# 基礎マクロ：企業投資

日野将志

一橋大学

2021

# 簡単な復習と投資理論の位置づけ

前回までに，家計消費 $C$ の理論を学んだ．

今回は

$$C + I + G = Y$$

の投資 $I$ の理論を学ぶ．

- Kurlat 8 章
- 二神・掘 3 章，宮尾 4 章

# 投資概論

マクロ経済学において，一般的に，資本 (capital) $K$ とは，労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- 生産要素とは生産に使うもの．主に労働と資本．
- 資本の例：
  - オフィス用品，PC，工具，建物，工場
- 資本でも労働でもないものの例：
  - 経営者の経営手腕，組織運営の効率，秘伝の技術
- 投資 $I$ とは，一般に，資本を購入すること (売却は負の投資)

$$\underbrace{K_{t+1}}_{\text{来期に持ち越す資本 n}} = \underbrace{I_t}_{\text{今期の投資}} + \underbrace{(1-\delta)K_t}_{\text{前期から持ち越した分}}$$

$\delta \in (0,1)$ は資本減耗率

- 日常用語との区別：株式投資 $\neq$ 投資

企業投資は景気循環にとても敏感に反応する

# 企業の意思決定の例

企業の意思決定は色んな側面がある．

- 参入
  - 新しい会社の設立，新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- 倒産・撤退
- 価格設定
  - 定価の変更，セール，
- 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone)，別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- 投資
  - 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア，携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える．他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

# このスライドで扱う内容

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

計算例：$K^\alpha$

2 期間問題：投資

トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

補足：トービンの Q と凸型調整費用

# もっとも単純な投資

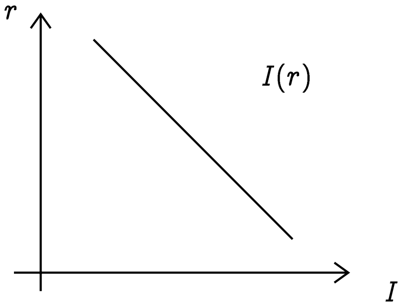
企業の投資は利子率に反応する

- 理由１：利子率が低いと借入がしやすい
  - 借金をしても利払いの負担が低い
- 理由２：投資の代わりに資産運用をしても利回りが低い

⇒ 投資は利子率の減少関数

$$I = I(r), \qquad I'(r) < 0$$

# 投資関数の図示




含意：金融政策で $r$ が下がると，投資が増える．

# ミクロ的基礎：$I(r)$ の問題点

$I = I(r)$ は単純だけど次のような問題点：ミクロ的基礎の欠如

- ミクロ経済学で学んでいるような，企業の目的や制約が記述されていない
- 拡張可能性
  - 例：「投資減税に企業がどう反応するか？」のような分析には不向き

$\Rightarrow$ 企業の目的と制約を記述して，投資関数を導く

# 生産技術

# 生産技術

生産とは，労働 $H$ と資本 $K$ を使って，製品 $Y$ を作ること．
数学的には「労働と資本を投入して，製品が生まれる」ような関数 $F$

$$Y = F(K, H)$$

$F$ を生産関数と呼ぶ

- 生産関数は $F_K > 0, F_H > 0$ かつ $F_{KK} < 0, F_{HH} < 0$ が一般的な仮定
- 一次同次とする．$n$ 次同次とは，パラメータ $\lambda > 0$ に対して，

$$\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$$

  が成り立つこと
    - 1 次同次の意味：投入量を $\lambda$ 倍すれば，生産量も $\lambda$ 倍になる
    - 例：畑 ($K$) と農夫 ($H$) を 2 倍にすれば，農作物 ($Y$) は 2 倍に
- 生産関数の代表例：
    - コブ・ダグラス型：$F(K, H) = K^{\alpha} H^{1-\alpha}$

