり，元々の状態から変化していない．

コメントおよび問題の主旨：最適な価格を選ぶような最大化問題と最適な生産量を選ぶような最大化問題の二通りの解き方がある．どちらで解いても同じなので，そのことを確認してほしい．以下では，片方の解き方のみ解説しているが，別にどちらで解いても問題ない．計算上，解きやすいと思った方で解けばよい．

2.3 独占の計算問題 2

- 限界費用は q
- 企業の最大化問題は,

$$\max_q (12 - q)q - \frac{1}{2}q^2$$

  である．
- 一階条件は,

$$12 - 2q = q$$
$$\Rightarrow q = 4$$

  であり，最適な生産量が求まる．需要関数より $p = 12 - 4 = 8$ と価格も求まる．さらにマークアップ率は,

$$8 = \mathcal{M}4$$
$$\Rightarrow \mathcal{M} = 2$$

  と求まる．
- 需要の価格弾力性は問題 1 と同様に

$$\mu = -\frac{dq(p)}{dp}\frac{p}{q}$$
$$= -(-1) * p/q$$
$$= 8/4 = 2$$

と求まる．したがって，

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{2}{2-1} \\ = 2$$

となる．これはマークアップ率に一致している．

- さらに需要が急増したケースを考える．まず価格が変えられる場合，最大化問題は

$$\max_q \ (24-q)q - \frac{1}{2}q^2$$

であるので，一階条件は，

$$24 - 2q = q \\ \Rightarrow q = 8$$

であり，最適な生産量が求まる．さらに，価格は，$p = 24 - 8 = 16$ と求まる．マークアップ率は，

$$\mathcal{M} = \frac{16}{8} = 2$$

となる．したがって，需要は変化したがマークアップ率は変化していない．

次に価格が変化しないときを考える．$p = 8$ と固定されているので，価格を固定された元の最大化問題を考える．

$$\max_q \ 8q - q^2/2 \\ \text{s.t. } q \leq 24 - 8 = 16$$

このとき最適な生産量は 8 となることが分かる．マークアップ率は，$\mathcal{M} = p/mc = 8/8 = 1$ となる．

コメントおよび問題の主旨：限界費用が q であり，図示した際に正の傾きを持つパターンである．このとき，需要が変化しても，価格が変化できるとき，マークアップ率は変化しないことが分かる．また，価格が硬直的な時，最適な生産量を解くために，ちゃんと最適化問題を定式化しないと答えを間違ってしまう問題でもある．

2.4　独占の計算問題３

- 企業の最大化問題は

$$\max_q \ 12\sqrt{q} - 2q$$

である．

- 一階条件は

$$6/\sqrt{q} = 2 \\ \Rightarrow q = 9$$

であり，最適な生産量が求まる．さらに最適な価格は，$p = 12/\sqrt{9} = 4$ と求まる．マークアップ率は，

$$\mathcal{M} = 4/2 = 2$$

である．

- つぎに需要の価格弾力性は，まず需要関数は，

$$q = 144/p^2$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\mu &= -\left(-288p^{-3}\right)\frac{p}{q}\\ &= \frac{288}{4^3} \times \frac{4}{9}\\ &= 2\end{aligned}$$

である．次に

$$\frac{\mu}{\mu - 1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

と，マークアップ率に一致することが分かる．

- 次に需要が増える場合を考える．まず価格が変えられる場合，

$$\max_q \ 24\sqrt{q} - 2q$$

を解けば良い．この解は，

$$\begin{aligned}&12q^{-\frac{1}{2}} = 2\\ \Rightarrow \ \ &q = 36\end{aligned}$$

と最適な生産量が求まる．さらに価格は，$24/6 = 4$ と求まる．つまり，価格は変わっていない．さらにマークアップ率は，$p/mc = 4/2 = 2$ とマークアップ率も変わっていない．

価格が変えられる場合に需要が増えたとしても，最適な価格が 4 から変わらないことを確認した．「価格を変えられるにもかかわらず，価格を変えない」のだから，価格を変えられない状況でも同じ生産量を選ぶはずである．したがって，$q = 36$ が解である．

念のため，丁寧にこのことを数式を使って確認しておく．まず，価格が 4 で固定されたとき，最適な生産量を選ぶ最適化問題は，

$$\begin{aligned}&\max_q \ 4q - 2q\\ &\quad \text{s.t. } q \leq (24/4)^2 = 36\end{aligned}$$

である．この目的関数は q に関する単調増加関数であり，q は多ければ多いほど良い．したがって，制約いっぱいまで q を増やす．その上限が 36 なので生産量は 36 である．これは先で議論したとおりである．

コメントおよび問題の主旨：　この問題は，非線形な需要関数のケースの問題である．また，この問題も，2 つ目と同様に，需要が変わっても価格が変えられるならマークアップ率は変わらない問題となっている．