

基礎マクロ練習問題の解答例：消費

日野将志 *

分数が出たとき、分母が非ゼロであることは仮定する。

1 ケインズ型消費関数

1.1 財源

1.1.1

$$\begin{aligned} C + I + G &= Y \\ C &= c_1(Y - T) + c_2 \end{aligned}$$

を考える。二本目の式を一本目の式に代入することで次を得る。

$$\begin{aligned} c_1(Y - T) + c_2 + I + G &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1 - c_1}(c_2 + I + G - c_1T) \end{aligned}$$

したがって、これを T に対して微分すると、

$$\frac{dY}{dT} = -\frac{c_1}{1 - c_1}$$

となる。これが答え。

コメントおよび問題の主旨：まず係数が負であることに気付いてほしい。つまり、これは「減税 ($T \downarrow$) をすると Y が増える」という効果を表している。なお、この $-c_1/(1 - c_1)$ を**租税乗数**と呼ぶ。

また、 $0 < c_1 < 1$ なので、

$$\left| \frac{c_1}{1 - c_1} \right| < \left| \frac{1}{1 - c_1} \right|$$

となる。これは、財政政策 G による乗数効果の方が、減税よりも効果的であることを示している。

1.1.2

次に、以下を考える。

$$\begin{aligned} C + I + G &= Y \\ C &= c_1(Y - T) + c_2 \\ G &= T \end{aligned}$$

* タイポや間違いに気付いたら教えて下さい。

1.1.1 と比べると第 3 式が新たに加わった。これは問題文の通り、政府支出は必ず増税によって財源が調達されることを意味している。

これを同様に Y について解くと、

$$\begin{aligned} c_1(Y - G) + c_2 + I + G &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1 - c_1}(c_2 + I + (1 - c_1)G) \end{aligned}$$

となる。

したがって、 G について微分すると、

$$\frac{dY}{dG} = 1$$

となる。

コメント及び問題の主旨：この問題が示していることは、「もし財政政策が増税によって賄われるならば、乗数効果は一切発生しない」ということである。つまり、乗数効果は、ケインジアン・クロスの世界でも必ず発生する効果ではないことを示す一例となっている。

私を知る限り多くの教科書のケインジアン・クロス (45 度線分析) では、政府支出がどのように資金調達されるかに関して記述がないことが多い。しかし、このようにケインジアン・クロスにおいて、資金調達に関する仮定は乗数効果の有無を決定する重要な仮定であることを理解してもらうことがこの問題の狙いです。

1.1.3

次に、消費税の効果を考える。

$$\begin{aligned} C + I + G &= Y \\ (1 + \tau^c)C &= c_1Y + c_2 \end{aligned}$$

の 2 本をこれまでと同様に解くと、

$$\begin{aligned} \frac{c_1Y + c_2}{1 + \tau^c} + I + G &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1 - \frac{c_1}{1 + \tau^c}} \left(\frac{c_2}{1 + \tau^c} + I + G \right) \\ \Rightarrow Y &= \frac{1 + \tau^c}{1 + \tau^c - c_1} \left(\frac{c_2}{1 + \tau^c} + I + G \right) \\ \Rightarrow Y &= \frac{c_2}{1 + \tau^c - c_1} + \frac{1 + \tau^c}{1 + \tau^c - c_1} (I + G) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\tau^c} &= \frac{-c_2}{(1 + \tau^c - c_1)^2} + \frac{(1 + \tau^c - c_1) - (1 + \tau^c)}{(1 + \tau^c - c_1)^2} (I + G) \\ &= -\frac{c_2 + c_1(I + G)}{(1 + \tau^c - c_1)^2} < 0 \end{aligned}$$

したがって、消費減税も Y を高めることが分かる。

コメント及び問題の主旨：この問題は経済学的というよりも、計算力のトレーニングのための問題です。積の微分や商の微分をうまく使えるようになると良いでしょう。

1.1.4

この大問の最後は次の連立方程式を考える。次に、消費税の効果を考える。

$$\begin{aligned}C + I + G &= Y \\(1 + \tau^c)C &= c_1 Y + c_2 \\G &= \tau^c C\end{aligned}$$

