基礎マクロ練習問題の解答例：ソローモデル

日野将志 *

1 離散時間

1.1 生産要素への支払い

企業の最大化問題は静学的なので，時間の添え字は落として書く．最大化問題は,

$$
\begin{aligned}
&\max_{K,L}\ F(K, AL) - wL - (r+\delta)K \\
&\max_{K,L}\ AL\left[F(K, AL)/AL - wL/AL - (r+\delta)K/AL\right] \\
&\max_{\tilde{k},L}\ AL[f(\tilde{k}) - w/A - (r+\delta)\tilde{k}]
\end{aligned}
$$

と書き直すことが出来る．

この一階の条件は,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{k}:\ f'(\tilde{k}) = r+\delta \qquad (1.1)\\
&L:\ A[f(\tilde{k}) - w/A - \underbrace{(r+\delta)}_{f'(\tilde{k})}\tilde{k}] + AL[\underbrace{f'(\tilde{k}) - (r+\delta)}_{\text{equation (1.1)}}]\frac{\partial \tilde{k}}{\partial L} = 0 \\
&\Leftrightarrow A[f(\tilde{k}) - \tilde{k}f'(\tilde{k})] = w
\end{aligned}
$$

と書くことが出来る．この賃金はスライド 27 ページ (移行動学のパート) の部分に該当する．

定常状態において r は

$$
r = f'(\tilde{k}^*) - \delta
$$

と定数で決まる．したがって，一切成長しない．

一方，定常状態において w は,

$$
\begin{aligned}
&w = A[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)] \\
&\Rightarrow \frac{w_{t+1}}{w_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t}\frac{[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)]}{[f(\tilde{k}^*) - \tilde{k}^* f'(\tilde{k}^*)]} \\
&\frac{w_{t+1}}{w_t} = (1+g^A)
\end{aligned}
$$

と成長する．

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

さらに黄金律の貯蓄率を計算する．そのために，まず効率労働１単位あたりの消費は，

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= (1-s)f(\tilde{k}) \\ &= f(\tilde{k}(s)) - (g^A+\delta)\tilde{k}(s)\end{aligned}$$

と書くことが出来る．なお，この 1 行目から 2 行目へは，定常状態の定義式 $sf(\tilde{k}) = (g^A+\delta)\tilde{k}$ を代入して得ている．この 2 行目を s について微分してゼロを計算すると，

$$\begin{aligned}& f'(\tilde{k}) = g^A + \delta \\ & \Rightarrow f'(\tilde{k}) - \delta = g^A \\ & \Rightarrow r = g^A\end{aligned}$$

となる．

コメントおよび問題の主旨：つまり家計サイドに立つと，ソローモデルの定常状態において利子率は成長しないが，賃金は成長する．結果的に利子所得 rK は K が g^A の率で成長し，労働所得 wL も L が一定なので，g^A の率で成長する．

なお，最後の $r = g^A$ という式は，Piketty 教授著の一般書『21 世紀の資本』などで「$r > g$」として 2014 年頃からとても話題になった関係である[*1]．Piketty 教授の主旨を大胆に要約すると「現実には $r > g$ であり，資本を保有する家計の資産の方が，労働者の賃金収入より早く増加する．これが格差拡大の要因である」というものである．

1.2　生産性の成長のないソローモデル

$$\begin{aligned}& K' = sF(K,L) + (1-\delta)K \\ & \Rightarrow \frac{K'}{L'}\frac{L'}{L} = \frac{sF(K,L)}{L} + (1-\delta)\frac{K}{L} \\ & \Rightarrow k' = sf(k) + (1-\delta)k\end{aligned}$$

この三本目の式が基本方程式.

定常状態は $k' = k$ であるので

$$\begin{aligned}& k = sf(k) + (1-\delta)k \\ & \Rightarrow sf(k) = \delta k\end{aligned}$$

である．ここで δ および s は動かないので，k は定常状態で動かない ($k' = k$ の定義より，k が動かないのは自明と言えば自明).

