# 基礎マクロ練習問題の**解答例**：消費

日野将志 *

分数が出たとき、分母が非ゼロであることは仮定する．

## 1　ケインズ型消費関数

### 1.1　財源

#### 1.1.1

$$
\begin{aligned}
&C + I + G = Y \\
&C = c_1(Y - T) + c_2
\end{aligned}
$$

を考える．二本目の式を一本目の式に代入することで次を得る．

$$
\begin{aligned}
&c_1(Y - T) + c_2 + I + G = Y \\
&\Rightarrow Y = \frac{1}{1 - c_1}(c_2 + I + G - c_1 T)
\end{aligned}
$$

したがって，これを $T$ に対して微分すると，

$$
\frac{dY}{dT} = -\frac{c_1}{1 - c_1}
$$

となる．これが答え．

**コメントおよび問題の主旨**：まず係数が負であることに気付いてほしい．つまり、これは「減税 ($T \downarrow$) をすると $Y$ が増える」という効果を表している．なお、この $-c_1/(1 - c_1)$ を**租税乗数**と呼ぶ．

また、$0 < c_1 < 1$ なので、

$$
\left| \frac{c_1}{1 - c_1} \right| < \left| \frac{1}{1 - c_1} \right|
$$

となる．これは、財政政策 $G$ による乗数効果の方が、減税よりも効果的であることを示している．

#### 1.1.2

次に、以下を考える．

$$
\begin{aligned}
&C + I + G = Y \\
&C = c_1(Y - T) + c_2 \\
&G = T
\end{aligned}
$$

* タイポや間違いに気付いたら教えて下さい．

1.1.1 と比べると第 3 式が新たに加わった．これは問題文の通り、政府支出は必ず増税によって財源が調達されることを意味している．

これを同様に $Y$ について解くと、

$$\begin{aligned} &c_1(Y-G)+c_2+I+G=Y \\ &\Rightarrow Y=\frac{1}{1-c_1}(c_2+I+(1-c_1)G) \end{aligned}$$

となる．

したがって、$G$ について微分すると、

$$\frac{dY}{dG}=1$$

となる．

**コメント及び問題の主旨：**この問題が示していることは、「もし財政政策が増税によって賄われるならば、乗数効果は一切発生しない」ということである．つまり、乗数効果は、ケインジアン・クロスの世界でも必ず発生する効果ではないことを示す一例となっている．

私が知る限り多くの教科書のケインジアン・クロス (45 度線分析) では，政府支出がどのように資金調達されるかに関して記述がないことが多い．しかし，このようにケインジアン・クロスにおいて，資金調達に関する仮定は乗数効果の有無を決定する重要な仮定であることを理解してもらうことがこの問題の狙いです．

1.1.3

次に、消費税の効果を考える．

$$\begin{aligned} &C+I+G=Y \\ &(1+\tau^c)C=c_1Y+c_2 \end{aligned}$$

の 2 本をこれまでと同様に解くと、

$$\begin{aligned} &\frac{c_1Y+c_2}{1+\tau^c}+I+G=Y \\ &\Rightarrow Y=\frac{1}{1-\frac{c_1}{1+\tau^c}}\left(\frac{c_2}{1+\tau^c}+I+G\right) \\ &\Rightarrow Y=\frac{1+\tau^c}{1+\tau^c-c_1}\left(\frac{c_2}{1+\tau^c}+I+G\right) \\ &\Rightarrow Y=\frac{c_2}{1+\tau^c-c_1}+\frac{1+\tau^c}{1+\tau^c-c_1}(I+G) \end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\tau^c}&=\frac{-c_2}{(1+\tau^c-c_1)^2}+\frac{(1+\tau^c-c_1)-(1+\tau^c)}{(1+\tau^c-c_1)^2}(I+G) \\ &=-\frac{c_2+c_1(I+G)}{(1+\tau^c-c_1)^2}<0 \end{aligned}$$

したがって、消費減税も $Y$ を高めることが分かる．

**コメント及び問題の主旨：**この問題は経済学的というよりも、計算力のトレーニングのための問題です．積の微分や商の微分をうまく使えるようになると良いでしょう．

### 1.1.4

この大問の最後は次の連立方程式を考える．次に、消費税の効果を考える．

$$C + I + G = Y$$
$$(1+\tau^c)C = c_1 Y + c_2$$
$$G = \tau^c C$$

つまり、財政政策は消費増税によって賄われる．

また例のごとく、これらを解くと、

$$(1+\tau^c)\frac{c_1 Y + c_2}{1+\tau^c} + I = Y$$
$$\Rightarrow Y = \frac{1}{1-c_1}(c_2 + I)$$

となる．

これは $G$ には依存していない．これはつまり、

$$\frac{dY}{dG} = 0$$

であり、消費増税による政府支出は何らの効果もないことを意味している．

**コメント及び問題の主旨：**

世の中の数多くの教科書では乗数効果ばかりが取り上げられています．その印象で「ケインジアン・クロスに基づくと財政政策の景気刺激効果は大きい」のような意見がかなり広まっています．一方で、これらの問題で確認したように、「政府がどのように財源を調達するか」はとても重要な問題なことを認識してもらえると良いと思います．

## 1.2

この問題は次のようにして示すことができる．

まず

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-c_1}$$

である．これをもう一度、$c_1$ について微分する．

$$\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{\partial Y}{\partial G}\right) = \frac{1}{(1-c_1)^2}$$

ここで $(1-c_1) \neq 0$ なので、分母 $(1-c_1)^2 > 0$ である．したがって、$c_1$ が上がると、乗数効果 $\partial Y/\partial G$ が増えることがわかる．

**コメント及び問題の主旨**：二階微分 (正確には二階の偏導関数) を使って、「傾きの傾き」を考える問題です．

# 2　２期間モデル

## 2.1　スライドの確認

$\beta(1+r)=1$ と $y \equiv y_1 = y_2$ を使って，最大化問題を次のように書く．

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s} \ & \log c_1 + \frac{1}{1+r}\log c_2 \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y \\ & c_2 = y + (1+r)s\end{aligned}$$

スライドと同様に解くと，オイラー方程式は,

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1+r}{1+r}c_1 \\ \Rightarrow c_2 &= c_1\end{aligned}$$

となる．したがってまず $c_2 = c_1$ が示せた[*1]．ここで $\beta(1+r)=1$ **は** $c_1 = c_2$ **となるための条件**であることを覚えてほしい．直感的には，$\beta$ は将来に消費を先延ばしすることを嫌う効果 (正確には割引)，$r$ は将来に消費を先延ばしにすることが徳になる効果である．$\beta(1+r)=1$ はちょうど二つの効果が相殺される条件である．

$c \equiv c_1 = c_2$ としよう．次に，これを予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} s &= y - c \\ s &= \frac{1}{1+r}[y-c]\end{aligned}$$

である．$r>0$ のとき，これを満たすのは $s=0$ の場合のみである．

## 2.2　計算問題

### 2.2.1

学生は一個一個解いても良いが，これらの問題は一括して次のようにして解くことも出来る．

3 つの問題のうち，変わるのは $(y_1, y_2)$ だけであるので，そこに数を代入せずに $(y_1, y_2)$ のまま扱う．

このとき，最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s} \ & \log c_1 + \log c_2 \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + s\end{aligned}$$