つまり、財政政策は消費増税によって賄われる。

また例のごとく、これらを解くと、

$$\begin{aligned}(1 + \tau^c) \frac{c_1 Y + c_2}{1 + \tau^c} + I &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1 - c_1} (c_2 + I)\end{aligned}$$

となる。

これは G には依存していない。これはつまり、

$$\frac{dY}{dG} = 0$$

であり、消費増税による政府支出は何らの効果もないことを意味している。

コメント及び問題の主旨：

世の中の数多くの教科書では乗数効果ばかりが取り上げられています。その印象で「ケインジアン・クロスに基づく財政政策の景気刺激効果は大きい」のような意見がかなり広まっています。一方で、これらの問題で確認したように、「政府がどのように財源を調達するか」はとても重要な問題なことを認識してもらえると良いと思います。

1.2

この問題は次のようにして示すことができる。

まず

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - c_1}$$

である。これをもう一度、 c_1 について微分する。

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \left(\frac{\partial Y}{\partial G} \right) = \frac{1}{(1 - c_1)^2}$$

ここで $(1 - c_1) \neq 0$ なので、分母 $(1 - c_1)^2 > 0$ である。したがって、 c_1 が上がると、乗数効果 $\partial Y / \partial G$ が増えることがわかる。

コメント及び問題の主旨：二階微分（正確には二階の偏導関数）を使って、「傾きの傾き」を考える問題です。

2 2 期間モデル

2.1 スライドの確認

$\beta(1+r) = 1$ と $y \equiv y_1 = y_2$ を使って、最大化問題を次のように書く.

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & \log c_1 + \frac{1}{1+r} \log c_2 \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s = y \\ & c_2 = y + (1+r)s \end{aligned}$$

スライドと同様に解くと、オイラー方程式は、

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1+r}{1+r} c_1 \\ \Rightarrow c_2 &= c_1 \end{aligned}$$

となる. したがってまず $c_2 = c_1$ が示せた*1.

$c \equiv c_1 = c_2$ としよう. 次に、これを予算制約に代入すると、

$$\begin{aligned} s &= y - c \\ s &= \frac{1}{1+r} [y - c] \end{aligned}$$

である. $r > 0$ のとき、これを満たすのは $s = 0$ の場合のみである.

2.2 計算問題

2.2.1

学生は一個一個解いても良いが、これらの問題は一括して次のようにして解くことも出来る.

3つの問題のうち、変わるのは (y_1, y_2) だけであるので、そこに数を代入せずに (y_1, y_2) のまま扱う.

このとき、最大化問題は、

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & \log c_1 + \log c_2 \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + s \end{aligned}$$

である. $\beta = 1$ と $r = 0$ は共通しているので、代入している.

予算制約を目的関数に代入すると、

$$\max_s \log(y_1 - s) + \log(y_2 + s)$$

であるので、この導関数 = 0 は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1 - s} &= \frac{1}{y_2 + s} \\ \Rightarrow s &= \frac{y_1 - y_2}{2} \end{aligned}$$

*1 なお、この $c_2 = c_1$ を示す段階で $y_1 = y_2$ を使っていない.

である。さらに、これを予算制約に代入すると、

$$c_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$c_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

である。

したがって、それぞれのケースを考えると、 (y_1, y_2) が $(1, 1)$ のときのみ、

$$c_1 = c_2 = 1$$

であり、 (y_1, y_2) が $(1, 2)$ または $(2, 1)$ のときはどちらも

$$c_1 = c_2 = 3/2$$

である。

コメントおよび問題の主旨：一般的に、おそらく大学の科目ではさほど計算問題の種類が見つからないだろう。この理由は、上記のように数値例が違うだけの問題は、ほとんど意味のある違いを見いだせないことも大きな要因である。

