基礎マクロ練習問題の**解答例**：労働時間

日野将志 *

1　静学的なモデル

1.1

全ての場合で，

$$(c, l, h) = \left(\frac{w}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる．

コメントおよび問題の主旨：「効用関数を単調増加変換をしても解が変わらない」という特徴がある．これは経済学的には，「選好は順番のみに意味があるのであって，選好の値 $u(c)$ 自体には意味がない」ということを意味している．もっと平たく言えば「ミカンよりリンゴが好き」という順番には意味があるが，「ミカンの好きさが 1 で，リンゴの好きさが 2」のような数字には意味がないという意味である．これを選好の序数性と言います．数学的にいうと，これは，$u(\cdot)$ を元々の効用関数としてこの解を x^* とする．このとき，別の関数 g をつかって，効用関数を $g \circ u(\cdot)$ としなおしても，この解は元の解と同じ x^* ということである．

より具体的に，元々の関数が $u(c, l) = \log c + \log l$ であるとき，ふたつめの効用関数は，$g(x) = \frac{1}{2}x$ であり，$g \circ u = \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2}\log l$ となっている．これは $g(x) = 5x$ のときも，$g(x) = \alpha x$ のときも，$g(x) = x + 5$ のときも変わらないことをそれぞれ確認することがこの問題の趣旨である．

1.2　様々な効用関数

1.2.1　対数効用

$$\max_{c,l} \ \alpha \log(c) + (1-\alpha)\log(l)$$
$$\text{s.t. } c = w(1-l)$$

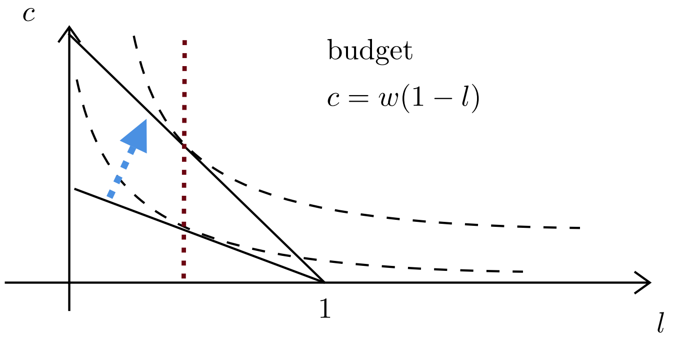
が最適化問題である．

予算制約を目的関数に代入すると、

$$\max_{l} \alpha \log(w(1-l)) + (1-\alpha)\log(l)$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください．

図 1.1　賃金の増加：対数・コブダグラス型・Hansen・Rogerson 型の場合



を得る．次に、これを微分して 0 を求めると、

$$\alpha\frac{1}{1-l} = (1-\alpha)\frac{1}{l}$$
$$\Rightarrow l = 1-\alpha$$

を得る．これよりただちに、

$$h = \alpha$$

であることも $1 = h + l$ より分かる．

最後に消費は、$c = wh$ なので、

$$c = w\alpha$$

であることが分かる．

問題では要求していないが，これを図に書くと図 1.1 のようになる．このように，賃金 w の上昇によって，$c = w(1-l)$ という予算制約は上にシフトする．ただし，$c = 0$ のとき，$l = 1$ は変化しないため，予算制約はかならず x 軸上の $l = 1$ の点を通る．計算結果より，賃金の上昇は l に影響せず，消費だけ伸びるのが図のようになることが視覚的に理解できるだろう．

1.2.2　コブ・ダグラス型

$$\max_{c,l}\ c^\alpha l^{1-\alpha}$$
$$\text{s.t. } c = w(1-l)$$

これを代入すると、

$$\max_l [w(1-l)]^\alpha l^{1-\alpha}$$

である．これの微分して 0 は

$$\alpha w^\alpha (1-l)^{\alpha-1} l^{1-\alpha} = [w(1-l)]^\alpha (1-\alpha) l^{-\alpha}$$
$$\Rightarrow \alpha l = (1-\alpha) l$$
$$\Rightarrow l = 1-\alpha$$

が得られる．これは先ほどの対数効用の解答と同じである．予算制約は同じなので、(c, l, n) はさきほどと全く同じになる．

このように同じ解になる理由は、コブ・ダグラス型効用を対数を取ると、先ほどの対数効用関数になるからである．効用関数はいかなる単調増加変換をしても解が変わらないという特徴を持っている (詳しくはミクロ経済学で効用関数の序数性という点で習うかなと思います).

1.2.3　準線形：Hansen-Rogerson 型

最大化問題は以下のとおりである.

$$\max_{c,l} \ \log(c) + Bl$$
$$\text{s.t. } c = w(1-l)$$

これまで同様に制約条件を代入する.

$$\max_{l} \log(w(1-l)) + Bl$$

微分して 0 を解くと、次を得る.

$$\frac{1}{1-l} = B$$
$$\Rightarrow l = 1 - \frac{1}{B}$$

したがって,

$$h = \frac{1}{B}$$

である．最後に消費は,

$$c = \frac{w}{B}$$

このように，余暇時間 l や労働時間 h は賃金 w に依存していない．つまり，賃金が変化しても，余暇や労働時間は変化しない．賃金の変化は消費 c に全て反映される.

1.2.4　GHH 型効用関数

最大化問題は以下のとおりである.

$$\max_{c,l} \ \log\left(c - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$$
$$\text{s.t. } c = w(1-l)$$

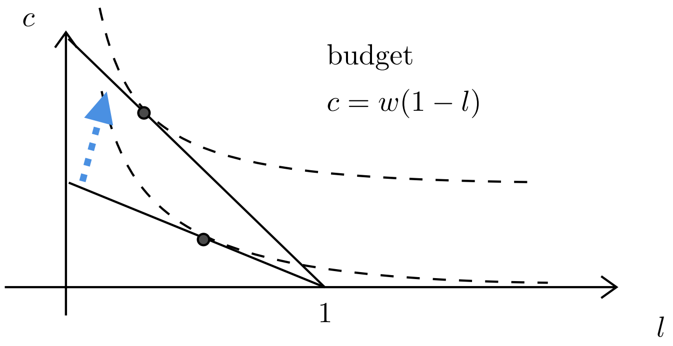
これまで同様に制約条件を代入する.

