# 基礎マクロ：消費と労働時間

日野将志

一橋大学

2021

# 余暇と労働時間

働いてる家計の時間の使い方は概ね二つ：働くか，自由時間か

家計は雇用状態や政策 (所得税等) に応じて労働時間を変える

- 世帯主の労働
- 第二労働者の労働

ここでは労働時間の選択の理論について教えます (失業の理論についてはやりません)

- Kurlat 7 章

# 労働供給の重要性



- 所得と労働供給の関係性
  - 例：世帯年収と伴侶の労働供給
- 労働政策の変更と労働供給の変更
  - 例：ベーシックインカムで労働供給は減る？
  - 例：所得税の累進度の増加で労働供給は減る？
- 後々学ぶ景気循環のモデルにおいて重要

## このスライドで学ぶこと

静学的なモデル

- 図解

対数効用の例

対数効用と所得税

2 期間モデルと労働時間

応用例

- 応用例１：Prescott

補足

- 補足：統一的な枠組みの重要性
- 補足：ラグランジュ未定乗数法
- 補足：2 期間モデルと労働時間 (再訪)
- 補足：異時点間と同時点間の分離

# 静学的なモデル

# 静学的な労働選択

これから次のような家計の問題を考える

- 世の中は 1 期間だけ (静学的)
- 家計は消費 $c$ と余暇 $l$(leisure) から効用を得る
- 家計は次のようなトレードオフに直面する
  - たくさん働く $h$ と，労働所得 $wh$ が増え，たくさん消費 $c$ できる
  - たくさん働く $h$ と，余暇時間 $l$ が減る

$\Rightarrow$ たくさん働く ($h$) か，たくさん休む ($l$) かというトレードオフ

前回との比較

- 前回は「今日使うか，貯めて明日使うか」という問題だった
- 今は貯蓄はなし (あとで貯蓄もやる)

# 効用関数

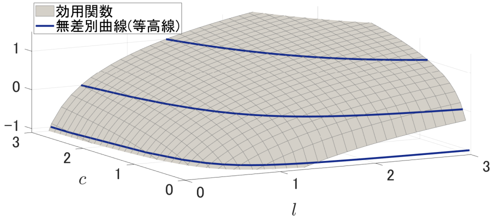
効用は消費 $c$ と余暇 (leisure)$l$ から得る

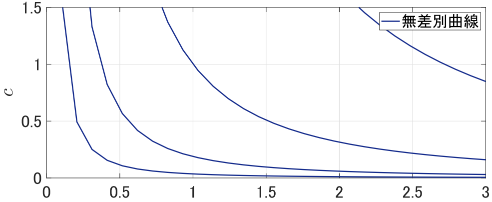
$$u(c, l)$$

$u_c > 0, u_{cc} < 0$ かつ，$u_l > 0, u_{ll} < 0$ とする

- $u_c > 0, u_l > 0$: 消費も余暇も増えると幸せ
- $u_{cc} < 0, u_{ll} < 0$: 消費も余暇も，増えすぎるほど追加的な幸福度は下がる

# 効用関数




本質的に，前回とほぼ同じ！違いは軸が消費 $c$ と余暇 $l$ になっただけ

# 予算制約

予算制約は次の通り

$$c = wh$$

$w$ は賃金 (外生変数)，$h$ は労働時間 (labor **H**ours)

労働時間の上限を考える

- 現実には 1 日なら 24 時間でも良いし，1440 分でも良い．週なら 168 時間，月なら約 720 時間等々．どうしよう？
- 上限を 1 とする (最も一般的だと思います)

$$1 = h + l$$

# 家計の最大化問題

以上をまとめると，家計は次のような最大化問題を解く

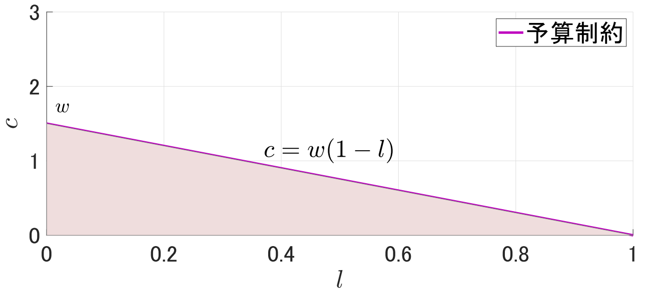
$$\max_{c,h,l} u(c,l)$$
$$\text{s.t.} \quad c = wh$$
$$1 = l + h$$

