基礎マクロ練習問題の解答例：消費

日野将志 *

目次

* タイポや間違いに気付いたら教えて下さい.

分数が出たとき、分母が非ゼロであることは仮定する．

1　ケインズ型消費関数

1.1　消費に対する乗数効果

資源制約式を消費関数に代入すると，

$$\begin{aligned} C &= \alpha_1[C+I+G]+\alpha_2 \\ \Rightarrow C &= \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}[I+G]+\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} \end{aligned}$$

となる．したがって，消費に対する効果は，

$$\frac{dC}{dG}=\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}$$

である．

これはつまり，$dC/dG=\alpha dY/dG$ となっていることが分かる．実はこれは，このように計算せずとも，$C=\alpha_1 Y+\alpha_2$ から Y が増えた α 倍だけ消費が増えるのは直ちに分かる．

1.2　財源

1.2.1　租税乗数１

$$\begin{aligned} C+I+G &= Y \\ C &= \alpha_1(Y-T)+\alpha_2 \end{aligned}$$

を考える．二本目の式を一本目の式に代入することで次を得る．

$$\begin{aligned} \alpha_1(Y-T)+\alpha_2+I+G &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1-\alpha_1}(\alpha_2+I+G-c_1T) \end{aligned}$$

したがって，これを T に対して微分すると，

$$\frac{dY}{dT}=-\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}$$

となる．これが答え．

コメントおよび問題の主旨：まず係数が負であることに気付いてほしい．つまり、これは「減税 ($T\downarrow$) をすると Y が増える」という効果を表している．なお、この $-c_1/(1-c_1)$ を**租税乗数**と呼ぶ．

また、$0<\alpha_1<1$ なので、

$$\left|\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right|<\left|\frac{1}{1-\alpha_1}\right|$$

となる．これは、財政政策 G による乗数効果の方が、減税よりも効果的であることを示している．

1.2.2　租税乗数２：政府の予算制約

次に、以下を考える．

$$\begin{aligned} C + I + G &= Y \\ C &= \alpha_1(Y - T) + \alpha_2 \\ G &= T \end{aligned}$$

問題 1.2.1 と比べると第 3 式が新たに加わった．これは問題文の通り、政府支出は必ず増税によって財源が調達されることを意味している．

これを同様に Y について解くと、

$$\begin{aligned} \alpha_1(Y - G) + \alpha_2 + I + G &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1-\alpha_1}(\alpha_2 + I + (1-\alpha_1)G) \end{aligned}$$

となる．

したがって、G について微分すると、

$$\frac{dY}{dG} = 1$$

となる．

コメント及び問題の主旨：この問題が示していることは、「もし財政政策が増税によって賄われるならば、乗数効果は一切発生しない」ということである．つまり、乗数効果は、ケインジアン・クロスの世界でも必ず発生する効果ではないことを示す一例となっている．

私が知る限り多くの教科書のケインジアン・クロス (45 度線分析) では，政府支出がどのように資金調達されるかに関して記述がないことが多い．しかし，このようにケインジアン・クロスにおいて，資金調達に関する仮定は乗数効果の有無を決定する重要な仮定であることを理解してもらうことがこの問題の狙いです．

1.2.3　消費税１

次に、消費税の効果を考える．

$$\begin{aligned} C + I + G &= Y \\ (1+\tau^c)C &= \alpha_1 Y + \alpha_2 \end{aligned}$$

の 2 本をこれまでと同様に解くと、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 Y + \alpha_2}{1+\tau^c} + I + G &= Y \\ \Rightarrow Y &= \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1}{1+\tau^c}}\left(\frac{\alpha_2}{1+\tau^c} + I + G\right) \\ \Rightarrow Y &= \frac{1+\tau^c}{1+\tau^c-\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{1+\tau^c} + I + G\right) \\ \Rightarrow Y &= \frac{\alpha_2}{1+\tau^c-c_1} + \frac{1+\tau^c}{1+\tau^c-\alpha_1}(I+G) \end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned}\frac{dY}{d\tau^c} &= \frac{-\alpha_2}{(1+\tau^c-\alpha_1)^2} + \frac{(1+\tau^c-\alpha_1)-(1+\tau^c)}{(1+\tau^c-\alpha_1)^2}(I+G)\\ &= -\frac{\alpha_2+\alpha_1(I+G)}{(1+\tau^c-\alpha_1)^2} < 0\end{aligned}$$

したがって、消費減税も Y を高めることが分かる.