2.2.2

この最大化問題は講義スライドと全く同じである。したがって、この解は、

$$s = \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)}$$

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right]$$

$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right]$$

である。

ここに $y_1 = y_2 = 1$ を代入すると、

$$s = \frac{\beta(1+r) - 1}{(1+\beta)(1+r)}$$

$$c_1 = \frac{2+r}{(1+\beta)}$$

$$c_2 = \frac{\beta(1+r)(2+r)}{1+\beta}$$

である。特に貯蓄関数に注目する。 $\beta \in [0, 1]$ かつ $r \in [0, \infty)$ なので、これの分母は常に正である。したがって、 s の符号は分子だけで決まる。すなわち、

$$s \gtrless 0 \Leftrightarrow \beta(1+r) \gtrless 1$$

と決まる。

なお、消費の成長の条件は、

$$\begin{aligned}
 c_2 - c_1 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\beta(1+r)(2+r)}{1+\beta} - \frac{2+r}{(1+\beta)} &\geq 0 \\
 \Rightarrow \beta(1+r)(2+r) - (2+r) &\geq 0 \\
 \Rightarrow \beta(1+r) &\geq 1
 \end{aligned}$$

と求まる。まとめると、消費の成長の条件も

$$c_2 - c_1 \geq 0 \Leftrightarrow \beta(1+r) \geq 1$$

である。

なお、 s の条件が求まった時点で、消費の成長の条件を直観的に求めることも出来た方もいるかもしれない。つまり、「今、 $y_1 = y_2 = 1$ なので、今期と来期の所得は同じである。もし、 $s > 0$ ならば、来期の消費が今期より多くなるはずである」と考えることもできる。

コメントおよび問題の主旨： $\beta(1+r) = 1$ というのは動学的なマクロ経済学では頻出の条件である。これは二期間だけでなく、無限期間でも同様に消費の成長を決定づける上で重要である。したがって、早いうちから馴染んでもらうのが趣旨である。

2.3 予算制約の違い

$$\begin{aligned}
 \max_{c_1, c_2} & u(c_1) + \beta u(c_2) \\
 \text{s.t.} & c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}
 \end{aligned}$$

という最大化問題を考える。

予算制約を、

$$c_1 = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \frac{c_2}{1+r}$$

として、目的関数に代入すると、

$$\max_{c_2} u\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \frac{c_2}{1+r}\right) + \beta u(c_2)$$

となる。これの一階の条件は、

$$\begin{aligned}
 -u'(c_1) \frac{1}{1+r} + \beta u'(c_2) &= 0 \\
 \Rightarrow u'(c_1) &= \beta(1+r)u'(c_2)
 \end{aligned}$$

となる。このように同じオイラー方程式が得られる。したがって、予算制約を生涯予算制約で書くか、講義スライドのように各時点ごとに別々に書くかは本質的に変わらない。

対数効用関数の場合は、これ以降スライドと同様に計算すれば得られるので割愛する。

2.4 相対価格と利子率

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} & u(c_1) + \beta u(c_2) \\ \text{s.t.} & p_1 c_1 + s = p_1 y_1 \\ & p_2 c_2 = p_2 y_2 + s \end{aligned}$$

という最大化問題を考える。

まず 2 本の予算制約の s について代入することで次の生涯予算制約を得る。

$$\begin{aligned} p_1 c_1 + p_2 c_2 &= p_1 y_1 + p_2 y_2 \\ \Rightarrow c_1 + \frac{p_2}{p_1} c_2 &= y_1 + \frac{p_2}{p_1} y_2 \end{aligned}$$

ここで仮に、 $1 + r = \frac{p_1}{p_2}$ とすると、

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = y_1 + \frac{y_2}{1 + r}$$

を得る。これは講義スライドの生涯予算制約と全く同じである。このように、今期と来期の価格を導入することと、利子率を導入することは同じことである。

以上で $p_1/p_2 = 1 + r$ とすると、講義スライドと同じ予算制約になることが分かった。最適化の目的関数は講義スライドと同じで、予算制約も同じになることが分かったので、最適化解も同じになるはずである。これを実際に確認しよう。

予算制約これまで同様に予算制約を目的関数に代入すると次のようになる。

$$\max_s u(y_1 - s/p_1) + \beta u(y_2 + s/p_2)$$

s について一階の条件を求めると、

$$\begin{aligned} u'(c_1) \frac{-1}{p_1} + \beta u'(c_2) \frac{1}{p_2} &= 0 \\ \Rightarrow u'(c_1) &= \beta \frac{p_1}{p_2} u'(c_2) \end{aligned}$$