[*1] Piketty 教授の g は生産性の成長率であり，私の記法で言う g^A のことである．

1.3　コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

まずコブ・ダグラス型生産関数は

$$
\begin{aligned}
F\left(\frac{K}{L},1\right) &= \frac{F(K,L)}{L} \\
&= \frac{K^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} \\
&= K^{\alpha}L^{-\alpha} \\
&= \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} \\
&= k^{\alpha}
\end{aligned}
$$

となる．

つぎに，講義スライドより，基本方程式は

$$
\begin{aligned}
k' &= sf(k) + (1-\delta)k \\
k' &= sk^{\alpha} + (1-\delta)k
\end{aligned}
$$

と求められる．

これが定常状態では，$k' = k$ なので，

$$
\begin{aligned}
& sk^{\alpha} = \delta k \\
& \Rightarrow k^{1-\alpha} = \frac{s}{\delta} \\
& \Rightarrow k = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

となる．この k が定常状態の k である．

最後に，この定常状態における消費を求める．消費は，

$$
\begin{aligned}
& C = (1-s)Y \\
& \Rightarrow \frac{C}{L} = (1-s)\frac{Y}{L} \\
& \Rightarrow c = (1-s)f(k) \\
& \Rightarrow c = (1-s)k^{\alpha} \\
& \Rightarrow c = (1-s)\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と一人当たり消費が得られる．

黄金律とは，この消費を最大化する貯蓄率である．したがって，

$$
\frac{\partial c(s)}{\partial s} = 0
$$

を満たす s を探せばよい．そして，これが最大化問題の解であることを確認するために，二階の条件を確

認すれば良い．先ほど求めた消費を用いてこれを計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c(s)}{\partial s} = 0 \\
&\Rightarrow -\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{\delta} = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left[\frac{1-s}{s}\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1\right] = 0 \\
&\Rightarrow s = \alpha
\end{aligned}
$$

となる．念のために二階の条件を確認すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 c(s)}{\partial s^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{\delta}\left[\frac{1-s}{s}\frac{\alpha}{1-\alpha} - 1\right] - \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&\Rightarrow \frac{\partial^2 c(\alpha)}{\partial s^2} = -\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < 0
\end{aligned}
$$

となる．

黄金律における c は，

$$
c = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
$$

である．

黄金律における k は，

$$
k = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

である．

1.4　人口成長

人口成長があるとき，基本方程式の導出に少しだけ注意が必要である．つまり，講義スライドより，

$$
K' = sF(K, L) + (1-\delta)K
$$

を思い出してほしい．これの両辺を L で割る．

$$
\frac{K'}{L'}\underbrace{\frac{L'}{L}}_{1+n} = sf(k) + (1-\delta)k
$$

を得る．この左辺に注目すると，左辺の二番目の分数部分が人口成長率になっていることが分かる．したがって，

$$
(1+n)k' = sf(k) + (1-\delta)k
$$

が基本方程式となる．

定常状態の k とは，

$$
\begin{aligned}
nk &= sf(k) - \delta k \\
sf(k) &= (n+\delta)k
\end{aligned}
$$

を満たすような k である．つまり，上の式が定常状態の k を求めるための式である．

1.5　生産性の成長

コブ・ダグラス型生産関数の場合，ハロッド中立，ヒックス中立，ソロー中立の全てを満たす．なぜなら，

$$F(K,AL)=\begin{cases} K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} & (\text{ハロッド中立}) \\ A^{1-\alpha}K^{\alpha}L^{1-\alpha} & (\text{ソロー中立}) \\ A^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}K)L^{1-\alpha} & (\text{ヒックス中立}) \end{cases}$$

と書き換えることが出来る．

上の問題と同様に，

$$K'=sF(K,AL)+(1-\delta)K$$

から始める．この両辺を AL で割ると，

$$\begin{aligned} &\frac{K'}{A'L'}\frac{A'L'}{AL}=s\frac{F(K,AL)}{AL}+(1-\delta)\frac{K}{AL} \\ &\Rightarrow (1+g^A)\tilde{k}'=sf(\tilde{k})+(1-\delta)\tilde{k} \\ &\Rightarrow (1+g^A)\tilde{k}'=s\tilde{k}^{\alpha}+(1-\delta)\tilde{k} \end{aligned}$$

となる．なお，ここで $f(\tilde{k},1)=F(K/AL,1)$ である．これが基本方程式である．

定常状態において，

$$\tilde{k}=\tilde{k}'$$

である．

したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{K}{AL}=\frac{K'}{A'L'} \\ &\Rightarrow \frac{K}{L}\frac{1}{A}=\frac{K'}{L'}\frac{1}{A'} \\ &\Rightarrow k\frac{1}{A}=k'\frac{1}{A'} \\ &\Rightarrow \frac{k'}{k}=\frac{A'}{A}=(1+g^A) \end{aligned}$$

である．したがって，k は成長率 g^A で成長する．

上の問題と同様に定常状態の資本は，

$$\begin{aligned} &s\tilde{k}^{\alpha}=(g^A+\delta)\tilde{k} \\ &\Rightarrow \tilde{k}=\left(\frac{s}{g^A+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

