基礎マクロ練習問題：労働時間

日野将志 *

1　静学的なモデル

1.1　対数効用

次の三つの効用関数を考える．

$$u(c,l) = \log c + \log l$$
$$u(c,l) = \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2}\log l$$
$$u(c,l) = 5\log c + 5\log l$$

これらについて以下の問いに答えよ．

- 消費と余暇と労働時間 (c,l,h) をそれぞれ解け
- 解がどのように異なるか 1，2 行の簡単な分析をせよ．

さらに，次のような効用関数を考える．

$$u(c,l) = \alpha\log c + \alpha\log l$$

なお $\alpha > 0$ とする．やはりこの解を解いて，解がさきほどまでの解とどう違うか 1 ， 2 行の簡単な分析を行え．

さらに，

$$u(c,l) = \alpha\log c + \alpha\log l + A$$

の場合はどうだろうか．ここでは A は実数のパラメータとする．

1.2　様々な効用関数

ぜんせつと同様のモデルを様々な効用関数のもとで解いてみよう．

予算制約は，授業スライドで扱ったものとして，次のような効用関数を考える．

- 対数効用の場合：$u(c,l) = \alpha\log(c) + (1-\alpha)\log(l)$．ここで $\alpha \in (0,1)$ はパラメータ
- コブ・ダグラス型：$u(c,l) = c^{\alpha}l^{1-\alpha}$．ここで $\alpha \in (0,1)$ はパラメータ
- 準線形 (Hansen-Rogerson 型)：$u(c,l) = \log c + Bl$．ここで，$B \in (1/2,1)$．

* タイポや間違いに気付いたら教えてください．

- GHH 型：$u(c,l)=\log\left(c-\frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$, ここで $\eta\geq 0$ はパラメータ

それぞれの場合について，以下の問いに答えよ

- 同時点間の消費 c と余暇選択 l の条件を導け
- 消費と余暇 (c,l) をそれぞれ解け．
  - 効用関数が異なっているが，(c,l) が同じものがあるか確認せよ
- 消費と余暇が賃金 w の変化にどのように反応するか，簡単に分析せよ

コメント：なお，GHH とはこのような効用関数を開発した論文，Greenwood, Hercowitz and Huffman(1988) の 3 人の頭文字です．

1.3　慎重に解く問題：加法分離型の凸性の確認

次に注意が必要な効用関数として，次の加法分離型 (additive sperable) 効用関数または開発者の MaCurdy 教授より MaCurdy 効用と呼ばれる効用関数を考えよう．

$$u(c,h)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}-B\frac{h^{1+\eta}}{1+\eta}$$

ここで h は労働時間，$\sigma>0$，$B\geq 0$ はパラメータである．

仮に η にはパラメータの範囲の条件を課さないことにする．このとき，それぞれの効用関数について次の問に答えよ．

1. 代入法によって (l,h) を一階条件を求めよ．
2. 凸性を確かめよ．どの条件が満たされたときに，一階条件は最大化問題の解になるだろうか．
3. これ以降 $\eta>0$ というパラメータ制約を課すことにする．このとき，凸性はどうなるだろうか．
4. 消費を求めよ．
5. $\sigma>1$ のとき，労働時間は w に対して増加関数になるか，減少関数になるか．それぞれの場合に 2 行程度でなぜそうなるか説明せよ．

1.4　対数効用と逆算：推定的な考え方や経済政策分析

貴方は今，仮想的な国 A のシンクタンクの職員であると想像してみてほしい．この国ではこれまで所得税率は 0 であったが，所得税の導入を検討しており，その効果の試算を政府が貴方に外注してきた．貴方は科学的 (つまり経済学的) な試算に取り組むことになった．

過去の研究から，どうやら国 A の家計の効用関数は，

$$u(c,l)=\alpha\log c+(1-\alpha)\log l$$

という関数形であると分かっているとする．また $\alpha\in(0,1)$ であることは分かっているが，α が実際にどのような値を取るかは分からないとする．

政府が導入を検討している所得税は，労働所得 $w(1-l)$ に一律に課税するようなものとする (つまり累進課税ではない)．家計の予算制約は，

$$c=w(1-\tau)(1-l)$$

であることも分かっているとしよう．現時点ではこの国には所得税がないので $\tau = 0$ である．

さらに，国 A は家計にサーベイを行っており，そのデータを見ると，

$$(c, w) = (1, 2)$$

と消費と賃金の情報が報告されている．このとき次の問いに答えよ．

- この国 A の家計の効用関数のパラメータ α がどのような値の時に，家計のデータ (c, w) と一貫性を持つだろうか？
- この国 A が所得税 τ を 0 から 0.1 に増加させた場合，どのように (c, l) は変化するだろうか？ただし，ここでは，所得税が変化したとしても，w は 2 のまま変わらないと仮定する．
- 政府は所得税の導入に強い反対を国民から受けてしまった．そこで代替案として消費税 $\tau^c \geq 0$ を検討し始め，貴方に消費税と所得税はどのように異なるか分析してほしいと依頼してきた．消費税を導入した時の予算制約を記述し，家計から見た時に消費税と所得税はどのように違うか分析せよ．