$$\max_{l} \log\left(w(1-l) - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$$

微分して 0 を解くと、次をえる.

$$\frac{w}{w(1-l) - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}} = \frac{(1-l)^{\eta}}{w(1-l) - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}}$$
$$\Rightarrow w = (1-l)^{\eta}$$
$$\Rightarrow l = 1 - w^{\frac{1}{\eta}}$$

図 1.2 賃金の上昇：GHH の場合



これが余暇時間である．これは対数効用関数やコブ・ダグラス型と違って賃金に依存していることに注目してほしい．

また $h+l=1$ より直ちに労働時間を導くことも出来る．

$$h = w^{\frac{1}{\eta}}$$

最後に $c = wh$ より

$$c = w^{\frac{1+\eta}{\eta}}$$

を得る．

これも問題では要求していないが理解を深めるために図に書くと，図 1.2 のようになる．今回は賃金の上昇によって余暇が減り，消費が増えていることが視覚的に分かる．

コメント及び問題の主旨：まず，労働供給が賃金に依存するような効用関数を紹介することが一つ目の意図である．対数効用関数やコブ・ダグラス型の場合，労働供給が賃金に依存しないのは大きな特徴である．

1.3 慎重に解く問題：加法分離型の凸性の確認

最大化問題は以下のとおりである．

$$\max_{c,h} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} - B\frac{h^{1+\eta}}{1+\eta}$$
$$\text{s.t. } c = wh$$

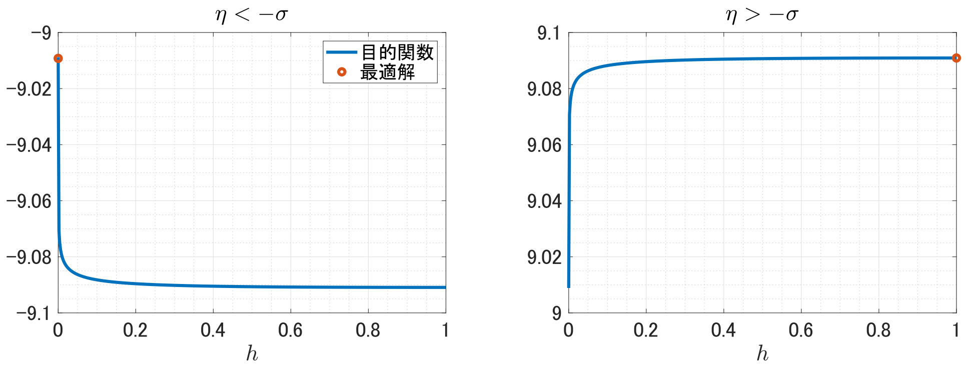
これまで同様に制約条件を代入する．

$$\max_{h} \frac{(wh)^{1-\sigma}}{1-\sigma} - B\frac{h^{1+\eta}}{1+\eta}$$

ここで厳密に問題となるのが，目的関数が上に凸であるかどうかである．つまり，目的関数が上に凸である場合は一階条件が最大化解となるが，下に凸の場合，一階条件は最小化解を求めてしまう (数学補論参考)．

このことを確認するためには，一階の条件のみならず二階の条件も確認すれば良いのであった．まず一階条件は，

$$w^{1-\sigma}h^{-\sigma} - Bh^{\eta} = 0$$
$$\Rightarrow h = \left(\frac{w^{1-\sigma}}{B}\right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}} \tag{1.1}$$



となる．

次に二階の条件は，

$$\underbrace{-\sigma w^{1-\sigma} h^{-\sigma-1}}_{-} \underbrace{-\eta B h^{\eta-1}}_{+}$$

となる．このため，もし第二項が十分に大きいような場合，二階の条件は正となり，目的関数は下に凸の関数となる．すると，一階条件は最小化解となってしまう．一方，第一項の方が絶対値で大きい場合，二階の条件は負となり，目的関数は上に凸となる．このときに，一階条件は最大化問題の解となる．

もし仮に $\eta > 0$ とする．すると，先ほどの二階の条件の第二項は負となる．したがって，$\eta > 0$ のとき，一階条件は最大化問題の解となる．

例えば図は，$w = B = 1$ として，$\eta < -\sigma$ の場合と $\eta > -\sigma$ の場合をそれぞれ描いている．このように，パラメータによっては目的関数の凸の向きが大きく変わってしまうことが分かる．さらに $w = B = 1$ の場合だと，$h = 1$ が解として選ばれている．

もし仮に，一階の条件が最大化解であるとする．つまり，二階の条件が負となるような (w, B, σ, η) というパラメータの組み合わせを仮定したとする．すると消費は，

$$c = w \left(\frac{w^{1-\sigma}}{B} \right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}}$$

と決まる．

最後に，(1.1) より，労働供給関数は w の減少関数になることが分かる．これは，賃金が増えると所得が増えるので，その結果として労働を減らして余暇を増やすような効果 (所得効果) が強く出ているためである[*1]．

1.4　対数効用と逆算：推定的な考え方や経済政策分析

今回の最適化問題は次のようなものである．

$$\max_{c,l} \ \alpha \log c + (1-\alpha) \log l$$
$$\text{s.t. } c = w(1-\tau)(1-l)$$

[*1] 授業では丁寧に説明していないが，一般に，労働供給が w の増加関数になるか減少関数になるかは，**所得効果**と**代替効果**の二つの効果のどちらが大きいかによって決まる．これらの説明は，ミクロ経済学や労働経済学等の授業に譲ることにする．

これを目的関数に代入すると，

$$\max_{l} \; \alpha \log(w(1-\tau)(1-l)) + (1-\alpha)\log l$$

となる．この一階の条件は，

$$\begin{aligned} &-\alpha\frac{1}{1-l} + (1-\alpha)\frac{1}{l} = 0 \\ &\Rightarrow l = 1-\alpha \end{aligned}$$