である．$\beta = 1$ と $r = 0$ は共通しているので，代入している．

予算制約を目的関数に代入すると,

$$\max_s \log(y_1 - s) + \log(y_2 + s)$$

*1 なお，この $c_2 = c_1$ を示す段階で $y_1 = y_2$ を使っていない．

であるので，この導関数 $= 0$ は，

$$
\frac{1}{y_1 - s} = \frac{1}{y_2 + s}
$$
$$
\Rightarrow s = \frac{y_1 - y_2}{2}
$$

である．さらに，これを予算制約に代入すると，

$$
c_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}
$$
$$
c_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}
$$

である．

　したがって，それぞれのケースを考えると，$(y_1, y_2)$ が $(1, 1)$ のときのみ，

$$
c_1 = c_2 = 1
$$

であり，$s = 0$ である．

　$(y_1, y_2)$ が $(1, 2)$ または $(2, 1)$ のときはどちらも

$$
c_1 = c_2 = 3/2
$$

である．また $s$ はそれぞれの場合において $-0.5$ と $0.5$ となる．

　この問題では割引因子が 1 で利子率も 0 なので，$\beta(1+r) = 1$ が満たされる．これは $c_1 = c_2$ になる条件だったことを問題 2.1 で学んだ．この条件が満たされてるため，$(y_1, y_2)$ の組み合わせにかかわらず $c_1 = c_2$ となっている．

　$s$ の解釈は次が一例である

- $(y_1, y_2) = (1, 1)$ のとき：今期と来期の所得が同じであるため，貯蓄をする必要がない
- $(y_1, y_2) = (1, 2)$ のとき：今期の所得が少ないため，借金して今期の消費を増やすのが最適となっている
- $(y_1, y_2) = (1, 2)$ のとき：来期の所得がすくないため，貯蓄をしておいて，来期の消費を増やすのが最適となっている

　**コメントおよび問題の主旨**：一般的に，おそらく書店に行っても，このようなマクロ経済の計算問題が載っているような本はほとんど全く見つからないだろう．そこでこの練習問題では，手を動かしてもらって，マクロ経済の計算問題に慣れてもらうことが狙いである．

2.2.2

　この最大化問題は講義スライドと全く同じである．したがって，この解は，

$$
s = \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)}
$$
$$
c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]
$$
$$
c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]
$$

である．

　ここに $y_1 = y_2 = 1$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{\beta(1+r)-1}{(1+\beta)(1+r)} \\
c_1 &= \frac{2+r}{(1+\beta)} \\
c_2 &= \frac{\beta(1+r)(2+r)}{1+\beta}
\end{aligned}
$$

である．特に貯蓄関数に注目する．$\beta \in [0,1]$ かつ $r \in [0,\infty)$ なので，これの分母は常に正である．したがって，$s$ の符号は分子だけで決まる．すなわち，

$$
s \gtreqless 0 \Leftrightarrow \beta(1+r) \gtreqless 1
$$

と決まる．

　なお，消費の成長の条件は，

$$
\begin{aligned}
&c_2 - c_1 \gtreqless 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta(1+r)(2+r)}{1+\beta} - \frac{2+r}{(1+\beta)} \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow \beta(1+r)(2+r) - (2+r) \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow \beta(1+r) \gtreqless 1
\end{aligned}
$$

と求まる．まとめると，消費の成長の条件も

$$
c_2 - c_1 \gtreqless 0 \Leftrightarrow \beta(1+r) \gtreqless 1
$$

である．

　なお，$s$ の条件が求まった時点で，消費の成長の条件を直観的に求めることも出来た方もいるかもしれない．つまり，「今，$y_1 = y_2 = 1$ なので，今期と来期の所得は同じである．もし，$s > 0$ ならば，来期の消費が今期より多くなるはずである」と考えることもできる．

　**コメントおよび問題の主旨**：$\beta(1+r) = 1$ というのは動学的なマクロ経済学では頻出の条件である．これは二期間だけでなく，無限期間でも同様に消費の成長を決定づける上で重要である．したがって，早いうちから馴染んでもらうのが趣旨である．

## 2.3　予算制約の違い

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_1,c_2} u(c_1) + \beta u(c_2) \\
&\text{s.t. } c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}
\end{aligned}
$$

という最大化問題を考える．

　予算制約を，

$$
c_1 = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \frac{c_2}{1+r}
$$

として，目的関数に代入すると，

$$\max_{c_2}\ u\left(y_1+\frac{y_2}{1+r}-\frac{c_2}{1+r}\right)+\beta u(c_2)$$

となる．これの一階の条件は，

$$\begin{aligned}&-u'(c_1)\frac{1}{1+r}+\beta u'(c_2)=0\\ &\Rightarrow\ u'(c_1)=\beta(1+r)u'(c_2)\end{aligned}$$

となる．このように同じオイラー方程式が得られる．したがって，予算制約を生涯予算制約で書くか，講義スライドのように各時点ごとに別々に書くかは本質的に違わない．

対数効用関数の場合は，これ以降スライドと同様に計算すれば得られるので割愛する．

## 2.4　相対価格と利子率

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2}\ & u(c_1)+\beta u(c_2)\\ \text{s.t. } & p_1c_1+s=p_1y_1\\ & p_2c_2=p_2y_2+s\end{aligned}$$

という最大化問題を考える．

まず 2 本の予算制約の $s$ について代入することで次の生涯予算制約を得る．

$$\begin{aligned}&p_1c_1+p_2c_2=p_1y_1+p_2y_2\\ &\Rightarrow c_1+\frac{p_2}{p_1}c_2=y_1+\frac{p_2}{p_1}y_2\end{aligned}$$

ここで仮に，$1+r\equiv\frac{p_1}{p_2}$ と定義すると，

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}=y_1+\frac{y_2}{1+r}$$

を得る．これは講義スライドの生涯予算制約と全く同じである．このように，今期と来期の価格を導入することと，利子率を導入することは同じことである[*2]．

以上で $p_1/p_2=1+r$ とすると，講義スライドと同じ予算制約になることが分かった．最適化の目的関数は講義スライドと同じで，予算制約も同じになることが分かったので，最適化解も同じになるはずである．これを実際に確認しよう．

予算制約これまで同様に予算制約を目的関数に代入すると次のようになる．

$$\max_{s}\ u(y_1-s/p_1)+\beta u(y_2+s/p_2)$$

$s$ について一階の条件を求めると，

$$\begin{aligned}&u'(c_1)\frac{-1}{p_1}+\beta u'(c_2)\frac{1}{p_2}=0\\ &\Rightarrow\ u'(c_1)=\beta\frac{p_1}{p_2}u'(c_2)\end{aligned}$$

