

基礎マクロ練習問題：ソローモデル

日野将志 *

1 離散時間

1.1 生産性の成長のあるソローモデルの生産要素

スライドと同じケース (つまり, 生産性の成長があり, 生産関数は一般形) で,

- (r, w) をそれぞれ, \tilde{k} の関数として求めよ
- (r, w) の定常状態での成長率を求めよ

1.2 生産性の成長のないソローモデル

生産関数は

$$Y = F(K, N)$$

とする. つまり, 授業の場合と比較して, 生産性 A が $A = 1$ と固定されている場合を考える.

$k = K/N$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- 基本方程式を求めよ.
- 定常状態を $k = k'$ と定義する. このとき定常状態で k はどのように動くか分析せよ

1.3 コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

コブ・ダグラス型の生産関数

$$Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$$

を仮定する. ここで $\alpha \in (0, 1)$ はパラメータである.

このとき次の問いに答えよ.

- $f(k) = k^\alpha$ となることを示せ
- 基本方程式を求めよ
- 定常状態の k を求めよ
- 定常状態における, 家計の一人当たりの消費水準を求めよ

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- 黄金律の貯蓄率を求めよ
- 黄金律の一人当たり消費水準を求めよ
- 黄金律の一人当たり資本 k を求めよ

1.4 人口成長

次のような人口成長を考える.

$$N' = (1 + n)N$$

つまり, n は人口成長率である. この n は外生変数とする. このとき, 次の問いに答えよ. なお, 生産関数は一般の形のまま (つまり, F や f のまま) とする.

- 基本方程式を求めよ. ただし, N が式中出现ないようにすること (n は出てきて良い).
- 定常状態の k が決まる条件を求めよ.

1.5 生産性の成長とコブ・ダグラス型生産関数

次のような生産性 A を考える

$$Y = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$$

さらに, この生産性 A は次のように成長するとする.

$$A' = (1 + g^A)A$$

したがって, この a は生産性の成長率である. このとき, 次の問いに答えよ. なお, 生産関数は一般の形のまま (つまり, F や f のまま) とする.

なお, 以降では k の代わりに $\tilde{k} \equiv K/(AN)$ を用いて, 以下の問いに答えること.

- 生産性の成長のある生産関数は次のように分類される. このコブ・ダグラス型生産関数はいずれに分類されるか答えよ
 - ハロッド中立: $F(K, AN)$
 - ヒックス中立: $F(AK, N)$
 - ソロー中立: $AF(K, N)$
- 基本方程式を求めよ. ただし, A が式中出现ないようにすること (a は出てきて良い).
- 定常状態を $\tilde{k} = \tilde{k}'$ と定義する. このとき定常状態で $k(\neq \tilde{k})$ はどのように動くか分析せよ
- 定常状態の \tilde{k} を求めよ. さらに a が変わるとどうなるか分析せよ.
- 定常状態における一人当たり消費 C/N を求めよ.
- 定常状態における r と w の動きを分析せよ.

1.6 加法成長

Philippon (2022) は, 生産性の成長率は指数的ではなく, 次のように加法的ではないかと指摘した.

$$A_t = A_0 + bt$$

ここで $A_0 > 0$ は 1947 年のアメリカの生産性である。 $b \in > 0$ はパラメータであり、例えば 0.0245 くらいの数を考えてほしい。

以下ではコブ・ダグラス型生産関数 $Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$ を仮定する。人口は成長しないとする。このとき、次の間に答えよ。

- 加法成長の生産性の成長率を考えよう。これまで学んだ標準的な場合、つまり指数成長の生産性 ($A_t = (1+g)^t A_0$) の場合と、どのように異なるか簡単に述べよ。加法成長の場合、無限期間後 ($t \rightarrow \infty$) において、生産性の成長率はどうなるか？また、加法成長のとき無限期間後に、 A_t はどのような値になるか？
- $\tilde{k}_t \equiv K_t / (A_t L_t)$ と定義して、基本方程式を求めよ
- 定常状態は無限期間後の経済としよう。この定常状態における \tilde{k} を求めよ
- 定常状態における K, C, Y の成長率を求めよ
- 定常状態における K/L (資本労働比 capital-labor ratio) および Y/L (GDP per capita) はどのような値になるか
- 移行過程について、加法成長生産性 ($A_t = A_0 b t$) と指数成長生産性 ($A_t = (1+g)^t A_0$) は違いはあるか？

1.7 政府の役割

ソローモデルにおける政府の役割を検討する。政府としては、家計の所得から次のように税 T を取り、家計の消費関数は次のようになるとする。

$$C_t = (1-s)(Y_t - T_t)$$

そして、政府は税収を政府支出に使うとする。つまり、

$$G_t = T_t$$

とする。政府は、この財政支出を生産量 Y_t の一定割合にするとする。これは例えば、 $g \in [0, 1]$ として

$$G_t = \gamma Y_t$$

と書ける^{*1}。

生産関数はコブ・ダグラス型、つまり $F(K_t, A_t L_t) = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$ と書けるとし、この生産性は $A_{t+1} = (1+a)A_t$ と成長し、人口成長はないとする。

$\tilde{k}_t \equiv K_t / (A_t L_t)$, $f(\tilde{k}) \equiv F(\tilde{k}, 1)$ と定義することにする。このとき、次の間に答えよ。

1. 財市場の均衡条件を記述せよ
2. 基本方程式を求めよ
3. 定常状態での \tilde{k} を求めよ
4. この \tilde{k} は政府の支出率 γ が上昇するとどうなるか？
5. 定常状態での資本 K の成長率を求めよ。これは γ が変化するとどうなるか？

^{*1} 平時であれば、例えば日本の G_t/Y_t は 2 割弱で推移してきた。

2 連続時間

2.1 連続時間化

離散時間モデル $A_{t+1} = (1 + g)A_t$ の式を連続時間に直せ.

2.2 連続時間と離散時間の違い：コブ・ダグラス型関数の場合

$F(K, AN) = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$ とする. $\dot{A}_t = aA_t$ と成長する.

連続時間において、定常状態は $\dot{k}_t = 0$ と定義される. このとき、次の問いに答えよ.

- 黄金律の \tilde{k} を求めよ.
- 黄金律の \tilde{k} は離散時間の場合と異なるか？比較・議論せよ.