なお，2 本目の制約式を代入して，

$$\max_{c,l} u(c,l)$$
$$\text{s.t.} \quad c = w(1-l)$$

と変形しても同じ解が得られる

# 予算制約




- 全く余暇を過ごさない ($l = 0$) なら，$c = w$
- 全ての時間を余暇に使う ($l = 1$) なら，$c = 0$

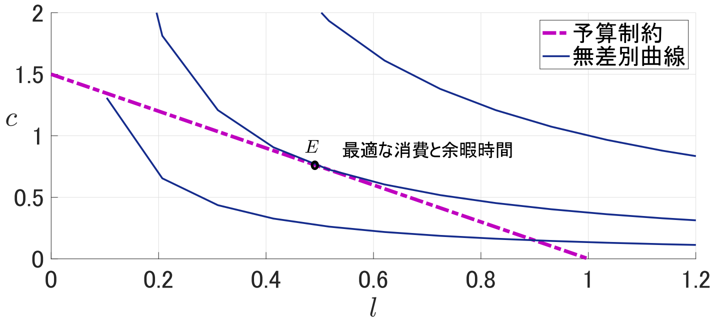
# 解き方

これも解き方は大きく二つ

- 図解
- 数学的な解き方
  - 代入法
  - ラグランジュ法

ここでもまず図解を行ってから，代入法を説明する

# 最適な選択




- $E$ が最適な消費点
  - 条件 1：無差別曲線の傾き ＝ 予算制約の傾き
  - 条件 2：予算制約上

本質的な考え方は二期間の意思決定と同じ！（補足：神取）
次のページからは，代入法でどのように数学的に二つの条件を導くか

# 代入法による解き方





予算制約を効用関数に代入することで次を得る

$$\max_{l} \ u(w(1-l), l)$$

これを微分して，最大化の解を得るために，導関数 $=0$ を得る．

$$\begin{aligned}
&-wu_c(w(1-l), l) + u_l(w(1-l), l) = 0 \\
&\Rightarrow wu_c(c, l) = u_l(w(1-l), l) \\
&\Rightarrow \underbrace{\frac{u_l(c, l)}{u_c(c, l)}}_{\text{無差別曲線の傾き}} = \underbrace{w}_{\text{予算制約の傾き}}
\end{aligned}$$

をえる． ここで $u_c(c, l)$ は第一要素で偏導関数，$u_l(c, l)$ は第二要素の偏導関数

# 閑話休題：なんで失業の問題を教えないの？

答え：数学的に簡単すぎるか，難しくなりやすいから

- 例えば「働く」か「働かない」か二択の問題にする
  - 微分を使えない…

# 対数効用の例

# 対数効用の例

ここで，次の効用関数を仮定する

$$u(c,l) = \log(c) + \log(l)$$

すると，最大化問題は次の通り

$$\max_{c,l} \ \log(c) + \log(l)$$
$$\text{s.t.} \ \ c = w(1-l)$$

# 対数効用の例：モデルを解く

- 予算制約を目的関数に代入すると次のようになる

$$\max_{l} \log(w(1-l)) + \log(l)$$

- 次に，最大化の解を得るために，導関数 $= 0$ を求める

$$\frac{1}{(1-l)} = \frac{1}{l}$$
$$\Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

- この結果を予算制約に代入すると，次を得る

$$c = \frac{w}{2}$$

# 分析のまとめ



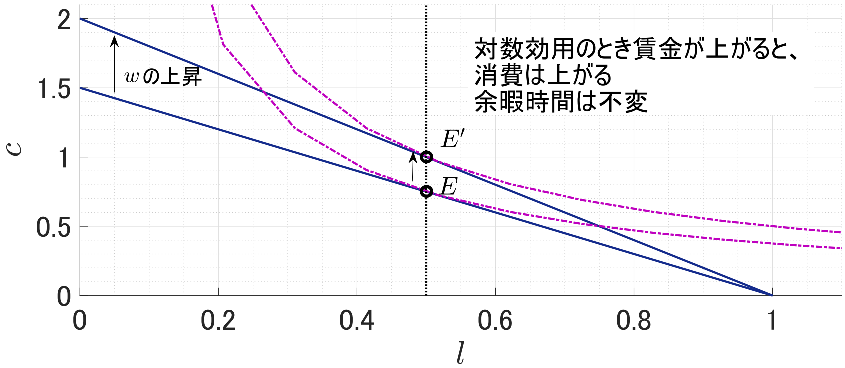
対数効用のとき，解は以下のとおり

$$(c, l, h) = \left(\frac{w}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- $w$ の増減は，消費の増減に直結する
- $w$ が変化しても，労働時間や余暇時間には一切影響しない

