基礎マクロ練習問題の**解答例**：労働時間

日野将志 *

1　静学的なモデル

1.1

全ての場合で,

$$(c, l, h) = \left(\frac{w}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる.

コメントおよび問題の主旨：「効用関数は単調変換をしても解が変わらない」という特徴がある. 数学的にこれは, $u(\cdot)$ を元々の効用関数としてこの解を x^* とする. このとき, 別の関数 g をつかって, 効用関数を $g \circ u(\cdot)$ としなおしても, この解は元の解と同じ x^* ということである.

より具体的に, 元々の関数が $u(c, l) = \log c + \log l$ であるとき, ふたつめの効用関数は, $g(x) = \frac{1}{2}x$ であり, $g \circ u = \frac{1}{2}\log c + \frac{1}{2}\log l$ となっている. これは $g(x) = 5x$ のときも, $g(x) = \alpha x$ のときも, $g(x) = x + 5$ のときも変わらないことをそれぞれ確認することがこの問題の趣旨である.

1.2　様々な効用関数

1.2.1　対数効用

$$\begin{aligned} &\max_{c,l}\ \alpha\log(c) + (1-\alpha)\log(l) \\ &\text{s.t. } c = w(1-l) \end{aligned}$$

が最適化問題である。

予算制約を目的関数に代入すると、

$$\max_{l} \alpha\log(w(1-l)) + (1-\alpha)\log(l)$$

を得る。次に、これを微分して 0 を求めると、

$$\begin{aligned} &\alpha\frac{1}{1-l} = (1-\alpha)\frac{1}{l} \\ &\Rightarrow l = 1-\alpha \end{aligned}$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

を得る。これよりただちに、

$$h = \alpha$$

であることも $1 = h + l$ より分かる。

最後に消費は、$c = wh$ なので、

$$c = w\alpha$$

であることが分かる。

1.2.2　コブ・ダグラス型

$$\begin{aligned} &\max_{c,l}\ c^{\alpha} l^{1-\alpha} \\ &\ \text{s.t. } c = w(1-l) \end{aligned}$$

これを代入すると、

$$\max_{l} [w(1-l)]^{\alpha} l^{1-\alpha}$$

である。これの微分して 0 は

$$\begin{aligned} &\alpha w^{\alpha}(1-l)^{\alpha-1} l^{1-\alpha} = [w(1-l)]^{\alpha}(1-\alpha) l^{-\alpha} \\ &\Rightarrow \alpha l = (1-\alpha) l \\ &\Rightarrow l = 1-\alpha \end{aligned}$$

が得られる。これは先ほどの対数効用の解答と同じである。予算制約は同じなので、(c, l, n) はさきほどと全く同じになる。

このように同じ解になる理由は、コブ・ダグラス型効用を対数を取ると、先ほどの対数効用関数になるからである。効用関数はいかなる単調増加変換をしても解が変わらないという特徴を持っている (詳しくはミクロ経済学で効用関数の序数性という点で習うかなと思います)。

1.2.3　準線形：Hansen-Rogerson 型

最大化問題は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} &\max_{c,l}\ \log(c) + Bl \\ &\ \text{s.t. } c = w(1-l) \end{aligned}$$

これまで同様に制約条件を代入する。

$$\max_{l} \log(w(1-l)) + Bl$$

微分して 0 を解くと、次を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-l} = B \\ &\Rightarrow l = 1 - \frac{1}{B} \end{aligned}$$

したがって，

$$h = \frac{1}{B}$$

である．最後に消費は，

$$c = \frac{w}{B}$$

このように，余暇時間 l や労働時間 h は賃金 w に依存していない．つまり，賃金が変化しても，余暇や労働時間は変化しない．賃金の変化は消費 c に全て反映される．

1.2.4　GHH 型効用関数

最大化問題は以下のとおりである。

$$\max_{c,l} \ \log\left(c - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$$
$$\text{s.t. } c = w(1-l)$$

