基礎マクロ:数学レビュー

日野将志

一橋大学

2021

ワォームアップ

一変数関数の微分

一次兀の玻週化

司咱の双刀

多変数の微分

多変数関数と最適化

学部の経済学で使う数学は限られている!

- 一般的に経済学部で卒業のための最低限
 - ▶ 微分 ミクロ、マクロ、計量等全ての分野で使います

良い成績を目指す場合

► 行列、線形代数 特に中級計量等で使うと思います.また数値計算でも使うかもしれません

大学院に進学する場合の最低限

- ▶ 基礎的な集合、位相
- ▶ 最適化数学 (凸解析)

ウォームアップ

一変数関数の微分

一次元の最適化

可ドロ・クルスク

★ 対応報信用報告 1、□ 12

 非足

絶対に覚えてほしい事

- ▶ 学部の経済学では、「微分して 0 でほぼ全ての最適化問題が解ける」 と言っても過言ではないくらい「微分して 0」は大事
- ▶ 微分は大事

ウォームアップ

一変数関数の假急

一次元の最適化

多変数関数と最適化

このスライドで学ぶこと

ウォームアップ

一変数関数の微分

一次元の最適化

高階の微分

多変数の微分

多変数関数と最適化

補足

ームアップ

マ元の最適化

数の微分

変数関変 足

2

ウォームアップ

一次元の最適化

- 八儿の取2010

門的の収力

~~~

父 XX | ₹| XX ⊂ 月X № 1

2

ウォームアップ:ベクトル,和,積,極限

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
 をベクトルと呼ぶ

▶  $\{x_1,\ldots,x_n\}$  は集合なので一応、注意

同じ長さの 2 つのベクトル x と y の次の計算を内積と呼ぶ.

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

(コメント: 少なくとも経済数学 (大学数学?) では  $\vec{x}$  という記法は使わない方が大多数)

ウォームアップ

v/. → - 14 v/v //.

一次元の最適化

変数の微分

変数関数と最適化

# 足し算

数学

ウォームアップ

足し算には ∑という記号をよく使います  $\sum x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ 

# 例

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 5 + 8 + 2$$
 $= 15$ 

ベクトルの内積は,
$$x\cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

掛け算には∏という記号をよく使います

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 imes x_2 imes \ldots imes x_n$$

## 例

 $(x_1, x_2, x_3) = (5, 8, 2)$ とする. このとき,

$$\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 \times x_2 \times x_3$$

$$= 5 \times 8 \times 2$$

$$= 80$$

ウォームアップ

一次元の最適化

所で微分

多変数の微分

変数関数と最適化

**浦**尼

(注意:厳密なことは扱いません!)

極限とは、「限りなく近づくとき」のことです。lim と表記します。 代表的には、次の2つの場合がほとんどです。

- ▶ 無限大に限りなく近づくとき (つまり物凄く大きくなる)
- ▶ 0に限りなく近づくとき

## 例

1/x を考える.このとき

ightharpoonup x が無限大に限りなく近づくとき、1/x は0 に収束します

$$\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$$

 $lacksymbol{z}$  x が 0 に限りなく近づくとき、1/x は無限大に発散します  $\lim_{x \to 0} 1/x = \infty$ 

ウォームアップ一変数関数の微分

次元の最適化

変数の微分