1.5　効用関数の選択

問題 1.4 では，効用関数の関数形が与えられていた．今度は効用関数をどのように選択するか，この問題を通じて考える．

仮に理想的なデータと信用できる計量経済学的な手法を用いて A 国の労働の賃金弾力性 $\epsilon_{h,w}$ を推定した研究が存在するとし，その研究が，

$$\epsilon_{h,w} \equiv \frac{\partial h}{\partial w} \frac{w}{h} \neq 0$$

と結論付けたとしよう．この情報を用いて，次の問に答えよ．

なお，この A 国では所得税はかけておらず，この国の国民は

$$c = wh$$

という予算制約に面しているとする．

1. このとき，(1) 対数効用関数，(2) コブ・ダグラス型効用関数，(3) 準線形，(4)GHH 型，(5) 加法分離型のどの効用関数が考えられるか，すべて答えよ．
2. 前問で複数の選択肢が答えとして上がっているはずである．このとき，どの効用関数か特定するために次のような情報が追加されたとする．
   - GHH と加法分離型のどちらの場合でも $\eta > 0$ である．
   - 加法分離型の場合，$\sigma > 1$ である．
   - $\partial h/\partial w > 0$ である．

   このとき，どの効用関数が考えられるか？

1.6　発展：Boppart-Krusell 型効用関数

2020 年に公刊された研究で，Boppart 教授と Krusell 教授は，今まで説明できていなかった事実を説明するために，次のような新しい効用関数を開発した[*1]．彼らが開発した効用関数を Boppart-Krusell 型と呼ぶことにする．彼らが開発した中で最も単純な関数形をここでは出題する．その関数形は次のような形である．

$$u(c,h)=\log(c)+\phi\log(1-Bhc^{\frac{\nu}{1-\nu}})$$

ここで，$\phi>0$, $B>0$ かつ $\nu\in(0,1)$ というパラメータである．

さらに，予算制約は,

$$c=wh$$

としよう．

1. このとき消費関数，労働供給関数，余暇関数を求めよ．なお，内点解を仮定して良い．
2. w が増加したとき，労働供給や消費は増えるか減るか，どちらか答えよ

[*1] 具体的に「説明できていなかった事実」とは，過去 130 年を見ると先進国のほとんどの国で労働時間が年率 0.5% 程度で堅調に減少するという事実である．以前は戦後のアメリカ経済では労働時間にそのような長期的な傾向は観察されておらず,「労働時間は 1/3 程度の時間で一定である」という見方が多数派であった．

2　所得税

2.1　一括税のみの場合

授業スライドでは労働所得 wh に応じて労働所得税額 τwh が変わるような所得税を学んだ．ここでは，異なる労働所得として，一括税と呼ばれる税を考える．一括税とは，労働所得等に依存せず，一括して定額が課税される税金のことである．一括税 T があるとき，予算制約は次のようになる．

$$c = wh - T$$

なお，$(w, T) > 0$ とする．

効用関数は授業と同様に，$u(c, l) = \log(c) + \log(l)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

- (c, l, h) を求めよ．
  - ヒント：特にこの際，一括税 T の値によって家計は一切余暇を取らない $(l = 0)$ ような場合が出てくるはずである．このような場合分けが必要なことに注意して解いてほしい．
- T が変わったら，c と l はそれぞれどのように変化するか，導関数を用いて分析せよ．なお，ここでは $(c, l) > 0$ の範囲のみ考えればよいとする．

2.2　労働所得税と一括税

さらに，上の問題と授業スライドを組み合わせた問題として次のような 2 つの労働所得税を考える．家計の予算制約は次のようになるとする．

$$c = (1 - \tau)[wh - T]$$

ここで τ は労働所得税率であり，T は更に固定の税率である．$(w, \tau, T) > 0$ とする．

効用関数は授業と同様に，$u(c, l) = \log(c) + \log(l)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

- (c, l, h) を求めよ．
  - ヒント：特にこの際，一括税 T の値によって家計は一切余暇を取らない $(l = 0)$ ような場合が出てくるはずである．このような場合分けが必要なことに注意して解いてほしい．
- τ や T が変わったら，c と l はそれぞれどのように変化するか，導関数を用いて分析せよ．なお，ここでは $(c, l) > 0$ の範囲のみ考えればよいとする．
- (自学自習用：解答無し) これらの問題が次のような異なる効用関数の時にどうなるか分析せよ．
  - 加法分離型 $u(c, h) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{h^{1+\eta}}{1+\eta}$
  - $u(c, l) = \log(c) + \frac{l^{1+\eta}}{1+\eta}$
  - $u(c, l) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \log l$
  - GHH 型