これまで同様に制約条件を代入する。

$$\max_{l} \log\left(w(1-l) - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)$$

微分して 0 を解くと、次をえる。

$$\begin{aligned}
&\frac{w}{w(1-l) - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}} = \frac{(1-l)^{\eta}}{w(1-l) - \frac{(1-l)^{1+\eta}}{1+\eta}} \\
&\Rightarrow w = (1-l)^{\eta} \\
&\Rightarrow l = 1 - w^{\frac{1}{\eta}}
\end{aligned}$$

これが余暇時間である。これは対数効用関数やコブ・ダグラス型と違って賃金に依存していることに注目してほしい。

また $h + l = 1$ より直ちに労働時間を導くことも出来る。

$$h = w^{\frac{1}{\eta}}$$

最後に $c = wh$ より

$$c = w^{\frac{1+\eta}{\eta}}$$

を得る。

コメント及び問題の主旨：まず、労働供給が賃金に依存するような効用関数を紹介することが一つ目の意図である。対数効用関数やコブ・ダグラス型の場合、労働供給が賃金に依存しないのは大きな特徴である。

1.3　対数効用と逆算：推定的な考え方

今回の最適化問題は次のようなものである．

$$\max_{c,l} \ \alpha \log c + (1-\alpha)\log l$$
$$\text{s.t. } c = w(1-\tau)(1-l)$$

これを目的関数に代入すると，

$$\max_{l}\ \alpha\log(w(1-\tau)(1-l))+(1-\alpha)\log l$$

となる．この一階の条件は，

$$\begin{aligned}&-\alpha\frac{1}{1-l}+(1-\alpha)\frac{1}{l}=0\\&\Rightarrow l=1-\alpha\end{aligned}$$

と余暇時間が求まる．またこれを予算制約に代入することにより，

$$c=\alpha w(1-\tau)$$

と消費も求まる．

$\tau=0$ のときに，$(c,w)=(1,2)$ となるような α とは，$c=\alpha w$ より，

$$\begin{aligned}1&=\alpha 2\\\Rightarrow \alpha&=1/2\end{aligned}$$

と求めることが出来る．

さらに，$\tau=0.1$ になった場合，

$$\begin{aligned}c&=0.5\times 2\times(1-0.1)\\&=0.9\end{aligned}$$

となる．一方，労働時間は所得税の変更に影響されない．したがって，この国 A における消費と労働時間は，

$$(c,l)=(0.9,0.5)$$

となる．

コメントおよび問題の主旨：これはモデルの推定というような手続きを単純化したような問題である．つまり，実際に経済モデルの分析は，次のような手続きを経ることが一般的である．

(1) (過去の研究に基づきつつも，新しい要素を加えた) モデルを構築する
(2) データを集める
(3) モデルの解とデータが合うような，パラメータを設定する
(4) パラメータの値を決めたモデルを使って，いろいろな経済実験をする

ここでは，仮にステップ 1 と 2 が問題文によって与えられており，ステップ 3 とステップ 4 を実際に解いてもらう問題であった．実際の論文では，モデルの新規性や，ステップ 3 の精度の高さなどが色々と議論になりうる．

2　所得税

2.1　一括税のみ

　最適化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c,l,h}\ & \log(c)+\log(l) \\ \text{s.t. } & c = wh - T \\ & 1 = h + l \end{aligned}$$

である。これを整理して、目的関数に代入すると、

$$\max_{l} \log(w(1-l)-T)+\log(l)$$

である。これを微分して $=0$ を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{w}{w(1-l)-T} &= \frac{1}{l} \\ \Rightarrow wl &= w - wl - T \\ \Rightarrow 2wl &= w - T \\ \Rightarrow l &= \frac{w-T}{2w} \end{aligned}$$

となる。したがって、これを $1 = h + l$ に代入すると、

$$\begin{aligned} h &= 1 - \frac{w-T}{2w} \\ \Rightarrow h &= \frac{w+T}{2w} \end{aligned}$$