# コブ・ダグラス型

コブ・ダグラス型が一番頻繁に使われる

$$F(K,H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

- 頻繁に使われる背景
  - 現実には，「労働所得分配率 $(wH/Y)$ が一定」だった
  - コブ・ダグラス型場合，労働所得分配率が一定になる

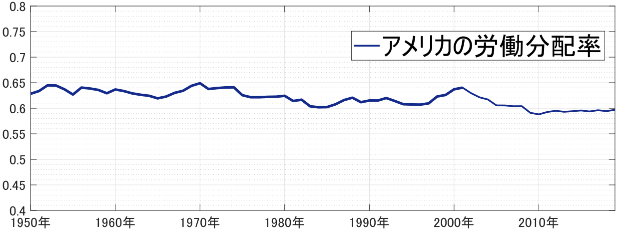
$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha$$

(これの導出は練習問題)

他の生産関数

- CES 型：$F(K,H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1-\alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$
- レオンチェフ型：$F(K,H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$

# 労働所得分配率

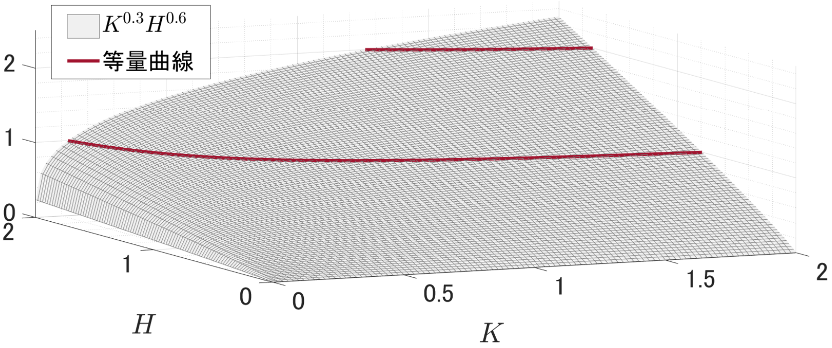



ざっくり見ると，概ね安定して 0.6 – 0.64 程度 ⇒ コブ・ダグラス型で OK そう

細かい論点：

- ズームして見ると，労働所得分配率は下降傾向
- 含意：労働者に回される割合が減っている．格差の一つの要因？

# 図：生産関数



## 静学的な企業の選択

# 静学的な企業

まず静学的な場合から始める．企業は次のようなことを考えるとする

- 家計から，労働を雇い、資本を借りるとする
  - 労働には労働所得 $wH$ を支払う
  - 資本には賃料 $rK$ を支払う
  - 資本は生産に使うことで減耗する $(\delta K)$
- 労働と資本を使って生産を行う
- 利潤は生産物から労働所得と資本の賃料，資本の減耗費用を引いたもの

$$\pi = \max_{K,H} F(K,L) - wH - rK - \delta K$$

# 企業の最適化問題





- 企業は，利潤を最大化するように，資本と労働を選択する
- 価格 $(r, w)$ は所与 ($\Leftrightarrow$ 企業は選べない)

企業の利潤最大化は以下のとおり

$$\max_{K,H} F(K, H) - wH - rK - \delta K$$

# 企業の最大化問題を解く

$K, H$ についてそれぞれ微分して 0 を求める

$$
\begin{aligned}
K &: F_K(K,H) = r + \delta \\
H &: F_H(K,H) = w
\end{aligned}
$$

この式を覚えていて欲しい.