これは特殊ケース (他の効用関数の場合は宿題参照)

# 図解：賃金変化と対数効用の場合



# 所得税の分析

# 労働所得税

まず，単純な次のような所得税 $\tau$ を考える

$$(1-\tau)wh$$

ここで $\tau$ は所得税率

- $wh$ は課税前所得
- $(1-\tau)wh$ は課税後所得

# 最適化：労働所得税



労働所得税があるときの最適化問題は，

$$
\begin{aligned}
&\max_{c,l} \; u(c,l) \\
&\text{s.t.} \quad c = (1-\tau)w(1-l)
\end{aligned}
$$

である．

# 対数効用の例

再度，対数効用を例に所得税の分析をしてみよう

$$\max_{c,l} \ \log(c) + \log(l)$$
$$\text{s.t.} \quad c = (1-\tau)w(1-l)$$

予算制約を目的関数に代入すると，次を得る

$$\max_{l} \ \log((1-\tau)w(1-l)) + \log(l)$$

そして微分して 0 を解くと次を得る

$$\frac{1}{1-l} = \frac{1}{l}$$
$$\Rightarrow l = \frac{1}{2} (\Rightarrow h = 1/2)$$

「対数効用のとき，労働所得税の導入や変化は労働時間に影響を与えない」

# 対数効用の例 (続)

続いて，予算制約に代入すると，以下を得る．

$$c = (1-\tau)\frac{w}{2}$$

つまり，労働所得税の増加は，労働時間には影響を与えず，消費を減らす．
練習問題を使って，以下を考えてみてください

- 様々な別の効用関数ならどうなるか？
- 別の税制度ならどうなるか？

# 閑話休題：労働供給のミクロ vs マクロの歴史

現実の家計の労働供給が，賃金等に大きく反応するかどうか，今でも研究されている！

- (90-00 年代の) マクロ経済学 (特に Prescott 教授)：
  「労働供給は環境の変化に大きく反応する」
- ミクロ経済学 (特に Heckman 教授)：
  「労働供給は環境の変化にそんなに大きく反応しない」

今の論調 (私の判断)：「労働供給は環境の変化にそんなに大きく反応しない」(ミクロ労働のことは特に労働の先生の意見を聞いてみて下さい)

# 2 期間モデルと労働時間

# 2 期間モデルと労働時間

前回習ったことと今回習ったことの組み合わせ：

- 家計が選ぶもの
  - 今期の消費 $c_1$ と余暇時間 $l_1$ と貯蓄 $s$：
    - 予算制約

$$c_1 + s = w(1 - l_1)$$

  - 来期の消費 $c_2$ と余暇時間 $l_2$：
    - 予算制約

$$c_2 = w(1 - l_2) + (1 + r)s$$

# 最大化問題

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s}\ & u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2)\\ \text{s.t. } & c_1+s=w(1-l_1)\\ & c_2=w(1-l_2)+(1+r)s\end{aligned}$$

これまでのように代入すると,

$$\max_{l_1,l_2,s} u(w(1-l_1)-s,l_1)+\beta u(w(1-l_2)+(1+r)s,l_2)$$

となる.

# 最大化問題の解

$$\max_{l_1,l_2,s} u(\underbrace{w(1-l_1)-s}_{=c_1}, l_1) + \beta u(\underbrace{w(1-l_2)+(1+r)s}_{=c_2}, l_2) \quad (\text{再掲})$$

この一階の条件は以下のとおり．

$$\begin{aligned}
l_1 &: -u_{c_1}(c_1,l_1)w + u_{l_1}(c_1,l_1) = 0 \\
l_2 &: -\beta u_{c_2}(c_2,l_2)w + \beta u_{l_2}(c_2,l_2) = 0 \\
s &: -u_{c_1}(c_1,l_1) + \beta(1+r)u_{c_2}(c_2,l_2) = 0
\end{aligned}$$

整理すると...，

# 最大化問題の解：異時点間と同時点

- オイラー方程式：

$$u_{c_1}(c_1, l_1) = \beta(1+r)u_{c_2}(c_2, l_2)$$

消費と貯蓄の場合とほぼ一緒！異時点間 (inter**te**mporal) の意思決定

- 同時点間の消費と余暇の代替：

$$(i)\ u_{c_1}(c_1, l_1) = \frac{u_{l_1}(c_1, l_1)}{w}, \qquad (ii)\ u_{c_2}(c_2, l_2) = \frac{u_{l_2}(c_2, l_2)}{w}$$

1 期間とほぼ一緒！同時点間 (int**ra**temporal) の意思決定

異時点間の問題と同時点間の問題を分離して解くことも出来る.

