

# 基礎マクロ練習問題：ソローモデル

日野将志 \*

## 1 離散時間

### 1.1 生産性の成長のあるソローモデルの生産要素

スライドと同じケースで,

- $(r, w)$  をそれぞれ,  $\tilde{k}$  の関数として求めよ
- $(r, w)$  の定常状態での成長率を求めよ

### 1.2 生産性の成長のないソローモデル

生産関数は

$$Y = F(K, N)$$

とする. つまり, 授業の場合と比較して, 生産性  $A$  が  $A = 1$  と固定されている場合を考える.

$k = K/N$  とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- 基本方程式を求めよ.
- 定常状態を  $k = k'$  と定義する. このとき定常状態で  $k$  はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の  $k$  が決まる条件を求めよ.

### 1.3 コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

コブ・ダグラス型の生産関数

$$Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$$

を仮定する.

このとき次の問いに答えよ.

- $f(k) = k^\alpha$  となることを示せ
- 基本方程式を求めよ
- 黄金律の  $k$  を求めよ
- 黄金律の水準における, 家計の一人当たりの消費水準を求めよ

---

\* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

## 1.4 人口成長

次のような人口成長を考える.

$$N' = (1 + n)N$$

つまり,  $n$  は人口成長率である. この  $n$  は外生変数とする. このとき, 次の問いに答えよ. なお, 生産関数は一般の形のまま (つまり,  $F$  や  $f$  のまま) とする.

- 基本方程式を求めよ. ただし,  $N$  が式中出现ないようにすること ( $n$  は出てきても良い).
- 黄金律の  $k$  が決まる条件を求めよ.

## 1.5 生産性の成長とコブ・ダグラス型生産関数

次のような生産性  $A$  を考える

$$Y = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$$

さらに, この生産性  $A$  は次のように成長するとする.

$$A' = (1 + g^A)A$$

したがって, この  $a$  は生産性の成長率である. このとき, 次の問いに答えよ. なお, 生産関数は一般の形のまま (つまり,  $F$  や  $f$  のまま) とする.

なお, 以降では  $k$  の代わりに  $\tilde{k} \equiv K/(AN)$  を用いて, 以下の問いに答えること.

- 生産性の成長のある生産関数は次のように分類される. このコブ・ダグラス型生産関数はいずれに分類されるか答えよ
  - ハロッド中立:  $F(K, AN)$
  - ヒックス中立:  $F(AK, N)$
  - ソロー中立:  $AF(K, N)$
- 基本方程式を求めよ. ただし,  $A$  が式中出现ないようにすること ( $a$  は出てきても良い).
- 定常状態を  $\tilde{k} = \tilde{k}'$  と定義する. このとき定常状態で  $k(\neq \tilde{k})$  はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の  $\tilde{k}$  を求めよ. さらに  $a$  が変わるとどうなるか分析せよ.
- 黄金律における一人当たり消費  $C/N$  を求めよ.
- 定常状態における  $r$  と  $w$  の動きを分析せよ.

## 1.6 政府の役割

ソローモデルにおける政府の役割を検討する. 政府としては, 家計の所得から次のように税  $T$  を取り, 家計の消費関数は次のようになるとする.

$$C_t = (1 - s)(Y_t - T_t)$$

そして、政府は税収を政府支出に使うとする。つまり、

$$G_t = T_t$$

とする。政府は、この財政支出を生産量  $Y_t$  の一定割合にするとする。これは例えば、 $g \in [0, 1]$  として

$$G_t = \gamma Y_t$$

と書ける<sup>\*1</sup>。

生産関数はコブ・ダグラス型、つまり  $F(K_t, A_t L_t) = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$  と書けるとし、この生産性は  $A_{t+1} = (1 + a)A_t$  と成長し、人口成長はないとする。

$\tilde{k}_t \equiv K_t / (A_t L_t)$ ,  $f(\tilde{k}) \equiv F(\tilde{k}, 1)$  と定義することにする。このとき、次の間に答えよ。

1. 財市場の均衡条件を記述せよ
2. 基本方程式を求めよ
3. 定常状態での  $\tilde{k}$  を求めよ
4. この  $\tilde{k}$  は政府の支出率  $\gamma$  が上昇するとどうなるか？
5. 定常状態での資本  $K$  の成長率を求めよ。これは  $\gamma$  が変化するとどうなるか？

## 1.7 加法成長

Philippon (2022) は、生産性の成長率は指数的ではなく、次のように加法的ではないかと指摘した。

$$A_t = A_0 + bt$$

ここで  $A_0$  は 1947 年のアメリカの生産性である。 $b \in (0, 1)$  はパラメータであり、例えば 0.0245 くらいの数を考えてほしい。

以下ではコブ・ダグラス型生産関数  $Y_t = A_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$  を仮定する。このとき、次の間に答えよ。

- $\tilde{k}_t \equiv K_t / (A_t L_t)$  と定義して、基本方程式を求めよ
- 定常状態における  $\tilde{k}$  を求めよ
- 移行過程について、加法成長生産性 ( $A_t = A_0 + bt$ ) と指数成長生産性 ( $A_t = (1 + g)^t A_0$ ) は違いはあるか？

## 2 連続時間

### 2.1 連続時間化

離散時間モデル  $A_{t+1} = (1 + g)A_t$  の式を連続時間に直せ。

### 2.2 連続時間と離散時間の違い：コブ・ダグラス型関数の場合

$F(K, AN) = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$  とする。 $\dot{A}_t = aA_t$  と成長する。

連続時間において、定常状態は  $\dot{\tilde{k}}_t = 0$  と定義される。このとき、次の問いに答えよ。

<sup>\*1</sup> 平時であれば、例えば日本の  $G_t/Y_t$  は 2 割弱で推移してきた。

- 黄金律の  $\tilde{k}$  を求めよ.
- 黄金律の  $\tilde{k}$  は離散時間の場合と異なるか？比較・議論せよ.