基礎マクロ練習問題**解答例**：AD-AS モデル

日野将志 *

1　独占と価格の硬直性

1.1　生産関数と費用関数

費用関数はそれぞれ

1. $C(q) = wq$
2. $C(q) = wq^2$
3. $C(q) = wq^{1/\alpha}$

である．

コメントおよび問題の主旨：企業の費用関数を求める計算問題は生産要素が１つの場合と２つの場合で解き方が異なる．これは計算問題を解く際に混乱を招く可能性がある．

多くの場合，企業の生産関数は $q = F(K, H)$ のように２つ以上の生産要素があるときを考える．このとき，直感的には「最適な生産を行うために K と H の最適な組み合わせ」を考えなければならない．なので，最適化問題を解かなければ費用関数を求められない．一方，生産要素が１つのときはこのような組み合わせの問題がないので，最適化を解くことなく簡単に費用関数が求められる．なお，２つ以上の生産要素があるときの費用関数の導出は初級または中級のミクロで学ぶものと思う．

1.2　独占の計算問題１

- 限界費用は２
- 企業の最大化問題は

$$\max_p p(12 - p) - 2(12 - p)$$

もしくは

$$\max_q (12 - q)q - 2q$$

である．どちらでも良い (スライドは前者となるように書いている).

- 前者の最大化問題をといたとき，一階の条件は,

$$2p - 12 = 2$$
$$\Rightarrow p = 7$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

となる．したがって，$q = 5$．さらに，限界費用が 2 であることを考えると，マークアップ率 $\mathcal{M}$ は，

$$\begin{aligned} p &= \mathcal{M} \times mc \\ \Rightarrow\ 7 &= 2\mathcal{M} \\ \Rightarrow\ \mathcal{M} &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と求まる．

なお，後者の最大化問題を解いた場合は，一階条件は

$$\begin{aligned} 12 - 2q &= 2 \qquad\qquad (\text{限界収益} = \text{限界費用}) \\ \Rightarrow q &= 5 \end{aligned}$$

と同様に最適な生産量やマークアップ率が求まる．

- 家計の需要の価格弾力性は,

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{dq(p)}{dp}\frac{p}{q} \\ &= -(-1) * p/q \\ &= 7/5 \end{aligned}$$

と求まる．したがって,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu - 1} &= \frac{7/5}{7/5 - 1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる．これはマークアップ率に一致している．

- まず価格が変えられるケースを考える．需要が増えたので，再度最適化問題を定義する．

$$\max_q (24 - q)q - 2q$$

このとき，一階条件は,

$$\begin{aligned} 24 - 2q &= 2 \\ \Rightarrow q &= 11 \end{aligned}$$

であり，最適な生産量が求まる．さらに価格は，$p = 24 - q = 13$ となる．このように需要の定数項が倍増したことによって，価格と生産量は倍近く増える．さらに，マークアップ率は,

$$\mathcal{M} = 13/2$$

となる．

- 次に，価格が硬直的であり，変更できない場合を考える．このとき，企業は，$p = 7$ から変更できない．したがって生産量のみを選ぶ次のような最大化問題を考える．

$$\begin{aligned} &\max_q 7q - 2q \\ &\quad \text{s.t.} q \leq 17 \end{aligned}$$

この最適化問題の目的関数を見ると q は多ければ多いほど単調に良いことが分かる．したがって，生産量は，

$$q = 17$$

と需要を満たす限界まで生産することが最適になる．このときマークアップ率は，

$$\mathcal{M} = \frac{7}{2}$$

であり，元々の状態から変化していない．

コメントおよび問題の主旨：まず基本的な独占の問題では，最適な価格を選ぶような最大化問題と最適な生産量を選ぶような最大化問題の二通りの解き方がある．どちらで解いても同じ解なので，そのことを確認してほしい．以下では，片方の解き方のみ解説しているが，別にどちらで解いても問題ない．計算上，解きやすいと思った方で解けばよい．

また，最後の二つの問題は柔軟価格と硬直価格の場合で，どのように生産量とマークアップ率が変わるか確認してもらった．

1.3　独占の計算問題２

- 限界費用は q
- 企業の最大化問題は，

$$\max_q (12-q)q - \frac{1}{2}q^2$$

  である．
- 一階条件は，

$$\begin{aligned} 12 - 2q &= q \\ \Rightarrow q &= 4 \end{aligned}$$

  であり，最適な生産量が求まる．需要関数より $p = 12 - 4 = 8$ と価格も求まる．さらにマークアップ率は，

$$\begin{aligned} 8 &= \mathcal{M}4 \\ \Rightarrow \mathcal{M} &= 2 \end{aligned}$$

  と求まる．
- 需要の価格弾力性は問題１と同様に

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{dq(p)}{dp}\frac{p}{q} \\ &= -(-1) * p/q \\ &= 8/4 = 2 \end{aligned}$$

  と求まる．したがって，

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu-1} &= \frac{2}{2-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