と求まる．

もし g^A が変わると，

$$\frac{d\tilde{k}}{dg^A}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{s}{g^A+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\frac{-s}{(g^A+\delta)^2}<0$$

と $\tilde{k}$ は下がる．

定常状態における一人当たり消費は

$$
\begin{aligned}
&C = (1-s)F(K, AL) \\
&\Rightarrow \frac{C}{AL} = (1-s)f(\tilde{k}) \\
&\Rightarrow \frac{c}{A} = (1-s)\left(\frac{s}{\delta + g^A}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&\Rightarrow c = A\,(1-s)\left(\frac{s}{\delta + g^A}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

である．

r は次のように決まる．

$$
\begin{aligned}
r &= F_K(K, AL) - \delta \\
&= \alpha K^{\alpha-1}(AL)^{1-\alpha} - \delta \\
&= \alpha \tilde{k}^{\alpha-1} - \delta
\end{aligned}
$$

したがって，定常状態では $\tilde{k}$ は動かないので，r も動かない．

次に w は次のように決まる．

$$
\begin{aligned}
w &= F_L(K, AL) \\
&= (1-\alpha)K^{\alpha}A^{1-\alpha}(L)^{-\alpha} \\
&= (1-\alpha)A\tilde{k}^{\alpha}
\end{aligned}
$$

定常状態では $\tilde{k}$ は動かないが，A が成長を続ける．そのため，賃金 w は A の成長率で伸びていくことが分かる．つまり，ソローモデルでは，(定常状態にいると考えられる) 先進国では，経済成長によって利子率は変化しないが賃金が伸びていくと予想される．

さらに，rK は r が成長しないので K の成長率と同率で成長する．すなわち g^A で成長する．さらに wL は人口は成長しないため，L は成長せず w と同率で成長する．すなわち g^A で成長する．結果的に rK と wL の成長率は一致する．

黄金律における貯蓄率とは効率労働一人当たり消費 $\tilde{c}$ を最大化する貯蓄率である．つまり，

$$
\tilde{c} = (1-s) \qquad = (1-s)\left(\frac{s}{g^A + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
$$

を最大化する s である．これは

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{s}{g^A + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = (1-s)\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{s}{g^A + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\frac{1}{g^A + \delta} \\
&\Rightarrow \;\; s = \alpha
\end{aligned}
$$

となる．この黄金律の貯蓄率は問題 1.3 の貯蓄率と一致している．黄金律の貯蓄率は生産性の成長率に依存していない．なお，問題 1.3 と実質的に同じであるため，二階の条件の確認はここでは省略する．

コメントおよび問題の主旨：特に二番目の小問に注目したい．多くの先進国はすでに十分な成長をしており，定常状態の近くにいると考えられる．しかし，アメリカのような先進国は年率 2% 前後で今でも成長を続けている．この小問では，例えアメリカのような先進国であっても生産性が成長していれば，一人当たり資本 k も成長することを示している．一人当たり資本が成長するということは，一人当たり所得 $y = Af(k)$ も成長するということである．さらに，その結果，一人当たり消費も成長する．

1.6 加法成長

1. まずこれまでのモデルである指数成長の生産性の成長率は,

$$
\begin{aligned}
&A_{t+1} - A_t = gA_t \\
&\Rightarrow \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = g
\end{aligned}
$$

となる．右辺は時間に依存していないため，指数成長の生産性の成長率は常に一定であることが分かる．

一方，加法成長の生産性の成長率は,

$$
\begin{aligned}
&A_{t+1} - A_t = A_0 + b(t+1) - [A_0 - bt] \\
&\Rightarrow \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \frac{b}{A_t} > 0
\end{aligned}
$$

となる．さらに，$b > 0$ であるため生産性 A_t は単調増加関数である．したがって,

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = 0
$$

となる．このように，成長率が A_t を通じて時間に依存しているため，加法成長の生産性の成長率はどんどん低下していき，無限期間後にゼロになる．

最後に，加法成長の生産性の成長率は，$t > 0$ において常に正である．そのため，加法成長の生産性 A_t は無限大に大きくなる．

2. 基本方程式は次のようにして求まる．

$$
\begin{aligned}
&C_t + K_{t+1} = Y_t + (1-\delta)K_t \\
&\Rightarrow K_{t+1} = (1-s)Y_t + (1-\delta)K_t \\
&\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} = (1-s)\frac{K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}}{A_tL_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t} \\
&\Rightarrow \tilde{k}_{t+1}\frac{A_{t+1}}{A_t} = (1-s)\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t \\
&\Rightarrow \tilde{k}_{t+1}\frac{A_0 + b(t+1)}{A_0 + bt} = (1-s)\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t
\end{aligned}
$$