# 労働供給の重要性 (再掲)

- 所得と労働供給の関係性
  - 例：世帯年収と伴侶の労働供給
- 労働政策の変更と労働供給の変更
  - 例：ベーシックインカムで労働供給は減る？
  - 例：所得税の累進度の増加で労働供給は減る？
- 後々学ぶ景気循環のモデルにおいて重要

応用例：

- Prescott (2004)「なぜアメリカ人はヨーロッパ人より長時間働くのか？」
- Ramey and Francis (2009)「100 年間の労働と余暇」

# 「なぜアメリカ人はヨーロッパ人より長時間働くのか？」

| Country (1970-1974) | GDP[a] per person 15-64; U.S.=100 | Hours per person 15-64; U.S.=100 |
|---|---|---|
| Germany | 75 | 105 |
| France | 77 | 105 |
| Italy | 53 | 82 |
| Canada | 86 | 94 |
| United Kingdom | 68 | 110 |
| Japan | 62 | 127 |
| United States | 100 | 100 |

| Country (1993-96) | GDP[a] per person 15-64; U.S.=100 | Hours per person 15-64; U.S.=100 |
|---|---|---|
| Germany | 74 | 75 |
| France | 74 | 68 |
| Italy | 57 | 64 |
| Canada | 79 | 88 |
| United Kingdom | 67 | 88 |
| Japan | 78 | 104 |
| United States | 100 | 100 |

Figure: Prescott (2004) より：70 年代と 90 年代の G7 の労働時間

- ドイツ，フランス，イタリアで顕著に労働時間↓

# 「なぜアメリカ人はヨーロッパ人より長時間働くのか？」

| Country | Tax rate $\tau$ |
|---|---|
| Germany | 0.52 |
| France | 0.49 |
| Italy | 0.41 |
| Canada | 0.44 |
| United Kingdom | 0.45 |
| Japan | 0.25 |
| United States | 0.40 |

| Country | Tax rate $\tau$ |
|---|---|
| Germany | 0.59 |
| France | 0.59 |
| Italy | 0.64 |
| Canada | 0.52 |
| United Kingdom | 0.44 |
| Japan | 0.37 |
| United States | 0.40 |

Figure: Prescott (2004) より：70 年代 (左) と 90 年代 (右) の G7 の労働所得税

# 先進国の労働時間：100 年史

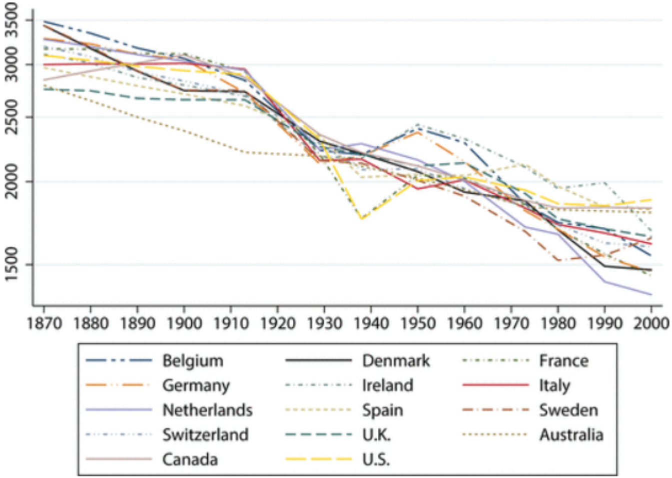



Figure: Boppart and Krusell (2019) より：過去 130 年間の各国の労働時間

# 今回のまとめ

▶

補足：

# 統一的な枠組みの重要性

# 統一的な枠組みの重要性

神取 (2010) による経済学の研究成果の一つ：

> 市場におけるさまざまな経済法則を，各個人の経済合理性の追求の結果として統一的に説明することに成功したことである。つまり，「価格が高騰すれば供給は増えるものだ」とか，「利子率が下がれば株価は上がるものだ」などの経験則を，それぞればらばらな（アド・ホックな）法則の寄せ集めとして提示するのではなく，生産者や消費者が自らの利得を最大化する結果として統一的に説明することに成功したわけである。経済学の世界に浸っているとあまり意識されることはないかもしれないが，実はこのように，少数の原理から多数の法則を導くことに成功しているのは人文社会科学では極めて稀なことである。