を得られる。次に、これを予算制約 $c = wh - T$ に代入すると、

$$\begin{aligned} c &= \left[\frac{w+T}{2} - T\right] \\ \Rightarrow c &= \frac{w-T}{2} \end{aligned}$$

である。

　まとめると、

$$(c,h,l) = \left(\frac{w-T}{2}, \frac{w+T}{2w}, \frac{w-T}{2w}\right)$$

が得られる。

　ただし、ここで注意が必要である。例えば T の値を指定していないので、$T > w$ の場合、上記の式のままだと $c < 0$ となる。一方、現実に負の消費は考えられない．そのため，$T > w$ のときは、$c = 0$ とする。したがって、消費に関しては正確には

$$c = \begin{cases} \frac{w-T}{2} & \text{if } w - T \geq 0 \\ 0 & \text{if } w - T < 0 \end{cases}$$

である。

　同様に、余暇時間 l に関しても、$w < T$ のときには余暇時間が負になる可能性がある。また、労働時間 h に関しても、$w < T$ のときには 1 を越えてしまう可能性がある。これらを考慮すると、

$$(l,h) = \begin{cases} \left(\frac{w-T}{2w}, \frac{w+T}{2w}\right) & \text{if } w-T \geq 0 \\ (0,1) & \text{if } w-T < 0 \end{cases}$$

である。

　コメントおよび問題の主旨：T のように，家計の特徴 (例えば所得，消費，資産) に依存させずに一括に取るような税を一括税と呼ぶ.

　ここで経済のモデリング的に重要な含意は，余暇と労働時間が w に依存するようになったことである. つまり，効用関数を変えずとも，モデルの税制を変えることで，労働時間が賃金に影響されるようになる.

2.2　所得税と一括税

2.2.1　対数効用

　最適化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c,l,h} \ & \log(c) + \log(l) \\ \text{s.t. } & c = (1-\tau)[wh - T] \\ & 1 = h + l \end{aligned}$$

である。これを整理して、目的関数に代入すると、

$$\begin{aligned} & \max_l \log((1-\tau)[w(1-l) - T]) + \log(l) \\ \Leftrightarrow & \max_l \log(1-\tau) + \log([w(1-l) - T]) + \log(l) \end{aligned}$$

である。これを微分して $= 0$ を求めると、

$$\begin{aligned} & \frac{w}{w(1-l) - T} = \frac{1}{l} \\ & \Rightarrow wl = w - wl - T \\ & \Rightarrow 2wl = w - T \\ & \Rightarrow l = \frac{w-T}{2w} \end{aligned}$$

となる。したがって、これを $1 = h + l$ に代入すると、

$$\begin{aligned} h &= 1 - \frac{w-T}{2w} \\ \Rightarrow h &= \frac{w+T}{2w} \end{aligned}$$

を得られる。次に、これを予算制約 $c = (1-\tau)[wh - T]$ に代入すると、

$$\begin{aligned} c &= (1-\tau)\left[\frac{w+T}{2} - T\right] \\ \Rightarrow c &= (1-\tau)\frac{w-T}{2} \end{aligned}$$

である。

まとめると、

$$(c,h,l)=\left((1-\tau)\frac{w-T}{2},\frac{w+T}{2w},\frac{w-T}{2w}\right)$$

が得られる。

ただし、ここで注意が必要である。例えば T の値を指定していないので、$T>2$ の場合、上記の式のままだと $c<0$ となる。一方、現実に負の消費は考えられないので、$c=0$ とする。したがって、消費に関しては正確には

$$c=\begin{cases}(1-\tau)\frac{w-T}{2} & \text{if } w-T\geq 0\\ 0 & \text{if } w-T<0\end{cases}$$

