

基礎マクロ練習問題：企業投資

日野将志 *

1 生産技術

1.1 一次同次

以下の生産関数が一次同次かどうか答えよ。なお、一次同次ならば一次同次であることを示し、そうでないならば、そうでないことも示すこと。

何も言及しなければ、パラメータは正とする。

- $F(K) = \alpha K$
- $F(K, H) = \alpha K + (1 - \alpha)H$. なお, $\alpha \in (0, 1)$ とする
- $F(K, H) = \alpha K + \beta H$. なお, $\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$. なお, $\alpha \in (0, 1)$ とする
- $F(K, H) = K^\alpha H^\beta$. なお, $\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + (1 - \alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$. なお, $\alpha \in (0, 1)$ とする
- $F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$. なお, $\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1 - \alpha)H\}$. なお, $\alpha \in (0, 1)$ とする
- $F(K, H) = \min\{\alpha K, \beta H\}$. なお, $\alpha + \beta \neq 1$ かつとする

2 静学的な企業の選択

2.1 生産要素 1 つの場合

授業では、資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した。一方、ここでは労働だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう。例えば,

$$F(K, H) = F(H) = H^\alpha$$

を考えてみる。 $\alpha \in (0, 1)$ とする。

この労働には、賃金支払い wH を行う必要があるとする。

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ。
- 最大化問題の一階の条件を求めよ。

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- 最適な H を求めよ.

2.2 生産要素 2 つの場合

2.2.1 曲率のある和

$$F(K, H) = F(H) = K^\alpha + H^\alpha$$

を考えてみる. $\alpha \in (0, 1)$ とする.

この労働には, 賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする. 一方, 資本減耗率 δ はゼロとする.

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ.
- 最大化問題の一階の条件を求めよ.
- 最適な (K, H) を求めよ.

2.2.2 コブ・ダグラス

$$F(K, H) = K^\alpha H^\beta$$

を考えてみる. $\alpha + \beta \neq 1$ とする.

この労働には, 賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする. 一方, 資本減耗率 δ はゼロとする.

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ.
- 最大化問題の一階の条件を求めよ.
- 最適な (K, H) を求めよ.
- $Y = F(K, H)$ と生産量 Y を定義する. このとき, rK/Y および wH/Y を求めよ.
- K/H の比について議論せよ. 例えば $r = w$ のときどうなるだろう.
- 仮に, $\beta = 1 - \alpha$ のときにどうなるか, 1, 2 行で議論せよ.

2.2.3 CES 関数

$$F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$$

を考えてみる. $(\alpha, \beta) \in (0, 1)$ かつ $\epsilon > 0$ とする.

この労働には, 賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする. 一方, 資本減耗率 δ はゼロとする.

このとき,

- 最大化問題を書いてみよ。
- 最大化問題の一階の条件を求めよ。
- この生産関数は CES(constant elasticity substitution) 関数と呼ばれる関数形である。この特徴は、代替の弾力性 (elasticity of substitution) が一定 (constant) であることである。次の代替の弾力性

$$\hat{\epsilon} \equiv \frac{\frac{d(K/H)}{(K/H)}}{\frac{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}} = \frac{\frac{d(K/H)}{(K/H)}}{\frac{K/H}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}}$$

を計算してみよ。

- 限界代替率 = 価格比の式を求め、次のケースを比較せよ。
 - CES 関数かつ $\epsilon \searrow 0$ のときの限界代替率と、コブ・ダグラスのときを比較せよ^{*1}
 - CES 関数かつ $\epsilon \rightarrow 1$ のときの限界代替率と、線形 ($F(K, H) = K + H$) のときを比較せよ

3 2 期間問題

3.1 生産要素 1 つの場合

授業では、資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した。一方、ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう。例えば、生産関数が

$$F(K_t) = K_t^\alpha$$

という場合を考えてみる。 $\alpha \in (0, 1)$ とする。また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする。

このとき、

- 最大化問題を書いてみよ。
- 最大化問題の一階の条件を求めよ。
- 最適な K_2 を求めよ。

3.2 生産要素が 1 つの場合：調整費用

前の問題 (つまり $F(K_t) = K_t^\alpha$) に加えて、次のような調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がある場合を考えてみよう。

$$\Phi(K_1, K_2) = \frac{\phi}{2} \left(\frac{K_2 - (1 - \delta)K_1}{K_1} \right)^2 K_1 = \frac{\phi}{2} \left(\frac{I}{K_1} \right)^2 K_1$$

ここで $\phi > 0$ とする。この調整費用の意味は、 $I \neq 0$ という (負を含む) 投資をするには企業は費用 $\Phi(\cdot)$ を支払う必要があることを意味している。また、前問と同様に $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする。

- この調整費用関数が K_1 と K_2 に対して一次同次であることを確認せよ。
- $I > 0$ のとき、この調整費用関数が $\Phi_2(\cdot) > 0$ かつ $\Phi_{22}(\cdot) > 0$ であることを示せ。
- この調整費用関数があるときの最大化問題を書いてみよ
 - ヒント：スライドの補足を参考にとすると良い

^{*1} $\epsilon \searrow 0$ は「正の値 (つまり直観的には上) から 0 に近づく」という意味である。これは $\epsilon > 0$ だからこうしている。

- 最大化問題の一階条件を書いてみよ。
- この一階条件を調整費用がない場合 ($\phi = 0$ の場合) と比べて、どのように解が異なるか比べてみよ。

4 曲率のある線形和

$$F(K, H) = F(H) = K^\alpha + H^\alpha$$

を考えてみる。 $\alpha \in (0, 1)$ とする。調整費用はないとする。また $\delta = 0$ とする。

このとき、

- 最大化問題を書いてみよ。
- 最大化問題の一階の条件を求めよ。
- 最適な (K_2, H_1, H_2) を求めよ。
- 最適な解を 2.2.1 の問題と比較せよ

4.1 3 期間問題

4.2 生産要素 1 つの場合

次に 3 期間あるとする。ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう。例えば、生産関数が

$$F(K_t) = K_t^\alpha$$

という場合を考えてみる。 $\alpha \in (0, 1)$ とする。また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする。また $\delta = 0$ としよう。

このとき、

- 最大化問題を書いてみよ。
- 最大化問題の一階の条件を求めよ。
- 最適な K_2 を求めよ。

5 補論：企業金融

コメント：作成中

5.1 Equity Finance: 株式発行による資金調達

企業の最大化問題を

$$\begin{aligned} \max_{k'} \quad & \pi_1 + \frac{1}{1+r} \pi_2 \\ \pi_1 = & z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 \\ \pi_2 = & z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 \end{aligned}$$

とする。なお、 $\alpha \in (0, 1]$ とする。

1. 最適な資本のもとでの利潤 π_1, π_2 を求めよ
2. もし π_1 と π_2 の符号が変わるような条件を求めよ。

5.2 Corporate Bond : 借入

企業の最大化問題を

$$\begin{aligned} \max_{k'} \quad & \pi_1 + \frac{1}{1+r} \pi_2 \\ \pi_1 = & z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 + b \\ \pi_2 = & z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 - (1 + (1-\tau)r)b \end{aligned}$$

とする。引き続き、 $\alpha \in (0, 1]$ とする。 b は社債である。また τ は利子所得税である。

1. $\tau = 0$ とする。このとき、 b を選べ
2. $\tau > 0$ とする。このとき、 b を選べ。また π_1 が負になる条件を求めよ。