  となる．これはマークアップ率に一致している．

- さらに需要が急増したケースを考える．まず価格が変えられる場合，最大化問題は

$$\max_q \ (24-q)q - \frac{1}{2}q^2$$

であるので，一階条件は,

$$\begin{aligned} 24-2q &= q \\ \Rightarrow q &= 8 \end{aligned}$$

であり，最適な生産量が求まる．さらに，価格は，$p = 24-8 = 16$ と求まる．マークアップ率は,

$$\mathcal{M} = \frac{16}{8} = 2$$

となる．したがって，需要は変化したがマークアップ率は変化していない.
次に価格が変化しないときを考える．$p = 8$ と固定されているので，価格を固定された元の最大化問題を考える.

$$\begin{aligned} &\max_q \ 8q - q^2/2 \\ &\text{s.t. } q \leq 24-8 = 16 \end{aligned}$$

このとき最適な生産量は 8 となることが分かる．マークアップ率は，$\mathcal{M} = p/mc = 8/8 = 1$ となる.

コメントおよび問題の主旨：限界費用が q であり，図示した際に正の傾きを持つパターンである．このとき，需要が変化しても，価格が変化できるとき，マークアップ率は変化しないことが分かる．また，価格が硬直的な時，最適な生産量を解くために，ちゃんと最適化問題を定式化しないと答えを間違ってしまう問題でもある.

1.4　独占の計算問題３

- 企業の最大化問題は

$$\max_q \ 12\sqrt{q} - 2q$$

である.

- 一階条件は

$$\begin{aligned} 6/\sqrt{q} &= 2 \\ \Rightarrow q &= 9 \end{aligned}$$

であり，最適な生産量が求まる．さらに最適な価格は，$p = 12/\sqrt{9} = 4$ と求まる．マークアップ率は,

$$\mathcal{M} = 4/2 = 2$$

である.

- つぎに需要の価格弾力性は，まず需要関数は,

$$q = 144/p^2$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\mu &= -\left(-288p^{-3}\right)\frac{p}{q} \\ &= \frac{288}{4^3}\times\frac{4}{9} \\ &= 2\end{aligned}$$

である．次に

$$\frac{\mu}{\mu-1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

と，マークアップ率に一致することが分かる．

- 次に需要が増える場合を考える．まず価格が変えられる場合，

$$\max_q \ 24\sqrt{q} - 2q$$

を解けば良い．この解は，

$$\begin{aligned}&12q^{-\frac{1}{2}} = 2 \\ &\Rightarrow \ q = 36\end{aligned}$$

と最適な生産量が求まる．さらに価格は，$24/6 = 4$ と求まる．つまり，価格は変わっていない．さらにマークアップ率は，$p/mc = 4/2 = 2$ とマークアップ率も変わっていない．

価格が変えられる場合に需要が増えたとしても，最適な価格が 4 から変わらないことを確認した．「価格を変えられるにもかかわらず，価格を変えない」のだから，価格を変えられない状況でも同じ生産量を選ぶはずである．したがって，$q = 36$ が解である．

念のため，丁寧にこのことを数式を使って確認しておく．まず，価格が 4 で固定されたとき，最適な生産量を選ぶ最適化問題は，

$$\begin{aligned}&\max_q \ 4q - 2q \\ &\quad \text{s.t. } q \leq (24/4)^2 = 36\end{aligned}$$

である．この目的関数は q に関する単調増加関数であり，q は多ければ多いほど良い．したがって，制約いっぱいまで q を増やす．その上限が 36 なので生産量は 36 である．これは先で議論したとおりである．

コメントおよび問題の主旨：　この問題は，非線形な需要関数のケースの問題である．また，この問題も，2 つ目と同様に，需要が変わっても価格が変えられるならマークアップ率は変わらない問題となっている．

2　2 期間 NK モデル：粘着価格による AS 曲線

2.1　家計：

- 予算制約は，

$$\begin{aligned}p_1^a c_1^a + p_1^b c_1^b + s &= y_1 \\ p_2^a c_2^a + p_2^b c_2^b &= y_2 + (1+i)s\end{aligned}$$

である．

- この効用関数の二段目は CES 型関数である．この問題では時点 t は重要ではないため，$t = 1, 2$ の表記は省略する．
  代替の弾力性を e と書くと，一般的な定義は

$$e = \frac{\frac{d(c^a/c^b)}{c^a/c^b}}{\frac{d(c_b/c_a)}{c_b/c_a}} = \frac{d(c^a/c^b)}{d(c_b/c_a)} \frac{c_b/c_a}{c^a/c^b}$$

  なお，下付きのインデックスで書いている c_a は CES 型関数を c^a について偏微分したものである．c^a と c_a の区別に注意して欲しい．問題文のＣＥＳ型関数の場合の，これのひとつひとつの要素を次のように計算する．まず c_a と c_b は,

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{1}{\epsilon} \left[(c^a)^\epsilon + (c^b)^\epsilon\right]^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} \epsilon (c^i)^{\epsilon - 1} \\ &= \left[(c^a)^\epsilon + (c^b)^\epsilon\right]^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} (c^i)^{\epsilon - 1}, \qquad i = a, b \end{aligned}$$