と余暇時間が求まる．またこれを予算制約に代入することにより，

$$c = \alpha w(1-\tau)$$

と消費も求まる．

$\tau = 0$ のときに，$(c,w) = (1,2)$ となるような α とは，$c = \alpha w$ より，

$$\begin{aligned} &1 = \alpha 2 \\ &\Rightarrow \alpha = 1/2 \end{aligned}$$

と求めることが出来る．

さらに，$\tau = 0.1$ になった場合，

$$\begin{aligned} c &= 0.5 \times 2 \times (1-0.1) \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

となる．一方，労働時間は所得税の変更に影響されない．したがって，この国 A における消費と労働時間は，

$$(c,l) = (0.9, 0.5)$$

となる．

最後に消費税の導入も検討しよう．消費税が導入される場合の予算制約は，

$$(1+\tau^c)c = (1-\tau)(1-l)$$

である．この予算制約を変形すると，

$$c = \frac{(1-\tau)}{(1+\tau^c)} w(1-l)$$

となる．これは，この 1 期間の世界において，家計から見ると労働所得税 τ を上げることと，消費税 τ^c を上げることはどちらも実質的な所得を下げるので，ほとんど変わらない[*2]．より正確には，元々 $\tau = \tau^c = 0$ とすると，所得税 τ が 0.01 上がることと，消費税 τ^c が $1/0.99 - 1$ 上がることは等価である．したがって，レポートとしては「この経済において，労働所得税と消費税の家計に対する影響は等価である」というものを書けば良い．

コメントおよび問題の主旨：これはモデルの推定というような手続きを単純化したような問題である．つまり，実際に経済モデルの分析は，次のような手続きを経ることが一般的である．

[*2] 直感的には，消費税 (つまり物価) が 1% 上がることと，皆さんの仕送り・お小遣い・バイト代等の労働収入が 1% 下がることはほぼ同じこと，と考えれば分かりやすいかもしれない．

(1) (過去の研究に基づきつつも，新しい要素を加えた) モデルを構築する
(2) データを集める
(3) モデルの解とデータが合うような，パラメータを設定する
(4) パラメータの値を決めたモデルを使って，いろいろな経済実験をする

ここでは，仮にステップ 1 と 2 が問題文によって与えられており，ステップ 3 とステップ 4 を実際に解いてもらう問題であった．実際の論文では，モデルの新規性や，ステップ 3 の精度の高さなどが色々と議論になりうる．

1.5 効用関数の選択

この問題では，問題 1.2 と問題 1.3 で学んだ知識を利用して，効用関数の特徴を整理して，それを実証研究の結果と関連付ける力を養成することが目的である．

1. まず対数効用型，コブ・ダグラス型，準線形型であれば，
$$\frac{\partial h}{\partial w} = 0$$
となるので，
$$\epsilon_{h,w} = 0$$
となる．したがって，対数効用効用型，コブ・ダグラス型，準線形型ではないことが分かる．
一方，GHH と加法分離型の場合は，パラメータの値が変わったもの，例えば GHH のときであれば $\eta = \infty$ でもなければ
$$\epsilon_{h,w} \neq 0$$
となることが分かる．したがって，GHH と加法分離型の 2 つが効用関数の候補として考えられる．
2. 次に，GHH と加法分離型のそれぞれの場合に得られる労働供給関数の w に関する偏導関数は次のように計算できる．特に，与えられた情報を使うと，それぞれ，
$$\text{GHH}: \frac{\partial h}{\partial w} = \frac{1}{\eta} w^{\frac{1}{\eta}-1} > 0$$
$$\text{加法分離}: \frac{\partial h}{\partial w} = \underbrace{\frac{1}{\sigma+\eta}}_{+} \underbrace{\left(\frac{w^{1-\sigma}}{B}\right)^{\frac{1}{\sigma+\eta}-1}}_{+} \underbrace{(1-\sigma)}_{-} \underbrace{\frac{w^{-\sigma}}{B}}_{+} < 0$$
である．すると，今考えている効用関数の中では，GHH が一番もっともらしい事が分かる．

コメント及び問題の主旨：効用関数の選ぶ際には，既存の実証研究との整合的な効用関数を選ぶことが基本です．そのためには，そもそもどのような効用関数ならどのような性質が得られるか，どのような実証的な証拠が効用関数を選ぶために必要なのかを理解することが重要であり，この問題はそれらの能力を養成するためのものとなっています．また，実証研究を実際に自分で行う力や正しく読み解く力も重要であるため，経済学部では計量経済学もコア科目として重要な役割を果たしており，この問題はその重要性を感じてもらうことも意図しています．

なお，2 節の問題で検討するように，税制度等の影響で制約式が変わると，効用関数から得られる含意も異なるようになります．この辺りが経済学の難しさの一因です．

1.6　発展：Boppart-Krusell 型効用関数

最大化問題を定式化すると,

$$
\begin{aligned}
&\max_{c,h}\ \log(c) + \phi \log(1 - Bhc^{\frac{\nu}{1-\nu}}) \\
&\text{s.t. } c = wh
\end{aligned}
$$

である.

予算制約を目的関数に代入すると,

$$
\max_{h}\ \log(w) + \log(h) + \phi \log(1 - Bh(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}})
$$

となる．この一階条件は以下の通りであり，一階条件を変形していくと労働供給関数が求まる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h} = \phi \frac{B(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}} + \frac{\nu}{1-\nu} h (wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}-1} w}{1 - Bh(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{h} = \phi \frac{B(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}} \left[1 + \frac{\nu}{1-\nu}\right]}{1 - Bh(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}}} \\
&\Rightarrow 1 - Bh(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}} = h\phi B(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}} \frac{1}{1-\nu} \\
&\Rightarrow 1 = Bh(wh)^{\frac{\nu}{1-\nu}} \left[1 + \phi \frac{1}{1-\nu}\right] \\
&\Rightarrow 1 = Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}} h^{\frac{1}{1-\nu}} \frac{1-\nu+\phi}{1-\nu} \\
&\Rightarrow h = \left(\frac{1-\nu}{Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}}(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu}
\end{aligned}
$$

これが内点解における労働供給関数である．正確には，端点解も考慮すると労働供給関数は

$$
h(w) = \begin{cases}
1 & \text{if } \left(\frac{1-\nu}{Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}}(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu} \geq 1 \\
\left(\frac{1-\nu}{Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}}(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu} & \text{if } \left(\frac{1-\nu}{Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}}(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu} \in (0,1) \\
0 & \text{if } \left(\frac{1-\nu}{Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}}(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu} \leq 0
\end{cases}
$$

となる．以降では，内点解のみに焦点を当てる.