所得	税率
$[1000,\quad 1,949k]$	5%
$[1,950k,\quad 3,299k]$	10%
$[3,300k,\quad 6,949k]$	20%
$[6,950k,\quad 8,999k]$	23%
$[9,000k,\quad 17,999k]$	33%
$[18,000k,\quad 39,999k]$	40%
$40,000k$ 以上	45%

表 1　日本の所得税率 (2020 年現在)．k は 1000 倍してください．例えば $1000k$ は 100 万円

2.3　累進所得税：HSV 所得税

これまで $(1-\tau)wh$ のような線形な労働所得税を考えてきた．これは年収 100 万円の人でも $\tau\%$ だけ所得税を払い，年収 1 億円の人でも $\tau\%$ だけ所得税を払うことを要求している．

一方，現実には累進所得税がある．つまり，多く稼ぐ人ほど，高い税率に直面する． 実際，現実には，このような累進所得税は表 1 のように階段状になっている．しかし，このような階段状の関数は微分が出来ない点が多く，解析的に分析するのが困難である．

そこで Heathcote, Storesletten, and Violante(2014, 2017, 2019) が広めた微分可能な累進労働所得税の関数形として次のようなものがある．労働所得を $y = wh$ とすると，

$$T(y) = y - (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}}{1-\xi}$$

という税関数 T を上記の三人の頭文字を取って HSV 税関数等と呼ぶ．ここでは $\tau \in (0,1)$ と $\xi \in (0,1)$ とし，これらは税率を決めるパラメータである．一般に ξ は課税の累進度を表す．この HSV 税関数は現実のアメリカの累進所得税を比較的うまく近似できることが HSV によって示され，近年良く使われるようになっている． この税関数があるもとで予算制約は,

$$c = y - T(y)$$

である．

このとき，次の問いに答えよ．

- 効用関数を対数効用 $u(c,l) = \alpha \log c + (1-\alpha)\log l$ として，次の問いに答えよ．
  - 最大化問題をかけ．
  - 最大化問題にある制約式を全て目的関数に代入せよ．
  - 最適な (c,l,h) を求めよ．
    - ヒント：ここでパラメータは α, τ, ξ, w である．
  - τ と ξ が変化したとき，どうなるか分析せよ．
- (自学自習用：解答無し)　効用関数を GHH 型として，2.1 と同様の問題に答えよ．

コメント：なお，累進度のパラメータはそれぞれの場合に応じて，次を意味する．

- $\xi = 1$ のとき
  $T(y) = y - \tau$．完全な再分配
- $\xi \in (0, 1)$ のとき
  累進課税 (豊かな人に高い税率)
- $\tau = 0$ のとき
  再分配無し
- $\tau < 0$ のとき
  逆進課税 (豊かな人に低い税率)

元々の主旨より，ここでは $\xi \in (0, 1)$ とする．

3　2 期間：消費・貯蓄・余暇

3.1　2 期間の場合と様々な効用関数

一時点の効用関数 $u(c,l)$ を

- 対数効用の場合：$u(c,l)=\alpha\log(c)+(1-\alpha)\log(l)$．ここで $\alpha\in(0,1)$ はパラメータ
- コブ・ダグラス効用と CRRA 効用関数：$u(c,l)=\frac{(c^{\alpha}l^{1-\alpha})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$．ここで $\alpha\in(0,1)$ と $\sigma>0$ はパラメータ．
- GHH 型：$u(c,l)=\log\left(c-\frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$

のそれぞれの場合を考える．2 期間の効用は，次のように一時点の効用の和として表すことが出来るとする．

$$u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2)$$

次に，予算制約を，

$$\begin{aligned}c_1+s&=w_1(1-l_1)\\c_2&=w_2(1-l_2)+(1+r)s\end{aligned}$$

とする (講義と異なり $w_1=w_2$ とは限らないことに注意せよ)．

このとき，次の問いに答えよ．

- 最大化問題を書け
- 同時点間の消費 c と余暇選択 l の条件を導け
- 消費と余暇 (c_1,l_1,c_2,l_2) をそれぞれ解け (中には解けないものがある．解けない場合は，どこで解けなくなるか簡単に説明せよ)．
  - 効用関数が異なっているが，(c_1,l_1,c_2,l_2) が同じものがあるか確認せよ
  - 対数効用関数の場合：家計消費のときに労働供給がないときを学んだ．その場合と比較して，どのように異なるか 2，3 行で議論せよ．

3.2　線形の労働所得税と消費税：2 期間の場合

問題 1.4 では，消費税と線形の労働所得税が等価であるという結論が出てきた．この結論は静学的なときのみに成立するのであろうか？また対数効用関数の時のみに成立するのであろうか？この 2 つの問に答えよ．