  である．したがって,

$$c_b/c_a = (c^b/c^a)^{\epsilon-1} = (c^a/c^b)^{1-\epsilon}$$

  である．s これを c^a/c^b で微分すると,

$$\frac{d(c_b/c_a)}{d(c^a/c^b)} = (1-\epsilon)(c^a/c^b)^{-\epsilon}$$

  である[*1]．
  また，$\frac{c_b/c_a}{c^a/c^b}$ は次のように計算できる．

$$\frac{c_b/c_a}{c^a/c^b} = \frac{(c^a/c^b)^{1-\epsilon}}{(c^a/c^b)} = (c^a/c^b)^{-\epsilon}$$

  これらを使うと,

$$e = \frac{d(c^a/c^b)}{d(c_b/c_a)} \frac{c_b/c_a}{c^a/c^b} = \frac{(c^a/c^b)^\epsilon}{1-\epsilon} (c^a/c^b)^{-\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}$$

  と計算できる．
- 最大化問題は,

$$\begin{aligned} \max_{c_1^a, c_1^b, c_2^a, c_2^b, s} \; & \sum_{t=1}^{2} \beta^{t-1} \log\left(\left[(c_t^a)^\epsilon + (c_t^b)^\epsilon\right]^{1/\epsilon}\right) \\ \text{s.t.} \;\; & p_1^a c_1^a + p_1^b c_1^b + s = y_1 \\ & p_2^a c_2^a + p_2^b c_2^b = y_2 + (1+i)s \end{aligned}$$

  である．
  目的関数は対数の性質と，単調変換が可能なことから

$$\begin{aligned} &\max \frac{1}{\epsilon} \log(\left[(c_1^a)^\epsilon + (c_1^b)^\epsilon\right]) + \beta \frac{1}{\epsilon} \log(\left[(c_2^a)^\epsilon + (c_2^b)^\epsilon\right]) \\ \Leftrightarrow &\max \log(\left[(c_1^a)^\epsilon + (c_1^b)^\epsilon\right]) + \beta \log(\left[(c_2^a)^\epsilon + (c_2^b)^\epsilon\right]) \end{aligned}$$

[*1] c^a/c^b を一つの変数として見なすと分かりやすいだろう．

と $1/\epsilon$ は無視して良い．
(※本問の解答例ではラグランジュ未定乗数法を使うことを許してほしい[*2]．代入法を用いても解答が合っていれば良い．もしラグランジュ未定乗数法が分からなくても，意欲のある学生はラグランジュ未定乗数法のスライドを読んでみてほしい．)
ラグランジュ関数は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\log(\left[(c_1^a)^\epsilon + (c_1^b)^\epsilon\right]) + \beta\log(\left[(c_2^a)^\epsilon + (c_2^b)^\epsilon\right]) \\ &+ \lambda_1\left[y_1 - p_1^a c_1^a - p_1^b c_1^b - s\right] \\ &+ \lambda_2\left[y_1 + (1+i)s - p_2^a c_2^a - p_2^b c_2^b\right]\end{aligned}$$

である．
この一階の条件は，

$$\begin{aligned}c_1^a &: \frac{\epsilon(c_1^a)^{\epsilon-1}}{(c_1^a)^\epsilon + (c_1^b)^\epsilon} = p_1^a\lambda_1 \\ c_1^b &: \frac{\epsilon(c_1^b)^{\epsilon-1}}{(c_1^a)^\epsilon + (c_1^b)^\epsilon} = p_1^b\lambda_1 \\ c_2^a &: \beta\frac{\epsilon(c_2^a)^{\epsilon-1}}{(c_2^a)^\epsilon + (c_2^b)^\epsilon} = p_2^a\lambda_2 \\ c_2^b &: \beta\frac{\epsilon(c_2^b)^{\epsilon-1}}{(c_2^a)^\epsilon + (c_2^b)^\epsilon} = p_2^b\lambda_2 \\ s &: \lambda_1 = (1+i)\lambda_2\end{aligned}$$

である．
したがって，これをまとめると，以下のようになる．なお，下 2 つの式では $c_t^\epsilon = \left[(c_t^a)^\epsilon + (c_t^b)^\epsilon\right]$ であることを使って整理している．

$$\frac{(c_1^a)^{\epsilon-1}}{p_1^a} = \frac{(c_1^b)^{\epsilon-1}}{p_1^b} \qquad \text{(1 期の } a \text{ と } b \text{ の代替)} \tag{2.1}$$

$$\frac{(c_2^a)^{\epsilon-1}}{p_2^a} = \frac{(c_2^b)^{\epsilon-1}}{p_2^b} \qquad \text{(2 期の } a \text{ と } b \text{ の代替)} \tag{2.2}$$

$$\frac{(c_1^a)^{\epsilon-1}}{c_1^\epsilon}\frac{1}{p_1^a} = \beta(1+i)\frac{(c_2^a)^{\epsilon-1}}{c_2^\epsilon}\frac{1}{p_2^a} \tag{2.3}$$

$$\frac{(c_1^b)^{\epsilon-1}}{c_1^\epsilon}\frac{1}{p_1^b} = \beta(1+i)\frac{(c_2^b)^{\epsilon-1}}{c_2^\epsilon}\frac{1}{p_2^b} \tag{2.4}$$

