

基礎マクロ練習問題：一般均衡およびリスクがあるときの意思決定

日野将志*

1 動学的な純粋交換経済

1.1 2 人の場合

1.1.1 対数効用の計算問題 1：同じ人が二人いる場合

A さんと B さんという 2 人の家計が存在するとする。二人は同じ選好を持っており、どちらの効用関数も次の通りにする。

$$\log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

二人は労働所得 (y_1^i, y_2^i) も同様であり

$$(y_1^A, y_2^A) = (y_1^B, y_2^B) \equiv (y_1, y_2)$$

とする。

コメント：このように全く同じ人が二人いる経済で、どのような交換が起こるか。どのような価格になるか、解く前に事前に想像してみてほしい。その上で、予想とどう異なるか考えてみてほしい。

- ここでの配分と価格を定義せよ。
- 上記の条件を用いて、競争均衡を定義せよ。
- 2 人の効用最大化問題を解け。
- 均衡価格を求めよ。つまり、上で求めた効用最大化の解をもとに、市場均衡を満たす価格を求めよ。
- 均衡の配分と各期の総消費 (二人の消費の和) を求めよ。つまり、市場均衡価格における配分を求めよ。
- $y_1 = y_2$ のときどうなるか議論せよ。
- $y_1 \neq y_2$ とする。仮に A さんが $(2y_1, 2y_2)$ を保有しており、この A さんしか存在しないとする。このときの均衡配分と前問までの均衡配分の各期の総消費を比較せよ。

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

1.1.2 対数効用の計算問題 2：所得が違うケース

A さんと B さんという 2 人の家計が存在するとする。二人は同じ選好を持っており、どちらの効用関数も次の通りにする。

$$\log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

二人は労働所得 (y_1^i, y_2^i) はそれぞれ、

$$\begin{aligned}(y_1^A, y_2^A) &= (2, 0) \\ (y_1^B, y_2^B) &= (0, 2\beta)\end{aligned}$$

とする。

- ここでの配分と価格を定義せよ。
- 上記の条件を用いて、競争均衡を定義せよ。
- 2 人の効用最大化問題を解け。
- 均衡価格を求めよ。つまり、上で求めた効用最大化の解をもとに、市場均衡を満たす価格を求めよ。
- 均衡の配分を求めよ。つまり、市場均衡価格における配分を求めよ。

1.1.3 対数効用の計算問題 3：片方が 1 期間しか生きない場合

次に選好が異なるケースを考える。

同様に A さんと B さんという 2 人の家計が存在するとする。効用関数も次の通りにする。

$$\log(c_1) + \beta^i \log(c_2)$$

$\beta^A = \beta \in (0, 1)$ と $\beta^B = 0$ とする。つまり、B さんは、2 期目の財に一切興味がないとする^{*1}。

二人は労働所得 (y_1^i, y_2^i) はそれぞれ、

$$\begin{aligned}(y_1^A, y_2^A) &= (1, 1) \\ (y_1^B, y_2^B) &= (1, 1)\end{aligned}$$

とする。

- ここでの配分と価格を定義せよ。
- 上記の条件を用いて、競争均衡を定義せよ。
- 2 人の効用最大化問題を解け。
- 均衡価格を求めよ。つまり、上で求めた効用最大化の解をもとに、市場均衡を満たす価格を求めよ。
- 均衡の配分を求めよ。つまり、市場均衡価格における配分を求めよ。

^{*1} 例えば B さんは 2 期目に死ぬようなケースを考えていると思ってほしい。

1.2 3 人の場合 2 : 所得の違い

A さんと B さんと C さんという 3 人の家計が存在するとする。3 人は同じ選好を持っており、3 人の効用関数も次の通りにする。

$$\log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

3 人は労働所得 (y_1^i, y_2^i) はそれぞれ、

$$(y_1^A, y_2^A) = (1, 0)$$

$$(y_1^B, y_2^B) = (0, 2)$$

$$(y_1^C, y_2^C) = (2, 1)$$

とする。

- ここでの配分と価格を定義せよ。
- 上記の条件を用いて、競争均衡を定義せよ。
- 均衡価格を求めよ。つまり、上で求めた効用最大化の解をもとに、市場均衡を満たす価格を求めよ。
- 均衡の配分を求めよ。つまり、市場均衡価格における配分を求めよ。

