基礎マクロ：一般均衡

日野将志

一橋大学

2021

ロードマップ：それぞれの関係

家計の選択

1．消費と貯蓄

2．消費と労働

企業の選択

1．生産と投資

均衡の理論

1．家計のみの均衡

2．家計と企業の均衡

景気循環入門

資産価格理論入門

経済成長入門

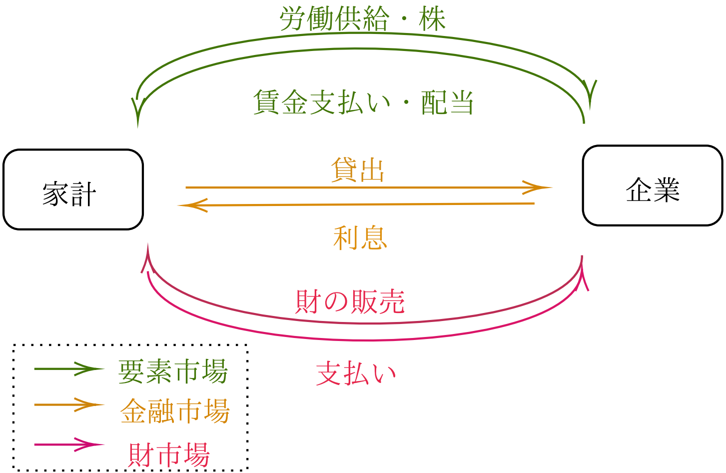
物価・景気循環・マクロ経済政策

1．貨幣と物価

2．IS-LM モデル

3．AD-AS モデル

- 教科書：Kurlat 9 章，二神・掘 6 章


労働供給・株
賃金支払い・配当
家計
企業
貸出
利息
財の販売
支払い
要素市場
金融市場
財市場

動学的一般均衡

先週までに

- 家計の 2 期間の最適化
  - 消費と貯蓄の選択
  - +労働供給
- 企業の生産や投資の最適化

を学んだ．ここでは，これらが市場を通じて財が交換される場合を考える．

まず，もっと単純化した，企業のいないケースから始めてみる

今回扱うこと

均衡概念：完全競争

動学的な純粋交換経済
- エッジワースボックス

厚生経済学の基本第一定理

生産のある動学的一般均衡

動学的一般均衡モデルの使い方

補足
- 社会的計画者の問題の解き方

(完全) 競争市場

価格と配分の決まり方：(完全) 競争市場を仮定

- 配分 (allocation) とは，消費量や生産量のような数量の総称
- 完全競争市場では (i) 皆が制約の下で目的 (効用) を最大化する，(ii)「需要＝供給」とする．

(完全) 競争市場の基本的な仮定

- 家計・企業は価格に影響を持たない
  - 結果：価格は需給の均衡で決まる
  - 違う例：不完全競争 (独占，寡占，複占，etc)
- 外部性・公共財が存在しない
  - 外部性や公共財に関しては深入りしない (ミクロで習うと思います)

完全競争均衡の定義：イメージ

競争均衡の定義：言葉によるイメージ

1. 効用最大化
   - 効用最大化問題 (max 効用 s.t. 予算)
   - 価格は所与
2. 利潤最大化
   企業が存在する場合，
   - 利潤最大化問題 (max 利潤)
   - 価格は所与
3. 市場均衡条件
   - 需要 = 供給
   - 市場の均衡で価格が決まる

(余談)：その他の均衡概念

経済学の応用で良く使われる，完全競争以外の均衡概念：

- 不完全競争均衡
  - 企業や家計が価格支配力を持っている

  ⇔ 企業や家計が価格を決める
- サーチ・マッチング均衡
  - 失業が存在する均衡 (労働需要 $\neq$ 労働供給)

その他，均衡概念はたくさん...