となる。もし仮に、 $(1 + r) = \frac{p_1}{p_2}$ と定義すると、

$$\Rightarrow u'(c_1) = \beta(1 + r)u'(c_2)$$

と講義スライドで学んだオイラー方程式を得る。

コメントおよび問題の主旨：これは、利子率 $1 + r$ とは本質的に、今日と明日の価格比 p_1/p_2 であることを示している例です。つまり、利子率 $1 + r$ とは、「今日 1 単位消費を我慢することで、来期得られる価値」と今期と来期の価値を比較する概念であり、その意味で価格比と全く同じであることが数式として理解できる。

また、価格 (p_1, p_2) を導入した方が、ミクロ経済学と同じことを学んでいることも認識しやすいでしょう。結局、価格として書いても、利子率として書いても同じことなので、ミクロ経済学で学んだ消費者理論とここで学んでいる家計消費理論はとても似ています。

2.5 後ろ向きの解き方

まず 2 期の問題を考える。

$$\begin{aligned} V(s) &= \max_{c_2} \log(c_2) \\ \text{s.t. } c_2 &= (1+r)s + y_2 \end{aligned}$$

対数関数は単調増加関数である。つまり、この家計は、予算内で多く消費すればするほど幸福になれる。したがって、 s を所与とした最適な消費は、単純に予算を全て使い果たすことであり、

$$c_2 = (1+r)s + y_2$$

である。これを目的関数に代入すると、

$$V(s) = \log((1+r)s + y_2)$$

となる。

次に、この解を所与として、1 期の問題に移る。1 期の最大化問題は、

$$\begin{aligned} \max_{c_1, s} \log(c_1) + \beta \log((1+r)s + y_2) \\ \text{s.t. } c_1 + s = y_1 \end{aligned}$$

である。予算制約を目的関数に代入すると、

$$\max_s \log(y_1 - s) + \beta \log((1+r)s + y_2)$$

となる。この一階の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1 - s} &= \beta(1+r) \frac{1}{(1+r)s + y_2} \\ \Rightarrow s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+r)(1+\beta)} \end{aligned}$$

となる。したがって、これを予算制約に代入すると、

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right]$$

となる。

さらに、 $c_2 = (1+r)s + y_2$ に求めた s を代入すると、

$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right]$$

が求まる。スライドと見比べると、 (c_1, c_2, s) はどれも等しいことが分かる。

コメントおよび問題の主旨：後々、中級マクロや上級マクロでは動的計画法というものを学ぶだろう。この動的計画法は、まさに後ろ向きの解を無限期間に適用した解法である。ここでは 2 期間のモデルを用いて動的計画法の考え方に馴染んでもらうのが目的である。対数効用を用いたが効用関数の形が変わっても、基本的には、後ろ向きの解き方と、普通の解き方 (前向きの解き方) の解は一致する。

前向きと後ろ向きの解が一致しない例として有名なものは、行動経済学的な要素 (特に双曲割引) のケースである。また政府の最適政策を考える際も後ろ向きと前向きの解が一致しない場合が数多く出てくる。このような内容は、専門的な内容であるので、初めのうちは「後ろ向きと前向きの解は殆どの場合一致する」と思っておいて良いと思われる。

2.6 様々な効用関数

ここまで解いてきた学生ならば、略解でも理解できると思うので、ここでは式展開や説明を省略して解説する。なお $Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ と恒常所得を書くことにする。

2.6.1 対数

対数効用はスライドと同じため省略。効用関数が $\alpha \log(c)$ のときの解答は $\log c$ のときと変わらないことを確認できていれば良い。

2.6.2 CRRA

この効用関数

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

を微分すると、

$$\begin{aligned} u'(c) &= c^{-\sigma} > 0 \quad \text{if } c > 0 \\ u''(c) &= -\sigma c^{-\sigma-1} < 0 \quad \text{if } c > 0 \end{aligned}$$

となる。

最適化問題は次の通り。

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

このオイラー方程式は、

$$c_1^{-\sigma} = \beta(1+r)c_2^{-\sigma}$$

となる^{*2}。さらに、これを変形すると

$$c_2 = [\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1$$

となる。これを生涯予算制約に代入すると、

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{1}{1+r} [\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1 &= Y \\ \Rightarrow \left[1 + \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+r} \right] c_1 &= Y \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

ここで、 $Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ は恒常所得である。これをオイラー方程式に代入すると、

$$c_2 = \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y$$

^{*2} なお、 $\sigma = 1$ のとき、対数効用と同じになることに気付いてほしい。

さらに予算制約 $c_1 + s = y_1$ より,

$$s = y_1 - \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y$$

と求まる.