back

# ラグランジュ法 (or ラグランジュ未定乗数法)

# ラグランジュ法のイントロ

ラグランジュ法はとても便利：

- (良い点)：代入法では解けない問題が解ける
  - 逆は成り立たない．つまり，「ラグランジュ法で解けないけど，代入法では解ける」ような問題はない．
  - なのでラグランジュ法を覚えた後は，ラグランジュ法のみ使う
  - (当然) これまで学んだことも全部ラグランジュ法で解ける
- (良い点 2 )：制約が不等式のときでも使える
- (悪い点)：ラグランジュ法はちょっと理解しにくい (かも)

# 一般的な表記：

これまで 2 期間モデルや，労働時間の選択を学んだ．また，ミクロ経済学でも最適化を学んでいると思う．それらを一般に次のように表記する．

$$\max_c u(c)$$
$$\text{s.t. } g(c) \geq 0$$

例えば $g(c) = wh - c \geq 0$.

- 不等号は等号の一般化
- 制約の範囲内 $g \geq 0$ で $u$ を最大化する $c$ を探す

# ラグランジュ法の計算方法

- 次のような関数をラグランジュ関数 (または Lagrangian) と呼ぶ

$$\mathcal{L} = u(c) + \lambda[g(c)]$$

$\lambda$ はラグランジュ乗数と呼ぶ

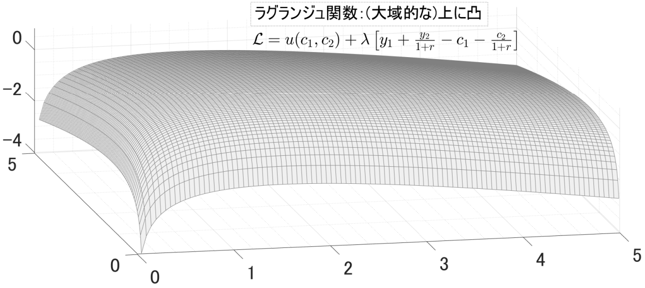
  - ラグランジュ関数 = 目的関数 + ラグランジュ乗数 × 予算制約 ($\geq 0$)
  - よく間違える点：$g \leq 0$ の形にしてはいけない

- これを微分して 0

$$u'(c) + \lambda g'(c) = 0$$

これを満たすような $c$ が最適化の解

# ラグランジュ関数の図示




- 元の $u$ が単調増加関数でも，ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ は上に凸な関数になる
- ラグランジュ関数を「微分して 0」を解けば OK
  - (コメント：必要であれば数学の講義を復習)

# 再度：対数効用の例

$$\max_{c,l} \ \log(c) + \log(l)$$
$$\text{s.t.} \quad c \leq w(1-l)$$

ラグランジュ関数

$$\mathcal{L} = \log(c) + \log(l) + \lambda[w(1-l) - c]$$

これを $c$ と $l$ についてそれぞれ微分する

$$c : \frac{1}{c} = \lambda$$
$$l : \frac{1}{l} = \lambda w$$

2 本の式を $\lambda$ について代入して，予算制約を代入する (次のページ)

# 再度：対数効用の例

2 本の式を $\lambda$ について代入して，予算制約を代入する

$$
\begin{aligned}
&\frac{w}{c} = \frac{1}{l} \\
&\Rightarrow \frac{w}{w(1-l)} = \frac{1}{l} \\
&\Rightarrow l = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

同じ解が得られた．同様に $(c, h)$ も代入法と同じものが得られる．

# 補足：ラグランジュ関数の意味

$$\mathcal{L} = u(c) + \lambda[g(c)]$$

- $\lambda$ は制約 $g(c)$ を破ることによる (内生的な) ペナルティ
  - $\lambda$ が小さい $\Rightarrow$ 制約を破ってしまう $(g(c) < 0)$
  - $\lambda$ が大きい $\Rightarrow$ 制約を守り過ぎる $(g(c) > 0)$
  - $\lambda$ がちょうどいい $\Rightarrow$ ちょうど制約が守られる $(g(c) = 0)$
- $\Rightarrow$ ラグランジュ法はちょうどいい $\lambda$ を選ぶことで，予算をちょうど守りながら，目的を最大化する解を見つける！

