基礎マクロ練習問題：AD-AS モデル

日野将志 *

1　独占と価格の硬直性

1.1　生産関数と費用関数：生産要素がひとつのケース

次の生産関数の費用関数を求めよ．なお，ここでは q を生産量，h を労働時間，w を賃金とする．

1. $q = h$
2. $q = \sqrt{h}$
3. $q = h^{\alpha}$，$\alpha > 0$

1.2　独占の計算問題１

経済の物価 P は 1 とする．この経済に，ある財を独占的に製造している企業が存在する．この財の生産量を q で表すことにする．この企業は，この財を 1 単位生産するために 2 単位だけのコストを支払う必要がある (つまり，費用関数は $C(q) = 2q$).

次に，家計のこの財への需要は,

$$p = 12 - q$$

と与えられるとする．

このとき，次の問いに答えよ．

- 限界費用を答えよ
- 企業の最大化問題を定義せよ
- 一階条件を解いて，企業の最適な生産量と価格，マークアップ率を答えよ
- 最適な生産量・価格における家計の需要の価格弾力性 ϵ を求めよ．そしてマークアップ率と価格弾力性がスライドで示した関係性になっていることを確認せよ
- 仮にこの財に対する需要が急増して,

  $$p = 24 - q$$

  と需要関数が変わったとする．このとき，次の問題に答えよ．
  - 価格を柔軟に変えることが出来るとき，最適な生産量と価格，マークアップ率はどのように変化するか

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

– 価格を変化させられないとする．このとき，最適な生産量とマークアップ率を求めよ

1.3　独占の計算問題 2

独占の計算問題 1 から次の点だけ変更する．企業の費用関数を $C(q) = \frac{1}{2}q^2$ とする．
このとき，次の問いに答えよ．

- 限界費用を答えよ
- 企業の最大化問題を定義せよ
- 一階条件を解いて，企業の最適な生産量と価格，マークアップ率を答えよ
- 最適な生産量・価格における家計の需要の価格弾力性 ϵ を求めよ．そしてマークアップ率と価格弾力性がスライドで示した関係性になっていることを確認せよ
- 仮にこの財に対する需要が急増して，

$$p = 24 - q$$

  と需要関数が変わったとする．このとき，次の問題に答えよ．
  - 価格を柔軟に変えることが出来るとき，最適な生産量と価格，マークアップ率はどのように変化するか
  - 価格を変化させられないとする．このとき，最適な生産量とマークアップ率を求めよ

1.4　独占の計算問題 3

独占の計算問題 1 から次の点だけ変更する．家計の需要を $p = 12/\sqrt{q}$ とする．
このとき，次の問いに答えよ．

- 企業の最大化問題を定義せよ
- 一階条件を解いて，企業の最適な生産量と価格，マークアップ率を答えよ
- 最適な生産量・価格における家計の需要の価格弾力性 ϵ を求めよ．そしてマークアップ率と価格弾力性がスライドで示した関係性になっていることを確認せよ
- 仮にこの財に対する需要が急増して，

$$p = 24/\sqrt{q}$$

  と需要関数が変わったとする．このとき，次の問題に答えよ．
  - 価格を柔軟に変えることが出来るとき，最適な生産量と価格，マークアップ率はどのように変化するか
  - 価格を変化させられないとする．このとき，最適な生産量とマークアップ率を求めよ

2　2 期間 NK モデル：粘着価格による AS 曲線 (難しい，オプショナル)

授業で紹介したように NK モデルの基本的な要素は,

(1) 動学的 IS 曲線
(2) MP 曲線
(3) フィリップス曲線

の三つである.

MP 曲線はすでに紹介したように「このような関数で実際の金融政策を近似できる」という経緯でうまれた[*1]．スライドではフィリップス曲線の導出のみに焦点をあて，フィリップス曲線と関係がない部分は省略していた．この問題では (1)，(2)，(3) のすべての方程式を求めること，そのための色々な細かい点を補足するのが以下のの問題の目的である.

本来の NK モデルの構造はとても複雑なため，問題を分割して，それぞれの問題で NK モデルの基本的な内容を学んでもらう.