次に $\beta(1+r) = 1$ の場合を考える. $\beta(1+r) = 1$ を上で求めた消費関数に代入すると, $c_1 = c_2$ となることが直ちに分かるだろう.

一方で, $y_1 = y_2$ であっても, $\beta(1+r) \neq 1$ であるならば, $c_1 \neq c_2$ である.

限界消費性向は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y_2} &= \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \frac{1}{1+r} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_1} &= \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \frac{1}{1+r} \end{aligned}$$

である.

2.6.3 2 次効用

この効用関数 $u(c) = \alpha c - \frac{\gamma c^2}{2}$ の導関数は

$$\begin{aligned} u'(c) &= \alpha - \gamma c > 0 \quad \text{if } \alpha/\gamma \text{ is sufficiently large} \\ u''(c) &= -\gamma < 0 \end{aligned}$$

である. 問題の構成より, α/γ は $u'(c) > 0$ を満たすほど常に大きいとする^{*3}.

まず最大化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & \alpha c_1 - \frac{\gamma c_1^2}{2} + \beta \left[\alpha c_2 - \frac{\gamma c_2^2}{2} \right] \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

となる. 例えば β を忘れてないことに注意すること.

次に、授業でやったように代入法で解くと、再度代入法で解く

- 予算制約を目的関数に代入する

$$\max_s \alpha(y_1 - s) - \frac{\gamma(y_1 - s)^2}{2} + \beta \left[\alpha(y_2 + (1+r)s) - \frac{\gamma(y_2 + (1+r)s)^2}{2} \right]$$

^{*3} もし $u'(c) = 0$ を迎える場合, そこで満腹になる (satiation) ようなものと思えばいい. その場合, 予算制約が不等号で成り立つ (直観的には満腹なので予算が余っていても気にしない状態) が, そういう場合は難しいかつ経済学的に対して興味深いケースでもないので議論しないのが一般的である.

- s について微分して、導関数 = 0 を求める

$$\begin{aligned}
 & -[\alpha - \gamma(y_1 - s)] + \beta(1+r)[\alpha - \gamma(y_2 + (1+r)s)] = 0 \\
 & \Rightarrow [\alpha - \gamma c_1] = \beta(1+r)[\alpha - \gamma c_2] \\
 & \Rightarrow c_1 = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta(1+r)}{\gamma}[\alpha - \gamma c_2] \\
 & \Rightarrow c_1 = \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] + \beta(1+r)c_2
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

この第2式がオイラー方程式.

- これを生涯予算制約に代入する.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] + \beta(1+r)c_2 + \frac{1}{1+r}c_2 = Y \\
 & \Rightarrow c_2 \left[\beta(1+r) + \frac{1}{1+r} \right] = Y - \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] \\
 & \Rightarrow c_2 = \frac{1+r}{1 + \beta(1+r)^2} \left[Y - \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] \right]
 \end{aligned}$$

これを (2.1) の4番目の式に代入すると,

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] + \frac{\beta(1+r)^2}{1 + \beta(1+r)^2} \left[Y - \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] \right] \\
 &= \frac{\beta(1+r)^2}{1 + \beta(1+r)^2} Y + \frac{1}{1 + \beta(1+r)^2} \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)]
 \end{aligned}$$

- $\beta(1+r) = 1$ のとき,

$$c_1 = c_2 = \frac{1+r}{2+r} Y$$

となることが分かる.

- 限界消費性向については,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{\beta(1+r)}{1 + \beta(1+r)^2} \\
 \frac{\partial c_1}{\partial y_2} &= \frac{\beta}{1 + \beta(1+r)^2} \\
 \frac{\partial c_2}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{1 + \beta(1+r)^2} \\
 \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{1}{1 + \beta(1+r)^2}
 \end{aligned}$$

となる.

コメント及び問題の主旨：二次効用関数はとても重要なケースである^{*4}.