[*2] 言い換えれば，利子率とは今期と来期の財の相対価格である，とも言える．

となる．もし仮に，$(1+r)=\frac{p_1}{p_2}$ と定義すると，

$$\Rightarrow \ u'(c_1)=\beta(1+r)u'(c_2)$$

と講義スライドで学んだオイラー方程式を得る．

**コメントおよび問題の主旨**：これは，利子率 $1+r$ とは本質的に，今日と明日の価格比 $p_1/p_2$ であることを示している例です．つまり，利子率 $1+r$ とは，「今日 1 単位消費を我慢することで，来期得られる価値」と今期と来期の価値を比較する概念であり，その意味で価格比と全く同じであることが数式として理解できる．

また，価格 $(p_1,p_2)$ を導入した方が，ミクロ経済学と同じことを学んでいることも認識しやすいでしょう．結局，価格として書いても，利子率として書いても同じことなので，ミクロ経済学で学んだ消費者理論とここで学んでいる家計消費理論はとても似ています．

## 2.5　後ろ向きの解き方

まず 2 期の問題を考える．

$$\begin{aligned} V(s) = \max_{c_2} \ & \log(c_2) \\ \text{s.t. } & c_2=(1+r)s+y_2 \end{aligned}$$

対数関数は単調増加関数である．つまり，この家計は，予算内で多く消費すればするほど幸福になれる．したがって，$s$ を所与とした最適な消費は，単純に予算を全て使い果たすことであり，

$$c_2=(1+r)s+y_2$$

である．これを目的関数に代入すると，

$$V(s)=\log((1+r)s+y_2)$$

となる．

次に，この解を所与として，1 期の問題に移る．1 期の最大化問題は，

$$\begin{aligned} \max_{c_1,s} \ & \log(c_1)+\beta\log((1+r)s+y_2) \\ \text{s.t. } & c_1+s=y_1 \end{aligned}$$

である．予算制約を目的関数に代入すると，

$$\max_{s} \ \log(y_1-s)+\beta\log((1+r)s+y_2)$$

となる．この一階の条件は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_1-s} &= \beta(1+r)\frac{1}{(1+r)s+y_2} \\ \Rightarrow \ s &= \frac{\beta(1+r)y_1-y_2}{(1+r)(1+\beta)} \end{aligned}$$

となる．したがって，これを予算制約に代入すると，

$$c_1=\frac{1}{1+\beta}\left[y_1+\frac{y_2}{1+r}\right]$$

となる．

さらに，$c_2 = (1+r)s + y_2$ に求めた $s$ を代入すると，

$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]$$

が求まる．スライドと見比べると，$(c_1, c_2, s)$ はどれも等しいことが分かる．

**コメントおよび問題の主旨**：後々，中級マクロや上級マクロでは動的計画法 (Dynamic Programming) という計算方法を学ぶだろう．この動的計画法は，まさに後ろ向きの解を無限期間に適用した解法である．ここでは 2 期間のモデルを用いて動的計画法の考え方に馴染んでもらうのが目的である．対数効用を用いたが効用関数の形が変わっても，基本的には，後ろ向きの解き方と，普通の解き方 (前向きの解き方) の解は一致する．

前向きと後ろ向きの解が一致しない例として有名なのは，行動経済学的な要素 (特に双曲割引) のケースである．また政府の最適政策を考える際も後ろ向きと前向きの解が一致しない場合が数多く出てくる．このような内容は，専門的な内容であるので，初めのうちは「後ろ向きと前向きの解は殆どの場合一致する」と思っておいて良いと思われる．

## 2.6　様々な効用関数

ここまで解いてきた学生ならば，略解でも理解できると思うので，ここでは式展開や説明を省略して解説する．なお $Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ と恒常所得を書くことにする．

### 2.6.1　対数

対数効用はスライドと同じため省略．効用関数が $\alpha \log(c)$ のときの解答は $\log c$ のときと変わりないことを確認できていれば良い．

### 2.6.2　CRRA

この効用関数

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

を微分すると，

$$\begin{aligned} u'(c) &= c^{-\sigma} > 0 \quad \text{if } c > 0 \\ u''(c) &= -\sigma c^{-\sigma-1} < 0 \quad \text{if } c > 0 \end{aligned}$$

となる．

最適化問題は次の通り．

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \ & \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

これのオイラー方程式は,

$$c_1^{-\sigma} = \beta(1+r)c_2^{-\sigma}$$

となる[*3]．さらに，これを変形すると

$$c_2 = [\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1$$

となる．これを生涯予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} & c_1 + \frac{1}{1+r}[\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1 = Y \\ \Rightarrow \ & \left[1 + \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+r}\right] c_1 = Y \\ \Rightarrow \ & c_1 = \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

ここで，$Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ は恒常所得である．これをオイラー方程式に代入すると，

$$c_2 = \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y$$

さらに予算制約 $c_1 + s = y_1$ より，

$$s = y_1 - \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y$$

と求まる．

次に $\beta(1+r) = 1$ の場合を考える．$\beta(1+r) = 1$ を上で求めた消費関数に代入すると，$c_1 = c_2$ となることが直ちに分かるだろう．

一方で，$y_1 = y_2$ であっても，$\beta(1+r) \neq 1$ であるならば，$c_1 \neq c_2$ である．

限界消費性向は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y_2} &= \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \frac{1}{1+r} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_1} &= \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \frac{1}{1+r} \end{aligned}$$

である．

**コメントおよび問題の主旨**：以下の問題を含めて，ここでは計算を繰り返してもらうことで，解くことに慣れてもらうことが最大の目的である．基本的に，このような問題は (1)(代入法で) 一階条件を求める，(2) 予算制約から生涯予算制約を作る，(3) 一階条件を生涯予算制約に代入するという手続きで解くことができる．計算が苦手な人もいるだろうが，経済のような応用分野ではひとつひとつの式変形で「意味が分かるような式」にすると良い．意味が分かるような式変形が出来るようになると，「このモデルならこんな式が得られるはずだ．よし，実際にそんな式が得られた」と検算ができるようになるし，慣れてくると暗算で済む計算が増えてくる．

[*3] なお，$\sigma = 1$ のとき，対数効用と同じになることに気付いてほしい．

また，経済学からの観点からすると，以下の問題も含めてすべての効用関数の下で，消費関数は生涯所得 $Y(\equiv y_1 + y_2/(1+r))$ の関数になっており，$y_1$ と $y_2$ は $Y$ を通じてしか影響していないことに気づいてほしい．これはつまり，各期の所得は重要ではなく，所得の総額 (正確には割引現在価値の総和) のみが重要であることを表している．これは恒常所得仮説 (Permanent Income Hypothesis) で言われたことである．

**大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足**：さらにここでレベルを上げて注目すると，この問題集で出てくる消費関数はすべて生涯所得 $Y$ の線形関数になっている．これは実際のデータでは観察されていないことであり，更なる発展が必要だと指摘されている[*4]．

### 2.6.3　2 次効用

この効用関数 $u(c) = \alpha c - \frac{\gamma c^2}{2}$ の導関数は

$$u'(c) = \alpha - \gamma c > 0 \quad \text{if } \alpha/\gamma \text{ is sufficiently large}$$
$$u''(c) = -\gamma < 0$$