である。

同様に、余暇時間 l に関しても、$w<T$ のときには余暇時間が負になる可能性がある。また、労働時間 h に関しても、$w<T$ のときには 1 を越えてしまう可能性がある。これらを考慮すると、

$$(l,h)=\begin{cases}\left(\frac{w-T}{2w},\frac{w+T}{2w}\right) & \text{if } w-T\geq 0\\ (0,1) & \text{if } w-T<0\end{cases}$$

である。なお、この問題では $l>1$ や $h<0$ になるような場合は発生しない[*1]。

$c>0$ の範囲で、次のように微分をする。

$$\frac{\partial c}{\partial \tau}=-\frac{w-T}{2}$$
$$\frac{\partial c}{\partial T}=-\frac{1-\tau}{2}$$

どちらも符号は負である。したがって、どちらの増税も、消費を減少させることが分かる。

次に、l について考える。同様に導関数を計算すると、

$$\frac{\partial l}{\partial \tau}=0$$
$$\frac{\partial l}{\partial T}=-\frac{1}{2w}$$

となる。したがって、労働所得税率 τ は余暇時間には影響しない。一方、二本目の符号は負なので、T の増加は余暇時間を減らすことが分かる。

2.2.2

コメント及び問題の主旨：

場合分けが必要な問題を出題すること、ちょっとした拡張によってモデルの含意が変わることを示す例として出題した。例えば、授業スライドでは、余暇時間 l は w に依存していなかったが、T を追加することで l が w に依存するようになった。

[*1] もし $-T\geq w$ であれば、$l>1$ となるが、$(w,T)>0$ なので、そのような状態を排除している。

2.3 累進課税：HSV 労働所得税

最適化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c,l,h}\ & \alpha \log c + (1-\alpha)\log l \\ \text{s.t.}\ & c = y - T(y) \\ & T(y) = y - (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}}{1-\xi} \\ & y = wh \\ & 1 = h + l \end{aligned}$$

である。

これを目的関数に代入すると、

$$\begin{aligned} & \max_l \alpha \log\left((1-\tau)\frac{[w(1-l)]^{1-\xi}}{1-\xi}\right) + (1-\alpha)\log l \\ \Leftrightarrow & \max_l \alpha \log\left((1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}\right) + \alpha(1-\xi)\log(1-l) + (1-\alpha)\log l \end{aligned}$$

と書き直すことができる。

これをまた、微分して 0 を取ると、

$$\begin{aligned} & -\alpha\frac{(1-l)^{-\xi}}{\frac{(1-l)^{1-\xi}}{1-\xi}} + (1-\alpha)\frac{1}{l} = 0 \\ & \Rightarrow \alpha\frac{1-\xi}{1-l} = (1-\alpha)\frac{1}{l} \\ & \Rightarrow \alpha(1-\xi)l = (1-\alpha)(1-l) \\ & \Rightarrow \left(1 + (1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) l = 1 \\ & \Rightarrow l = \frac{1}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

と余暇時間を解くことが出来る。

また、労働時間は $1 = h + l$ より、

$$\begin{aligned} h &= 1 - \frac{1}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= \frac{(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

と得られる。

最後に消費は予算制約に h を代入することで得られる。

$$\begin{aligned} c &= (1-\tau)\frac{[wh]^{1-\xi}}{1-\xi} \\ &= (1-\tau)\frac{1}{1-\xi}w^{1-\xi}\left(\frac{(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\xi} \end{aligned}$$

2.3.1

例えば、余暇時間 l が税 (τ,ξ) の変化にどのように反応するか検討する。それぞれ微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial \tau} &= 0\\ \frac{\partial l}{\partial \xi} &= \frac{\frac{\alpha}{1-\alpha}}{\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2}\end{aligned}$$

となる。つまり税の基本的な水準 τ が変わっても余暇時間は変化しないが、累進度 ξ が上がると余暇時間が増えることが分かる。これは累進度が上がると働くインセンティブが減り、余暇時間をたくさん取るようになるためである。