ペミッか5米/v日日米/v 1。ド

補足

ウォームアップ

一変数関数の微分

一次兀の寂寞化

高階の微分

多変数の微分

変数関数と最適化

補足

経済学部でよく使う微分の公式 一変数関数の微分

傾き:関数 y = f(x) の傾き  $\Delta y/\Delta x$ 

微分:  $\lceil x$  が少し  $(\Delta x)$  だけ変化したときに、y がどれだけ変化するか」

$$egin{aligned} rac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x o 0} rac{\Delta y}{\Delta x} \ &= \lim_{\Delta x o 0} rac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

- ▶ 表記:  $\frac{dy}{dx}$ , f'(x),  $f_x(x)$  等と書きます
- ▶ 導関数:関数 f を微分して得た、f'(x) のことを導関数と呼びます

例

 $y = x^2$  の x = 1 における傾き: $\Delta y/\Delta x$ 

▶ 差分 △x が 0.1 の場合

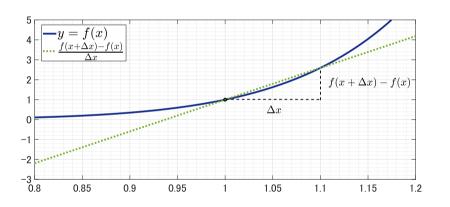
$$\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{(1.1)^2 - (1.0)}{1.1 - 1.0} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

▶ 差分が 0.01 の場合

$$\frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1} = \frac{(1.01)^2 - (1.0)}{1.01 - 1.0} = \frac{0.0201}{0.01} = 2.01$$

- ▶ 差分が 0.001 の場合: 2.001
- ▶ 差分が 0 に近づくとき (極限): 2

## 図による例 (1/3)



ウォームアップ

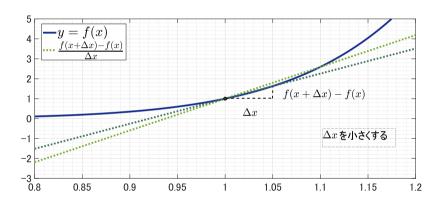
#### 一変数関数の微分

一次元の最適化

可旧ソ双刀

- -----

## 図による例 (2/3)



ウォームアップ

#### 一変数関数の微分

一次元の最適化

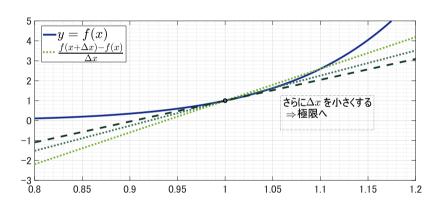
同階の収力

多変数の収力

変数関数と最適化

能足

## 図による例 (3/3)



ウォームアップ

一変数関数の微分

一次元の最適化

高階の微分

多変数の微分

変数関数と最適化

#### 絶対に覚えてほしい公式:

$$ightharpoonup f(x)=x^a$$
 のとき ( $a$  は定数)

$$f'(x) = ax^{a-1}$$

$$ightharpoonup f(x) = \log x$$
 のとき

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

# 例

$$f(x)=x^2$$
 のとき  $f'(x)=2x^{2-1}=2x$ 

# よく使う公式 (cont'd)

ightharpoons 加法:f(x) + g(x) のとき、この導関数は

$$f'(x)+g'(x)$$

▶ 乗法: f(x)g(x) のとき、この導関数は

$$f^{\prime}(x)g(x)+f(x)g^{\prime}(x)$$

▶ 除法: f(x)/g(x) のとき、この導関数は

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

ightharpoonup 合成関数:f(g(x)) のとき、この導関数は

$$f'(g(x))g'(x)$$

フォームアップ

一変数関数の微分

一次兀の蓛週化

品階の微分

多変数の微分

### 例

- ▶ 商の微分  $f(x) = x^a/x$ 
  - ▶ 方法  $1: f(x) = x^{a-1}$  なので、普通に微分して  $f'(x) = (a-1)x^{a-2}$