である．問題の構成より，$\alpha/\gamma$ は $u'(c) > 0$ を満たすほど常に大きいとする[*5]．

まず最大化問題は

$$\max_{c_1,c_2,s} \alpha c_1 - \frac{\gamma c_1^2}{2} + \beta\left[\alpha c_2 - \frac{\gamma c_2^2}{2}\right]$$
$$\text{s.t. } c_1 + s = y_1$$
$$c_2 = y_2 + (1+r)s$$

となる．例えば $\beta$ を忘れてないことに注意すること．

次に、授業でやったように代入法で解くと、再度代入法で解く

- 予算制約を目的関数に代入する

$$\max_s \alpha(y_1 - s) - \frac{\gamma(y_1 - s)^2}{2} + \beta\left[\alpha(y_2 + (1+r)s) - \frac{\gamma(y_2 + (1+r)s)^2}{2}\right]$$

- $s$ について微分して、導関数 $= 0$ を求める

$$-[\alpha - \gamma(y_1 - s)] + \beta(1+r)[\alpha - \gamma(y_2 + (1+r)s)] = 0 \tag{2.1}$$
$$\Rightarrow\ [\alpha - \gamma c_1] = \beta(1+r)[\alpha - \gamma c_2]$$
$$\Rightarrow\ c_1 = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta(1+r)}{\gamma}[\alpha - \gamma c_2]$$
$$\Rightarrow\ c_1 = \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] + \beta(1+r)c_2$$

この第 2 式がオイラー方程式.

[*4] Ludwig (2019) “Consumption, Savings, and the Distribution of Permanent Income.”

[*5] もし $u'(c) = 0$ を迎える場合，そこで満腹になる (satiation) ようなものと思えばいい．その場合，予算制約が不等号で成り立つ (直観的には満腹なので予算が余っていても気にしない状態) が，そういう場合は難しいかつ経済学的に対して興味深いケースでもないので議論しないのが一般的である．

- これを生涯予算制約に代入する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]+\beta(1+r)c_2+\frac{1}{1+r}c_2=Y \\
&\Rightarrow c_2\left[\beta(1+r)+\frac{1}{1+r}\right]=Y-\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)] \\
&\Rightarrow c_2=\frac{1+r}{1+\beta(1+r)^2}\left[Y-\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]\right]
\end{aligned}
$$

これを (2.1) の 4 番目の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c_1&=\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]+\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta(1+r)^2}\left[Y-\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]\right] \\
&=\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta(1+r)^2}Y+\frac{1}{1+\beta(1+r)^2}\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]
\end{aligned}
$$

- $\beta(1+r)=1$ のとき，

$$
c_1=c_2=\frac{1+r}{2+r}Y
$$

となることが分かる．

- 限界消費性向については，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial y_1}&=\frac{\beta(1+r)}{1+\beta(1+r)^2} \\
\frac{\partial c_1}{\partial y_2}&=\frac{\beta}{1+\beta(1+r)^2} \\
\frac{\partial c_2}{\partial y_1}&=\frac{1+r}{1+\beta(1+r)^2} \\
\frac{\partial c_2}{\partial y_2}&=\frac{1}{1+\beta(1+r)^2}
\end{aligned}
$$

となる．

**コメント及び問題の主旨**：二次効用関数はとても重要なケースである[*6]．

なお、$\beta(1+r)=1$ とは、一期間消費を我慢する分の効用の費用 $\beta$ と一期間消費を我慢することで得られる利息 $1+r$ がちょどう同じになる状態であり、マクロ経済学ではよく登場する環境である．

**大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足**：二次効用関数の大きな特徴は、一度微分すると、線形になることです．そのため、無限期間の問題や複雑な所得過程を仮定しても解析解が得られるとても便利なケースです．現代的には限界消費性向等がマクロの政策の効果決定づける上でとても重要な変数であることが知られていますが、二次効用関数がベンチマークになることは多々あります．サーベイとして、Jappelli and Pistaferri(2010ARE)“The Consumption Response to Income Changes” は (前半の方だけでも) 一読の価値が高いと思います．

[*6] 一方で、残念ながら大学院の授業でも時間の都合で省略されてしまっている．しかし、とても伝統がある効用関数であり、とても重要なベンチマークである．

### 2.6.4　CARA 型効用関数

この効用関数 $u(c) = -\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c)$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
u'(c) &= \exp(-\gamma c) > 0 \quad \text{if } c > 0 \\
u''(c) &= -\gamma \exp(-\gamma c) < 0
\end{aligned}
$$

である．

まず最大化問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1, c_2, s} \quad & -\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c_1) - \beta\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c_2) \\
\text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\
& c_2 = y_2 + (1+r)s
\end{aligned}
$$

となる．

オイラー方程式は次の第 1 式である．

$$
\begin{aligned}
& \exp(-\gamma c_1) = \beta(1+r)\exp(-\gamma c_2) && (2.2) \\
& \Rightarrow -\gamma c_1 = \log(\beta(1+r)) - \gamma c_2 && (\because \text{両辺対数を取っている}) \\
& \Rightarrow c_2 = c_1 + \frac{1}{\gamma}\log(\beta(1+r))
\end{aligned}
$$

これを生涯予算制約に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c_1 + \frac{1}{1+r}\left[c_1 + \frac{1}{\gamma}\log(\beta(1+r))\right] &= Y \\
\Rightarrow \ c_1\frac{2+r}{1+r} &= Y - \frac{1}{\gamma(1+r)}\log(\beta(1+r)) \\
\Rightarrow \ c_1 &= \frac{1+r}{2+r}Y - \frac{1}{\gamma(2+r)}\log(\beta(1+r))
\end{aligned}
$$

と $c_1$ を得る．これを (2.2) 式の 3 番目の式に代入すると，

$$
c_2 = \frac{1+r}{2+r}Y + \frac{1+r}{\gamma(2+r)}\log(\beta(1+r))
$$

となる．

限界消費性向は，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{2+r} \\
\frac{\partial c_1}{\partial y_2} &= \frac{1}{2+r} \\
\frac{\partial c_2}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{2+r} \\
\frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{1}{2+r}
\end{aligned}
$$

となる．これは 2 次的な効用関数を仮定したときと同じものである．

**コメント及び問題の主旨**：CARA 型効用関数は有名な効用関数ですが、それほどマクロ経済学では使われてこなかったように思います (資産価格分野では使われているかも)．ややマニアックな問題ではありますが、大学院等を目指す方は一度経験しておくと役に立つと思い出題しました．

**大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足**：CARA 型効用も解析解が得られる稀有な効用関数の例です．例えば近年であれば、Acharya and Dogra (2020 Econometrica) “Understanding HANK: Insights from a PRANK” 等で使われています．

日本の大学院生となる場合、即座に結果が出るような分析をすることが (欧米で PhD を取る人たちと比べて) 重要です．その場合、「データ分析」や数値計算の習熟には時間がかかりやすいため、解析解がある場合に習熟するのは一つの良い生存戦略と思います (他にも生存戦略はあるでしょうが).