- 次に見せること：動学的なモデルを考えても，結局この形になる (2 期間)

# 家計の問題との比較

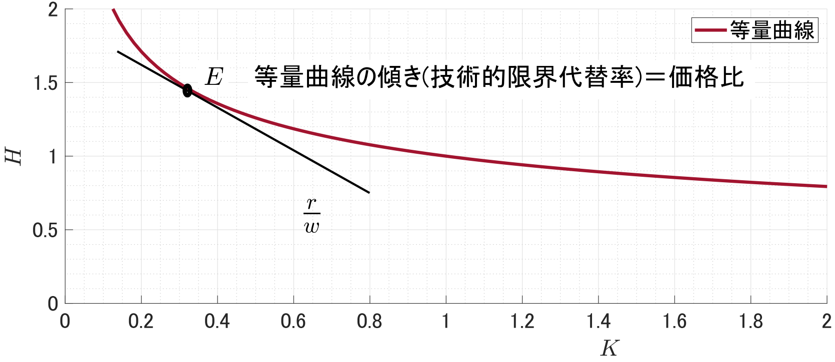
先ほどの一階の条件の 2 式を割ると，

$$\underbrace{\frac{F_K(K,H)}{F_H(K,H)}}_{=\text{等量曲線の傾き}} = \underbrace{\frac{r+\delta}{w}}_{=\text{価格比}}$$

家計の場合 (復習)

$$\underbrace{\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)}}_{\text{無差別曲線の傾き}} = \underbrace{(1+r)}_{\text{価格比}}$$

# 図解




等量曲線の傾きを技術的限界代替率とも呼ぶ

# 計算例：$F(K) = K^\alpha$

- 本来本節でやりたいことは，資本形成が利子率にどのように反応するか見ること
- 一方，$F(K,H)$ という一般形のままだと，投資関数を導けない

$\Rightarrow$ $F(K,H)$ を簡単な関数形を設定して解いてみる

仮に，単純化のために労働投入は捨象して，

$$F(K,H) = F(K) = K^\alpha$$

としてみる．

# 企業の最適化問題

このときの利潤最大化問題は,

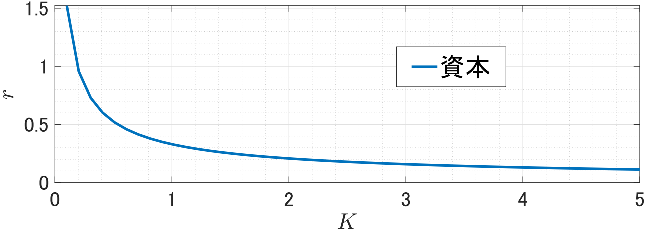
$$\max_K \; K^\alpha - rK$$

である．これの微分して 0 は,

$$\alpha K^{\alpha-1} = r$$

$$\Rightarrow K = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

# 企業の資本形成




資本は利子率の減少関数

# 問題点

- 今，導出したのは $K(r)$.
- 本来分析したものは $I(r)$

一方，投資は本来

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

と定義される．投資を議論するためには時間と言う概念が不可欠！

$\Rightarrow$ 二期間モデルへ

# 2 期間問題：投資の決定

# 資本の保有権

静学的な企業の場合では，(暗黙に) 企業は資本を家計から借りていると仮定した

- そのため，賃料 $rK$ を払っていた

次に，企業が資本を保有すると考える．

- 企業は投資 $I$ をすることで，今期費用を払い，来期の資本を増やすことが出来る
- 企業は $K_1$ を既に保有しているところから操業を始める
  - $K_1$ は変更できない

# 企業の２期間の利潤最大化

- 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - I$$
$$\text{where } I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

- 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1-\delta)K_2}_{=\text{資本の残存価値}}$$

# 企業の目的関数

企業は次のように割引現在価値の利潤を最大化するとする.

$$V \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$

そして $\pi_1$ と $\pi_2$ はそれぞれ次のように決まる (再掲)

- 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - I$$
$$\text{where } I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

- 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1-\delta)K_2}_{=\text{資本の残存価値}}$$

# 企業の 2 期間の利潤最大化 (続)

企業の二期間の最大化をまとめると次の通り

$$\max_{I,K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r}[F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]$$
$$\text{s.t.} \quad I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

- max の下に $K_1$ が無いことに注意
  - $K_1$ は期首の時点で持ってる．変更できない
- 企業の割引因子は $1/(1+r)$ とする

# 2 期間の利潤最大化を解く

投資の定義式を目的関数に代入すると，

$$\max_{K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - [K_2 - (1-\delta)K_1] + \frac{1}{1+r}[F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]$$