  - ▶ 方法 2:商の微分公式より  $f'(x) = \frac{ax^{a-1}x-x^a}{x^2} = \frac{ax^a-x^a}{x^2} = (a-1)x^{a-2}$
- ightharpoonup 合成関数の微分  $f(x)=(x^a)^b$ 
  - ▶ 方法 1:  $f(x) = x^{ab}$  なので、 $f'(x) = abx^{ab-1}$
  - **>** 方法  $2:g(x)=x^a$  かつ  $f(x)=x^b$  とする.このとき, $g'(x)=ax^{a-1}$  と  $f'(x)=bx^{b-1}$  である.したがって, $f'(g(x))g'(x)=b(x^a)^{b-1}\times ax^{a-1}=ab(x^a)^{b-1}x^{a-1}=abx^{a(b-1)}x^{a-1}=abx^{a(b-1)+a-1}=abx^{ab-1}$

#### 練習問題参照

フォームアップ

一変数関数の微分

前階の似力

が米が関州かい 思い流れ

.

記

## よく使う微分公式 (cont'd)

逆関数の微分:

微分可能な関数 y = f(x) の逆関数  $x = f^{-1}(y)$  が存在するとする. さらに b と a を b = f(a) を満たす点とする. このとき  $f'(x) \neq 0$  ならば,

$$f'(a)=rac{1}{f^{-1'}(b)}$$

#### 例

 $y=8x^3$  とする.このとき,この逆関数は  $x=y^{1/3}/2$  である. $b=8a^3$  とする.このとき,  $f'(x)=24x^2,\quad f^{-1'}(y)=rac{1}{6}y^{-rac{2}{3}}$   $\Rightarrow f'(a)=24a^2=rac{1}{rac{1}{a}(8a^3)^{-rac{2}{3}}}=rac{1}{f^{-1'}(b)}$ 

ワオームアップ

一変数関数の微分

一次元の最適化

多変数の微分

多変数関数と最適化

一変数関数の微分

一次元の最適化

高階の微分

多変数の微分

多変数関数と最適位

最適化入門:一変数関数

#### なぜ微分が経済学で重要か?

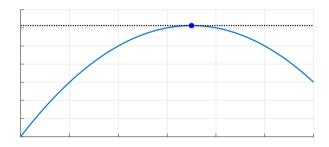


Figure: 傾きと最大化のイメージ図

傾き (導関数)= 0 の部分で最適化問題を解くことが出来る!一階の条件とても便利だから良く使われる.

一変数関数の微分

一次元の最適化

多変数の微分

変数関数と最適化

## 例

$$ightharpoonup$$
 例  $1:f(x)=-x^2$  の導関数は  $f'(x)=-2x$ .

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x=0$$
 で最大化される

▶ 例 
$$2: f(x) = (2x-3)(x-2)$$
 の導関数は

$$f'(x) = 2(x-2) + (2x-3) = 4x-7$$

そして、
$$f'(x) = 4x - 7 = 0$$
とは  $x = 7/4$  のとき。つまり  $x = 7/4$  で  $f$  は

74-4777

一次元の最適化

次元の最適化

なが米ケの他なく

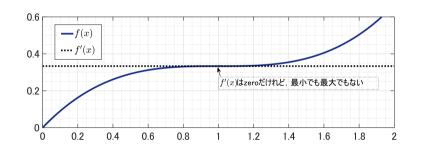
、水光が見月光がレーにい流

**定**数【图数X ⊂ 取处

非足

### 注意点

- ▶ 傾き = 0 の方法は便利
- ▶ 注意:傾き = 0 の方法だと、最大化を解いているのか、最小化を解いている のか分からない
  - ▶ 極端な場合、最大化でも最小化でもない、次のようなケースもありえる



コメント:経済学では,モデルを作る時点でこういう面倒なことが起きないよう に工夫することが一般的

ウォームアップ

一次元の最適化

うくりしつ対ス起刊

de alexandr a dell'il

多変数関数と最適化

一次元の最適化

高階の微分

変数の微分

変数関数と最適位

補足

高階の微分

微分を取れるのは1回とは限らない。

## 例

 $f(x) = x^a \ \mathcal{E} \ a \neq 1 \ \mathcal{E} \ \mathcal{F} \ \mathcal{F}$ 