内点解では，消費関数と余暇関数は,

$$
\begin{aligned}
c(w) &= wh(w) = w^{1-\nu} \left(\frac{1-\nu}{B(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu} \\
l(w) &= 1 - h(w) = 1 - \left(\frac{1-\nu}{Bw^{\frac{\nu}{1-\nu}}(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu}
\end{aligned}
$$

となる.

次に，賃金が増えた時に労働供給がどう変わるか検討する．このために $h'(w)$ と $c'(w)$ を計算する．

$$h'(w) = -\nu \left(\frac{1-\nu}{B(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu} w^{-\nu-1}$$
$$c'(w) = (1-\nu) w^{-\nu} \left(\frac{1-\nu}{B(1-\nu+\phi)} \right)^{1-\nu}$$

もし $\nu \in (0,1)$ であれば，$h'(w) < 0$ かつ $c'(w) > 0$ となる．したがって，賃金が増えると労働供給は減少し，消費は増加する．

2　所得税

2.1　一括税のみ

最適化問題は

$$\max_{c,l,h} \ \log(c) + \log(l)$$
$$\text{s.t. } c = wh - T$$
$$1 = h + l$$

である．これを整理して，目的関数に代入すると，

$$\max_{l} \log(w(1-l) - T) + \log(l)$$

である．これを微分して $=0$ を求めると，

$$\frac{w}{w(1-l)-T} = \frac{1}{l}$$
$$\Rightarrow wl = w - wl - T$$
$$\Rightarrow 2wl = w - T$$
$$\Rightarrow l = \frac{w-T}{2w}$$

となる．したがって，これを $1 = h + l$ に代入すると，

$$h = 1 - \frac{w-T}{2w}$$
$$\Rightarrow h = \frac{w+T}{2w}$$

を得られる．次に，これを予算制約 $c = wh - T$ に代入すると，

$$c = \left[\frac{w+T}{2} - T \right]$$
$$\Rightarrow c = \frac{w-T}{2}$$

である．

まとめると，

$$(c,h,l) = \left(\frac{w-T}{2}, \frac{w+T}{2w}, \frac{w-T}{2w} \right)$$

が得られる．

ただし，ここで注意が必要である．例えば T の値を指定していないので，$T > w$ の場合，上記の式のままだと $c < 0$ となる．一方，現実に負の消費は考えられない．そのため，$T > w$ のときは，$c = 0$ とする．したがって，消費に関しては正確には

$$c = \begin{cases} \frac{w-T}{2} & \text{if } w - T \geq 0 \\ 0 & \text{if } w - T < 0 \end{cases}$$

である．

同様に，余暇時間 l に関しても，$w < T$ のときには余暇時間が負になる可能性がある．また，労働時間 h に関しても，$w < T$ のときには 1 を越えてしまう可能性がある．これらを考慮すると，

$$(l, h) = \begin{cases} \left(\frac{w-T}{2w}, \frac{w+T}{2w}\right) & \text{if } w - T \geq 0 \\ (0, 1) & \text{if } w - T < 0 \end{cases}$$

である．

コメントおよび問題の主旨：T のように，家計の特徴 (例えば所得，消費，資産) に依存させずに一括に取るような税を一括税 (lump-sum tax) と呼びます．

ここで経済のモデリング的に重要な含意は，余暇と労働時間が w に依存するようになったことです．つまり，効用関数を変えずとも，モデルの税制を変えることで，労働時間が賃金に影響されるようになります．

2.2　所得税と一括税

2.2.1　対数効用

最適化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c,l,h} \ & \log(c) + \log(l) \\ \text{s.t. } & c = (1-\tau)[wh - T] \\ & 1 = h + l \end{aligned}$$

である．これを整理して，目的関数に代入すると，

$$\begin{aligned} & \max_{l} \log((1-\tau)[w(1-l) - T]) + \log(l) \\ \Leftrightarrow & \max_{l} \log(1-\tau) + \log([w(1-l) - T]) + \log(l) \end{aligned}$$

である．これを微分して $= 0$ を求めると，

$$\begin{aligned} & \frac{w}{w(1-l) - T} = \frac{1}{l} \\ & \Rightarrow wl = w - wl - T \\ & \Rightarrow 2wl = w - T \\ & \Rightarrow l = \frac{w-T}{2w} \end{aligned}$$

となる．したがって，これを $1 = h + l$ に代入すると，

$$h = 1 - \frac{w-T}{2w}$$
$$\Rightarrow h = \frac{w+T}{2w}$$

を得られる．次に，これを予算制約 $c = (1-\tau)[wh - T]$ に代入すると，

$$c = (1-\tau)\left[\frac{w+T}{2} - T\right]$$
$$\Rightarrow c = (1-\tau)\frac{w-T}{2}$$

である．

まとめると，

$$(c, h, l) = \left((1-\tau)\frac{w-T}{2}, \frac{w+T}{2w}, \frac{w-T}{2w}\right)$$

が得られる．

ただし，ここで注意が必要である．例えば T の値を指定していないので，$T > 2$ の場合，上記の式のままだと $c < 0$ となる．一方，現実に負の消費は考えられないので，$c = 0$ とする．したがって，消費に関しては正確には

$$c = \begin{cases} (1-\tau)\frac{w-T}{2} & \text{if } w - T \geq 0 \\ 0 & \text{if } w - T < 0 \end{cases}$$

である．

同様に，余暇時間 l に関しても，$w < T$ のときには余暇時間が負になる可能性がある．また，労働時間 h に関しても，$w < T$ のときには 1 を越えてしまう可能性がある．これらを考慮すると，

$$(l, h) = \begin{cases} \left(\frac{w-T}{2w}, \frac{w+T}{2w}\right) & \text{if } w - T \geq 0 \\ (0, 1) & \text{if } w - T < 0 \end{cases}$$