動学的な純粋交換経済

純粋交換経済の概要

最も単純な動学的な純粋交換経済のイメージ

- 2 期間
- 家計が 2 人いる (A さん,B さん)
  - 二人は異なる労働所得 (y_1^i, y_2^i) を持っている
    - y_t^i であり，$i \in \{A, B\}$ は人，t は時点を意味する

純粋交換経済の数値例とイメージ

- 例えば $(y_1^A, y_2^A) = (2, 1)$ かつ $(y_1^B, y_2^B) = (1, 2)$ とする
  - 意味：A さんは 1 期目に裕福，B さんは 2 期目に裕福
  - 考え方：A さんは 1 期目の財を B さんに “渡す” ことで，B さんから 2 期目の財を “もらえば”，2 人とも消費の平準化を出来る
    - 「2 期の財をもらう？」．2 期の財はまだ存在してないのでは？
    - $\Rightarrow$ 時点の概念を使って正確に言い換える：A さんは 1 期に財を “貸す”．B さんは “借りる”．
  - $\Rightarrow$ 交換をするはず
    - でも今，我慢のコスト β を考えると 1 期目の財と 2 期目の財を等価で交換するのはフェアじゃない
    - どうやって価格って決めればいいの？

純粋交換経済の競争均衡

(完全) 競争均衡：完全競争市場で決まる価格と配分

(1) 効用最大化の条件：家計 2 人 $(i = A, B)$ が効用最大化をするような配分 (c_1^i, c_2^i)

(2) 市場均衡条件：

$$\underbrace{c_1^A + c_1^B}_{\text{A さんと B さんの 1 財の消費の和}} = y_1^A + y_1^B \quad (1\text{ 期の財})$$

$$\underbrace{c_2^A + c_2^B}_{\text{A さんと B さんの 2 財の消費の和}} = y_2^A + y_2^B \quad (2\text{ 期の財})$$

$$\underbrace{s^A + s^B}_{\text{A さんと B さんの貯蓄の和}} = 0$$

市場均衡条件：需要＝供給

家計の効用最大化の復習

今，労働供給の選択がないとする．このとき家計の最大化の必要十分条件は以下．

$$\underbrace{\frac{u'(c_1^i)}{\beta u'(c_2^i)}}_{\text{無差別曲線の傾き}} = \underbrace{1+r}_{\text{価格比}}$$

$$c_1^i + s^i = y_1^i \qquad \text{1 期の予算}$$

$$c_2^i = (1+r)s^i + y_2^i \qquad \text{2 期の予算}$$

均衡では，これが全ての家計 ($i \in \{A, B\}$) に対して成り立つ (労働供給の選択があるときは，労働供給の一階条件をこれに加えれば良い)．

数式による競争均衡の定義

(完全) 競争均衡：完全競争市場で決まる価格と配分

(1) 効用最大化の条件：

$$\frac{u'(c_1^i)}{\beta u'(c_2^i)} = 1 + r$$

$$c_1^i + s^i = y_1^i \qquad (1\text{期の予算})$$

$$c_2^i = (1+r)s^i + y_2^i \qquad (2\text{期の予算})$$

(2) 市場均衡条件：

$$c_1^A + c_1^B = y_1^A + y_1^B \quad (1\text{期の財})$$

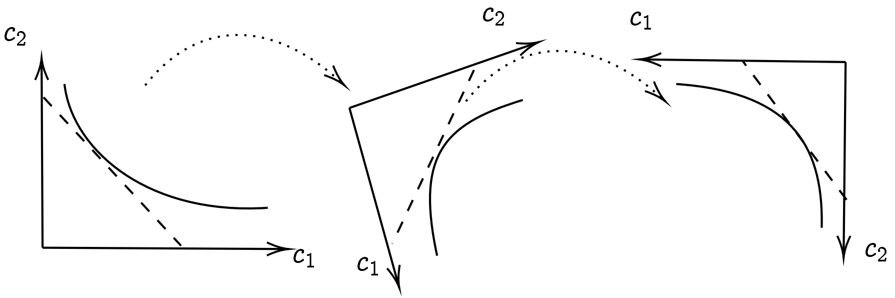
$$c_2^A + c_2^B = y_2^A + y_2^B \quad (2\text{期の財})$$

$$s^A + s^B = 0 \quad (\text{資産})$$

これを図的に表す方法：エッジワースボックス (次頁以降)