1.3 3 期間の場合

A さんと B さんという 2 人の家計が存在するとする。2 人は同じ選好を持っており、2 人の効用関数も次の通りにする。

$$\log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

2 人は労働所得 (y_1^i, y_2^i, y_3^i) はそれぞれ、

$$(y_1^A, y_2^A, y_3^A) = (2, 0, 0)$$

$$(y_1^B, y_2^B, y_3^B) = (0, 1, 1)$$

とする。

- ここでの配分と価格を定義せよ。
- 上記の条件を用いて、競争均衡を定義せよ。
- 2 人の効用最大化問題を解け。
- 均衡価格を求めよ。つまり、上で求めた効用最大化の解をもとに、市場均衡を満たす価格を求めよ。
- 均衡の配分を求めよ。つまり、市場均衡価格における配分を求めよ。

2 静学的な生産経済

2.1

経済は1期間のみ存在するとする。このとき、家計は労働によって労働所得を得ることが出来る。また、家計は企業の株式を保有しており、企業が得た利潤を配当として受け取ることが出来るとする。これらの労働所得と配当所得で消費を行うとする。

家計の効用関数は次で与えられるとする。

$$\log(c_1) + B \log(l)$$

なお、 $B \in (1, 2)$ とする。

つぎに、企業の生産技術は、

$$Y = F(H) = H^\alpha$$

と与えられるとする。 $\alpha \in (0, 1)$

- このとき、家計の効用最大化問題を定義せよ。
- 競争均衡を定義せよ。
- 家計と企業の最大化問題を解け。内点解を仮定して良い^{*2}。
- 均衡賃金を求めよ。なお、均衡賃金が労働市場の均衡条件と財市場の均衡条件どちらから求めても成り立つことを確認せよ。
- 均衡配分 (c, l, H, π) を求めよ。

3 自営業

3.1 自営業のモデル：2 期間 Kiyotaki(1998) の準備 (難しい)

背景：家計が生産技術を保有している場合をこの節では考える。これは、現実には自営業 (self-employed) のような家計に該当する。また、起業家 (entrepreneur) の行動もこのモデルを用いて考えることも出来る。特にアメリカの資産分布をみると、資産分布の上位層には自営業の人の割合が高く、マクロ経済として重要な問題と考えられる。また資産分布という観点のみならず、起業の趨勢は産業構造や生産性を考えるうえでも非常に重要である。

それではモデルを説明する。2種類の起業家 A と B がいるとしよう。どちらの起業家も初めに y という初期資産を持っている。この起業家はどちらも貯蓄 s と資本の購入 k_1 が可能である。1 期に貯蓄をすると、2 期に $1 + r$ の利子所得が得られる。一方、1 期に資本を購入すると、2 期に生産が可能である。二人の起業家の違いは、この生産の生産性に違いがあることである。A さんはより生産的な生産技術 $z^A k$ を持っており、B さんはより生産性の低い技術 $z^B k$ を持っている (つまり $z^A > z^B$)。2 人の予算制約をまとめて書

^{*2} 内点解とは、 $c > 0$ や $l \in (0, 1)$ が満たされることをいう。

くと,

$$\begin{aligned}c_1^i + s^i + k^i &= y \\ c_2^i &= z^i k^i + (1+r)s^i\end{aligned}$$

となる. なお, これまで当たり前だったので, 省略していたが, 消費と資本は負の値をとれないとする. つまり, $c_t^i \geq 0$ かつ $k^i \geq 0$ とする. しかし, 貯蓄は借入れもできるため, s は負の値をとれることに再度注意してほしい.

2 人の起業家は同じ選好をもち, どちらも対数効用であるとする. すなわち効用関数は

$$\log(c_1) + \beta \log(c_2)$$

とする.

均衡では, 二人の貯蓄の和はゼロとなる. このとき, 次の問に答えよ.