が得られる．さらに，上二本の式を使って，下二本の式を次のように変形する．
t 期の a と b の代替関係より，$t = 1, 2$ について

$$(c_t^a)^\epsilon = \left(\frac{p_t^a}{p_t^b}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}(c_t^b)^\epsilon$$

[*2] ここでラグランジュ未定乗数法を使う理由は単にその方が私が慣れており少ない計算で済むからであり，特段深い理由があるわけではない．

を得る．これを例えば (2.4) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{(c_1^b)^{\epsilon-1}}{(c_1^b)^{\epsilon}\left[\left(\frac{p_1^a}{p_1^b}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+1\right]}\frac{1}{p_1^b}=\beta(1+i)\frac{(c_2^b)^{\epsilon-1}}{(c_2^b)^{\epsilon}\left[\left(\frac{p_2^a}{p_2^b}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+1\right]}\frac{1}{p_2^b}\\
&\Rightarrow \frac{1}{c_1^b}\frac{1}{\left[\frac{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right]}\frac{1}{p_1^b}=\beta(1+i)\frac{1}{c_2^b}\frac{1}{\left[\frac{(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right]}\frac{1}{p_2^b}\\
&\Rightarrow \frac{1}{c_1^b}\frac{(p_1^b)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}=\beta(1+i)\frac{1}{c_2^b}\frac{(p_2^b)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}
\end{aligned}
$$

これが b 財に関する 1 期と 2 期の代替である．同様に計算することで a 財に関する 1 期と 2 期の代替も求まる．

解答例の見やすさのためにまとめると，一階の条件は，

$$
\frac{(c_1^a)^{\epsilon-1}}{p_1^a}=\frac{(c_1^b)^{\epsilon-1}}{p_1^b} \tag{1 期の a と b の代替}
$$

$$
\frac{(c_2^a)^{\epsilon-1}}{p_2^a}=\frac{(c_2^b)^{\epsilon-1}}{p_2^b} \tag{2 期の a と b の代替}
$$

$$
\frac{1}{c_1^a}\frac{(p_1^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}=\beta(1+i)\frac{1}{c_2^a}\frac{(p_2^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}} \tag{1 期と 2 期の a の代替}
$$

$$
\frac{1}{c_1^b}\frac{(p_1^b)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}=\beta(1+i)\frac{1}{c_2^b}\frac{(p_2^b)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}+(p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}} \tag{1 期と 2 期の b の代替}
$$

である．

-

$$
\begin{aligned}
&\min_{c_1^a,c_1^b}\ p_1^a c_1^a + p_1^b c_1^b\\
&\text{s.t.}\ \left[(c_1^a)^{\epsilon}+(c_1^b)^{\epsilon}\right]^{1/\epsilon}=c_1
\end{aligned}
$$

という最小化問題を考える．これは 1 期目の効用を所与とした，支出最小化問題になっている．つまり「1 期に c_1 という効用を達成したい．そのために，一番支出が最小になるような c_1^a と c_1^b の組み合わせはどのようなものだろう」というのがここで考えたい問題である．

この最小化問題は

$$
\min_{c_1^b}\ p_1^a(c_1^{\epsilon}-(c_1^b)^{\epsilon})^{1/\epsilon}+p_1^b c_1^b
$$

であり，一階条件は，

$$
\begin{aligned}
&p_1^a\left(c_1^{\epsilon}-(c_1^b)^{\epsilon}\right)^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}(c_1^b)^{\epsilon-1}=p_1^b\\
&\Rightarrow p_1^a\left(c_1^a\right)^{1-\epsilon}(c_1^b)^{\epsilon-1}=p_1^b
\end{aligned}
$$

であり，これを整理すると，

$$
\frac{(c_1^a)^{\epsilon-1}}{p_1^a}=\frac{(c_1^b)^{\epsilon-1}}{p_1^b}
$$

を得る．これが一階条件である．これは小問 3 の一つ目の一階条件と一致することを確認してい欲しい．

次に物価 P_1 を求めよう．一階条件より，

$$(c_1^a)^\epsilon = \left(\frac{p_1^a}{p_1^b}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} (c_1^b)^\epsilon$$

であり，これを CES 型関数に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{p_1^a}{p_1^b}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + 1\right](c_1^b)^\epsilon = c_1^\epsilon \\
&\Rightarrow \left(\frac{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} c_1^b = c_1 \\
&\Rightarrow c_1^b = \left(\frac{(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} c_1
\end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．同様に，c_1^a も，

$$c_1^a = \left(\frac{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} c_1 \tag{2.6}$$