2.1　家計：1 期間に複数の財がある場合

例えばこれまで，1 期間に 1 つの財しかないと仮定していた．NK モデルでは (1) 複数の生産者が存在し，(2)「財の価格を変えられない企業 (硬直)」と「財の価格を自由に変えられる企業 (柔軟)」が存在する．つまり，1 つの期間に複数の財が存在する環境を考えることになる．この問題では，そのようなときの家計の最大化問題の解き方や，解の性質を学んでもらう.

それでは，$t = 1, 2$ 期に $\{c_t^a, c_t^b\}$ と 2 種類の財が存在するとする．したがって，経済には合計 4 種類の財が存在する．それぞれの財の価格を $\{p_t^i\}$ と書き，i を財のインデックス ($i \in \{a, b\}$) とする．家計は貯蓄でき，それを s と書く．この貯蓄には名目金利で i がつく．また家計は $\{y_t\}_{t=1,2}$ という所得を得ているとする.

家計の効用は,

$$u(c_1, c_2) = \sum_{t=1}^{2} \beta^{t-1} \log(c_t)$$
$$\text{where } c_t = \left[(c_t^a)^\epsilon + (c_t^b)^\epsilon\right]^{1/\epsilon}$$

とする．ここで，$\epsilon > 0$ は財の間の代替を表すパラメータである.

1. このときの予算制約を書いてみよ.
2. この効用関数の 2 段目の式の名前を答えよ．a と b 財の代替の弾力性を求めよ.
3. 最大化問題を定義せよ．この最大化問題の一階の条件として次の一階の条件を求めよ.
   - $t = 1, 2$ 期それぞれの a 財と b 財の代替を表す一階の条件
   - a, b 財それぞれの 1 期と 2 期の代替を表す一階の条件

[*1] なお，理論的にも MP 曲線は中央銀行の最適化問題の結果として導出できる．このことは政策の進んだ議論のパートで軽く紹介する.

4. 次に，c_1 を所与として，

$$\begin{aligned} &\min \ 1\text{期の支出} \\ &\text{s.t.} \ \left[(c_1^a)^\epsilon + (c_1^b)^\epsilon\right]^{1/\epsilon} = c_1 \end{aligned}$$

という最小化問題を考えよ．この問題を具体的に記述し，次の問いに答えよ．

- この問題の意味を１，２行で説明せよ
- 一階条件を求めよ．
- c_1 の価格，つまり1期の物価を求めよ．なお，1期の物価とは,

$$p_1^a c_1^a + p_1^b c_1^b = P_1 c_1$$

を満たす P_1 のことである．

ヒント：途中式として $c_1^i = c^i(p_1^a, p_1^b, c_1)$ という関数 c^i を求めるとやりやすいかもしれない．

- この P_1 が $P_1 = p_1^a + p_1^b$ となるのはどのようなときか
- $c_1^i = c(p_1^a, P_1, c_1)$ という関数 c を求めよ

5. 同様に c_2 を所与として

$$\begin{aligned} &\min_{c_2^a, c_2^b} \ 2\text{期の支出} \\ &\text{s.t.} \ \left[(c_2^a)^\epsilon + (c_2^b)^\epsilon\right]^{1/\epsilon} = c_2 \end{aligned}$$

という最小化問題を考え，1期のときと同じ問題に答えよ．

6. 最後に,

$$\begin{aligned} \max \ & \log(c_1) + \beta \log(c_2) \\ \text{s.t.} \ & P_1 c_1 + s = y_1 \\ & P_2 c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

という最大問題を解き，一階条件を求めよ．

7. 小問3で得られた一階条件と，小問 4,5,6 で得られた一階条件を比較し異同点を示せ．
8. これまでの議論をより一般に拡張することを考える．そのために，次のような効用関数を考える．

$$\begin{aligned} u(c_1, c_2) &= \sum_{t=1}^{2} \beta^{t-1} \log(c_t) \\ \text{where } c_t &= \left[\sum_{i=1}^{N} (c_t^i)^\epsilon\right]^{1/\epsilon} \end{aligned}$$