次に労働時間がどう変わるかも分析しよう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \tau} &= 0\\ \frac{\partial h}{\partial \xi} &= \frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)+(1-\xi)\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2}{\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\left(1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2}\end{aligned}$$

となる。したがって、税の基本的な水準 τ の変化は労働時間に影響しない。一方、累進度 ξ の上昇は、労働時間 h の減少を招く。これは、累進度が上がると、多く働いてもさほど給料が増えないためである。

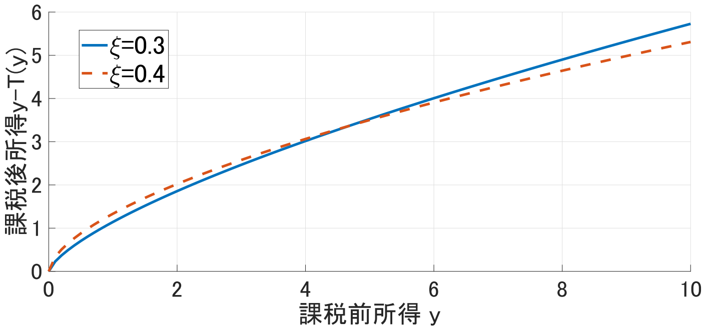
消費がどう変わるか分析しよう。まず τ の変化について

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{1}{1-\xi}w^{1-\xi}\left(\frac{(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}{1+(1-\xi)\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\xi}$$

である。したがって、税の基本的な水準 τ の上昇は消費 c の下落を招く。これまでの分析と統合すると、τ が上昇することによる増税は、労働時間や余暇時間には一切影響を与えず、消費の水準を下げることが分かる。

次に ξ の変化を分析する。これは素直に計算するとと少し面倒なので次のように計算する。一般に、$da^{1-x}/dx = -a^{1-x}\log a$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}c &= (1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}\times h(\xi)^{1-\xi}\\ \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} &= (1-\tau)h(\xi)^{1-\xi}\frac{-w^{1-\xi}\log w + w^{1-\xi}}{(1-\xi)^2} + (1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}(-h^{1-\xi}\log h)\frac{\partial h}{\partial \xi}\\ \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} &= (1-\tau)h(\xi)^{1-\xi}\frac{w^{1-\xi}(1-\log w)}{(1-\xi)^2} - (1-\tau)\frac{w^{1-\xi}}{1-\xi}(h^{1-\xi}\log h)\frac{\partial h}{\partial \xi}\\ \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial \xi} &= (1-\tau)h(\xi)^{1-\xi}w^{1-\xi}\frac{1}{1-\xi}\left[\frac{(1-\log w)}{(1-\xi)}\underbrace{-(\log h)\frac{\partial h}{\partial \xi}}_{<0}\right]\end{aligned}$$



図表注：累進度 ξ を二つの値で比べている。その結果、累進度が 0.3 から 0.4 に上がっても、課税前所得 y が低い人にとっては課税後所得が上がっていることが分かる。

となる。すでに $\frac{\partial h}{\partial \xi} < 0$ であることは計算した。$h \in (0,1)$ なので $\log h < 0$ である。したがって、右辺第二項は確定する。右辺第一項は $w > 0$ の条件しかないので、$1 - \log w$ の符号は確定しない。ξ の上昇によって消費 c が上昇するか減少するかは不明である。

この符号が確定しない理由は HSV 型にある。つまり、課税後所得

$$y - T(y) = (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}}{1-\xi}$$

を考える。これの累進度の変更を考えると、

$$\frac{\partial y - T(y)}{\partial \xi} = (1-\tau)\frac{y^{1-\xi}(1-\log y)}{(1-\xi)^2}$$

となり、これも符号が確定しない ($1 - \log y$ 次第)。以下の図は、数値例を入れて ξ が変わったときに $y - T(y)$ がどう変わるか示したもの。