1. 競争均衡を定義せよ
2. 二人の一階条件を求めよ. そして, 内点解が解とならないことを示せ
3. 均衡利子率を求めよ (ヒント: z^A と z^B を基準に場合分けを行い, 矛盾が生じるケースを排除すると良い)
4. 家計 B の最適化問題を解き, 家計 B の均衡における消費と貯蓄を求めよ
5. 家計 A の最適化問題を解き, 家計 A の均衡における消費と貯蓄を求めよ. なお, 初めに k と s についてはひとまとめの資産として a と定義すると良い.
6. 最後に求めた消費や貯蓄が均衡条件を満たすことを確認せよ

4 政府の役割

4.0.1 所得再分配政策

ここまで計算問題を解いた人は, 既に「2 期間の一般均衡は 2 財の 1 期間の一般均衡と大差ない」という事を学んでいると期待する. そのため, ここでは静学的な一般均衡を考える.

A さんと B さんの 2 人が存在し, 2 つの財が存在する純粋交換経済を考える. A さんと B さんの効用は, それぞれ

$$\begin{aligned}c_1^A + \log(c_2^A) \\ \log(c_1^B) + c_2^B\end{aligned}$$

とする.

A さんは財 1 だけを 50 単位もっており, B さんは財 2 だけを 40 単位もっているとする. さらに, ここで政府が存在し A さんから財 1 を τ 単位徴収し, B さんに渡すような場合を考える. また, 財 1 の価格を p_1 , 財 2 の価格を p_2 とすることに.

このとき, 次の問に答えよ.

1. それぞれの家計の最大化問題を記述せよ
2. 財市場の均衡条件を記述せよ

3. それぞれの家計の一階条件を解いてみよ。そして二人の限界代替率が同じになる条件を示せ
4. 二人の2つの財の需要関数を求めよ
5. 均衡価格の比 p_2/p_1 を求めよ
6. 二人の2つの財の均衡需要量を求めよ
7. 二人の均衡における効用水準を求めよ

5 資産価格理論入門

5.1 無裁定条件

5.1.1 資産価格 q

この経済に不確実性や何らの摩擦もないとする。利子率が $1+r$ で決まっているとする。この経済に新たな資産を導入することを考える。この資産価格を q とする。資産価格とは、今期に財を q 単位支払うと、来期1単位の財がもらえるというものである。このとき、無裁定条件から成立する q を r を用いて書け。

5.1.2 長期資産

この経済に不確実性や何らの摩擦もないとする。この経済では1期間の利子率が $1+r$ で決まっているとする。ここで、来々期に利子率 r_2 を支払うような長期資産を導入することを考える。つまり、この長期資産は、来期には利子率の支払いはなく、来々期に r_2 を支払う。このとき、無裁定条件から成立する q を r を用いて書け。

6 不確実性と意思決定

6.1 効用関数とリスク選好

家計消費の練習問題で代表的な効用関数を紹介した。それらがリスク回避的であるか、中立的であるか、愛好的であるか、確認せよ。具体的に、考えてほしい効用関数は次のとおりである。

1. 対数効用

$$u(c) = \log(c)$$

2. CRRA 型

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

なお $\sigma > 0$ とする

3. 2次効用

$$u(c) = \alpha c - \frac{\gamma c^2}{2}$$

$\alpha > 0$ かつ $\gamma \geq 0$ であり、 α/γ はとても大きいとする。

4. CARA 型

$$u(c) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma c)$$

$\gamma > 0$ とする.

6.2 効用関数とリスク回避度

効用関数のリスク回避度を測る指標として、次の二つが有名であり、多くの(ミクロ)経済学の教科書で教えられる.

- 絶対的リスク回避度

$$\sigma_A(c) = \frac{u''(c)}{u'(c)}$$

この絶対的リスク回避度は、所得等に確率的な変動があるとき、そのリスクの水準をどれだけ回避するかを測る測度である. 絶対的リスク回避度が一定であれば、例えば、所得(お小遣い)が月に500円のときでも、月給が100万円のときでも、100円の上下というリスクが同程度に重要になる.