これは，$t = 1, 2$ 期のそれぞれの期間で N 種類の財が存在するように，これまでの効用関数が拡張されている．このとき,

- t 期の物価を求めよ
- $c_t^i = c(p_t^i, P_t, c_t)$ を求めよ

コメント：一般化した計算です．これは慣れが必要で最初は難しいと思います．

9. これまでの議論をさらに一般に拡張することを考える．そのために次の効用関数を考える．

$$u(c_1, c_2) = \sum_{t=1}^{2} \beta^{t-1} \log(c_t)$$
$$\text{where } c_t = \left[\int_0^1 (c_t^i)^\epsilon di\right]^{1/\epsilon}$$

これは，$t = 1, 2$ 期のそれぞれの期間で財が $[0, 1]$ 区間の中に無数に存在するように，これまでの効用関数が拡張されている．このとき，

- t 期の物価を求めよ
- $c_t^i = c(p_t^i, P_t, c_t)$ を求めよ

2.2　企業：独占的競争と粘着価格

この問題では，独占的競争というのを問題を通じて教えていく．**独占的競争** (monopolistic competition) とは，次のような市場を意味する．経済には，複数の財が存在し，それらの財はそれぞれ独占的企業によって生産されている．しかし，これらの財は互いに競争し顧客を取り合っている[*2]．このように，独占と競争の両方の性質がある市場を独占的競争という．独占的競争の特徴として，各企業は物価 (経済全体の価格) は所与とするが，自身の製品の価格に関しては価格支配力を持つ．

問題 2.1 の問題文で述べたように，NK モデルでは，「価格が硬直的な独占企業」と「財価格が柔軟な独占企業」の最低でも二種類を考えなければならないため，本当は独占よりも独占的競争のほうが適切である[*3]．それでは次のような経済における企業の問題を考えていこう．さらに，価格の硬直性とは，価格が時間を通じて変えられないことなので，ここでは時間の概念も導入している．

経済には複数種類の財が存在し，すべての財に対して，それを独占的に生産する企業が存在する[*4]．そして，この財の生産は労働を使ってのみ行われるとする．ある財 i を作るための生産関数は，

$$y_t^i = F(H_t^i) = A_t H_t^i \quad t = 1, 2$$

とする．つまり，i とは異なる $j \neq i$ 財を作るにも同じ生産関数が使われ，1 単位の労働を雇うと A_t 単位の生産物が作られる．

さらに，各財への需要を

$$y_t^i = y(p_t^i)$$

とする．つまり，財 i で同じ関数形の需要 $y(\cdot)$ に直面しているとする．さらにこの価格弾力性は e であり，この価格弾力性は価格等に依存しないパラメータとする．

1 期と 2 期の物価を，それぞれ P_1 と P_2 とし，名目賃金も同様に w_1，w_2 とする．実質利子率は r で書く．

[*2] 例えば独占的競争として USJ とディズニーランド，富士急ハイランド等は好例だろう．それぞれ独占的に運営されているが，客を取り合う競争をしている．

[*3] 授業スライドではすこしでも話を単純にするため独占のみを議論した．

[*4] つまり，もし経済に N 種類の財が存在するなら，企業は N 社存在して，それぞれの企業が一つの財を独占的に生産しているとする．ここでは財の数や企業の数を意図的に指定してしないことで，N 種類財があっても無数に財があっても良いように議論している．

これらの企業 i の最大化問題は事実上同じなので，以降ではインデックス i を落としても良い．なお，AD-AS のパートでは，π はインフレ率を表すので，利潤は D で表すことにする[*5].