と得られる．これを $p_1^a c_1^a + p_1^b c_1^b$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\left[p_1^a\left(\frac{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} + p_1^b\left(\frac{(p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}\right] c_1 \\
&= \frac{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{\left[(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}} c_1 \\
&= \underbrace{\left[(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}_{\equiv P_1} c_1
\end{aligned}$$

となる．この c_1 の前の項が 1 期の物価である．つまり，

$$P_1 = \left[(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \tag{2.7}$$

と定義できる．

なお，代替の弾力性を使った物価の定義は

$$P_1 = \left[(p_1^a)^{1-e} + (p_1^b)^{1-e}\right]^{\frac{1}{1-e}}$$

とであり，$e = 0$ のとき，$P_1 = p_1^a + p_1^b$ となる．$e = 0$ のケースとは，a と b 財が完全に補完的であり，集計関数がレオンチェフ型のときである．

さらに，これは，

$$P_1^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} = (p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

なので，(2.6) と (2.5) に代入すると

$$c_1^a = \left(\frac{p_1^a}{P_1}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c_1$$
$$c_1^b = \left(\frac{p_1^b}{P_1}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c_1$$

となる．

コメント及び問題の主旨：CES 型の効用関数から導かれる物価は CES 型である．これは (特に授業で教えられることはあまりないが，少しレベルが上がったマクロ経済学では，あたかも皆知ってるかのように) 非常によく使われる関係なので，覚えておくと良いと思う．

- これは上の問題とほぼ同じである．この最小化問題の一階条件は，

$$\frac{(c_2^a)^{\epsilon-1}}{p_2^a} = \frac{(c_2^b)^{\epsilon-1}}{p_2^b}$$

であり，これはやはり小問 2 の一階の条件と同じである．物価は

$$P_2 = \left[(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \tag{2.8}$$

と定義できる．

-

$$\begin{aligned} \max\ & \log(c_1) + \beta\log(c_2) \\ \text{s.t. } & P_1c_1 + s = y_1 \\ & P_2c_2 = y_2 + (1+i)s \end{aligned}$$

という最大化問題は，２期間の家計の問題等で，繰り返し解いてきた最大化問題である．この一階条件は，

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{P_1}{P_2}\frac{1}{c_2} \tag{2.9}$$

である．

これを小問 2 と比較するために，a 財に関する異時点間の代替条件と b 財に関する異時点間の代替条件に分割しよう．(2.9) に (2.6) を代入し，その後，物価の定義 (2.7) と (2.8) を代入すると，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c_1^a}\frac{(p_1^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{\left[(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}} = \beta(1+r)\frac{P_1}{P_2}\frac{1}{c_2^a}\frac{(p_2^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{\left[(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{c_1^a}\frac{(p_1^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{\left[(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}} = \beta(1+r)\frac{\left[(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}{\left[(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}\frac{1}{c_2^a}\frac{(p_2^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{\left[(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}\right]^{\frac{1}{\epsilon}}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{c_1^a}\frac{(p_1^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_1^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_1^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2^a}\frac{(p_2^a)^{\frac{1}{\epsilon-1}}}{(p_2^a)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} + (p_2^b)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}
\end{aligned}$$

と計算できる．これは，小問 2 の 1 期と 2 期の a 財の代替条件と全く同じである．なお，同様に b 財に関しても小問 2 の代替条件が求まる．

これらの結果は，次のようなことを意味している．小問 2 は $c_1^a, c_1^b, c_2^a, c_2^b$ を一度の最大化問題で解くという問題であった．一方，小問 3-5 は次のように最大化問題を分割して解く方法だった．つまり，小問 3 は 1 期のみの問題で c_1^a, c_1^b を解き，小問 4 は 2 期のみの問題で c_2^a, c_2^b を解き，小問 5 が 1 期と 2 期の代替条件を求める問題であった．そして，**前者のように一括で解く方法と，後者のように分割して解く方法の解は同じである**ことを示している[*3]．

- この問いに答えるには，次の最小化問題を解くのが一番楽だと思う．$t = 1, 2$ について

$$\min_{\{c_t^i\}_{i=1}^N} \sum_{i=1}^N p_i c_t^i$$
$$\text{s.t. } c_t = \left[\sum_{i=1}^N (c_t^i)^\epsilon\right]^{\frac{1}{\epsilon}}$$

という最小化問題を考える．これは小問 4 や 5 で考えたものと本質的には同じである．ただ単に，財の数が N 個になっただけである．以降，下付きの t は特に結果に影響しないので，省略する (t がついているものと見なせばよい)．
これは，制約式を例えば $c^1 = [c^\epsilon - \sum_{i=2}^N (c^i)^\epsilon]^{1/\epsilon}$ として，代入すると，

$$\min_{\{c^i\}_{i=2}^N} \ p^1 \left[c^\epsilon - \sum_{i=2}^N (c^i)^\epsilon\right]^{\frac{1}{\epsilon}} + \sum_{i=2}^N p^i c^i$$