## 2.7　財政政策

これを真正面から解いてもよいが，次のようなショートカットも不可能ではない．つまり，

$$
\begin{aligned}
\underbrace{y_1}_{\text{スライドの } y_1} &= \underbrace{y_1 - G_1}_{\text{問題の } y_1} \\
\underbrace{y_2}_{\text{スライドの } y_2} &= \underbrace{y_2 - G_2}_{\text{問題の } y_2}
\end{aligned}
$$

とみなすことで，スライドの情報を消費関数をそのまま使うことが出来る．つまり，

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r}\right] \\
c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

となる．この解に不安を感じる方は真面目に最適化問題を解いてみてほしい．

限界消費性向は，$y_1, y_2$ の限界消費性向の符号を変更するだけで良い．つまり，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial G_1} &= -\frac{1}{1+\beta} \\
\frac{\partial c_1}{\partial G_2} &= -\frac{1}{(1+\beta)(1+r)} \\
\frac{\partial c_2}{\partial G_1} &= -\frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \\
\frac{\partial c_2}{\partial G_2} &= -\frac{\beta}{1+\beta}
\end{aligned}
$$

となる．このように，財政支出 $G_1, G_2$ の増加は消費の減少をもたらす．

# 3　3 期間モデル

最大化問題は，

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1, c_2, c_3, s_1, s_2} \quad & \log(c_1) + \beta \log(c_2) + \beta^2 \log(c_3) \\
\text{s.t. } & c_1 + s_1 = y_1 \\
& c_2 + s_2 = y_2 + (1+r)s_1 \\
& c_3 = y_3 + (1+r)s_2
\end{aligned}
$$

である．予算制約を目的関数に代入すると，

$$\max_{s_1, s_2}\ \log(y_1 - s_1) + \beta \log(y_2 + (1+r)s_1 - s_2) + \beta^2 \log(y_3 + (1+r)s_2)$$

である．この一階の条件は,

$$\begin{aligned} s_1 : \frac{1}{y_1 - s_1} &= \frac{\beta(1+r)}{y_2 + (1+r)s_1 - s_2} \\ s_2 : \frac{\beta}{y_2 + (1+r)s_1 - s_2} &= \frac{\beta^2(1+r)}{y_3 + (1+r)s_2} \end{aligned}$$

である．これを見ると，$(s_1, s_2)$ という 2 つの未知の変数に対して，2 本の方程式があるので，$(s_1, s_2)$ はこれを解けば求まることが判断できる．

しかし，非線形方程式を解くのは面倒なので，そのような計算手順を取らないことにする．まず予算制約を一階条件に代入すると，それぞれの一階の条件は,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_2} \\ \frac{1}{c_2} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_3} \end{aligned}$$

と，それぞれオイラー方程式であることが分かる．このオイラー方程式は消費の成長を表しており，

$$\begin{aligned} c_2 &= \beta(1+r)c_1 \\ c_3 &= \beta(1+r)c_2 \end{aligned}$$

とも書き直すことができる．

つぎに 3 期と 2 期の予算制約を 1 期の予算制約に代入すると，次のような生涯予算制約を得ることが出来る．

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r)} + \frac{c_3}{(1+r)^2} = y_1 + \frac{y_2}{(1+r)} + \frac{y_3}{(1+r)^2} \equiv Y$$

なお，表記を単純化するために生涯所得の割引現在価値を $Y$ とした．これに消費の成長の式を代入すると，

$$\begin{aligned} & c_1 + \frac{c_1\beta(1+r)}{(1+r)} + \frac{c_1\beta^2(1+r)^2}{(1+r)^2} = Y \\ & \Rightarrow\ c_1\left[1 + \beta + \beta^2\right] = Y \\ & \Rightarrow c_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y \end{aligned}$$

と求まる．これを消費の成長の式に代入すると,

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta^2}Y \\ c_3 &= \frac{\beta^2(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2}Y \end{aligned}$$

と消費関数が求まる．

貯蓄関数は，消費関数を予算制約に代入することで求まる．つまり，1 期の予算制約を使って，

$$\begin{aligned} s_1 &= y_1 - c_1 \\ &= y_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y \end{aligned}$$

および，3 期の予算制約を使って，

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{c_3 - y_3}{1+r} \\ &= \frac{\beta^2(1+r)}{1+\beta+\beta^2}Y - \frac{y_3}{1+r} \end{aligned}$$

と求まる．これで消費関数と貯蓄関数が求まった．

最後に限界消費性向を計算する．準備として，

$$\frac{\partial Y}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_2} = \frac{1}{1+r}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_3} = \frac{1}{(1+r)^2}$$

をおさえておく．これを使って，消費関数の偏導関数を求めると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\frac{\partial Y}{\partial y_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta^2}\frac{\partial Y}{\partial y_2} = \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \\ \frac{\partial c_3}{\partial y_3} &= \frac{\beta^2(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2}\frac{\partial Y}{\partial y_3} = \frac{\beta^2}{1+\beta+\beta^2} \end{aligned}$$

と求まる．

**コメントおよび問題の主旨：** 3 期間のモデルが解ければ，一般に $T > 2$ 期間のモデルも解くことが出来るようになるでしょう．例えば $T = 60$ 年とすれば，「成人した 20 歳から 80 歳まで」のモデルとして，このモデルを解釈できるようになります．そのようにすれば，より現実的な分析が出来るようになるでしょう．

**大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足**：経済学的に踏み込んだコメントをすると，2 期間モデルと 3 期間モデルの限界消費性向を比べると，2 期間モデルの限界消費性向のほうが大きいことが分かります．このように，「短い期間のモデルほど，限界消費性向が高く出る」傾向があります．授業でも述べたように，限界消費性向は重要な指数なので，どのようなモデルを作るかによって，得られる限界消費性向が変わることは重要な教訓です[*7]．

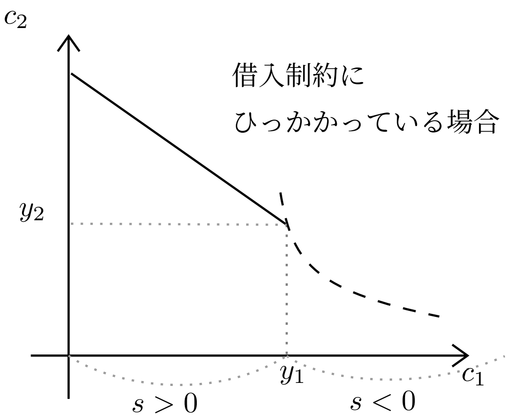
# 4　発展：借入制約

1. 最大化問題は，$s \geq 0$ を追加して書けばよい．つまり，

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & \log(c_1) + \beta \log(c_2) \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

[*7] 大学院では $T = \infty$ という家計が無限期間生きると仮定するモデルを学びます．$T = \infty$ という仮定はとても非現実的ですが，数学的に便利な手法を使え，分析が簡単になります．ただ，このような無限期間生存モデルを使うと，限界消費性向が低くなりやすいということは覚えておいても良いでしょう．

図 4.1　借入制約にひっかかっている場合




である．例えば，

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s\geq 0} \quad & \log(c_1) + \beta\log(c_2) \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s\end{aligned}$$