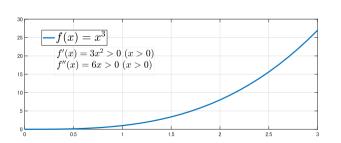
- $ightharpoonup 1 \square \exists f'(x) = ax^{a-1}$
- $ightharpoonup 2 \Box \Box f''(x) = a(a-1)x^{a-2}$
- $ightharpoonup 3 \Box \Box f'''(x) = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$
- ▶ :
- 2回目の導関数を二階の導関数 (2nd-order derivative) と言う

高階の微分は、関数 f の形状を知るために便利

例

f'(x) > 0: 右上がり

▶ f''(x) > 0: どんどん傾きが大きくなる



V. → - 101 N/V // .

シ()LV)対X地口

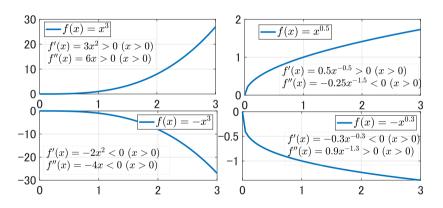
高階の微分

多変数の微分

哺足

## 高階の微分と関数の形のまとめ:図示

4つのパターン: $f'(x) \ge 0 \& f''(x) \ge 0$ 



ウォームアップ

高階の微分

多変数の微分

変数関数と最適化

- ightharpoonup f'>0,f''>0、右上がり、下に凸
- ▶ f' > 0, f'' < 0、右上がり、上に凸
- ▶ f' < 0, f'' > 0、右下がり、下に凸
- ▶ f' < 0, f'' < 0、右下がり、上に凸
- 1階微分 ⇒ 右上がりかどうか
- 2 階微分 ⇒ 凸の向き

経済学的には二番目のケースが頻出

(補足:f''=0 の場合, 凸の向きが変わる. 23 頁の例)

ウォームアップ

一変数関数の微分

一次元の最適化

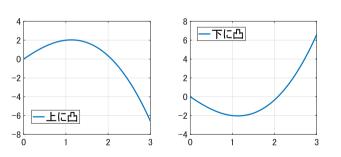
高階の微分

多変数の微分

変数関数と最適位

- ▶ 上に凸のとき導関数 = 0⇒ 最大化解
- ▶ 下に凸のとき導関数 = 0⇒ 最小化解

このように凸の向き (つまり2階の導関数) は、最適化と密接に関連!



2階の導関数による条件を 2階の条件と呼ぶ

ウォームアップ
一変数関数の微分

一次元の最適化

高階の微分

変数関数と最適化

fi 已

一次元の最適化

古世と小幼子へ

多変数の微分

多変数関数と最適

非足

多変数関数と微分

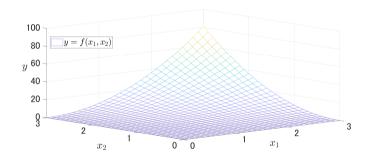


Figure:  $y=x_1^2x_2^2$  の例

これの微分を考えよう

▶ 偏微分と全微分

変数関数の微分

高階の微分 **多変数の微分** 

多変数関数と最適化

| 変数関数と取過10 | |足

- ▶ 多変数関数  $f(x_1, x_2)$  の偏導関数とは、残りの変数 (例えば  $x_2$ ) を固定して、 $x_1$  が動いた時の傾き
- $\triangleright$   $\frac{\partial y}{\partial x}, f_{x_1}(x_1, x_2)$  や  $f_1(x_1, x_2)$  等と表す

計算上の考え方:残りの変数は固定するので、 $x_2$ は定数と思えばよい。

### 例

$$f(x_1,x_2)=x_1^2x_2^2$$
 の  $x_1$  に対する偏導関数は

$$rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2x_1^{2-1}x_2^2 = 2x_1x_2^2$$

. オな米れ目目来れ 不 幼れ / \

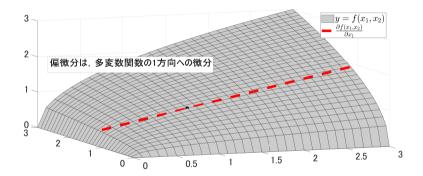
一次元の最適化

高階の微分

多変数の微分

:h 🖂

## 偏微分の図解



- ightharpoonup ここで  $x_2$  は固定されている (パラメータのようなもの).
- ▶ 縦か横のみ (斜めはではない)

ウォームアップ

一変数関数の個

一人几の取返

高階の微気

多変数の微分

多変数関数と最適化

- ▶  $\mathrm{d}f(x_1,x_2)$  等と表す
- ▶ 計算方法は、