と書ける．この一階条件は，$j = 2, \ldots, N$ について，

$$p^1 \left[c^\epsilon - \sum_{i=2}^N (c_t^i)^\epsilon\right]^{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} (c^j)^{\epsilon-1} = p^j$$
$$\Rightarrow p^1 (c^1)^{1-\epsilon} (c^j)^{\epsilon-1} = p^j$$
$$\Rightarrow c^1 = \left(\frac{p^1}{p^j}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c^j$$

となる．これはやはり，本質的には a, b と 2 財しかなかったときと同じである．これは 1 と j 財だけでなく，任意の j と $k \neq j$ 財に対して成り立つ．したがって，

$$c^k = \left(\frac{p^k}{p^j}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c^j$$

[*3] このことは家計の労働のスライドの補足にも書いている．家計の 2 期間の労働の問題も分割して解いても良い．

である．これを CES 型関数に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c &= \left[(c^j)^\epsilon + \sum_{i\neq j} \left(\frac{p^i}{p^j}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} (c^j)^\epsilon \right]^{\frac{1}{\epsilon}} \\
&= c^j \left[1 + \sum_{i\neq j} \left(\frac{p^i}{p^j}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{\frac{1}{\epsilon}} \\
&= c^j \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p^i}{p^j}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{\frac{1}{\epsilon}}
\end{aligned}
$$

となる．すると，任意の $j = 1, \dots, N$ について

$$
\begin{aligned}
c^j &= c \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p^i}{p^j}\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{-\frac{1}{\epsilon}} \\
&= c (p^j)^{\frac{1}{\epsilon-1}} \left[\sum_{i=1}^{N} (p^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{-\frac{1}{\epsilon}}
\end{aligned}
$$

と求められる．これを最小化問題の目的関数 $\sum_j p^j c^j$ に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_j p^j c^j &= c \sum_{j=1}^{N} (p^j)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \left[\sum_{i=1}^{N} (p^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{-\frac{1}{\epsilon}} \\
&= c \frac{\sum_{i=1}^{N} (p^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}}{\left[\sum_{i=1}^{N} (p^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{\frac{1}{\epsilon}}} \\
&= c \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{N} (p^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}}_{\equiv P}
\end{aligned}
$$

と出来る．つまり，

$$
P_t = \left[\sum_{i=1}^{N} (p_t^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}
$$

である．これはやはり，a, b 財しかないときと同じ関数形である．
これを使うと，任意の $i = 1, \dots, N$ について

$$
c_t^i = \left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c_t
$$

と需要関数が求まる．

- この計算は，上記の問題の和と積分を入れ替えて行うだけである．したがって，細かい解説は省略するが，

$$
\begin{aligned}
P_t &= \left[\int_0^1 (p_t^i)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} \, di \right]^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \\
c_t^i &= \left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c_t \qquad \forall\, i \in [0,1]
\end{aligned}
$$

となる．

問題の主旨およびコメント：基本的なケースでは，静学的な選択 (t 期内で a か b か) と動学的な選択 (t 期と $t+1$ 期) は分割して解くことができることを確認してもらう問題であった．CES 型のせいで計算量が多く，面倒だと感じやすいだろうが，この結果は NK モデル等でよく使うので，少しレベルが上がると頻出になる．なお，この結論は 2 期間のみならず，一般に T 期間や無限期間に拡張しても成り立つし，さらに財の数が 2 つではなく N 個や財の種類が無数にあっても成り立つ．

2.2　企業：独占的競争と粘着価格

- 答えは二種類ありえる．
  １つ目としては次の最大化問題が考えられる．2 期間あるので，
$$\begin{aligned}\max_{D_1,D_2,y_1,y_2,H_1,H_2,p_1,p_2}\ & D_1+\frac{D_2}{1+r}\\ & D_t=p_ty_t-w_tH_t, && t=1,2\\ & y_t=A_tH_t, && t=1,2\\ & y_t=y(p_t), && t=1,2\end{aligned}$$
  と 2 期間を通じた問題を書くのも一つである．
  もう一つの答えは，この最大化問題は今期の利潤と来期の利潤にはトレードオフがなく，それぞれ個別に最大化すれば良いため，それぞれ静学的な利潤最大化として書いてもよい[*4]．したがって，$t=1,2$ について
$$\begin{aligned}\max_{D_t,y_t,H_t,p_t}\ & D_t\\ & D_t=p_ty_t-w_tH_t\\ & y_t=A_tH_t\\ & y_t=y(p_t)\end{aligned}$$
  と書いてもよい．(1) 目的関数，(2) 制約式に $t=1,2$ と書いていないところ，(3)max オペレータの下の変数の数が変化している．
- 以下，さきほどの解答例の後者の解答例に基づいて解答する．最大化問題を整理すると，
$$\max_{p_t} p_ty(p_t)-\frac{w_t}{A_t}y(p_t)$$
  と書くことができる．この一階の条件は，
$$\begin{aligned}p_ty'(p_t)+y(p_t)&=\frac{w_t}{A_t}y'(p_t)\\ \Rightarrow p_t\left[1+\underbrace{\frac{1}{y'(p_t)}\frac{y(p_t)}{p_t}}_{-1/e}\right]&=w_t\\ \Rightarrow p_t&=\frac{e}{e-1}\frac{w_t}{A_t}\end{aligned}$$