となる．

3. ソローの基本方程式で，加法成長のせいで変わった部分は,

$$
\frac{A_{t+1}}{A_t} = \frac{A_0 + b(t+1)}{A_0 + bt}
$$

である．これは，小問 1 の解より無限期間後には,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \left(\frac{A_{t+1}}{A_t} - \frac{A_t}{A_t} \right) = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{A_{t+1}}{A_t} = 1
\end{aligned}
$$

したがって，ソローの基本方程式は無限期間後に，次のようになる．

$$\tilde{k} = (1-s)\tilde{k}^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}$$
$$\Rightarrow \tilde{k} = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4. まず K_t の成長率を求めよう．$\tilde{k}_t$ の定義を使うと，次のように計算できる．

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}}{\frac{K_t}{A_tL_t}}$$
$$\Rightarrow \frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{A_t}{A_{t+1}}$$

これは定常状態では $\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t$ なので，次のようになる．

$$1 = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{A_t}{A_{t+1}}$$

さらに，小問 3 で $\lim_{t\to\infty} A_{t+1}/A_t = 1$ と学んだので，

$$K_{t+1} = K_t$$

が成り立つことが分かる．このように加法成長のもとでは定常状態において経済が成長しなくなる．
同様に，Y_t について調べよう．Y_{t+1}/Y_t は次のようなる．

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{K_{t+1}^{\alpha}(A_{t+1}L_{t+1})^{1-\alpha}}{K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}}$$

この右辺はすべて，定常状態で $K_{t+1} = K_t$ かつ $A_{t+1} = A_t$ となるので，$Y_{t+1} = Y_t$ となることも分かる．
さらに，消費は $C_t = (1-s)Y_t$ なので，Y_t が成長しないため，C_t も成長しないことが分かる．

5. K_t/L_t は定義より次の関係を満たす．

$$\frac{K_t}{L_t} = \tilde{k}_t A_t$$

ここで，$t \to \infty$ とすると，$\tilde{k}_t \to \tilde{k}$ である．さらに小問 1 で確認したように，A_t は無限大に大きくなる．したがって，$t \to \infty$ のとき $K_t/L_t \to \infty$ である．
同様に，Y_t/L_t は,

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha}}{A_tL_t}A_t = A_t\tilde{k}_t^{\alpha}$$

となる．したがって，$t \to \infty$ のとき，$Y_t/L_t \to \infty$ となる．

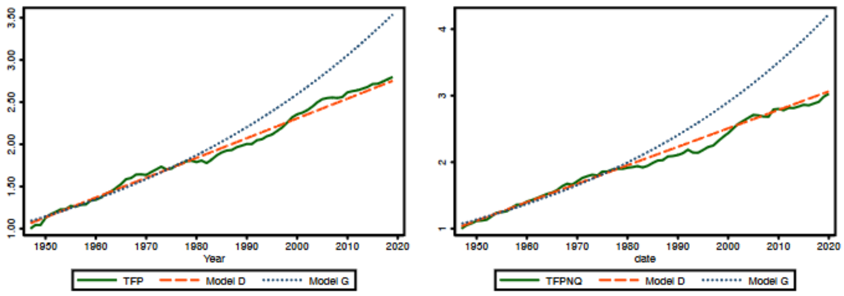
6. ソローモデルの移行動学とは，基本的には資本蓄積の過程である．したがって，基本的なモデルから変更はない．

コメントおよび問題の主旨：非常に単純であるが，このような最新の研究が出てくることがある．Phillipon 教授のこの論文は 2022 年 4 月に発表されたものであり，現存する教科書ではいずれでも扱われ

図 1 Phillipon (2022) より

Figure 1: Out-of-Sample TFP Forecasts

(a) BCL Data (b) Fernald Data



Notes: BCL TFP is in based on $US 2010. Fernald unadjusted TFP, $A_t^{FQ} = A_t^F Q_t^{1-\alpha}$. Both are normalized to 1 in 1947. Models are estimated over 1947-1983. The forecast 1984-2019 is out-of-sample. Data source: Fernald (2012) and Bergeaud et al. (2016).