証明はやりません (経済学者でも証明をやったことある人は多くない気が⋯)

# 2 期間モデルと労働時間 (再訪)

# 最大化問題

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s} \quad & u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2) \\
\text{s.t. } & c_1+s \le w(1-l_1) \\
& c_2 \le w(1-l_2)+(1+r)s
\end{aligned}
$$

ラグランジュ関数は以下のとおり．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2) \\
&+\lambda_1[w(1-l_1)-c_1-s] \\
&+\lambda_2[w(1-l_2)+(1+r)s-c_2]
\end{aligned}
$$

# ラグランジュによる解法

- $c_1, c_2, l_1, l_2, s$ に対して，微分してゼロとする．

$$
\begin{aligned}
c_1 &: \; u_{c_1}(c_1, l_1) = \lambda_1 \\
c_2 &: \; \beta u_{c_2}(c_2, l_2) = \lambda_2 \\
l_1 &: \; u_{l_1}(c_1, l_1) = \lambda_1 w \\
l_2 &: \; \beta u_{l_2}(c_2, l_2) = \lambda_2 w \\
s &: \; \lambda_1 = (1+r)\lambda_2
\end{aligned}
$$

- $\lambda_1$ や $\lambda_2$ をうまく消す
  - オイラー方程式

$$u_{c_1}(c_1, l_1) = \beta(1+r)u_{c_2}(c_2, l_2)$$

  - 同時点間の消費と余暇の代替

$$(i)\; u_{c_1}(c_1, l_1) = \frac{u_{l_1}(c_1, l_1)}{w}, \qquad (ii)\; u_{c_2}(c_2, l_2) = \frac{u_{l_2}(c_2, l_2)}{w}$$

# 異時点間と同時点間

- オイラー方程式：

$$u_{c_1}(c_1, l_1) = \beta(1+r)u_{c_2}(c_2, l_2)$$

消費と貯蓄の場合とほぼ一緒！異時点間 (in**ter**temporal) の意思決定

- 同時点間の消費と余暇の代替：

$$(i)\ u_{c_1}(c_1, l_1) = \frac{u_{l_1}(c_1, l_1)}{w}, \qquad (ii)\ u_{c_2}(c_2, l_2) = \frac{u_{l_2}(c_2, l_2)}{w}$$

1 期間とほぼ一緒！同時点間 (in**tra**temporal) の意思決定

異時点間の問題と同時点間の問題を分離して解くことも出来る．

# 異時点間と同時点間の分離

# 異時点間と同時点間の分離

元々の問題 (再掲)

$$\max_{c_1,c_2,l_1,l_2,s} \quad u(c_1,l_1)+\beta u(c_2,l_2)$$
$$\text{s.t. } c_1+s \leq w(1-l_1)$$
$$c_2 \leq w(1-l_2)+(1+r)s$$

# 異時点間のみの問題：消費と貯蓄

異時点間の問題：$(l_1, l_2)$ を外生変数のごとく扱う $((\bar{l}_1, \bar{l}_2)$ で固定$)$

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1, c_2, s}\ & u(c_1, \bar{l}_1) + \beta u(c_2, \bar{l}_2) \\
\text{s.t. } & c_1 + s \leq w(1 - \bar{l}_1) \\
& c_2 \leq w(1 - \bar{l}_2) + (1 + r)s
\end{aligned}
$$

# 同時点間のみの問題：消費と労働

同時点間の問題：$s$ を外生変数のごとく扱う ($s = \bar{s}$ で固定)

- 1 期目：$(c_2, l_2)$ も外生のごとく扱う

$$\max_{c_1, l_1} u(c_1, l_1) + \beta u(\bar{c_2}, \bar{l_2})$$
$$\text{s.t. } c_1 + \bar{s} \leq w(1 - l_1)$$

- 2 期目：$(c_1, l_1)$ も外生のごとく扱う

$$\max_{c_2, l_2} u(\bar{c_1}, \bar{l_1}) + \beta u(c_2, l_2)$$
$$\text{s.t. } c_2 \leq w(1 - l_2) + (1 + r)\bar{s}$$

これらの (i) 異時点間の問題，(ii)1 期の同時点の問題，(iii)2 期の同時点の問題の解を組み合わせたものと，元々の問題の解は同じ (宿題参照)