*4 もっと簡単に静学的な問題として解いてよいという判定する条件は状態変数の有無である．状態変数がないならば静学的な最大化として書き換えてよい．なお状態変数とは，前期から今期，今期から来期にかけて影響する変数である．例えば，これまで学んだ経済モデルだと貯めるような変数 (資本や貯蓄) は状態変数である．

である．w/A に対してのマークアップ率は $e/(e-1)$ である．

- まず，

$$c_t^i = c(p_t^i, P_t, c_t) = \left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} c_t$$

である．ここで 1 期と 2 期で関数形が変わらないので，t は落として記述する．
例えば，i 財の価格弾力性 e_i は，以下のようになる．

$$\begin{aligned} e_i \equiv -\frac{dc^i}{dp^i}\frac{p^i}{c^i} &= -\underbrace{\frac{1}{\epsilon-1}\left(\frac{p^i}{P}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}-1}\frac{1}{P}c}_{=dc^i/dp^i} p^i \underbrace{\left(\frac{p^i}{P}\right)^{-\frac{1}{\epsilon-1}}\frac{1}{c}}_{=c^i} \\ &= \frac{1}{1-\epsilon} \end{aligned}$$

つまり，価格弾力性は $1/(1-\epsilon)$ である．これは $1, 2$ 期の a, b 財，すべての財に関して成り立つ．さらに代替の弾力性は前問で確かめたように，やはり $1/(1-\epsilon)$ である．このように CES 型関数の下では価格弾力性と代替の弾力性が一致する．
したがって，w/A に対してのマークアップは

$$\begin{aligned} \frac{e}{e-1} &= \frac{\frac{1}{1-\epsilon}}{\frac{1}{1-\epsilon}-1} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

となる．

- 2 期目に価格を変えられない企業の最大化問題を考える．この企業の特徴は 1 期目に決めた価格を，来期も同じものにしなければならないということである．したがって，最大化問題は，

$$\begin{aligned} \max_{D_1,D_2,y_1,y_2,H_1,H_2,p} \quad & D_1 + \frac{D_2}{1+r} \\ \text{s.t.} \quad & D_t = py_t - w_tH_t \qquad\qquad t = 1, 2 \\ & y_t = A_tH_t \\ & y_t = y(p) \end{aligned}$$

と書くことができる．ここで p に時間のインデックスがついていないことに注意してほしい．

- この最大化問題を変形すると，

$$\max \; py(p) - \frac{w_1}{A_1}y(p) + \frac{py(p) - \frac{w_2}{A_2}y(p)}{1+r}$$

となる．したがって，一階条件は，

$$\begin{aligned} & y(p) + py'(p) - \frac{w_1}{A_1}y'(p) + \frac{y(p) + py'(p) - \frac{w_2}{A_2}y'(p)}{1+r} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{2+r}{1+r}[y(p) + py'(p)] = \left[\frac{w_1}{A_1} + \frac{1}{1+r}\frac{w_2}{A_2}\right]y'(p) \\ \Rightarrow & \frac{2+r}{1+r}p\left[\frac{1}{y'(p)}\frac{y(p)}{p} + 1\right] = \left[\frac{w_1}{A_1} + \frac{1}{1+r}\frac{w_2}{A_2}\right] \\ \Rightarrow & p = \frac{e}{e-1}\frac{1+r}{2+r}\left[\frac{w_1}{A_1} + \frac{1}{1+r}\frac{w_2}{A_2}\right] \end{aligned}$$

となる．

もし仮に $r=0$ ならば，

$$p=\frac{e}{e-1}\frac{1}{2}\left[\frac{w_1}{A_1}+\frac{w_2}{A_2}\right]$$

と出来る．このように，$r=0$ の場合，今期と来期の賃金の平均にマークアップを乗せた価格をつけることが分かる．$r>0$ であっても，割引価値のもとで今期と来期の平均にマークアップを乗せて価格をつけている．

- 価格が変えられる場合と変えられない場合，それぞれをまず整理しよう．まず来期に価格が変えられる場合は，来期に最適な価格をつけるので今期は来期のことを考慮する必要はない．一方，企業は来期に価格を変更できない場合は，今期つけた価格を来期も維持することを意味する．これを考慮すると，最大化問題は次のとおりである．

$$\begin{aligned}\max_{D_1,D_2,y_1,y_2,H_1,H_2,p}\ & D_1+\theta\frac{D_2}{1+r}\\ \text{s.t. }& D_t=py_t-w_tH_t && t=1,2\\ & y_t=A_tH_t\\ & y_t=y(p)\end{aligned}$$