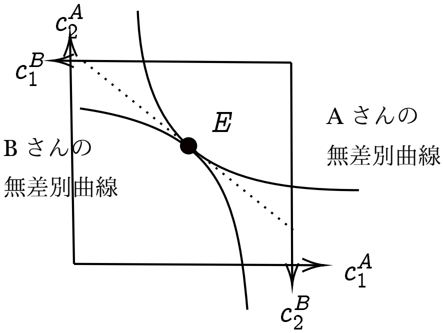
(準備)：エッジワースボックス作り方

B さんの次元を回転させる



そして A さんの無差別曲線と予算制約の図に重ねると...

エッジワースボックス：競争均衡の図示

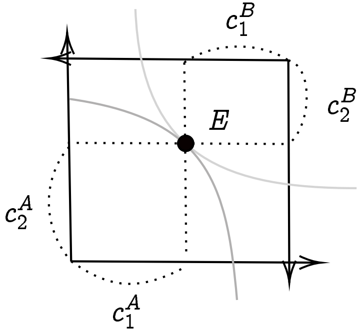


- 二つの曲線はそれぞれ A さんと B さんの無差別曲線
- 点線は 2 人の予算制約 (均衡では重なる)

E が均衡

- A さんの無差別曲線の傾き ＝ 価格比 =B さんの無差別曲線の傾き

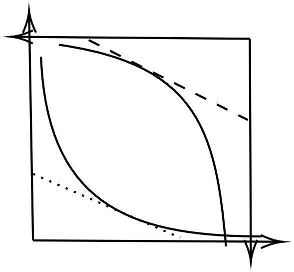
エッジワースボックス：競争均衡の図示 (続)



軸や長さにも意味がある

- 横軸の長さ：$y_1^A + y_1^B$
- 縦軸の長さ：$y_2^A + y_2^B$

エッジワースボックス：不均衡の一例



不均衡の特徴：

- 予算制約が重なっていない
- 無差別曲線が一点で触れていない

宿題用：完全競争市場の価格と配分の求め方

均衡を求める計算の手順のまとめ

(1) 価格を固定した上で，家計の最大化問題を解く

(2) 上で解いた家計 i の解 (c_1^i, c_2^i) から，

$$c_1^A + c_1^B = y_1^A + y_1^B \quad (1\text{ 期の財})$$
$$c_2^A + c_2^B = y_2^A + y_2^B \quad (2\text{ 期の財})$$

を満たすように価格を求める

(3) この価格を (1) で求めた消費関数や貯蓄関数に代入する

計算の練習は練習問題

厚生経済学の基本第一定理

完全競争はなぜ経済学でよく教えられるのか

完全競争は，“非現実的に思えるのに”，経済学の授業では頻繁に教えられる

- 現実では独占や外部性，情報の非対称等々，様々な要因のせいで完全競争が成り立っているとは思えない！

答え：

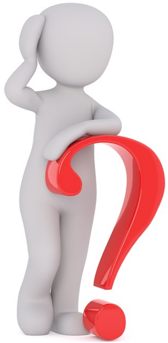
- 仮定のおかげで分析が単純化されている
- 理論的に美しい結果が出る (次頁)
  - 単純さと結果の綺麗さ ⇒ 思考の出発点として望ましい
  - ⇒ 徐々に現実的な要素を足していけばいい
- マクロ的な回答：それなりに現実を説明できる (??頁以降)

競争均衡の特徴：厚生経済学の基本第一定理

定理：厚生経済学の基本第一定理

市場は完全競争的であるとする．このとき競争均衡は (パレート) 効率的である

パレート効率的とは，「誰かが損することなく，誰も得できない状態」



(パレート) 効率的の詳細

(パレート) 効率的とは，誰かが損しなければ，他の誰も得できない状況

- ざっくり言うと無駄がない (=効率的な) 状態
  - 無駄がある例：
    - 例１：嫌煙家がタバコを保有している．
    - 例２：未成年がお酒を保有している．
    - ⇒ どちらも使うより売った方がマシ
- でも，衡平性から見て，効率的な状態が良いとは限らない
  - 極端な例：ある一人の個人 (A さん) が経済の全ての財を独占していても，パレート効率的
  - ⇒ もしかしたら，「この人から少しだけ財を取り上げて，他の人に配る」と，社会的な厚生からは良いかもしれない．でも，それは A さんが損をしている．