1. すべての期間で柔軟に価格を変更できる企業の最大化問題を記述せよ．
2. このときの一階条件を求めよ．さらに企業は w/A に対してどれだけマークアップをつけるか求めよ．うまく，価格弾力性の定義を使うこと．
3. 需要関数を $y = y(p)$ としていたが，この需要関数の関数形が前問 2.1 から与えられるとする．つまり，小問 4 と 5 で
$$c_t^i = c(p_t^a, P_t, c_t)$$
という関数を得たはずである (c_t はここでは定数)．この価格弾力性を求めよ．この価格弾力性と財の代替弾力性はどのように異なるか議論せよ．さらにマークアップ率はどのようになるか，ϵ の関数として求めよ．
4. 今期は価格変更できるが，来期価格変更できない企業の 1 期の最大化問題を記述せよ．
5. このときの最適な価格を求めよ．特に $r = 0$ のときの場合，どのような解釈ができるだろうか．
6. 今期は価格変更できる．ただし，来期は価格変更できる確率が $1-\theta$，価格変更できない確率が θ とする．このときの 1 期の最大化問題を記述せよ．
7. このときの最適な価格を求めよ．$r = 0$ として良い．

2.3　一般均衡モデルへ：2 期間 NK モデル

2.1 と 2.2 では家計と企業の問題を考えることで準備をしてきた．本問では最後に一般均衡を解くことで，各企業の価格以外の，まだ解かれていない価格変数 (w_1, w_2, r) を解く．また価格を解く際に NK モデルの特徴を明らかにする．

家計は消費 c_t と余暇 $1-h_t$ から効用を感じるとする．家計の効用関数は,

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{t=1,2} \beta^{t-1} u(c_t, h_t) \\
u(c_t, n_t) &= \log(c_t) - B\log(h_t) && t = 1,2 \\
c_t &= \left[\int_0^1 (c_t^i)^\epsilon di\right]^{1/\epsilon} && t = 1,2 \\
h_t &= \int_0^1 h_t^i di && t = 1,2
\end{aligned}$$

と書けるとする．ここで $B > 0$ は労働による不効用を表す．また，最後の労働に関する集計の意味は，家計は異なる財 $i \in \{a, b\}$ の生産のために働くことができるため，それを集計している．

財 $i \in \{a, b\}$ は独占的な企業によって生産されているが，これらの独占企業は互いに競争的である．財 i を生産する企業の生産関数は,

$$y_t^i = A_t H_t^i, \quad t = 1, 2$$

とする．つまり A_t は時間を通じて変化するが，財の間では共通の生産性である．この企業は家計によって所有されている．

[*5] Dividend(配当) の D である．

さらに，この経済には資本が存在しない．また政府も存在しないとする．そのため，均衡では貯蓄はゼロになる[*6]．

$$s = 0$$

1. 財市場と労働市場の均衡条件を書け
2. 家計は s によって貯蓄をすることができ，1 期に貯蓄をすると，2 期に名目金利 $1+i$ だけ付いたリターンを得られるとする．このときの家計の異時点間の問題のみ考えるときの予算制約を書いてみよ．もし必要であれば，企業の利潤は d_t で書くこと．
3. 家計の異時点間の最大化問題を解いて，オイラー方程式，および消費と労働の代替の条件を求めよ．なお，ここで実質利子率を定義し，それにもとづいたオイラー方程式も書いてみよ．
4. 家計の t 期のみの問題を解いて，$c_t^i = c(p_t^i, P_t, c_t)$ という需要関数を求めよ
5. 家計の需要関数 $c(p_t^i, P_t, c_t)$ を使って，価格が常に自由に変えられる独占企業の最大化問題を定義し，利潤を最大化する価格を求めよ．
6. 集計した結果 $Y_t = A_t H_t$ は成り立つかどうか確認せよ．またこの結果は価格が自由に変えられる時と硬直的なときで結果が変わるか予想せよ．
7. すべての企業が自由に価格を変えられるとき，物価 P_t を求めよ．
8. 次のような価格の粘着性が存在する世界を考える．経済の $1-\theta \in (0,1)$ 割合の企業が価格を自由に変えられず，次のような p^R という価格を付けているとする．

$$p^R = \frac{e}{e-1}\frac{1}{2}\left[\frac{w_0}{A_0} + \frac{w_1}{A_1}\right]$$

ここで w_0 と A_0 は 0 期の賃金と生産性を表すパラメータとする．このときの物価を求めよ．
コメント：企業のインデックスについて $i \in [0,\theta)$ を価格が変えらる企業とする．

[*6] 予算制約を書くときは貯蓄を 0 にしないこと．初めから貯蓄 0 を仮定することと，均衡で 0 を仮定することは異なる．