である．なお，この問題では $l > 1$ や $h < 0$ になるような場合は発生しない[*3]．

$c > 0$ の範囲で，次のように微分をする．

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{w-T}{2}$$
$$\frac{\partial c}{\partial T} = -\frac{1-\tau}{2}$$

どちらも符号は負である．したがって，どちらの増税も，消費を減少させることが分かる．

次に，l について考える．同様に導関数を計算すると，

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} = 0$$
$$\frac{\partial l}{\partial T} = -\frac{1}{2w}$$

[*3] もし $-T \geq w$ であれば，$l > 1$ となるが，$(w, T) > 0$ なので，そのような状態を排除している．

となる．したがって，労働所得税率 τ は余暇時間には影響しない．一方，二本目の符号は負なので，T の増加は余暇時間を減らすことが分かる．

コメント及び問題の主旨：

場合分けが必要な問題を出題すること，ちょっとした拡張によってモデルの含意が変わることを示す例として出題した．例えば，授業スライドでは，余暇時間 l は w に依存していなかったが，T を追加することで l が w に依存するようになった．

2.3　累進課税：HSV 労働所得税

最適化問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{c,l,h}\ & \alpha \log c + (1-\alpha)\log l \\
\text{s.t.}\ & c = y - T(y) \\
& T(y) = y - (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}}{1-\xi} \\
& y = wh \\
& 1 = h + l
\end{aligned}
$$

である．

これを目的関数に代入すると，

$$
\begin{aligned}
& \max_l \alpha \log\left((1-\tau)\frac{[w(1-l)]^{1-\xi}}{1-\xi}\right) + (1-\alpha)\log l \\
\Leftrightarrow & \max_l \alpha \log\left((1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}\right) + \alpha(1-\xi)\log(1-l) + (1-\alpha)\log l
\end{aligned}
$$

と書き直すことができる．

これをまた，微分して 0 を取ると，

$$
\begin{aligned}
& -\alpha\frac{(1-l)^{-\xi}}{\frac{(1-l)^{1-\xi}}{1-\xi}} + (1-\alpha)\frac{1}{l} = 0 \\
\Rightarrow\ & \alpha\frac{1-\xi}{1-l} = (1-\alpha)\frac{1}{l} \\
\Rightarrow\ & \alpha(1-\xi)l = (1-\alpha)(1-l) \\
\Rightarrow\ & \left(1 + (1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)l = 1 \\
\Rightarrow\ & l = \frac{1}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と余暇時間を解くことが出来る．

また，労働時間は $1 = h + l$ より，

$$
\begin{aligned}
h &= 1 - \frac{1}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&= \frac{(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と得られる．

最後に消費は予算制約に h を代入することで得られる．

$$
\begin{aligned}
c &= (1-\tau)\frac{[wh]^{1-\xi}}{1-\xi} \\
&= (1-\tau)\frac{1}{1-\xi}w^{1-\xi}\left(\frac{(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\xi}
\end{aligned}
$$

2.3.1

例えば，余暇時間 l が税 (τ,ξ) の変化にどのように反応するか検討する．それぞれ微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \tau} &= 0 \\
\frac{\partial l}{\partial \xi} &= \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2}
\end{aligned}
$$

となる．つまり税の基本的な水準 τ が変わっても余暇時間は変化しないが，累進度 ξ が上がると余暇時間が増えることが分かる．これは累進度が上がると働くインセンティブが減り，余暇時間をたくさん取るようになるためである．

次に労働時間がどう変わるかも分析しよう．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \tau} &= 0 \\
\frac{\partial h}{\partial \xi} &= \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)+(1-\xi)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2}{\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2}
\end{aligned}
$$

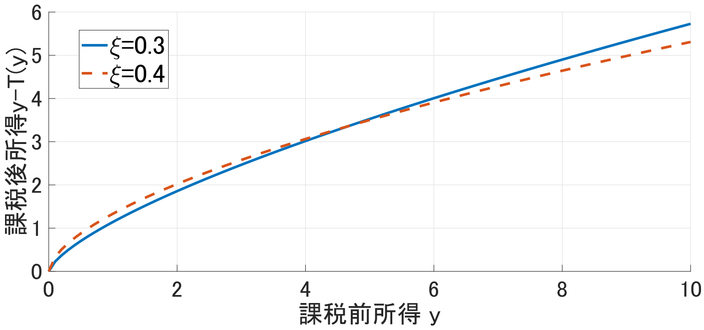
となる．したがって，税の基本的な水準 τ の変化は労働時間に影響しない．一方，累進度 ξ の上昇は，労働時間 h の減少を招く．これは，累進度が上がると，多く働いてもさほど給料が増えないためである．

消費がどう変わるか分析しよう．まず τ の変化について

$$
\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{1}{1-\xi}w^{1-\xi}\left(\frac{(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\xi}
$$

である．したがって，税の基本的な水準 τ の上昇は消費 c の下落を招く．これまでの分析と統合すると，τ が上昇することによる増税は，労働時間や余暇時間には一切影響を与えず，消費の水準を下げることが分かる．

次に ξ の変化を分析する．これは素直に計算するとと少し面倒なので次のように計算する．一般に，



図表注：累進度 ξ を二つの値で比べている．その結果，累進度が 0.3 から 0.4 に上がっても，課税前所得 y が低い人にとっては課税後所得が上がっていることが分かる．

$da^{1-x}/dx = -a^{1-x}\log a$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
& c = (1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi} \times h(\xi)^{1-\xi} \\
& \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} = (1-\tau)h(\xi)^{1-\xi}\frac{-w^{1-\xi}\log w + w^{1-\xi}}{(1-\xi)^2} + (1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}(-h^{1-\xi}\log h)\frac{\partial h}{\partial \xi} \\
& \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} = (1-\tau)h(\xi)^{1-\xi}\frac{w^{1-\xi}(1-\log w)}{(1-\xi)^2} - (1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}(h^{1-\xi}\log h)\frac{\partial h}{\partial \xi} \\
& \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} = (1-\tau)h(\xi)^{1-\xi}w^{1-\xi}\frac{1}{1-\xi}\left[\frac{(1-\log w)}{(1-\xi)} \underbrace{-(\log h)\frac{\partial h}{\partial \xi}}_{<0}\right]
\end{aligned}$$