と max オペレータの下に書いても良い．

なお，$s \geq 0$ という借入制約を，1 期の予算制約に代入すると，$c_1 \leq y_1$ となることも分かる．つまり，「借入できない」ことは，「1 期において所得より大きな消費は出来ない」ことと同じことを意味する．同様に 2 期について考えると，$c_2 \geq y_2$ となる．つまり，借入できないことは「2 期においては所得以上の消費しか出来ない」ことと同じであることが分かる．

このような知識を使うと，借入制約があるときの図示が理解しやすくなる．まず予算制約は，

$$c_2 = \begin{cases}(1+r)y_1 + y_2 - (1+r)c_1 & \text{if } y_1 \leq c_1 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となっており，$c_2 = y_2$ の点で切れていること分かる．この点が $s \gtreqless 0$ となる境界である．これを図示したのが図 4.1 であり，特に家計は借入制約にひっかかっている状況を図示している．そして，図の中の右側，すなわち，$c_1 > y_1$ の領域では，家計の無差別曲線が予算制約と接する点で，無差別曲線と予算制約の傾きが一致していないことが視覚的にも分かる．すなわち，借入制約にひっかかっているとき，「無差別曲線の傾き > 予算制約の傾き」となっている．

2. この解答は授業スライドにも載っている．

$$(c_1, c_2, s) = (c_1^*, c_2^*, s^*) \equiv \left(\frac{1}{(1+\beta)}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right], \frac{\beta(1+r)}{(1+\beta)}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right], \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)}\right)$$

と定義できる．

3. ここからが重要である．場合分けによって解いていく必要がある．制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_{s\geq 0} \; \log(y_1 - s) + \beta\log([1+r]s + y_2)$$

となる．

そして一階条件は，$s \geq 0$ の場合であれば，借入制約が問題とならないので，これまでどおり，「微分してゼロ」で良く，

$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1+r}{[1+r]s + y_2}$$

となる．一方，借入制約にひっかかってしまう場合，$s < 0$ は取れないので，

$$s = 0$$

となる．

4. さきほどの一階条件を用いると，$s \geq 0$ の場合，

$$s = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r}\right] = s^*$$

となり，そうでなければ，

$$s = 0$$

となる．
これをまとめて表記すると，

$$s = \begin{cases} s^* & \text{if } s^* \geq 0 \\ 0 & \text{if } s^* < 0 \end{cases}$$

となる．もしくは，別の表記法を用いると

$$s = \max\{s^*, 0\}$$

や

$$s = \mathbb{1}_{s \geq 0}\ s^*$$

という表記を使っても解答できる．$s = \max\{s^*, 0\}$ とは「$s^*$ と 0 のどちらか大きい方」という意味である．$\mathbb{1}$ とは指示関数 (indicator function) と呼ばれ，下付きの条件を満たしたときに 1 を取り，それ以外では 0 を取る関数である．ここでは，「$s \geq 0$ のとき 1 をとり，それ以外 (つまり $s < 0$) では 0 を取る」関数になっている．様々な記法になれておくと，後々の学習で便利である．
どの解答でも意味は同じである．

5. $\beta = 1$ かつ $r = 0$ なので，$\beta(1+r) = 1$ である．このとき，

$$s^* = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

となる．したがって，
   - $(y_1, y_2) = (2, 1)$ ならば，$s^* = (2-1)/2 = 1/2$ である．これは正なので，$s = 1/2$ である．
   - $(y_1, y_2) = (1, 2)$ ならば，$s^* = (1-2)/2 = -1/2$ である．これは負なので，借入制約に引っかかる．そのため $s = 0$ である．

$(y_1, y_2)$ の値を特定しない場合，一般に，$s^* = (y_1 - y_2)/2$ であるため，

$$y_1 \gtreqless y_2 \ \Leftrightarrow\ s^* \gtreqless 0$$

と，$y_1 > y_2$ ならば，そのときのみ $s^* > 0$ のような関係が分かる．不等号の向きが逆の時もしかりである．

これは，当たり前であるが，「今期の所得が来期よりも多いならば，貯蓄をする．このときには借入制約が問題とならない」が，「今期の所得が来期よりも小さいならば，借金をしたい．しかし，借入制約のせいで借金ができない」という風になっている．

6. これまで確認してきたように，$s^* = 0$ かどうかは重要な場合分けが生じてくる．より一般的に，どのようなパラメータの場合に $s^* = 0$ となるかを確認するのがこの問題の狙いである．

そして，これは次のようにすれば求まる．

$$\begin{aligned} & s^* \gtreqqless 0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r}\right] \gtreqqless 0 \\ & \Rightarrow \beta(1+r) \gtreqqless \frac{y_2}{y_1} \end{aligned}$$

つまり，$\beta(1+r) = \frac{y_2}{y_1}$ という条件が満たされるとき，$s^* = 0$ となり．左辺が大きいときは，$s^* > 0$，右辺が大きいときは，$s^* < 0$ となる．

この左辺 $\beta(1+r)$ は消費を 1 期先延ばしするときの純利益のような項である．一方，右辺 $y_2/y_1$ は所得の成長率を表す項である．つまり，消費の先延ばしの純利益と所得の伸び率が同じ時には $s^* = 0$ となることが分かる．

7. 次に消費関数を求めよう．このときも借入制約がひっかかるかどうかの場合分けが重要になる．まず，借入制約がひっかからず正の貯蓄をしているならば，$c_1$ は $c_1^*$ となることが，直ちに分かる．一方，借入制約がひっかかる場合は予算制約を見れば良い．つまり，$s = 0$ のとき，1 期目の予算制約は

$$c_1 = y_1$$

となる．

これをまとめると，

$$c_1 = \begin{cases} c_1^* & \text{if } s > 0 \\ y_1 & \text{if } s = 0 \end{cases}$$

となる．なお，先ほど，$s^* = 0$ になる条件を求めたので，条件付けを内生変数の $s$ ではなくて，パラメータのみによって書くこともできる．つまり，これは

$$c_1 = \begin{cases} c_1^* & \text{if } \beta(1+r) > \frac{y_2}{y_1} \\ y_1 & \text{if } \beta(1+r) \leq \frac{y_2}{y_1} \end{cases}$$

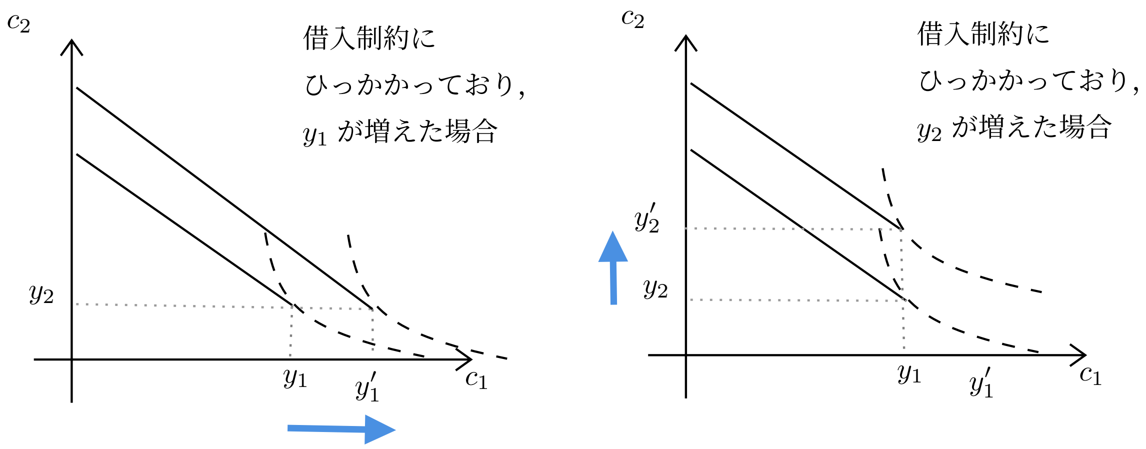
と書くと，より正確である．

また同様に $c_2$ も借入制約にひっかかるかどうかが重要になる．もし借入制約にひっかからず正の貯蓄をしているならば，$c_2 = c_2^*$ である．一方，もし借入制約がひっかかっているならば，$s = 0$ である．このとき，2 期目の予算制約より，