コメント及び問題の主旨：　おそらく学部生に HSV の累進課税を教えているところは世界的にも無いと思います。しかし、こういう解析解が得られる関数形はとても便利で、論文を書くのにとても役に立つと思います。卒論や修論でも何か出来るんじゃないかな、と期待して出題しました。間違いなく、先端では良く使われる関数形なので、「学部生には無駄」と思わず勉強されると良いと思います[*2]。

3　2 期間：消費・貯蓄・余暇

3.1

3.1.1　対数効用

最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s}\ & \alpha\log(c_1) + (1-\alpha)\log(l_1) + \beta[\alpha\log(c_2) + (1-\alpha)\log(l_2)] \\ \text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\ & c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s\end{aligned}$$

である.

[*2] 例えば HSV 以外の著者が HSV 税関数を使ってる例としては Midrigan and Boar(2021)。

予算制約を目的関数に代入すると，

$$\max_{l_1,l_2,s} \alpha\log(w_1(1-l_1)-s)+(1-\alpha)\log(l_1)+\beta[\alpha\log(w_2(1-l_2)+(1+r)s)+(1-\alpha)\log(l_2)]$$

とできる．これの一階の条件は，

$$\begin{aligned} l_1 &: \alpha\frac{-w_1}{w_1(1-l_1)-s}+(1-\alpha)\frac{1}{l_1}=0 \\ l_2 &: \alpha\frac{-w_2}{w_2(1-l_2)+(1+r)s}+(1-\alpha)\frac{1}{l_2}=0 \\ s &: \alpha\frac{-1}{w_1(1-l_1)-s}+\beta\alpha\frac{1+r}{w_2(1-l_2)+(1+r)s}=0 \end{aligned}$$

である．

これらを予算制約を使って整理すると，

$$\begin{aligned} \alpha\frac{w_1}{c_1} &= (1-\alpha)\frac{1}{l_1} \quad\Leftrightarrow\quad w_1l_1=\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1 \\ \alpha\frac{w_2}{c_2} &= (1-\alpha)\frac{1}{l_2} \quad\Leftrightarrow\quad w_2l_2=\frac{1-\alpha}{\alpha}c_2 \\ \alpha\frac{1}{c_1} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_2} \quad\Leftrightarrow\quad c_2=\beta(1+r)c_1 \end{aligned}$$

となる．

さらに，2 本の予算制約をそれぞれ代入すると，

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}=w_1(1-l_1)+\frac{w_2(1-l_2)}{1+r}$$

と生涯予算制約を得る．これに先ほど整理した一階の条件を代入すると，

$$\begin{aligned} & c_1+\frac{\beta(1+r)}{1+r}c_1=w_1-\frac{1-\alpha}{\alpha}c_1+\frac{w_2}{1+r}-\frac{1}{1+r}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\beta(1+r)c_1\right] \\ & \Rightarrow (1+\beta)c_1=w_1+\frac{w_2}{1+r}-\frac{1-\alpha}{\alpha}(1+\beta)c_1 \\ & \Rightarrow \frac{1+\beta}{\alpha}c_1=w_1+\frac{w_2}{1+r} \\ & \Rightarrow c_1=\alpha\frac{1}{1+\beta}\left[w_1+\frac{w_2}{1+r}\right] \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} c_2 &= \alpha\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[w_1+\frac{w_2}{1+r}\right] \\ l_1 &= \frac{1-\alpha}{w_1}\frac{1}{1+\beta}\left[w_1+\frac{w_2}{1+r}\right] \\ l_2 &= \frac{1-\alpha}{w_2}\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[w_1+\frac{w_2}{1+r}\right] \end{aligned}$$

労働供給がないとき，家計消費はそれぞれ，

$$\begin{aligned} \hat{c_1} &= \frac{1}{1+\beta}\left[y_1+\frac{y_2}{1+r}\right] \\ \hat{c_2} &= \alpha\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1+\frac{y_2}{1+r}\right] \end{aligned}$$

