

# 基礎マクロ練習問題解答例：数学

日野将志 \*

## 1 微分の計算

1.  $f'(x) = 0$
2.  $f'(x) = a/x$
3.  $f'(x) = x^{-a}$
4.  $f'(x) = ax^{a-1}y^b$
5.  $f'(x) = [x^a + y^a]^{1/a-1}x^{a-1}$
6.  $f'(x) = \exp(-ax)$

## 2 最適化と高階の微分

1. 目的関数が

$$\log x - 2x$$

のとき、この一階の条件 (微分して 0 の条件) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - 2 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。さらに、二階の条件を調べると、

$$-\frac{1}{x^2} < 0$$

であるから、これは上に凸であることが分かる。したがって、これは  $x = 1/2$  で最大値を取る。

- 2.

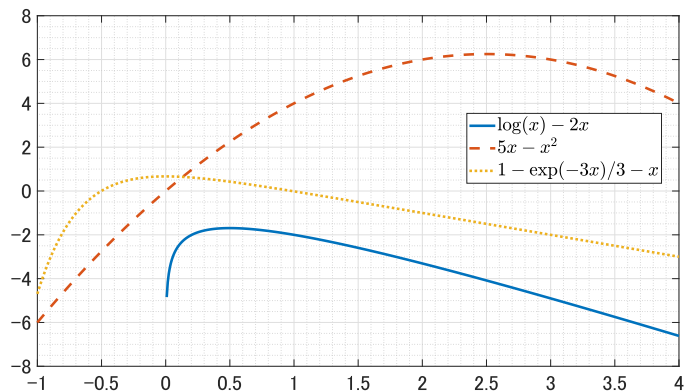
$$5x - x^2$$

のとき、この一階の条件は、

$$\begin{aligned}5 - 2x &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

---

\* タイポや間違いに気付いたら教えてください。



である。さらに、二階の条件を調べると、

$$-2 < 0$$

である。したがって、この目的関数は上に凸であり、 $x = \frac{5}{2}$  で最大値を取ることが分かる。

3. 目的関数が

$$1 - \exp(-3x)/3 - x$$

のとき、一階の条件は、

$$\begin{aligned} \exp(-3x) - 1 &= 0 \\ \Rightarrow -3x &= \log(1) \\ \Rightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かる。さらに二階の条件を調べると、

$$-3 \exp(-3x) < 0$$

であるので、これも  $x = 0$  で最大値を取ることがわかる。

最後に、それぞれの目的関数を図示すると次のようになっている。

## 3 多変数の微分

### 3.1 偏微分

1.  $f_x(x, y) = ax^{a-1}y^b$ ,  $f_y(x, y) = bx^ay^{b-1}$
2.  $f_x(x, y) = ab/x$ ,  $f_y(x, y) = ab/y$
3.  $f_x(x, y) = a/x$ ,  $f_y(x, y) = b/y$
4.  $f_x(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b-1}ax^{b-1}$ ,  $f_y(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b-1}(1-a)y^{b-1}$

### 3.2 全微分

いずれも上記の問題の解答を用いて、

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

とすれば求まる.

## 4 多変数の最適化

### 1. 目的関数が

$$\max_{x,y} 2 \log x + 3 \log y - 2x - 3y$$

のときの一階の条件は,

$$\begin{aligned} x : \frac{2}{x} - 2 &= 0 \\ y : \frac{3}{y} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

である\*1. これらをそれぞれ解くと,

$$(x, y) = (1, 1)$$

となる. つまり,  $x = y = 1$  で最大値を取る.

### 2. 目的関数が

$$\max_{x,y} x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y$$

のとき, 一階の条件は,

$$\begin{aligned} x : \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5} &= 0 \\ y : \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{3}{5}} - \frac{2}{5} &= 0 \end{aligned}$$

である. この2式を両辺で割ると

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x &= 2y \end{aligned}$$

と求まる. これを一階の条件の2式目に代入する

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^2}{y^3} \right)^{\frac{1}{5}} &= 1 \\ \Rightarrow \left( \frac{(2y)^2}{y^3} \right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{4}{y} &= 1 \\ \Rightarrow y &= 4 \end{aligned}$$

と  $x = 8$  が求まる.

---

\*1 ここでは  $x :$  という表記は, 「 $x$  に対する一階条件」という意味で使っている.

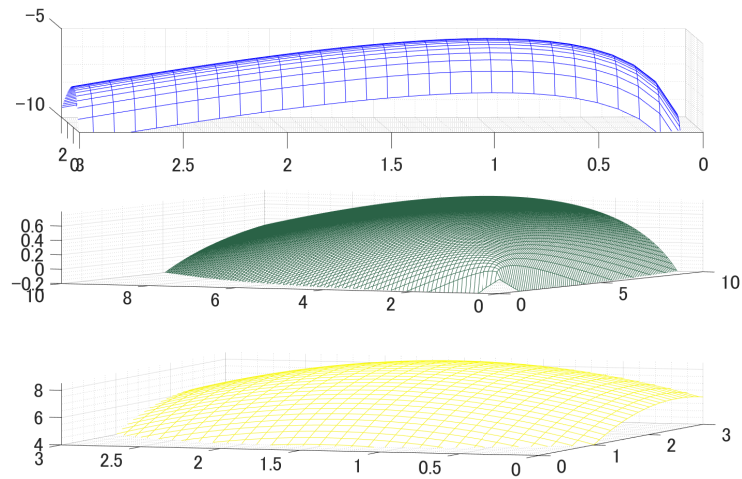


図 1 多変数の最適化の目的関数

3.

$$\max_{x,y} 5x - x^2 + 3y - y^2$$

が目的関数の時、この一階の条件は、

$$x : 5 - 2x = 0$$

$$y : 3 - 2y = 0$$

であるので、これを解くと、

$$(x, y) = (5/2, 3/2)$$

が求まる。

最後に、図 1 が上から 1, 2, 3 の目的関数の図示である。