$$c_2 = y_2$$

となる．

図 4.2　借入制約にひっかかっているとき：所得の増加




これをまとめると，

$$c_2 = \begin{cases} c_2^* & \text{if } \beta(1+r) > \frac{y_2}{y_1} \\ y_2 & \text{if } \beta(1+r) \leq \frac{y_2}{y_1} \end{cases}$$

となる．

8. 最後に借入制約が引っかかる場合の限界消費性向を求める．このとき $(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ である．そのため，

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} = 1$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial y_2} = 0$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial y_2} = 1$$

となる．このように，$t$ 期の所得増加は，そのまま $t$ 期の消費を増やすようになる．

このように，借入制約にひっかかっている場合，限界消費性向は 1 となり，とても高くなる．これは借入制約があるときの重要な帰結なので，是非覚えておいてほしい．

9. 図示 (オプショナル)

所得が増えた時も図示しておく．図 4.2 は借入制約にひっかかっている状況で，$y_1$ が増えた場合と，$y_2$ が増えた場合をそれぞれ図示している．まず左図の $y_1$ が増えた場合を見てみると，このとき $c_1$ のみが増えており，$c_2$ は変わっていないことが分かる．右図も同様に $y_2$ が増えた場合には $c_2$ のみが増えている．このように，借入制約にひっかかっている状況では，$y_t$ の増加は $c_t$ の増加をもたらす．

**コメントおよび問題の主旨：**この問題の主旨は主に二つある．まずは，数学的な観点からは不等式制約をどのように対処するか一例を見せることである．すこしレベルが上がると，ラグランジュ未定乗数法を応用した，KKT 法を学び，KKT 法を使うと，このような場合分けもせずに，もっと楽に解けるようになるだろう．

経済学的な観点からは，借入制約は非常に重要かつ頻繁に登場する制約であるため，取り扱った．借り入れが現実には簡単にできないという事例も重要であり，借入制約の結果，限界消費性向が高まるという結論も非常に重要である．さらに金融経済学の観点からは，「借り入れが自由にできるか否か」で様々な経済学の定理が成り立つかどうかが変わることが知られており，そのような理論的観点からも，進んだマクロ・金融経済学では重要な例になってくる．

## 4.1

解答省略：本質的には，上記の解答通りの手続きで解答が得られるはずである．

## 4.2　発展：利子率の違い (とても難しい)

1. 複数の最大化問題の書き方が考えられる．
例えば，最大化問題は，

$$\begin{aligned} \max_{c_1,c_2,s} \; & \log(c_1) + \beta \log(c_2) \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r^l)s \quad \text{if } s \geq 0 \\ & c_2 = y_2 + (1+r^h)s \quad \text{if } s < 0 \end{aligned}$$

と書くことができる．
もしくは，

$$\begin{aligned} \max_{c_1,c_2,s} \; & \log(c_1) + \beta \log(c_2) \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r(s))s \end{aligned}$$

と書いて $r(s)$ の説明を書いても良い．私は $r(s)$ の説明は問題文でしているので省略する．後者の定式化の方が，次の小問に答える際には便利かもしれない．
貸借で利子率に違いがあるとき，次のような図が描ける．この予算制約は，

$$c_2 = \begin{cases} (1+r^l)y_1 + y_2 - (1+r^l)c_1 & \text{if } c_1 \leq y_1 \\ (1+r^h)y_1 + y_2 - (1+r^h)c_1 & \text{if } c_1 > y_1 \end{cases}$$

となっている．図を見ると，予算制約は連続関数であり，$c_1 = y_1$ で微分不可能な点を持つことが分かる

2. 目的関数に予算制約を代入すると，

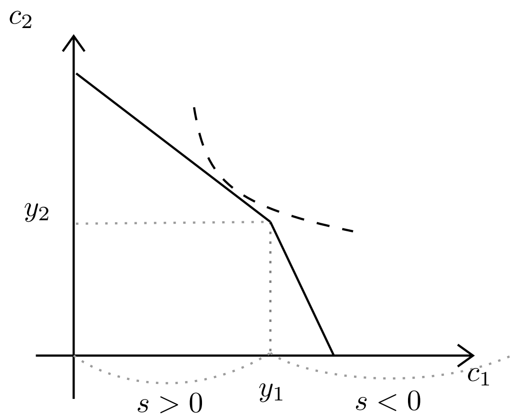
$$\max_s \; \log(y_1 - s) + \beta \log([1 + r(s)]s + y_2)$$

となる．
一階条件は，

$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1 + r(s)}{[1 + r(s)]s + y_2}$$

である．

図 4.3　貸借で利子率に違いがあるとき




場合分けをして書くと，

$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1 + r^l}{[1 + r^l]s + y_2} \quad \text{if } s \geq 0$$
$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1 + r^h}{[1 + r^h]s + y_2} \quad \text{if } s < 0$$

である．

3. 一階条件を解くと

$$s = \begin{cases} \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r^l}\right] & \text{if } s \geq 0 \\ \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r^h}\right] & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

が得られる．ここで，二つの条件は，

$$\frac{y_2}{1 + r^l} < \beta y_1 \quad \text{iff } s > 0 \tag{4.1}$$
$$\beta y_1 < \frac{y_2}{1 + r^h} \quad \text{iff } s < 0 \tag{4.2}$$

と言い換えることが出来る[*8]．そして，$r^l < r^h$ より，

$$\frac{1}{1 + r^h} < \frac{1}{1 + r^l}$$

が満たされる．したがって，$\frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l}$ のときを考える必要がある．このとき，もし $s > 0$ ならば (4.1) に反し，$s < 0$ ならば (4.2) に反する．そのためこのとき $s = 0$ でなければならない．

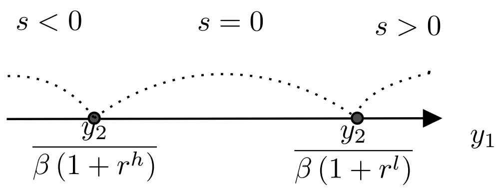
したがって，現時点で分かったことをまとめると，次のようになる．

- $\frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1$ のとき：
$$s = \frac{1}{1 + \beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1 + r^l}\right] > 0$$