- 相対的リスク回避度

$$\sigma_R(c) = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$$

「月給100万円のときでも、月給500円のときでも同様に100円の上下がリスクイと考える」という絶対的リスク回避度は極端な測度である. 一方、相対的リスク回避度は、所得等に確率的な変動があるとき、そのリスクの割合をどれだけ回避するかを測る測度である. 相対的リスク回避度が一定であれば、例えば、お小遣いが月に500円のときでも、月給が100万円のときでも、所得の1割の変動というリスクが同程度に重要になる.

上で使った4つの効用関数(対数, CRRA, 2次, CARA,)において、この二つの回避度を計算せよ.

6.3 所得のリスク：安全資産がある場合

家計の消費と貯蓄で学んだような2期間の最大化問題に所得のリスクを導入することを考えよう. 1期目の所得 y_1 にリスクはないとするが、2期目の所得にリスクのある効用最大化問題を考えよう. 2期目の所得は確率 p で y_2^h , 確率 $1-p$ で y_2^l になるとする. また、 $y_2^h > y_2^l$ とする(つまり h の添え字は high, l の添え字は low を表している).

2期目の消費は、それぞれ所得が高いときと、低いときで別に考える必要がある. そのため、それぞれ c_2^h と c_2^l と書くことにする. 家計は、期待効用を最大化するとする. これ以外は、家計の消費と貯蓄で学んだ最大化問題と同じとする. つまり家計は貯蓄 s を行くと、次期に確実に利子所得 $(1+r)s$ を得る^{*3}. このとき、次の問に答えよ.

- 効用関数は一般形、つまり $u(c)$ のままで効用最大化問題を記述せよ
- 効用関数を CRRA 型として一階条件を求めよ
- 効用関数が CRRA のとき、一階条件から最適な貯蓄・消費のいずれも求められないことを示し、なぜ示せないか1行程度で述べよ

^{*3} このように、確実なリターンをもたらす資産を安全資産 (risk-free asset, safe asset 等) と呼ぶ.

- 効用関数を 2 次の効用関数に変えよう。そして一階条件を求め、最適な貯蓄関数 s を求めよ。ここで、2 期目の所得の期待値を $\mathbb{E}[y_2] \equiv py_2^h + (1-p)y_2^l$ と定義せよ。
- 1 期の最適な消費関数を求めよ。特に、 $Y \equiv y_1 + \mathbb{E}[y_2]/(1+r)$ と定義せよ。そして、家計の消費と貯蓄の 2 次効用の問題 (2.6.3) の解答と比較せよ。
- 2 期目の消費 c_2^h と c_2^l を求めよ。そして、どちらが大きいか比較せよ。
- $\beta(1+r) = 1$ のときどうなるか？ (コメント：この条件は、リスクがないときは $c_1 = c_2$ となるための条件であった。リスクがあるときは $\beta(1+r) = 1$ はどういう条件になるだろうか？)

6.4 所得のリスク：アロー証券と完全保険

前問から引き続き、家計は 2 期目の所得のリスクに面しているとする。しかし、資産の選択肢が次のように変わるとする。前問では 1 種類の安全資産が利用可能であった。一方、ここでは、安全資産は利用不可能であり、その代わりに 2 種類の資産によって貯蓄が可能であるとする。1 つ目の資産は、 y_2^h が実現した時のみにリターン $1+r^h$ をもたらす資産であり、この保有量を s^h と書くことにする。2 つ目の資産は、 y_2^l が実現した時のみにリターン $1+r^l$ をもたらす資産であり、この保有量を s^l とする。他の問題設定は変化しないとする。

なお、このように、あるリスクが実現した時のみリターンが得られる証券をアロー証券 (Arrow security) という*4。このとき次の問に答えよ。

- 効用関数は一般形、つまり $u(c)$ のままで効用最大化問題を記述せよ
- 効用関数を CRRA 型として一階条件を求めよ
- 効用関数が CRRA のとき、前問と一階条件は異なるか。解析的に解けそうか議論せよ
- 解ける場合、そしてそのまま、消費関数を解いてみよ。なお、 $Y \equiv y_1 + \frac{y_2^h}{1+r^h} + \frac{y_2^l}{1+r^l}$ と定義すること
- $\beta p(1+r^h) = \beta(1-p)(1+r^l) = 1$ のとき、どうなるか
- このアロー証券から安全資産を生成できるか