$$\mathrm{d}f(x_1,x_2) = rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2$$

例

$$x_1^2x_2^2$$
の全導関数  $\mathrm{d}f(x_1,x_2)$  は $\mathrm{d}f(x_1,x_2)=2x_1x_2^2\mathrm{d}x_1+2x_1^2x_2\mathrm{d}x_2$ 

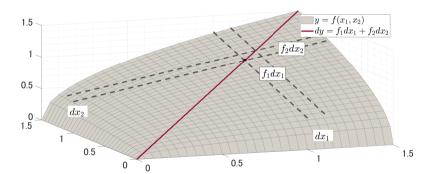
一変数関数の微分

一次元の最適化

高階の微分

多変数の微分

非足



▶ 全微分では  $x_1, x_2$  両方とも動かす. (斜め!)

ウォームアップ

ンタニの 見 ※/L

高階の微分

多変数の微分

多変数関数と最適化

SAMMAN - J PA

一次兀の最適化

高階の微分

多変数の微分

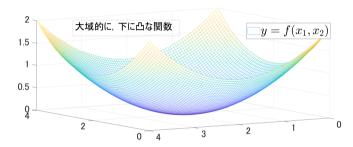
多変数関数と最適化

補足

多変数関数と最適化

多変数関数と最適化

- ▶ 数学の理論的には面倒なケースが多々考えられる
- ▶ (特に学部や修士の)経済学の間では、そんな面倒なケースはまず出てこない
  - ▶ 数学的には、(大域的に) 凸な関数のみに注目する



#### ウォームアップ

一変数関数の微

一次元の最適化

可阳夕水

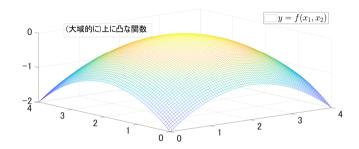
多変数の似分

多変数関数と最適化

足

#### 下に凸な関数は

$$lackbox{ } rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0$$
 かつ  $rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0$  な点が最小化解



#### 上に凸な関数は

$$lacksymbol{iggle} rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0$$
 かつ  $rac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0$  な点が最大化解

ウォームアップ

一変数関数の微

一次元の最適化

所的の似力

多変数の假分

多変数関数と最適化

- ▶ 高階の微分
  - ▶ 凸の方向の向きと深く関係. したがって、最適化と関係
- ▶ 多変数関数の微分
  - ▶ 偏微分と全微分
- ▶ 最も大事なこと:学部の経済学で出てくるほぼ全ての最適化は「微分して 0」 で解ける

コメント:使っていくうちに慣れるので、今はよく分からなくても大丈夫だと思 います ウォームアップ

一変数関数の個分

一次元の最適化

'H V PX /J

変数の微分

多変数関数と最適化

甫足

- ▶ 岡田『経済学・経営学のための数学』
- ▶ Sundaram "A First Course in Optimization Theory" (やりすぎ?)

ウォームアップ

一変数関数ので

一次元の最適化

IEIPH V PA //

多変数の微分

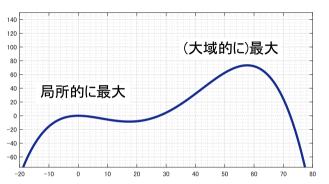
多変数関数と最適化

구

変数の微分

変数関数と最適位

補足



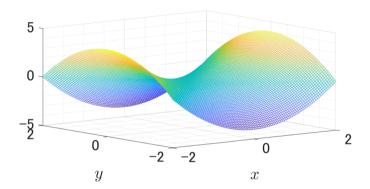
《元の最適化 音の微分 変数の微分 変数関数と最適化

補足

- ▶ 局所的に最大 (local maximum): その点の近傍 (近く) で最大
- ▶ (大域的に) 最大 (global maximum):定義域全体の中で最大

局所的最小も同様に定義できる

コメント:数学的に重要な違いだけど、学部の経済学で出てくるほぼ全ての最大化問題には局所的な最大は出てこない.



| 数関数の限力 | 元の最適化 | の微分 | 数の微分 | 数関数と最適化

補足

x 軸方向には下に凸、y 軸方向には上に凸

**鞍点** (あんてん、saddle point): 多変数関数の変域の中で、ある方向で見れば極大値だが別の方向で見れば極小値となる点

コメント:学部の経済学ではこういう面倒なケースは出てきません