となる．それぞれ微分を取って，導関数 $=0$ を解くと以下を得る．

$$\begin{aligned} K_2 &: F_K(K_2,H_2) = r+\delta \\ H_1 &: F_H(K_1,H_1) = w \\ H_2 &: F_H(K_2,H_2) = w \end{aligned}$$

静学的な場合 (静学的) と同じ！ $\Rightarrow$ 多くの場合で静学的なモデルを使う

# 利子率の変化と投資

$F_K(K_2, H_2) = r + \delta$ で $K_2$ が決まる $\Rightarrow$

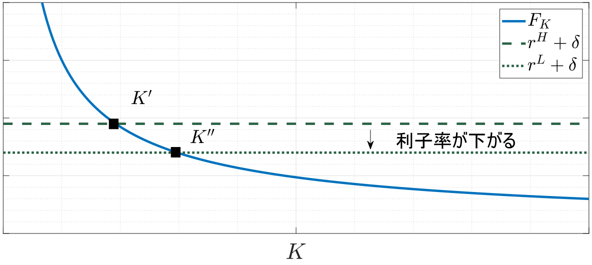
- $K_2 \equiv K(r)$
- $I = K_2 - (1-\delta)K_1 \equiv I(r)$

また，$F_K(K_2, H_2) = r + \delta$ の $(r, K)$ に対して全微分を取ると，

$$F_{KK}(K_2, H_2)\mathrm{d}K = \mathrm{d}r$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{F_{KK}(K_2, H_2)} < 0$$

つまり利子率が下がると資本 (したがって投資) が上がる

# 利子率の変化と投資 (図示)




利子率が下がると，資本 $K_2$(したがって投資 $I$) が上がる ($K' \to K''$)

## 応用例

- 中央銀行が $r$ を下げると，投資が活発になる

# トービンの Q 理論：調整費用の無い場合

# トービンのQ理論の概要

この節でやること：同じ二期間モデルを違う解釈をすること

各期の企業価値 $V(K_1)$, $V(K_2)$

$$V(K_1) \equiv \max \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$V(K_2) \equiv \max \pi_2$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由：期首において $K_t$ は所与だから．

次のように変数 $Q^M$ と $Q^A$ (トービンの限界Q，トービンの平均Q) を定義する．

$$Q^M \equiv \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}, \quad Q^A \equiv \frac{1}{1+r}\frac{V(K_2)}{K_2}$$

$Q^M > 1$ は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している．そのため，$Q^M = 1$ となる水準が最適な資本水準．

# 2期間モデル再び

$$V(K_1) = \max_{I,K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r}\underbrace{[F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]}_{=V(K_2)}$$

$$\text{s.t.} \quad I = K_2 - (1-\delta)K_1$$

一階の条件は，次の通り

$$\begin{aligned} K_2 &: \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = 1 \\ H_1 &: F_H(K_1,H_1) = w \\ H_2 &: F_H(K_2,H_2) = w \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q^M = 1$

(※もう少し計算すると，$Q^M = Q^A$ となることも分かる． 補足)

# 理論と実証：古典的な Q-regression

理論が言っている事：

- $Q^M = Q^A (= Q)$.
- $Q \gtrless 1$ が投資の符号を決定する
  - $Q > 1$：企業価値 $V$ を投資によって高められる．したがって投資すべき
  - $Q < 1$：企業価値 $V$ は投資をすると下がる．したがって投資は控えるべき