であった．つまり，労働供給を導入することで，α の項が追加されたこと，と w_1, w_2 が y_1, y_2 に置き換わったことが変わっている．

労働供給があるとき，対数効用やコブ・ダグラス型の場合，α は消費と労働のシェアを表しているため，総予算の α を消費に，$(1-\alpha)$ を余暇の金銭価値 wl に配分していることが分かる．

3.1.2　コブ・ダグラス型

これは対数効用と一致する．

3.1.3　準線形：Hansen Rogerson 型

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s} \quad & \log(c_1) + Bl_1 + \beta[\log(c_2) + Bl_2] \\
\text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\
& c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s
\end{aligned}
$$

これらを目的関数に代入すると，

$$
\max_{l_1,l_2,s} \log(w_1(1-l_1)-s) + Bl_1 + \beta[\log(w_2(1-l_2)+(1+r)s) + Bl_2]
$$

である．この一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
l_1 &: \frac{1}{1-l_1} = B \\
l_2 &: \frac{1}{1-l_2} = B \\
s &: \frac{1}{w_1(1-l_1)-s} = \beta(1+r)\frac{1}{w_2(1-l_2)+(1+r)s}
\end{aligned}
$$

である．これらを整理すると，

$$
\begin{aligned}
l_1 &= l_2 = 1 - \frac{1}{B} \\
c_2 &= \beta(1+r)c_1
\end{aligned}
$$

とできる．

生涯予算制約は，対数効用の場合と同じであり，

$$
c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1(1-l_1) + \frac{w_2(1-l_2)}{1+r}
$$

である．これに整理した一階の条件を代入すると，

$$
\begin{aligned}
c_1 + \beta c_1 &= \frac{w_1}{B} + \frac{w_2}{(1+r)B} \\
\Rightarrow c_1 &= \frac{1}{B}\frac{1}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

と c_1 を得る．

これを整理した一階の条件に代入すると，

$$
c_2 = \frac{1}{B}\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[w_1 + \frac{w_2}{1+r}\right]
$$

と c_2 も得られる．

3.1.4　GHH 型

最大化問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s}\ & \log\left(c_1 - \frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}\right) + \beta\log\left(c_2 - \frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}\right) \\
\text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\
& c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s
\end{aligned}
$$

である．

これを目的関数に代入すると，

$$
\max_{l_1,l_2,s}\ \log\left(w_1(1-l_1) - s - \frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}\right) + \beta\log\left(w_2(1-l_2) + (1+r)s - \frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)
$$

となる．

この一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
l_1 &: w_1 = (1-l_1)^\eta \\
l_2 &: w_2 = (1-l_2)^\eta \\
s &: \frac{1}{w_1(1-l_1) - s - \frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}} = \frac{\beta(1+r)}{w_2(1-l_2) - (1+r)s - \frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}}
\end{aligned}
$$

である．

ここから直接的に，l_1 と l_2 が解けるのが GHH 型の特徴である．つまり，2 期間モデルであっても，

$$
\begin{aligned}
l_1 &= 1 - w_1^{\frac{1}{\eta}} \\
l_2 &= 1 - w_2^{\frac{1}{\eta}}
\end{aligned}
$$

と解ける．それぞれ l_t が，$w_j, j \neq t$ にも r にも依存していないのが大きな特徴である[*3]．これより，

$$
\begin{aligned}
h_1 &= w_1^{\frac{1}{\eta}} \\
h_2 &= w_2^{\frac{1}{\eta}}
\end{aligned}
$$

も直ちに求まる．なお

$$
w_t h_t = w_t^{\frac{1+\eta}{\eta}} = (1-l_t)^{1+\eta}, \quad \text{for } t = 1, 2
$$

は便利な関係である[*4]．

つぎに，一階条件の 3 本目の式を整理すると，

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{c_1 - \frac{(1-l_1)^{1+\eta}}{1+\eta}} = \frac{\beta(1+r)}{c_2 - \frac{(1-l_2)^{1+\eta}}{1+\eta}} \\
& \Rightarrow c_2 = \beta(1+r)\left(c_1 - \frac{w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}\right) + \frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}
\end{aligned}
$$