厚生経済学の基本第一定理 (再訪)

定理：厚生経済学の基本第一定理

市場は完全競争的であるとする．このとき競争均衡は (パレート) 効率的である

証明の直観 (背理法)：「もし均衡が効率的でないとする．それならば，一人も損せずに誰かが得できるはず．それは効用最大化の条件に反する」

- 証明の詳細等はミクロ (中級？) で習うと思います
- マクロ経済学 (つまり動学的かつ生産があっても)，厚生経済学の基本第一定理は成り立つ
- 厚生経済学の基本第一定理が成り立たない場合
  - 市場が競争的ではない (独占等)
  - 市場がうまく機能しない対象がある (公共財，外部性)
  - マクロ特有の要素：約束が守られるか (例えば倒産)，借入が自由に可能か

社会的計画者と効率性 (家計が二人いるとき)

次のような全知全能かつ慈善的な存在を社会的計画者と呼ぶ

- 慈善的：社会的計画者は，家計の効用を最大化する
- 全知全能：社会的計画者は，企業の生産技術や家計の初期賦存を完全に理解し，保有している

社会的計画者の最適化問題：

$$\begin{aligned}
\max_{c_1^A, c_2^A, c_1^B, c_2^B} \quad & u(c_1^A) + \beta u(c_2^A) \\
\text{s.t. } \bar{u} = {} & u(c_1^B) + \beta u(c_2^B) \quad \text{(B さんの効用を止める)} \\
c_1^A + c_1^B = {} & y_1^A + y_1^B \quad \text{(1 期の財市場均衡条件)} \\
c_2^A + c_2^B = {} & y_2^A + y_2^B \quad \text{(2 期の財市場均衡条件)}
\end{aligned}$$

(コメント：この計算問題は基礎マクロの試験では出しません)

社会的計画者の解

(社会的計画者の問題はラグランジュ法でないと解けないので計算手順は補足 39 頁)

社会的計画者の問題の解は

$$\underbrace{\frac{u'(c_1^A)}{\beta u'(c_2^A)}}_{\text{A さんの無差別曲線の傾き}} = \underbrace{\frac{u'(c_1^B)}{\beta u'(c_2^B)}}_{\text{B さんの無差別曲線の傾き}}$$

となる．競争均衡では，

$$\underbrace{\frac{u'(c_1^A)}{\beta u'(c_2^A)}}_{\text{A さんの無差別曲線の傾き}} = \underbrace{\frac{u'(c_1^B)}{\beta u'(c_2^B)}}_{\text{B さんの無差別曲線の傾き}} = 1 + r$$

だった．同じ！

⇒「競争均衡では，配分が効率的になるように価格が調整される」

社会的計画者と効率性のまとめ

社会的計画者は，(全知全能なので) 無駄なく生産技術を使って，**B** さんの効用を一定として，**A** さんの効用を最大化する

- 社会的計画者の問題の解は (パレート) 効率的
- したがって，競争均衡が社会的計画者の解と一致することが示せれば，競争均衡が (パレート) 効率的であることも示せる

閑話休題：ミクロの人はこういう証明方法を取らない：理由

- 微分可能性等，数学的に不必要な仮定を増やして証明しているから
- マクロの人間は，微分可能性は当たり前に仮定するので，このアプローチを使うことが割と多い

生産のある動学的一般均衡

Kurlat の内容を少しだけ修正して単純化している

生産のある動学的一般均衡の概要

最も単純な生産のある動学的一般均衡 (イメージ：ロビンソン・クルーソー)

- 2 期間
- 家計は 1 人
  - 資産を企業に資本として渡す．次期にリターンを得る
  - 労働は 1 単位必ず供給する (自分で選ばないとする)
  - 家計は企業の株を保有しており，企業の利潤 π を受け取る
- 企業も 1 社
  - 2 期間，それぞれ静学的に操業
  - K と N のみを選ぶ
- 完全競争：どちらも価格へ影響を持たないとする