となる．すでに $\frac{\partial h}{\partial \xi} < 0$ であることは計算した．$h \in (0,1)$ なので $\log h < 0$ である．したがって，右辺第二項は確定する．右辺第一項は $w > 0$ の条件しかないので，$1 - \log w$ の符号は確定しない．ξ の上昇によって消費 c が上昇するか減少するかは不明である．

この符号が確定しない理由は HSV 型にある．つまり，課税後所得

$$y - T(y) = (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}}{1-\xi}$$

を考える．これの累進度の変更を考えると，

$$\frac{\partial y - T(y)}{\partial \xi} = (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}(1-\log y)}{(1-\xi)^2}$$

となり，これも符号が確定しない ($1-\log y$ 次第)．以下の図は，数値例を入れて ξ が変わったときに $y - T(y)$ がどう変わるか示したもの．

コメント及び問題の主旨：　おそらく学部生に HSV の累進課税を教えているところは世界的にも無いと思います．しかし，こういう解析解が得られる関数形はとても便利で，論文を書くのにとても役に立つと思います．卒論や修論でも何か出来るんじゃないかな，と期待して出題しました．間違いなく，先端では良く使われる関数形なので，「学部生には無駄」と思わず，意欲的な学生は勉強されると良いと思います[*4]．

[*4] 例えば HSV 以外の著者が HSV 税関数を使ってる例としては Midrigan and Boar(2021).

3　2 期間：消費・貯蓄・余暇

3.1　2 期間の場合と様々な効用関数

3.1.1　対数効用

最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s}\ & \alpha\log(c_1)+(1-\alpha)\log(l_1)+\beta[\alpha\log(c_2)+(1-\alpha)\log(l_2)]\\ \text{s.t. }& c_1+s=w_1(1-l_1)\\ & c_2=w_2(1-l_2)+(1+r)s\end{aligned}$$

である.

予算制約を目的関数に代入すると,

$$\max_{l_1,l_2,s}\alpha\log(w_1(1-l_1)-s)+(1-\alpha)\log(l_1)+\beta[\alpha\log(w_2(1-l_2)+(1+r)s)+(1-\alpha)\log(l_2)]$$

とできる．これの一階の条件は,

$$\begin{aligned}l_1&:\alpha\frac{-w_1}{w_1(1-l_1)-s}+(1-\alpha)\frac{1}{l_1}=0\\ l_2&:\alpha\frac{-w_2}{w_2(1-l_2)+(1+r)s}+(1-\alpha)\frac{1}{l_2}=0\\ s&:\alpha\frac{-1}{w_1(1-l_1)-s}+\beta\alpha\frac{1+r}{w_2(1-l_2)+(1+r)s}=0\end{aligned}$$

である.

これらを予算制約を使って整理すると,

$$\begin{aligned}\alpha\frac{w_1}{c_1}&=(1-\alpha)\frac{1}{l_1}\quad\Leftrightarrow\quad w_1l_1=\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1\\ \alpha\frac{w_2}{c_2}&=(1-\alpha)\frac{1}{l_2}\quad\Leftrightarrow\quad w_2l_2=\frac{1-\alpha}{\alpha}c_2\\ \alpha\frac{1}{c_1}&=\beta(1+r)\frac{1}{c_2}\quad\Leftrightarrow\quad c_2=\beta(1+r)c_1\end{aligned}$$

となる.

さらに，2 本の予算制約をそれぞれ代入すると,

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}=w_1(1-l_1)+\frac{w_2(1-l_2)}{1+r}$$

と生涯予算制約を得る．これに先ほど整理した一階の条件を代入すると,

$$\begin{aligned}&c_1+\frac{\beta(1+r)}{1+r}c_1=w_1-\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1+\frac{w_2}{1+r}-\frac{1}{1+r}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta(1+r)c_1\right]\\ &\Rightarrow(1+\beta)c_1=w_1+\frac{w_2}{1+r}-\frac{1-\alpha}{\alpha}(1+\beta)c_1\\ &\Rightarrow\frac{1+\beta}{\alpha}c_1=w_1+\frac{w_2}{1+r}\\ &\Rightarrow c_1=\alpha\frac{1}{1+\beta}\left[w_1+\frac{w_2}{1+r}\right]\end{aligned}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \alpha \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right] \\
l_1 &= \frac{1-\alpha}{w_1}\frac{1}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right] \\
l_2 &= \frac{1-\alpha}{w_2}\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

労働供給がないとき，家計消費はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
\hat{c_1} &= \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right] \\
\hat{c_2} &= \alpha \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

であった．つまり，労働供給を導入することで，α の項が追加されたこと，と w_1, w_2 が y_1, y_2 に置き換わったことが変わっている．

労働供給があるとき，対数効用やコブ・ダグラス型の場合，α は消費と労働のシェアを表しているため，総予算の α を消費に，$(1-\alpha)$ を余暇の金銭価値 wl に配分していることが分かる．

3.1.2　コブ・ダグラスと CRRA 型

最大化問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s} \ & \frac{(c_1^{\alpha} l_1^{1-\alpha})^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{(c_2^{\alpha} l_2^{1-\alpha})^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\
\text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\
& c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s
\end{aligned}
$$

という関数形になる．

予算制約を目的関数に代入すると，

$$
\max_{l_1,l_2,s} \frac{([w_1(1-l_1)-s]^{\alpha} l_1^{1-\alpha})^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{([w_2(1-l_2)+(1+r)s]^{\alpha} l_2^{1-\alpha})^{1-\sigma}}{1-\sigma}
$$