[*3] つまり，l_1 は w_2 に依存していないし，l_2 は w_1 に依存していない．

[*4] この一番右の項は効用関数に出てくる．これが $w_t h_t$ と一致する．

となる．

また生涯予算制約は対数効用の場合と同じであり，

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w_1(1-l_1) + \frac{w_2(1-l_2)}{1+r}$$

である．これにこれまで得た結果を代入すると，

$$\begin{aligned}
c_1 + \frac{1}{1+r}\left[\beta(1+r)\left(c_1 - \frac{w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}\right) + \frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta}\right] &= w_1^{\frac{1}{\eta}+1} + \frac{w_2^{\frac{1}{\eta}+1}}{1+r} \\
\Rightarrow c_1[1+\beta] = w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+r} + \beta\frac{w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta} - \frac{1}{1+r}\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+\eta} \\
\Rightarrow c_1[1+\beta] = \left[\frac{1+\eta+\beta}{1+\eta}\right] w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \left[\frac{1+\eta-1}{(1+r)(1+\eta)}\right]\frac{w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}}{1+r} \\
\Rightarrow c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[\frac{1+\eta+\beta}{1+\eta} w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{\eta}{1+\eta}\frac{1}{1+r} w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}\right]
\end{aligned}$$

と c_1 が求まる．

最後に，これをオイラー方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}
c_2 &= \beta(1+r)\underbrace{\frac{1}{1+\eta}\frac{1}{1+\beta}\left[(1+\eta+\beta)w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{\eta}{1+r}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}\right]}_{c_1} - \frac{\beta(1+r)}{1+\eta}w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{1}{1+\eta}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}} \\
&= \left[\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\frac{1+\eta+\beta}{1+\eta} - \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\frac{1+\beta}{1+\eta}\right] w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \left[\beta\frac{\eta}{1+\eta}\frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\eta}\frac{1+\beta}{1+\beta}\right] w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}} \\
&= \frac{1+r}{1+\beta}\left[\frac{\beta\eta}{1+\eta}w_1^{\frac{1+\eta}{\eta}} + \frac{1+\beta+\beta\eta}{1+\eta}\frac{1}{1+r}w_2^{\frac{1+\eta}{\eta}}\right]
\end{aligned}$$

と c_2 も求まる．

コメントおよび問題の主旨：一般に，GHH は動学的な環境においても，静学的な労働供給を導入する際に使われる．というのも，労働供給まで動学的になってしまうと，分析が複雑になり過ぎて解けない，or/and 解くこと自体が負担になり過ぎて複雑な経済的な分析が不可能になってしまう．つまり，GHH は分析の複雑化を回避しつつ，労働供給を分析するモデル化としてよく使われる．

3.1.5　加法分離型

最大化問題は

$$\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s}\ & \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{l_1^{1+\eta}}{1+\eta} + \beta\left[\frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{l_2^{1+\eta}}{1+\eta}\right] \\
\text{s.t. } & c_1 + s = w_1(1-l_1) \\
& c_2 = w_2(1-l_2) + (1+r)s
\end{aligned}$$

である．

予算制約を目的関数に代入すると，

$$\max_{l_1,l_2,s} \frac{[w_1(1-l_1)-s]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{l^{1+\eta}}{1+\eta} + \beta\left[\frac{[w_2(1-l_2)+(1+r)s]^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{l_2^{1+\eta}}{1+\eta}\right]$$

である．この l_1 と l_2 に対する一階の条件は

$$w_t^{1-\sigma}(1-l_t)^{-\sigma} = l_t^{\eta}, \quad \text{for } t = 1, 2$$

という形になる．これは $l_t,\ t = 1, 2$ について解くことが出来ない．したがって，これ以上解くことも出来ない．