家計の最大化問題

家計の最大化問題は，概ね 2 週目に学んだ通り：

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,a_2} \ & u(c_1) + \beta u(c_2) \\
\text{s.t. } & c_1 + a_2 = (1 + r_1)a_1 + w_1 + \pi_1 \\
& c_2 = w_2 + (1 + r_2)a_2 + \pi_2 \\
& a_1 \geq 0 \text{ given}
\end{aligned}
$$

違い：

- 初期資産 (例. 遺産)$a_1 \geq 0$ の保有 (これは家計にとって外生)
  - 貯蓄は $s = a_2 - a_1$
  - 初期資産を導入した理由：後々の Ramsey model と consistent
- 企業の利潤 π_t の受け取り

企業の最大化問題

企業は静学的に利潤最大化を行う

- 企業の生産技術は $F(K,H) = zF(K,H)$ とする
  - z は生産性 (パラメータ)
- 企業は毎期，次の利潤最大化を解く

$$\pi_t = \max_{K_t,H_t} \; zF(K_t,H_t) - w_t H_t - (r_t+\delta)K_t$$

完全競争市場と均衡

価格と配分の決まり方：完全競争市場

競争均衡：完全競争市場で決まる価格と配分

(1) 効用最大化の条件：家計が効用最大化をするような消費 (c_1^i, c_2^i)

(2) 利潤最大化の条件：企業が利潤を最大化するような生産 (y_1, y_2)

(3) 市場均衡条件：世の中に存在する総量と家計が消費する総量が釣り合うように価格が決まる

$$\underbrace{c_1}_{\text{家計の } t \text{ 期の財の消費}} + \underbrace{K_2 - (1-\delta)K_1}_{=I \text{ 投資}} = \underbrace{zF(K, H)}_{\text{企業の生産}} \quad (1 \text{ 期の財市場})$$

$$\underbrace{c_2}_{\text{家計の } 2 \text{ 期の財の消費}} = \underbrace{zF(K_2, H_2)}_{\text{企業の生産}} + (1-\delta)K_2 \quad (2 \text{ 期の財市場})$$

$$\underbrace{1}_{\text{家計の労働供給}} = \underbrace{H_t}_{\text{企業の労働需要}} \quad (t \text{ 期の労働市場})$$

$$\underbrace{a_t}_{\text{家計の資本供給}} = \underbrace{K_t}_{\text{企業の資本需要}} \quad (t \text{ 期の資本市場})$$

生産のある競争均衡の特徴

- 家計の最適化条件

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = (1 + r_2)$$

$$c_1 + a_2 = (1 + r_1)a_1 + w_1 + \pi_1$$

$$c_2 = (1 + r_2)a_2 + w_2 + \pi_2$$

- 企業の利潤最大化条件, for $t = 1, 2$

$$r_t + \delta = F_K(K_t, H_t)$$

$$w_t = F_H(K_t, H_t)$$

$$\pi_t = F(K_t, H_t) - w_t H_t - (r_t + \delta)K_t$$

- 市場均衡条件 (前頁)

企業の利潤 π_t と市場均衡条件 $H_t = 1$ および $K_t = a_t$ を家計の最適化条件に代入すると...

生産のある競争均衡の特徴

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = (1 + \underbrace{F_K(K_2, 1) - \delta}_{r_2})$$

$$c_1 + K_2 = F(K_1, 1) + (1 - \delta)K_1$$

$$c_2 = F(K_2, 1) + (1 - \delta)K_2$$

おまけ：社会的計画者と効率性 (家計が一人，生産者がいるとき)