なお、 $\beta(1+r) = 1$ とは、一期間消費を我慢する分の効用の費用 β と一期間消費を我慢することで得られる利息 $1+r$ がちょうど同じになる状態であり、マクロ経済学ではよく登場する環境である.

^{*4} 一方で、残念ながら大学院の授業でも時間の都合で省略されている。しかし、とても伝統がある効用関数であり、とても重要なベンチマークである。

大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足：二次効用関数の大きな特徴は、一度微分すると、線形になることです。そのため、無限期間の問題や複雑な所得過程を仮定しても解析解が得られるとても便利なケースです。現代的には限界消費性向等がマクロの政策の効果決定づける上でとても重要な変数であることが知られていますが、二次効用関数がベンチマークになることは多々あります。サーベイとして、Jappelli and Pistaferri(2010ARE)“The Consumption Response to Income Changes” は(前半の方だけでも)一読の価値が高いと思います。

2.6.4 CARA 型効用関数

この効用関数 $u(c) = -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma c)$ の導関数は

$$\begin{aligned} u'(c) &= \exp(-\gamma c) > 0 \quad \text{if } c > 0 \\ u''(c) &= -\gamma \exp(-\gamma c) < 0 \end{aligned}$$

である。

まず最大化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma c_1) - \beta \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma c_2) \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

となる。

オイラー方程式は次の第 1 式である。

$$\begin{aligned} \exp(-\gamma c_1) &= \beta(1+r) \exp(-\gamma c_2) & (2.2) \\ \Rightarrow -\gamma c_1 &= \log(\beta(1+r)) - \gamma c_2 \\ \Rightarrow c_2 &= c_1 + \frac{1}{\gamma} \log(\beta(1+r)) \end{aligned} \quad (\because \text{両辺対数を取っている})$$

これを生涯予算制約に代入すると、

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{1}{1+r} \left[c_1 + \frac{1}{\gamma} \log(\beta(1+r)) \right] &= Y \\ \Rightarrow c_1 \frac{2+r}{1+r} &= Y - \frac{1}{\gamma(1+r)} \log(\beta(1+r)) \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1+r}{2+r} Y - \frac{1}{\gamma(2+r)} \log(\beta(1+r)) \end{aligned}$$

と c_1 を得る。これを (2.2) 式の 3 番目の式に代入すると、

$$c_2 = \frac{1+r}{2+r} Y + \frac{1+r}{\gamma(2+r)} \log(\beta(1+r))$$

となる。

限界消費性向は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{2+r} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y_2} &= \frac{1}{2+r} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{2+r} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{1}{2+r}\end{aligned}$$

となる。これは 2 次的な効用関数を仮定したときと同じものである。

コメント及び問題の主旨：CARA 型効用関数は有名な効用関数ですが、それほどマクロ経済学では使われてこなかったように思います (資産価格分野では使われているかも)。ややマニアックな問題ではありますが、大学院等を目指す方は一度経験しておくに役立つと思い出題しました。

大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足：CARA 型効用も解析解が得られる稀有な効用関数の例です。例えば近年であれば、Acharya and Dogra (2020 Econometrica) “Understanding HANK: Insights from a PRANK” 等で使われています。

日本の大学院生となる場合、即座に結果が出るような分析をすることが (欧米で PhD を取る人たちと比べて) 重要です。その場合、「データ分析」や数値計算の習熟には時間がかかりやすいため、解析解がある場合に習熟するのは一つの良い生存戦略だと思います (他にも生存戦略はあるでしょうが)。

2.7 財政政策

これを真正面から解いてもよいが、次のようなショートカットも不可能ではない。つまり、

$$\begin{aligned}\underbrace{y_1}_{\text{スライドの } y_1} &= \underbrace{y_1 - G_1}_{\text{問題の } y_1} \\ \underbrace{y_2}_{\text{スライドの } y_2} &= \underbrace{y_2 - G_2}_{\text{問題の } y_2}\end{aligned}$$

とみなすことで、スライドの情報を消費関数をそのまま使うことが出来る。つまり、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r} \right] \\ c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r} \right]\end{aligned}$$