このように，目的関数に θ が入っている．これは θ の確率で，今期と同じ価格を維持しなければいけないためである．

- 解法は小問 5 と大差なくて，θ がついているだけである．一階条件は，

$$y(p)+py'(p)-\frac{w_1}{A_1}y'(p)+\theta\frac{y(p)+py'(p)-\frac{w_2}{A_2}y'(p)}{1+r}=0$$

であり，$r=0$ とすると，

$$p=\frac{e}{e-1}\frac{1}{1+\theta}\left[\frac{w_1}{A_1}+\theta\frac{w_2}{A_2}\right]$$

となる．価格が変えられない確率 θ を加味した，今期と来期の賃金の加重平均にマークアップを乗せて価格を付ける．

2.3 一般均衡へ

- 財市場の均衡条件は

$$\begin{aligned}c_t^i&=y_t^i && t=1,2\ \&\ i\in[0,1]\\ c_t&=Y_t && t=1,2\end{aligned}$$

である．各財 $i\in[0,1]$ に対しても均衡条件を課すことに注意してほしい．もしこの条件がなければ，各財 i に関して不均衡が起きうる[*5]．

なお，正確にいえば，前者が成り立つならば，後者が成り立つので，後者を省略して書いても良い (が省略しない方が間違い防止や解釈しやすいため良い)．

[*5] つまり作られていない財が消費されるような事態が生じる．

労働市場の均衡条件も

$$\begin{aligned} h_t^i &= H_t^i & t = 1,2 \ \&\ i = [0,1] \\ h_t &= H_t & t = 1,2 \end{aligned}$$

である．

- 予算制約は,

$$\begin{aligned} P_1 c_1 + s &= w_1 h_1 + d_1 \\ P_2 c_2 &= w_2 h_2 + d_2 + (1+i)s \end{aligned}$$

である．家計は企業を所有しているため，配当を受け取ることを忘れないこと．

- 家計の最大化問題はすでに 2.1 で解いた．ここでは，労働が増えているだけである．オイラー方程式は

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+i)\frac{P_1}{P_2}\frac{1}{c_2}$$

である．

フィッシャー方程式より，名目金利は,

$$1 + r = \frac{1+i}{1+\pi}$$

であり，ここでインフレ率 π は

$$\pi \equiv \frac{P_2 - P_1}{P_1}$$

である．

したがって，実質利子率を使うとオイラー方程式は,

$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2}$$

となる．これは通常のオイラー方程式となっている．

さらに，消費と労働の一階条件より，消費と労働の代替条件は

$$\frac{w_t/P_t}{c_t} = \frac{B}{h_t}, \quad t = 1,2$$

となる．

- 価格が柔軟に変えられるとき，企業の最大化問題は動学的なものと静学的なものの二種類あることはすでに 2.2 で解説した．ここでは動学的に最大化問題を書くことにする．

$$\begin{aligned} \max_{d_1,d_2,y_1,y_2,H_1,H_2,p_1,p_2} \quad & d_1 + \frac{d_2}{1+r} \\ \text{s.t.} \quad & d_t = p_t y_t - w_t H_t, & t = 1,2 \\ & y_t = A_t H_t, & t = 1,2 \\ & y_t = \left(\frac{p_t}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon - 1}} Y_t, & t = 1,2 \end{aligned}$$

価格弾力性を e とすると，

$$p_t = \frac{e}{e-1}\frac{w_t}{A_t}$$

である．なお $e/(e-1) = 1/\epsilon$ を使ってマークアップを書いても良い．ここで右辺の変数は企業間で共通の変数である．したがって，もし価格が柔軟に変えられるならば，すべての企業は同じ価格をつけることが分かる．

- 労働市場の集計条件を考える．集計のために個別企業のインデックス i を丁寧につけて議論すると，

$$\begin{aligned} H_t &= \int_0^1 H_t^i di \\ &= \int_0^1 \frac{y_t^i}{A_t} di \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} Y_t}_{=y_t^i} \frac{1}{A_t} di \\ &= \frac{Y_t}{A_t} \int_0^1 \left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} di \end{aligned}$$

となる．したがって，集計的な生産関数を考えると，

$$Y_t = A_t H_t \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{p_t^i}{P_t}\right)^{\frac{1}{\epsilon-1}} di}_{\equiv \Delta(p_t^i, P_t)}$$

となる．もし仮に何らかの粘着性や硬直性の結果，すべての企業が同じ価格をつけるのではないという場合，つまり $p_t^i \neq p_t$ となる場合，$\Delta(p_t^i, P_t)$ のせいで $Y_t \neq A_t H_t$ となることが分かる．したがって，価格の散らばり度合い $\Delta(p_t^i, P_t)$ が，生産に影響を及ぼすことを表している．言い換えると，価格の粘着性が実体経済に影響を与えることを意味している．
一方，仮に，すべての企業が柔軟に価格を変えられる場合，これらの企業は同じ価格をつけ $p_t^i = p_t$ となる．すると，

$$Y_t = A_t H_t$$

となる．このようにすべての企業が柔軟に価格を変えられる場合，ここの価格は実体経済には影響を与えないようになる．