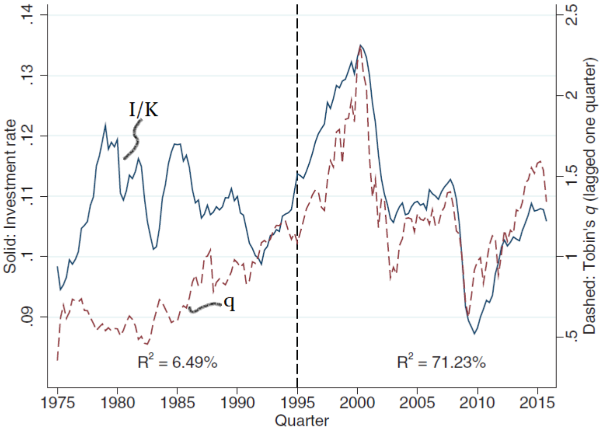
実証：回帰式 (Tobin's Q-regression)

$$\frac{I}{K} = \alpha + \beta Q + \epsilon$$

# 実証：古典的な Q-regression(con'd)

Andrei, Mann and Moyen(2019)

- 1995 年まで：Q 理論は的外れ
- 1995 年以降：Q 理論は割と正しい



# コメント：

- 「$Q^M \gtrless 1$ が投資の符号を決定する」という条件は，学部だけで教えられており，あまり大学院以降では出てこなくなる
  - 理由：伝統的には，Q 理論は「実証的に的外れ」という風潮だった
  - 例：Adda and Cooper (2003)
  - 大学院では，むしろ，「$Q^M$ が投資 $I$ を決定するための十分な情報量になる」ということを教える．
    - 一応，このスライドの補足でも，そういう解説を付けているので、興味がある人は読んでみてください

# 投資理論のまとめ

- 投資とは資本の購入 (または売却)
- 静学的なモデルでも，動学的なモデルでも (基本的なケースでは) 同じになる．

# 補足：トービンの Q 理論と凸型調整費用

# 注意事項

注意：この補足は他の補足よりも難しいかもしれません．大学院進学に関心がある人のみ読むと良いかもしれません．

# トービンのQ理論の概要 (続)

前節で $Q^M$ が投資の決定において重要なことは分かった.

- 問題点：限界的な概念は実証的に観察がほぼ不可能.
  - 限界トービンの Q($Q^M$) は，仮に1単位資本が増えたら，企業価値が増えるかどうか

Abel(1979) や Hayashi(1982) は,『特定の条件の下で，投資を判断するうえで平均的な指標 $Q^A$ さえ見れば良い』ことを示した.

$$Q^A \equiv \frac{1}{1+r}\frac{V(K)}{K}$$

特定の条件 (および前節の拡張)

- 条件：生産関数が1次同次
- 拡張：一次同次の調整費用関数 $\Phi(K_1, K_2)$ と資本の購入価格 $p$

# トービンのQ理論：モデル

2期間モデルの拡張として，次のように，投資をするためには調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がかかるとする．

$$
\begin{aligned}
\pi_1 =& F(K_1, H_1) - wH_1 - pI - \Phi(K_1, K_2) \\
\text{where } & I = K_2 - (1-\delta)K1 \\
& \Phi_2(K_1, K_2) > 0, \quad \Phi_{22}(K_1, K_2) < 0, \\
& \Phi(\cdot) \text{ は一次同次関数}
\end{aligned}
$$

調整費用の意味

- 投資 $I \neq 0$ をすると，費用 $\Phi$ を払わなければいけない
  - 資本を買うにも，売るにも費用がかかる
- 代表的な関数形の例：

$$
\Phi(K_1, K_2) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1
$$

# 最大化問題

$$
\begin{aligned}
V(K_1) = \max_{K_2, H_1, H_2} \ & F(K_1, H_1) - wH_1 - p[K_2 - (1-\delta)K_1] - \Phi(K_1, K_2) \\
& + \frac{1}{1+r} \underbrace{[F(K_2, H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]}_{V(K_2)}
\end{aligned}
$$