ていないはずである．しかし，もしこのような生産性に関する研究が本当ならば，今後，マクロ経済の成長に関する理論は大きく変わる可能性がある．そのため，学部生のような若い人は知っておくと良いと思い，出題した．

なお，次の図 1 は Phillipon 教授の論文の図 1 である[*2]．ここでは，二つのサンプル (左図と右図) を使って，指数成長と加法成長の生産性 (TFP) を比較している．

1.7 政府の役割

1. 財市場の均衡条件は，

$$C_t + I_t + G_t = Y_t$$

もしくは，$I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$ なので，

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t + G_t = Y_t$$

でも良い．

2. 財市場の均衡条件に家計の消費関数を代入すると，

$$\begin{aligned}
&(1-s)(Y_t - G_t) + K_{t+1} - (1-\delta)K_t + G_t = Y_t \\
&\Rightarrow K_{t+1} = sY_t - sG_t + (1-\delta)K_t \\
&\Rightarrow K_{t+1} = sY_t - s\gamma Y_t + (1-\delta)K_t \\
&\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t} = s(1-\gamma)\frac{Y_t}{A_t L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t L_t} \\
&\Rightarrow \tilde{k}_{t+1}(1+g^A) = s(1-\gamma)f(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t \\
&\Rightarrow \tilde{k}_{t+1}(1+g^A) = s(1-\gamma)\tilde{k}_t^{\alpha} + (1-\delta)\tilde{k}_t
\end{aligned}$$

と基本方程式が求まる．

[*2] Phillipon,T. (2022). “Additive Growth”, unpublished

3. 定常状態では，$\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}$ となる．したがって，基本方程式は次のように書き換えられる．

$$\tilde{k}(g^A + \delta) = s(1-\gamma)\tilde{k}^{\alpha}$$
$$\Rightarrow \tilde{k} = \left[\frac{s(1-\gamma)}{g^A + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4. もし γ が上昇するとどうなるかを知るためには，次のように微分を計算すればよい．

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \gamma} = -\left[\frac{s}{g^A + \delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{1-\alpha}(1-\gamma)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < 0$$

と，この導関数は負であることが分かる．つまり，γ が上がると $\tilde{k}$ は下がる．言い換えると，政府の支出率の上昇は，効率労働一人あたりの資本を減らしてしまう．

5. $\tilde{k}_t = K_t/(A_t L)$ であるため，この定義を使うと，

$$\frac{\tilde{k}_{t+1}}{\tilde{k}_t} = \frac{\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L}}{\frac{K_t}{A_t L}}$$
$$= \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{A_t}{A_{t+1}}$$

となる．さらに定常状態の定義より，$\tilde{k}_{t+1}/\tilde{k}_t = 1$ なので，

$$1 = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{1}{1+g^A}$$
$$\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + g^A$$

となる．したがって，資本の成長率は政府の政策 γ から独立して決まることが分かる．なお，ここでは示さないが C_t や Y_t の成長率も同様に γ から独立して決まることを示すことができる．このように，ソローモデルにおいて，政府支出率 γ を上げることは成長率を上げることに貢献しないことが分かる．

コメントおよび問題の主旨：ソローモデルは完全競争市場のモデルである．そのため，政策によって効率性が改善しないのは，厚生経済学の基本第一定理の観点からも当然と考えられる．ここでは，ソローモデルを通じて，具体的に計算してもらうことで，そのことを確かめてもらった．

2　連続時間

2.1

スライド通りにやれば直ちに求まる．すなわち，時間の単位を Δ とすると，

$$A_{t+\Delta} - A_t = \Delta g A_t$$
$$\Rightarrow \frac{A_{t+\Delta} - A_t}{\Delta} = g A_t$$

とできる．これを $\Delta \to 0$ という極限を取ると，

$$\dot{A}_t = g A_t$$

とできる．

コメント：連続時間では，

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g$$

というのは，成長率の式なので，比較的よく出てくる．

2.2　連続時間と離散時間の違い

基本方程式の導出はスライドにのっている．すなわち，基本方程式は，

$$\dot{\tilde{k}}_t = sf(\tilde{k}_t) - (a+\delta)\tilde{k}_t$$

である．ここで定常状態の定義 $\dot{\tilde{k}}_t = 0$ を適用すると，

$$sf(\tilde{k}) = (a+\delta)\tilde{k}$$

である．さらに，コブ・ダグラス型生産関数を仮定すると，離散時間のときと同様に，

$$s\tilde{k}^{\alpha} = (a+\delta)\tilde{k}$$
$$\Rightarrow \tilde{k} = \left(\frac{s}{a+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

と黄金律の $\tilde{k}$ が求まる．

これは離散時間のときと同じである．つまり，時間の単位が変わろうが，定常状態の性質は変わらない．直観的には，離散時間と連続時間は時間の流れに関する仮定が違うだけである．一方，定常状態とは時間が止まったような状態なので，定常状態では離散時間と連続時間の違いが効いてくるようなことはほとんどない．