- $\beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h}$ のとき：
$$s = \frac{1}{1 + \beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1 + r^l}\right] < 0$$

[*8] iff とは必要十分 (IF and only iF) であることを意味する．

図 4.4　貯蓄の場合分け




- $\frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l}$ のとき：

$$s = 0$$

このように 3 種類の場合分けをして最適な貯蓄関数が決まることに注意してほしい．

問題では要求していないが，この意思決定を視覚的に分類したのが図 4.4 である．このように，$\frac{y_2}{\beta(1+r^h)}$ と $\frac{y_2}{\beta(1+r^l)}$ が二つの閾値となって，$y_1$ がどこに位置するかで $s \gtreqless 0$ のいずれになるかが決まる．

4. 上で確認したように貯蓄関数は 3 つの場合によって異なる．したがって，消費も同様に影響を受ける．

1 期の消費関数は，1 期の予算制約に貯蓄関数を代入すれば直ちに求まる．すなわち，

$$c_1 = \begin{cases} \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^l}\right] & \text{if } \frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1 \\ y_1 & \text{if } \frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l} \\ \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^h}\right] & \text{if } \beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h} \end{cases}$$

2 期目の消費関数を求める際は，予算制約に場合分けがあることに注意する必要がある．

$$c_2 = \begin{cases} \frac{\beta(1+r^l)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^l}\right] & \text{if } \frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1 \\ y_2 & \text{if } \frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l} \\ \frac{\beta(1+r^h)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^h}\right] & \text{if } \beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h} \end{cases}$$

となる．

問題では要求していないが，このように $(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ が重要な意思決定であることを視覚的に説明しよう．図 4.5 では，二つの例によって，$(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ におけるキンクが，解として重要なことを描いている[*9]．例えば左図では $r_l$ が下がった例を描いている．通常のモデルであれば，予算制約の傾きが変われば，意思決定も変化するが，この例では，$(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ から変化していない．また，右図では，異なる無差別曲線を 2 種類描いているが，どちらも $(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ となっている．通常のモデルでは，異なる無差別曲線を持ち，予算制約が同じとき，異なる消費を選ぶ．その点でもこのモデルは特異である．

また貯蓄関数も図示しておくと図 4.6 のようになる．見て分かるように，$s = 0$ の領域で平面な領域を持つ．

**コメントおよび問題の主旨：**このモデルは，かなり難しいモデルである．このように「ある変数 (ここでは貯蓄) が正のときと，負の時で違う」という制約は投資理論では伝統的によく使われてきた制約である．投資分野では非可逆性制約と呼ぶ．非可逆性制約は投資の分野でも扱うことにする．

[*9] 直線や曲線がゆがみを持つことをキンク (kink) すると呼ぶことがある．これは正式な学術用語というよりは分野でよく使う jargon である．

図 4.5　貯蓄関数や消費関数が 3 つの場合分けになる理由

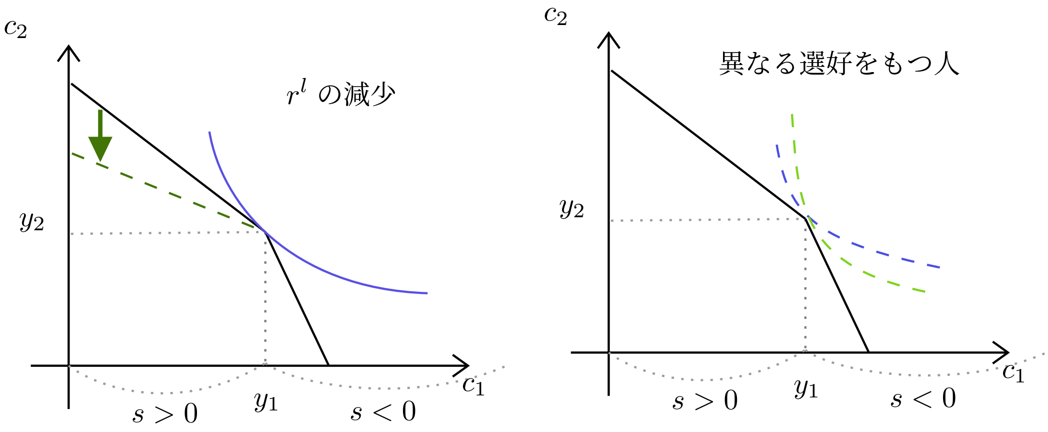
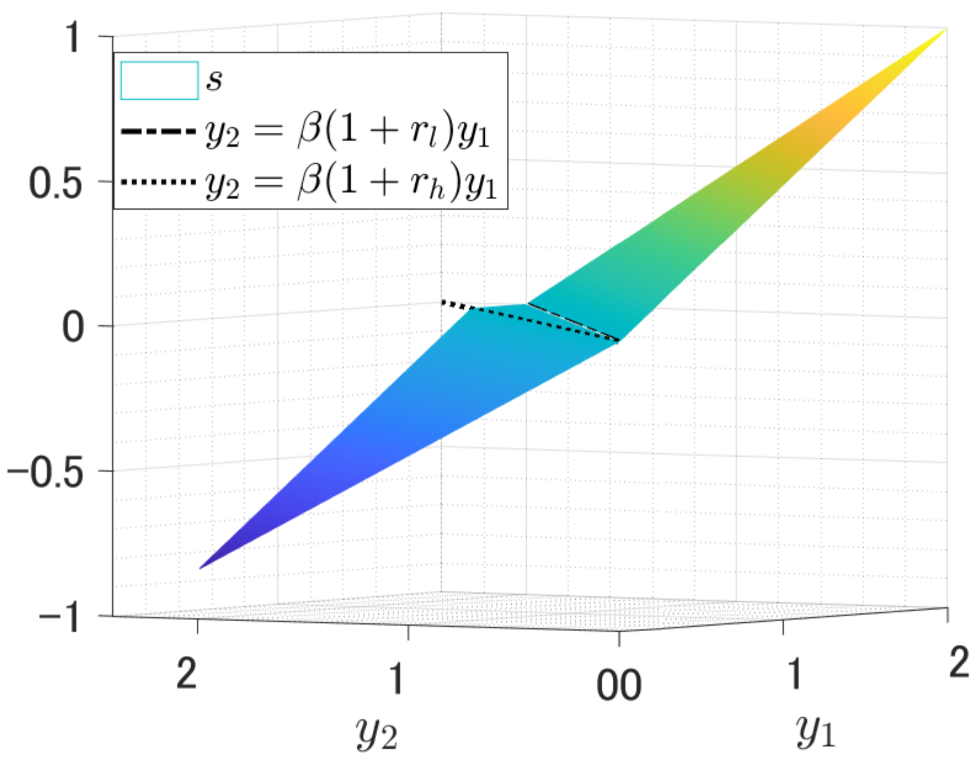



図 4.6　貯蓄関数：貸借で利子率が違う場合




この問題の狙いは，このように少しだけ現実っぽい要素を入れてみると，途端にモデル分析が複雑になることがあることを紹介することである．特に，今回のように非線形・非連続・非凸な制約を導入するとモデル分析が複雑になることが多い．