となる．

表記を単純化するために，$\tilde{u}_t \equiv c_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$ とする．すると，この一階条件は，それぞれ，

$$
\begin{aligned}
l_1 &: \tilde{u}_1^{-\sigma}\left[-\alpha[w_1(1-l_1)-s]^{\alpha-1} l_1^{1-\alpha} w_1 + [w_1(1-l_1)-s]^{\alpha}(1-\alpha) l_1^{-\alpha}\right] = 0 \\
l_2 &: \tilde{u}_2^{-\sigma}\left[-\alpha[w_2(1-l_2)+(1+r)s]^{\alpha-1} l_2^{1-\alpha} w_2 + [w_2(1-l_2)-s]^{\alpha}(1-\alpha) l_2^{-\alpha}\right] = 0 \\
s &: \tilde{u}_1^{-\sigma}\left[-\alpha[w_1(1-l_1)-s]^{\alpha-1} l_1^{1-\alpha}\right] + \beta \tilde{u}_2^{-\sigma}(1+r)\left[\alpha[w_2(1-l_2)+(1+r)s]^{\alpha-1} l_2^{1-\alpha}\right] = 0
\end{aligned}
$$

となる．これを予算制約を代入して，もう少し整理すると，

$$
l_1 : w_1 \underbrace{\alpha c_1^{\alpha-1} l_1^{1-\alpha}}_{=\tilde{u}_c(c,l)} = \underbrace{(1-\alpha) c_1^{\alpha} l_1^{-\alpha}}_{=\tilde{u}_l(c,l)} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha w_1 l_1 = (1-\alpha) c_1 \tag{3.1}
$$

$$
l_2 : w_2 \underbrace{\alpha c_2^{\alpha-1} l_2^{1-\alpha}}_{=\tilde{u}_c(c,l)} = \underbrace{(1-\alpha) c_2^{\alpha} l_2^{-\alpha}}_{=\tilde{u}_l(c,l)} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha w_2 l_2 = (1-\alpha) c_2 \tag{3.2}
$$

$$
s : \tilde{u}_1^{-\sigma} \alpha c_1^{\alpha-1} l_1^{1-\alpha} = \tilde{u}_2^{-\sigma} \alpha c_2^{\alpha-1} l_2^{1-\alpha} \tag{3.3}
$$

とできる．ここで，上 2 本の式は，t 期における消費と労働の代替条件になっている．特にここで注目してほしいのは各 t 期内の消費と労働の代替条件に，σ と β が登場せず，静学的な代替条件と同じになっていることである．

ここで，(3.3) に $\tilde{u}_t$ の定義を元に戻し，(3.1) と (3.2) を代入すると，

$$\begin{aligned}
&(c_1^{\alpha} l_1^{1-\alpha})^{-\sigma} c_1^{\alpha-1} l_1^{1-\alpha} = \beta(1+r)(c_2^{\alpha} l_2^{1-\alpha})^{-\sigma} c_2^{\alpha-1} l_2^{1-\alpha} \\
&\Rightarrow c_1^{-\alpha\sigma+\alpha-1} l_1^{(1-\sigma)(1-\alpha)} = \beta(1+r) c_2^{-\alpha\sigma+\alpha-1} l_2^{(1-\sigma)(1-\alpha)} \\
&\Rightarrow c_1^{-\alpha\sigma+\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha w_1} c_1\right)^{(1-\sigma)(1-\alpha)} = \beta(1+r) c_2^{-\alpha\sigma+\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha w_2} c_2\right)^{(1-\sigma)(1-\alpha)} \\
&\Rightarrow c_1^{-\sigma} w_1^{-(1-\sigma)(1-\alpha)} = \beta(1+r) c_2^{-\sigma} w_2^{-(1-\sigma)(1-\alpha)}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．

さらに 2 本の予算制約より，次の生涯予算制約を導出できる．

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1(1-l_1) + \frac{w_2(1-l_2)}{1+r}$$

これに先ほどの一階条件のうち，上 2 本の (3.1) と (3.2) を代入すると，

$$\begin{aligned}
c_1 + \frac{c_2}{1+r} &= w_1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} c_1 + \frac{w_2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} c_2}{1+r} \\
\Rightarrow \frac{1}{\alpha} c_1 + \frac{1}{\alpha} \frac{c_2}{1+r} &= w_1 + \frac{w_2}{1+r}
\end{aligned}$$

となる．さらにこれに (3.4) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} c_1 + \frac{1}{\alpha} [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}} \frac{c_1}{1+r} &= w_1 + \frac{w_2}{1+r} \\
\Rightarrow c_1 = \alpha \left(1 + [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}}\right)^{-1} &\left(w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right)
\end{aligned}$$

これを使って，c_2 も

$$c_2 = \alpha [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}} \left(1 + [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}}\right)^{-1} \left(w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right)$$

と求まる．さらに，(3.1) より，

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{1-\alpha}{w_1} \left(1 + [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}}\right)^{-1} \left(w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right) \\
l_2 &= \frac{1-\alpha}{w_2} [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}} \left(1 + [\beta(1+r)]^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{(1-\sigma)(1-\alpha)}{\sigma}}\right)^{-1} \left(w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right)
\end{aligned}$$

と求まる．

3.1.3　準線形：Hansen Rogerson 型

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s} \quad & \log(c_1) + Bl_1 + \beta[\log(c_2) + Bl_2] \\
\text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\
& c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s
\end{aligned}
$$

これらを目的関数に代入すると,

$$
\max_{l_1,l_2,s} \log(w_1(1-l_1)-s) + Bl_1 + \beta[\log(w_2(1-l_2)+(1+r)s) + Bl_2]
$$

である．この一階の条件は,

$$
\begin{aligned}
l_1 &: \frac{1}{1-l_1} = B \\
l_2 &: \frac{1}{1-l_2} = B \\
s &: \frac{1}{w_1(1-l_1)-s} = \beta(1+r)\frac{1}{w_2(1-l_2)+(1+r)s}
\end{aligned}
$$

である．これらを整理すると,

$$
\begin{aligned}
l_1 &= l_2 = 1 - \frac{1}{B} \\
c_2 &= \beta(1+r)c_1
\end{aligned}
$$

とできる．

生涯予算制約は，対数効用の場合と同じであり,

$$
c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1(1-l_1) + \frac{w_2(1-l_2)}{1+r}
$$

である．これに整理した一階の条件を代入すると,

$$
\begin{aligned}
c_1 + \beta c_1 &= \frac{w_1}{B} + \frac{w_2}{(1+r)B} \\
\Rightarrow c_1 &= \frac{1}{B}\frac{1}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