生産があるときの社会的計画者の最適化問題：

$$\max_{c_1,c_2,K_2} u(c_1)+\beta u(c_2)$$

$$\text{s.t. } c_1+K_2=zF(K_1,1)+(1-\delta)K_1$$

$$c_2=zF(K_2,1)+(1-\delta)K_2$$

これを解くと，

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)}=(1+\underbrace{F_K(K_2,1)-\delta}_{r_2})$$

$$c_1+K_2=F(K_1,1)+(1-\delta)K_1$$

$$c_2=F(K_2,1)+(1-\delta)K_2$$

と競争均衡と一致する $\Rightarrow$ 競争均衡は (生産があっても) 効率的

動学的一般均衡モデルの使われ方：入門

動学的一般均衡の使われ方

これから大学院の 1 年目で学ぶことをテクニカルな部分を排除して結果だけ紹介

- 数量の検証：RBC モデル
  - 中心的な問い：「基本的な動学的一般均衡のモデルは，現実の C, I, Y の特徴を捉えられるか？」
  - RBC：実物的景気循環 (Real Business Cycle)
- 価格の検証 (一例)：(消費に依拠した) 資産価格理論
  - 中心的な問い：「基本的な動学的一般均衡のモデルは，現実の資産価格の特徴を捉えられるか？」
  - CCAPM：(消費に依拠した) 資産価格理論 (Consumption-based Capital Asset Pricing Model)

補足

社会的計画者の問題

25 頁の社会的計画者の問題 (再掲)

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1^A, c_2^A, c_1^B, c_2^B} \quad & u(c_1^A) + \beta u(c_2^A) \\
\text{s.t. } \bar{u} &= u(c_1^B) + \beta u(c_2^B) \quad \text{(B さんの効用を止める)} \\
c_1^A + c_1^B &= y_1^A + y_1^B \quad \text{(1 期の財市場均衡条件)} \\
c_2^A + c_2^B &= y_2^A + y_2^B \quad \text{(2 期の財市場均衡条件)}
\end{aligned}
$$

ラグランジュ関数と一階の条件

ラグランジュ関数は以下のとおり

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& u(c_1^A) + \beta u(c_2^A) + \lambda_1[u(c_1^B) + \beta u(c_2^B) - \bar{u}] \\ &+ \lambda_2[y_1^A + y_1^B - c_1^A - c_1^B] + \lambda_3[y_2^A + y_2^B - c_2^A - c_2^B]\end{aligned}$$

この一階の条件は以下のとおり

$$c_1^A \ : u'(c_1^A) = \lambda_2 \tag{1}$$
$$c_2^A \ : \beta u'(c_2^A) = \lambda_3 \tag{2}$$
$$c_1^B \ : \lambda_1 u'(c_1^N) = \lambda_2 \tag{3}$$
$$c_2^B \ : \lambda_1 \beta u'(c_2^A) = \lambda_3 \tag{4}$$

一階の条件のまとめ

4 本の式からうまく λ_i を排除するように整理すると

$$\underbrace{\frac{u'(c_1^A)}{\beta u'(c_2^A)}}_{\text{A さんの無差別曲線の傾き}} = \underbrace{\frac{u'(c_1^B)}{\beta u'(c_2^B)}}_{\text{B さんの無差別曲線の傾き}}$$

を得る．

社会的計画者の問題：同値なもう一つの書き方

もう一つの書き方社会的計画者の問題

$$\max_{c_1^A, c_2^A, c_1^B, c_2^B} [u(c_1^A) + \beta u(c_2^A)] + \lambda[u(c_1^B) + \beta u(c_2^B)]$$
$$\text{s.t. } c_1^A + c_1^B = y_1^A + y_1^B \quad (1\text{ 期の財市場均衡条件})$$
$$c_2^A + c_2^B = y_2^A + y_2^B \quad (2\text{ 期の財市場均衡条件})$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ は A さんと B さんのどちらに加重するかを決めるパラメータ.

企業の利潤分配

$$\pi_t = \max_{K_t, H_t} F(K_t, H_t) - w_t H_t - (r_t + \delta) K_t$$

最適な K_t, H_t を K^*, H^* とすると,

$$\underbrace{\pi_t}_{\text{配当}} + \underbrace{w_t H_t^*}_{\text{賃金支払い}} + \underbrace{(r_t + \delta) K_t^*}_{\text{資本のコストの支払い}} = \underbrace{F(K_t^*, H_t^*)}_{\text{生産量}}$$