基礎マクロ練習問題：ソローモデル

日野将志 *

1　離散時間

1.1　生産要素への支払い

スライドと同じケース (つまり，生産性の成長があり，生産関数は一般形) で，

- (r, w) をそれぞれ，K, L ではなく，$\tilde{k}$ の関数として求めよ
- (r, w) の定常状態での成長率を求めよ
- 黄金律の貯蓄率，つまり効率労働一人あたり消費を最大化する貯蓄率を条件づける方程式を導出せよ．それを用いて，r と g^A の関係について議論せよ．

1.2　生産性の成長のないソローモデル

生産関数は

$$Y = F(K, N)$$

とする．つまり，授業の場合と比較して，生産性 A が $A = 1$ と固定されている場合を考える．

$k = K/N$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

- 基本方程式を求めよ．
- 定常状態を $k = k'$ と定義する．このとき定常状態で k はどのように動くか分析せよ

1.3　コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

コブ・ダグラス型の生産関数

$$Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

を仮定する．ここで $\alpha \in (0, 1)$ はパラメータである．

このとき次の問いに答えよ．

- $f(k) = k^{\alpha}$ となることを示せ
- 基本方程式を求めよ

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- 定常状態の k を求めよ
- 　定常状態における，家計の一人当たりの消費水準を求めよ
- 黄金律の貯蓄率を求めよ
- 黄金律の一人当たり消費水準を求めよ
- 黄金律の一人当たり資本 k を求めよ

1.4　人口成長

次のような人口成長を考える．

$$N' = (1+n)N$$

つまり，n は人口成長率である．この n は外生変数とする．このとき，次の問いに答えよ．なお，生産関数は一般の形のまま (つまり，F や f のまま) とする．

- 基本方程式を求めよ．ただし，N が式中に出ないようにすること (n は出てきても良い)．
- 定常状態の k が決まる条件を求めよ．

1.5　生産性の成長とコブ・ダグラス型生産関数

次のような生産性 A を考える

$$Y = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$$

さらに，この生産性 A は次のように成長するとする．

$$A' = (1+g^A)A$$

したがって，この g^A は生産性の成長率である．人口成長はないものとする．このとき，次の問いに答えよ．
なお，以降では k の代わりに $\tilde{k} \equiv K/(AN)$ を用いて，以下の問いに答えること．

- 生産性の成長のある生産関数は次のように分類される．このコブ・ダグラス型生産関数はいずれに分類されるか答えよ
  - ハロッド中立：$F(K, AN)$
  - ヒックス中立：$F(AK, N)$
  - ソロー中立：$AF(K, N)$
- 基本方程式を求めよ．ただし，A が式中に出ないようにすること (g^A は出てきても良い)．
- 定常状態を $\tilde{k} = \tilde{k}'$ と定義する．このとき定常状態で $k(\neq \tilde{k})$ はどのように動くか分析せよ
- 定常状態の $\tilde{k}$ を求めよ．さらに g^a が変わるとどうなるか分析せよ．
- 定常状態における一人当たり消費 C/N を求めよ．
- 定常状態における r と w の動きを分析せよ．さらに，資本への支払い rK と労働への支払い wN はどちらの成長率が高いか比較せよ
- 黄金律における貯蓄率を求めよ．これは生産性の成長率がないとき (問題 1.3) の黄金律と異なるか？

1.6　加法成長

Philippon (2022) は，生産性の成長率は指数的ではなく，次のように加法的ではないかと指摘した．

$$A_t = A_0 + bt$$

ここで $A_0 > 0$ は 1947 年のアメリカの生産性である．$b \in> 0$ はパラメータであり，例えば 0.0245 くらいの数を考えてほしい．

以下ではコブ・ダグラス型生産関数 $Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$ を仮定する．人口は成長しないとする．このとき，次の問に答えよ．

- 加法成長の生産性の成長率を考えよう．これまで学んだ標準的な場合，つまり指数成長の生産性 $(A_t = (1+g)^t A_0)$ の場合と，どのように異なるか簡単に述べよ．加法成長の場合，無限期間後 $(t \to \infty)$ において，生産性の成長率はどうなるか？また，加法成長のとき無限期間後に，A_t はどのような値になるか？
- $\tilde{k}_t \equiv K_t/(A_t L_t)$ と定義して，基本方程式を求めよ
- 定常状態は無限期間後の経済としよう．この定常状態における $\tilde{k}$ を求めよ
- 定常状態における K, C, Y の成長率を求めよ
- 定常状態における K/L(資本労働比 capital-labor ratio) および Y/L(GDP per capita) はどのような値になるか
- 移行過程について，加法成長生産性 $(A_t = A_0 bt)$ と指数成長生産性 $(A_t = (1+g)^t A_0)$ は違いはあるか？

1.7　政府の役割

ソローモデルにおける政府の役割を検討する．政府としては，家計の所得から次のように税 T を取り，家計の消費関数は次のようになるとする．

$$C_t = (1-s)(Y_t - T_t)$$

そして，政府は税収を政府支出に使うとする．つまり，

$$G_t = T_t$$

とする．政府は，この財政支出を生産量 Y_t の一定割合にするとする．これは例えば，$g \in [0,1]$ として

$$G_t = \gamma Y_t$$

と書ける[*1]．

生産関数はコブ・ダグラス型，つまり $F(K_t, A_t L_t) = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$ と書けるとし，この生産性は $A_{t+1} = (1+a)A_t$ と成長し，人口成長はないとする．

$\tilde{k}_t \equiv K_t/(A_t L_t)$，$f(\tilde{k}) \equiv F(\tilde{k}_t, 1)$ と定義することにする．このとき，次の問に答えよ．

[*1] 平時であれば，例えば日本の G_t/Y_t は 2 割弱で推移してきた．

1. 財市場の均衡条件を記述せよ
2. 基本方程式を求めよ
3. 定常状態での $\tilde{k}$ を求めよ
4. この $\tilde{k}$ は政府の支出率 γ が上昇するとどうなるか？
5. 定常状態での資本 K の成長率を求めよ．これは γ が変化するとどうなるか？

2　連続時間

2.1　連続時間化

離散時間モデル $A_{t+1} = (1+g)A_t$ の式を連続時間に直せ.

2.2　連続時間と離散時間の違い：コブ・ダグラス型関数の場合

$F(K, AN) = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$ とする．$\dot{A}_t = aA_t$ と成長する.
連続時間において，定常状態は $\dot{\tilde{k}}_t = 0$ と定義される．このとき，次の問いに答えよ.

- 黄金律の $\tilde{k}$ を求めよ.
- 黄金律の $\tilde{k}$ は離散時間の場合と異なるか？比較・議論せよ.