と c_1 を得る．

これを整理した一階の条件に代入すると,

$$
c_2 = \frac{1}{B}\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right]
$$

と c_2 も得られる．

3.1.4　GHH 型

最大化問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s} \quad & \log\left(c_1 - \frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}\right) + \beta\log\left(c_2 - \frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}\right) \\
\text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\
& c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s
\end{aligned}
$$

である．

　これを目的関数に代入すると，

$$\max_{l_1,l_2,s}\ \log\left(w_1(1-l_1)-s-\frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)+\beta\log\left(w_2(1-l_2)+(1+r)s-\frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$$

となる．

　この一階の条件は，

$$\begin{aligned}
l_1 &: w_1=(1-l_1)^\eta\\
l_2 &: w_2=(1-l_2)^\eta\\
s &: \frac{1}{w_1(1-l_1)-s-\frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}}=\frac{\beta(1+r)}{w_2(1-l_2)-(1+r)s-\frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}}
\end{aligned}$$

である．

　ここから直接的に，l_1 と l_2 が解けるのが GHH 型の特徴である．つまり，2 期間モデルであっても，

$$\begin{aligned}
l_1&=1-w_1^{\frac{1}{\eta}}\\
l_2&=1-w_2^{\frac{1}{\eta}}
\end{aligned}$$

と解ける．それぞれ l_t が，$w_j, j\neq t$ にも r にも依存していないのが大きな特徴である[*5]．これより，

$$\begin{aligned}
h_1&=w_1^{\frac{1}{\eta}}\\
h_2&=w_2^{\frac{1}{\eta}}
\end{aligned}$$

も直ちに求まる．なお

$$w_t h_t=w_t^{\frac{1+\eta}{\eta}}=(1-l_t)^{1+\eta},\quad \text{for } t=1,2$$

は便利な関係である[*6]．

　つぎに，一階条件の 3 本目の式を整理すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c_1-\frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}}=\frac{\beta(1+r)}{c_2-\frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}}\\
&\Rightarrow c_2=\beta(1+r)\left(c_1-\frac{w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}\right)+\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}
\end{aligned}$$

となる．

　また生涯予算制約は対数効用の場合と同じであり，

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}=w_1(1-l_1)+\frac{w_2(1-l_2)}{1+r}$$

[*5] つまり，l_1 は w_2 に依存していないし，l_2 は w_1 に依存していない．

[*6] この一番右の項は効用関数に出てくる．これが $w_t h_t$ と一致する．

である．これにこれまで得た結果を代入すると，

$$
\begin{aligned}
& c_1+\frac{1}{1+r}\left[\beta(1+r)\left(c_1-\frac{w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}\right)+\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}\right]=w_1^{\frac{1}{\eta}+1}+\frac{w_2^{\frac{1}{\eta}+1}}{1+r} \\
& \Rightarrow c_1[1+\beta]=w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+r}+\beta\frac{w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}-\frac{1}{1+r}\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta} \\
& \Rightarrow c_1[1+\beta]=\left[\frac{1+\eta+\beta}{1+\eta}\right]w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\left[\frac{1+\eta-1}{(1+r)(1+\eta)}\right]\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+r} \\
& \Rightarrow c_1=\frac{1}{1+\beta}\left[\frac{1+\eta+\beta}{1+\eta}w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\frac{\eta}{1+\eta}\frac{1}{1+r}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}\right]
\end{aligned}
$$

と c_1 が求まる．

最後に，これをオイラー方程式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \beta(1+r)\underbrace{\frac{1}{1+\eta}\frac{1}{1+\beta}\left[(1+\eta+\beta)w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\frac{\eta}{1+r}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}\right]}_{c_1}-\frac{\beta(1+r)}{1+\eta}w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\frac{1}{1+\eta}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}} \\
&= \left[\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\frac{1+\eta+\beta}{1+\eta}-\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\frac{1+\beta}{1+\eta}\right]w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\left[\beta\frac{\eta}{1+\eta}\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1+\eta}\frac{1+\beta}{1+\beta}\right]w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}} \\
&= \frac{1+r}{1+\beta}\left[\frac{\beta\eta}{1+\eta}w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}+\frac{1+\beta+\beta\eta}{1+\eta}\frac{1}{1+r}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}\right]
\end{aligned}
$$

と c_2 も求まる．

コメントおよび問題の主旨：一般に，GHH は動学的な環境においても，静学的な労働供給を導入する際に使われる．というのも，労働供給まで動学的になってしまうと，分析が複雑になり過ぎて解けない，or/and 解くこと自体が負担になり過ぎて複雑な経済的な分析が不可能になってしまう．つまり，GHH は分析の複雑化を回避しつつ，労働供給を分析するモデル化としてよく使われる．

3.2　線形の労働所得税と消費税：2 期間の場合

効用関数を特定化することなく，次のような最大化問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2 l_1,l_2,s}\ & u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2) \\
\text{s.t. } & (1+\tau^c)c_1+s=(1-\tau^h)w_1h_1 \\
& (1+\tau^c)c_2=(1+r)s+(1-\tau^h)w_2h_2
\end{aligned}
$$

この予算制約は,

$$
\begin{aligned}
& (1+\tau^c)c_1+\frac{(1+\tau^c)c_2}{1+r}=(1-\tau^h)w_1h_1+\frac{(1-\tau^h)w_2h_2}{1+r} \\
& \Rightarrow c_1+c_2=\underbrace{\frac{(1-\tau^h)}{1+\tau^c}}_{\equiv 1-\hat{\tau}}w_1h_1+\frac{(1-\tau^h)}{1+\tau^c}\frac{w_2h_2}{1+r}
\end{aligned}
$$

となる．この式から消費税を上げることは，仮想的な所得税 $\hat{\tau}$ を上げることと同値になっていることが分かる．そしてこの議論は効用関数を使わず，制約式のみから導かれている．つまり，2 期間でも，効用関数の関数形に依存せず，消費税と線形な労働所得税が同じであることが導かれた．

コメントおよび問題の主旨：このように消費税と線形な所得税は密接な関係がある．なお，累進課税を考えると，この結果は成り立たない．