この一階の条件は,

$$
\begin{aligned}
K_2 \ &: \frac{1}{1+r} \underbrace{[F_K(K_2, H_2) + (1-\delta)]}_{=\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}} = p + \Phi_2(K_1, K_2) \\
H_1 \ &: F_H(K_1, H_1) = w \\
H_2 \ &: F_H(K_2, H_2) = w
\end{aligned}
$$

# 計算手順 (1)：労働の整理

## 補題

ある微分可能な関数 $F(x)$ が $n$ 次同次のとき，導関数 $F_x(x)$ は $n-1$ 次同次になる (証明は 47)

この補題を使うと，$F_H(K_t, H_t)$ は 0 次同次であることが分かる．したがって，次のことが成り立つ．

$$w = F_H(K_t, H_t) = F_H(K_t/H_t, 1) \quad (\text{両方の要素を } H_1 \text{ で割っている})$$

次に，$F_H$ は単調 (減少) 関数なので，逆関数が取れる．したがって，

$$\frac{K_t}{H_t} = F_H^{-1}(w, 1) \equiv \hat{F}$$
$$\Rightarrow \quad K_t = \hat{F} H_t$$

このように $K$ は $H$ の線形関数であることが分かる．

(コメント：これは静学的な労働の問題だけ先に解いてるのと同じ)

# 計算手順 (2)：$K$ だけの問題の定義

前頁の結果より，$H_t$ を $K_t$ に置き換えて最適化問題を定義できる．

$$V(K_1) = \max_{K_2} F(K_1, \hat{F} K_1) - w\hat{F} K_1 - p[K_2 - (1-\delta)K_1] - \Phi(K_1, K_2)$$
$$+ \frac{1}{1+r}[\underbrace{F(K_2, \hat{F} K_2) - w\hat{F} K_2 + (1-\delta)K_2}_{=V(K_2)}]$$

さらにこれは生産関数の一次同次性より，

$$V(K_1) = \max_{K_2} F(1, \hat{F})K_1 - w\hat{F} K_1 - p[K_2 - (1-\delta)K_1] - \Phi(K_1, K_2)$$
$$+ \frac{1}{1+r}[\underbrace{F(1, \hat{F})K_2 - w\hat{F} K_2 + (1-\delta)K_2}_{=V(K_2)=\hat{v}K_2}]$$

と出来る．$V(K_2)$ が $K_2$ の線形関数となっていることが分かる．

# 限界 $Q^M$ と平均 $Q^A$

$V(K_2)$ が $K_2$ の線形関数 $\hat{v}K_2$ と表せることが分かった．したがって，

$$Q^M \equiv \frac{1}{1+r}\frac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = \frac{1}{1+r}\hat{v} = \frac{1}{1+r}\frac{V(K_2)}{K_2} \equiv Q^A$$

となることが分かる．
したがって，生産関数と調整費用が一次同次のとき，$Q^M$ が測定できずとも，$Q^A$ をその代理変数 (proxy) として測定すれば十分であることを示している．
(コメント：なお $V(K_1)$ が $K_1$ の線形関数になることも示すことが出来る．特に，無限期間の時には，$V(K_1)$ の線形性も示すことが必要になる．が，今は必要ないので割愛．)

# 補題の証明

$F(x_1, x_2)$ が $n$ 次同次なので，定義より次を満たす．

$$\lambda^n F(x_1, x_2) = F(\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \forall\, x_1, x_2, \&\ \lambda > 0$$

したがって左辺と右辺の偏導関数は

$$\frac{\partial \lambda^n F(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda^n F_1(x_1, x_2)$$
$$\frac{\partial \lambda F(\lambda x_1, \lambda x_2)}{\partial x_1} = \lambda F_1(\lambda x_1, \lambda x_2)$$

この左辺と右辺は常に等しいので，

$$\lambda^n F_1(x_1, x_2) = \lambda F_1(\lambda x_1, \lambda x_2)$$
$$\Rightarrow \lambda^{n-1} F_1(x_1, x_2) = F_1(\lambda x_1, \lambda x_2)$$