6.5 ポートフォリオ問題

対数効用関数 $u(c) = \log c$ を持つ家計を考える。家計はこの効用の期待値を最大化するとする。

この家計は 0 期末に所得 y を持っている。この所得を 2 種類の資産によって 1 期に持ち越すことができる。一つ目は、安全資産であり、この安全資産は必ず $r^f \geq 0$ という利子率を持つ*5。この安全資産の保有量を a^f と書くことにする。もう一つの資産は、確率 p で r^h 、確率 $1-p$ で r^l という利子率になる。ここで、 $r^l < r^f < r^h$ とする。このリスク資産の保有量を a^r と書くことにする。なお、回答の便宜上、 $r^h = r^f + \epsilon^h$ および、 $r^l = r^f - \epsilon^l$ と利子の差分を $\epsilon^h > 0$ と $\epsilon^l > 0$ と定義すると便利かもしれない。

家計は 0 期末に所得を資産に配分することだけを行うとする。つまり 0 期の予算制約は、

$$a^f + a^r = y$$

とする。

*4 名前の由来はアロー教授である。

*5 上付きの f は risk-Free からきている。

そして 1 期に得られた資産所得から消費を行う。つまり、1 期の予算制約は、

$$\begin{aligned} c^h &= (1 + r^f)a^f + (1 + r^h)a^r \quad \text{when } r^h \\ c^l &= (1 + r^f)a^f + (1 + r^l)a^r \quad \text{when } r^l \end{aligned}$$

とする。

このとき、次の問に答えよ。

1. 家計の目的関数を書け
2. 効用最大化問題を記述せよ
3. 一階条件を求め、最適な安全資産の保有量を求めよ
4. 最適なリスク資産の保有量を求めよ
5. 例えばリスク資産について、良い利回りが実現する確率 p が上昇したとき、家計はリスク資産と安全資産のどちらを増やすか？上記の回答および計算にもとづいて答えよ。

6.6 2 期間のルーカス・ツリー (リスク資産のみの場合)

ルーカス・ツリーと呼ばれる資産価格を 2 期間にして、ここでは扱おう。

純粋交換経済を考える。家計は 1 人だけ存在し、1 種類の資産を利用して貯蓄ができる。この資産の t 期における価格は p_t であり、每期 d_t という配当が得られる^{*6}。この配当は多いときもあれば少ないときもあり、確率的な変数とする。この資産の保有量は s_t で書くことにする。家計ははじめから $s_1 = 1$ だけ資産を保有しているとする。

すると、予算制約は、

$$\begin{aligned} c_1 + p_1 s_1 &= [p_1 + d_1] \\ c_2 + p_2 s_2 &= [p_2 + d_2] s_1 \end{aligned}$$

と書ける。ここで、これまでと異なり、2 期目に s_2 という貯蓄手段があることを仮定している。なお、家計は借金を残して死ぬことは出来ないとする。つまり、 $s_2 \geq 0$ とする。

さらに効用関数は

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

とする。

このとき、次の問に答えよ。

1. 最大化問題を記述せよ
2. 家計の s_2 の需要量を求めよ。
3. 一階条件を記述せよ
4. この経済には資産の供給は 1 単位のみあるとする。つまり資産市場の均衡条件は $s_t = 1$ とする。このとき、財市場の均衡条件はどのようなになるか、求めよ。
5. p_2 は均衡でどのような値になるか、推論せよ。

^{*6} この資産をイメージするには、ヤシの木のみある無人島に一人たどり着き、このヤシの木の価格が p_t 、ヤシの実が d_t と思うと良いかもしれない。この例が有名なため、開発者の Lucas 教授にあやかり Lucas Tree と呼ばれる。

6. このとき、資産価格はどのように決まるか、解釈を述べよ