となる。この解に不安を感じる方は真面目に最適化問題を解いてみてほしい。

限界消費性向は、 y_1, y_2 の限界消費性向の符号を変更するだけで良い。つまり、

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial G_1} &= -\frac{1}{1+\beta} \\ \frac{\partial c_1}{\partial G_2} &= -\frac{1}{(1+\beta)(1+r)} \\ \frac{\partial c_2}{\partial G_1} &= -\frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \\ \frac{\partial c_2}{\partial G_2} &= -\frac{\beta}{1+\beta}\end{aligned}$$

となる。このように、財政支出 G_1, G_2 の増加は消費の減少をもたらす。

3 3 期間

最大化問題は、

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, c_3, s_1, s_2} \quad & \log(c_1) + \beta \log(c_2) + \beta^2 \log(c_3) \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s_1 = y_1 \\ & c_2 + s_2 = y_2 + (1+r)s_1 \\ & c_3 = y_3 + (1+r)s_2 \end{aligned}$$

である。予算制約を目的関数に代入すると、

$$\max_{s_1, s_2} \log(y_1 - s_1) + \beta \log(y_2 + (1+r)s_1 - s_2) + \beta^2 \log(y_3 + (1+r)s_2)$$

である。この一階の条件は、

$$\begin{aligned} s_1 : \frac{1}{y_1 - s_1} &= \frac{\beta(1+r)}{y_2 + (1+r)s_1 - s_2} \\ s_2 : \frac{\beta}{y_2 + (1+r)s_1 - s_2} &= \frac{\beta^2(1+r)}{y_3 + (1+r)s_2} \end{aligned}$$

である。これを見ると、 (s_1, s_2) という 2 つの未知の変数に対して、2 本の方程式があるので、 (s_1, s_2) はこれを解けば求まることが判断できる。

しかし、非線形方程式を解くのは面倒なので、そのような計算手順を取らないことにする。まず予算制約を一階条件に代入すると、それぞれの一階の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} &= \beta(1+r) \frac{1}{c_2} \\ \frac{1}{c_2} &= \beta(1+r) \frac{1}{c_3} \end{aligned}$$

と、それぞれオイラー方程式であることが分かる。このオイラー方程式は消費の成長を表しており、

$$\begin{aligned} c_2 &= \beta(1+r)c_1 \\ c_3 &= \beta(1+r)c_2 \end{aligned}$$

とも書き直すことができる。

つぎに 3 期と 2 期の予算制約を 1 期の予算制約に代入すると、次のような生涯予算制約を得ることが出来る。

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r)} + \frac{c_3}{(1+r)^2} = y_1 + \frac{y_2}{(1+r)} + \frac{y_3}{(1+r)^2} \equiv Y$$

なお、表記を単純化するために生涯所得の割引現在価値を Y とした。これに消費の成長の式を代入すると、

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{c_1\beta(1+r)}{(1+r)} + \frac{c_1\beta^2(1+r)^2}{(1+r)^2} &= Y \\ \Rightarrow c_1 [1 + \beta + \beta^2] &= Y \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} Y \end{aligned}$$

と求まる．これを消費の成長の式に代入すると，

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta^2}Y \\ c_3 &= \frac{\beta^2(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2}Y \end{aligned}$$

と消費関数が求まる．

貯蓄関数は，消費関数を予算制約に代入することで求まる．つまり，1 期の予算制約を使って，

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 - c_1 \\ &= y_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y \end{aligned}$$

および，3 期の予算制約を使って，

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{c_3 - y_3}{1+r} \\ &= \frac{\beta^2(1+r)}{1+\beta+\beta^2}Y - \frac{y_3}{1+r} \end{aligned}$$

と求まる．これで消費関数と貯蓄関数が求まった．

最後に限界消費性向を計算する．準備として，

$$\frac{\partial Y}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_2} = \frac{1}{1+r}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_3} = \frac{1}{(1+r)^2}$$

をおさえておく．これを使って，消費関数の偏導関数を求めると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \frac{\partial Y}{\partial y_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta^2} \frac{\partial Y}{\partial y_2} = \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \\ \frac{\partial c_3}{\partial y_3} &= \frac{\beta^2(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2} \frac{\partial Y}{\partial y_3} = \frac{\beta^2}{1+\beta+\beta^2} \end{aligned}$$

と求まる．