基礎マクロ練習問題：ソローモデル

日野将志 *

1 離散時間

1.1 生産性の成長のあるソローモデルの生産要素

スライドと同じケースで,

- (r, w) をそれぞれ，$\tilde{k}$ の関数として求めよ
- (r, w) の定常状態での成長率を求めよ

1.2 生産性の成長のないソローモデル

生産関数は

$$Y = F(K, N)$$

とする．つまり，授業の場合と比較して，生産性 A が $A = 1$ と固定されている場合を考える．
$k = K/N$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

- 基本方程式を求めよ．
- 定常状態を $k = k'$ と定義する．このとき定常状態で k はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の k が決まる条件を求めよ．

1.3 コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

コブ・ダグラス型の生産関数

$$Y = K^{\alpha} N^{1-\alpha}$$

を仮定する．
このとき次の問いに答えよ．

- $f(k) = k^{\alpha}$ となることを示せ
- 基本方程式を求めよ
- 黄金律の k を求めよ
- 黄金律の水準における，家計の一人当たりの消費水準を求めよ

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

1.4　人口成長

次のような人口成長を考える.

$$N' = (1+n)N$$

つまり，n は人口成長率である．この n は外生変数とする．このとき，次の問いに答えよ．なお，生産関数は一般の形のまま (つまり，F や f のまま) とする.

- 基本方程式を求めよ．ただし，N が式中に出ないようにすること (n は出てきても良い).
- 黄金律の k が決まる条件を求めよ.

1.5　生産性の成長とコブ・ダグラス型生産関数

次のような生産性 A を考える

$$Y = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$$

さらに，この生産性 A は次のように成長するとする.

$$A' = (1+g^A)A$$

したがって，この a は生産性の成長率である．このとき，次の問いに答えよ．なお，生産関数は一般の形のまま (つまり，F や f のまま) とする.

なお，以降では k の代わりに $\tilde{k} \equiv K/(AN)$ を用いて，以下の問いに答えること.

- 生産性の成長のある生産関数は次のように分類される．このコブ・ダグラス型生産関数はいずれに分類されるか答えよ
  - ハロッド中立：$F(K, AN)$
  - ヒックス中立：$F(AK, N)$
  - ソロー中立：$AF(K, N)$
- 基本方程式を求めよ．ただし，A が式中に出ないようにすること (a は出てきても良い).
- 定常状態を $\tilde{k} = \tilde{k}'$ と定義する．このとき定常状態で $k(\neq \tilde{k})$ はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の $\tilde{k}$ を求めよ．さらに a が変わるとどうなるか分析せよ.
- 黄金律における一人当たり消費 C/N を求めよ.
- 定常状態における r と w の動きを分析せよ.

1.6　政府の役割

ソローモデルにおける政府の役割を検討する．政府としては，家計の所得から次のように税 T を取り，家計の消費関数は次のようになるとする.

$$C_t = (1-s)(Y_t - T_t)$$

そして，政府は税収を政府支出に使うとする．つまり，

$$G_t = T_t$$

とする．政府は，この財政支出を生産量 Y_t の一定割合にするとする．これは例えば，$g \in [0,1]$ として

$$G_t = \gamma Y_t$$

と書ける[*1]．

生産関数はコブ・ダグラス型，つまり $F(K_t, A_t L_t) = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$ と書けるとし，この生産性は $A_{t+1} = (1+a)A_t$ と成長し，人口成長はないとする．

$\tilde{k}_t \equiv K_t/(A_t L_t)$，$f(\tilde{k}) \equiv F(\tilde{k}_t, 1)$ と定義することにする．このとき，次の問に答えよ．

1. 財市場の均衡条件を記述せよ
2. 基本方程式を求めよ
3. 定常状態での $\tilde{k}$ を求めよ
4. この $\tilde{k}$ は政府の支出率 γ が上昇するとどうなるか？
5. 定常状態での資本 K の成長率を求めよ．これは γ が変化するとどうなるか？

2 連続時間

2.1 連続時間化

離散時間モデル $A_{t+1} = (1+g)A_t$ の式を連続時間に直せ．

2.2 連続時間と離散時間の違い：コブ・ダグラス型関数の場合

$F(K, AN) = K^{\alpha}(AN)^{1-\alpha}$ とする．$\dot{A}_t = aA_t$ と成長する．
連続時間において，定常状態は $\dot{\tilde{k}}_t = 0$ と定義される． このとき，次の問いに答えよ．

- 黄金律の $\tilde{k}$ を求めよ．
- 黄金律の $\tilde{k}$ は離散時間の場合と異なるか？比較・議論せよ．

[*1] 平時であれば，例えば日本の G_t/Y_t は 2 割弱で推移してきた．