

基礎マクロ練習問題：ソローモデル

日野将志*

1

1.1 生産性の成長のないソローモデル

生産関数は

$$Y = F(K, N)$$

とする。つまり、授業の場合と比較して、生産性 A が $A = 1$ と固定されている場合を考える。

$k = K/N$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- 基本方程式を求めよ。
- 定常状態を $k = k'$ と定義する。このとき定常状態で k はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の k が決まる条件を求めよ。

1.2 コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

コブ・ダグラス型の生産関数

$$Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$$

を仮定する。

このとき次の問いに答えよ。

- $f(k) = k^\alpha$ となることを示せ
- 基本方程式を求めよ
- 黄金律の k を求めよ
- 黄金律の水準における、家計の一人当たりの消費水準を求めよ

1.3 人口成長

次のような人口成長を考える。

$$N' = (1 + n)N$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

つまり、 n は人口成長率である。この n は外生変数とする。このとき、次の問いに答えよ。なお、生産関数は一般の形のまま（つまり、 F や f のまま）とする。

- 基本方程式を求めよ。ただし、 N が式中出现ないようにすること（ n は出てきて良い）。
- 黄金律の k が決まる条件を求めよ。

1.4 生産性の成長とコブ・ダグラス型生産関数

次のような生産性 A を考える

$$Y = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$$

さらに、この生産性 A は次のように成長するとする。

$$A' = (1 + a)A$$

したがって、この a は生産性の成長率である。このとき、次の問いに答えよ。なお、生産関数は一般の形のまま（つまり、 F や f のまま）とする。

なお、以降では k の代わりに $\tilde{k} \equiv K/(AN)$ を用いて、以下の問いに答えること。

- 生産性の成長のある生産関数は次のように分類される。このコブ・ダグラス型生産関数はいずれに分類されるか答えよ
 - － ハロッド中立： $F(K, AN)$
 - － ヒックス中立： $F(AK, N)$
 - － ソロー中立： $AF(K, N)$
- 基本方程式を求めよ。ただし、 A が式中出现ないようにすること（ g_a は出てきて良い）。
- 定常状態を $\tilde{k} = \tilde{k}'$ と定義する。このとき定常状態で $k(\neq \tilde{k})$ はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の \tilde{k} を求めよ。さらに a が変わるとどうなるか分析せよ。
- 黄金律における一人当たり消費 C/N を求めよ。
- 定常状態における r と w の動きを分析せよ。

2 連続時間

2.1 連続時間化

離散時間モデル $A_{t+1} = (1 + g)A_t$ の式を連続時間に直せ。

2.2 連続時間と離散時間の違い：コブ・ダグラス型関数の場合

$F(K, AN) = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$ とする。 $\dot{A}_t = aA_t$ と成長する。

連続時間において、定常状態は $\dot{\tilde{k}}_t = 0$ と定義される。このとき、次の問いに答えよ。

- 黄金律の \tilde{k} を求めよ。
- 黄金律の \tilde{k} は離散時間の場合と異なるか？比較・議論せよ。