コメント及び問題の主旨：この問題は経済学的というよりも、計算力のトレーニングのための問題です. 積の微分や商の微分をうまく使えるようになると良いでしょう.

1.2.4　消費税２：政府の予算制約

この大問の最後は次の連立方程式を考える．次に、消費税の効果を考える.

$$\begin{aligned}&C+I+G=Y\\ &(1+\tau^c)C=\alpha_1 Y+\alpha_2\\ &G=\tau^c C\end{aligned}$$

つまり、財政政策は消費増税によって賄われる.

また例のごとく、これらを解くと、

$$\begin{aligned}(1+\tau^c)\frac{\alpha_1 Y+\alpha_2}{1+\tau^c}+I=Y\\ \Rightarrow Y=\frac{1}{1-\alpha_1}(\alpha_2+I)\end{aligned}$$

となる.

これは G には依存していない．これはつまり、

$$\frac{dY}{dG}=0$$

であり、消費増税による政府支出は何らの効果もないことを意味している.

コメント及び問題の主旨：

世の中の数多くの教科書では乗数効果ばかりが取り上げられています．その印象で「ケインジアン・クロスに基づくと財政政策の景気刺激効果は大きい」のような意見がかなり広まっています．一方で、これらの問題で確認したように、「政府がどのように財源を調達するか」はとても重要な問題なことを認識してもらえると良いと思います.

1.3　乗数効果

この問題は次のようにして示すことができる.

まず

$$\frac{\partial Y}{\partial G}=\frac{1}{1-\alpha_1}$$

である．これをもう一度、α_1 について微分する.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{\partial Y}{\partial G}\right)=\frac{1}{(1-\alpha_1)^2}$$

ここで $(1-\alpha_1) \neq 0$ なので、分母 $(1-\alpha_1)^2 > 0$ である．したがって、α_1 が上がると、乗数効果 $\partial Y/\partial G$ が増えることがわかる．

コメント及び問題の主旨：二階微分 (正確には二階の偏導関数) を使って、「傾きの傾き」を考える問題です．

2　2期間モデル

2.1　スライドの確認

$\beta(1+r)=1$ と $y \equiv y_1 = y_2$ を使って，最大化問題を次のように書く．

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s}\ & \log c_1 + \frac{1}{1+r}\log c_2 \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y \\ & c_2 = y + (1+r)s\end{aligned}$$

スライドと同様に解くと，オイラー方程式は,

$$\begin{aligned}c_2 &= \frac{1+r}{1+r}c_1 \\ \Rightarrow c_2 &= c_1\end{aligned}$$

となる．したがってまず $c_2 = c_1$ が示せた[*1]．ここで $\beta(1+r)=1$ **は** $c_1 = c_2$ **となるための条件**であることを覚えてほしい．直感的には，β は将来に消費を先延ばしすることを嫌う効果 (正確には割引)，r は将来に消費を先延ばしにすることが徳になる効果である．$\beta(1+r)=1$ はちょうど二つの効果が相殺される条件である．

$c \equiv c_1 = c_2$ としよう．次に，これを予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned}s &= y - c \\ s &= \frac{1}{1+r}[y-c]\end{aligned}$$

である．$r>0$ のとき，これを満たすのは $s=0$ の場合のみである．

2.2　2 階条件の確認

- まず，便宜上，代入法によって定義した最大化問題を

$$\mathcal{M} = \max_s \log(y_1 - s) + \beta\log(y_2 + (1+r)s)$$

　と定義しよう．すると，一階の導関数は,

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial s} = -\frac{1}{y_1 - s} + \beta\frac{1+r}{y_2 + (1+r)s}$$

[*1] なお，この $c_2 = c_1$ を示す段階で $y_1 = y_2$ を使っていない．

となる．そして二階の導関数は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{M}}{\partial s^2} &= -\frac{1}{[y_1-s]^2}-\beta(1+r)^2\frac{1}{[y_2+(1+r)s]^2}\\ &= -\frac{1}{(c_1)^2}-\beta(1+r)^2\frac{1}{(c_2)^2}<0\end{aligned}$$

となる．このように二階の条件が満たされることが確認できる．

- 同様の計算を一般形について行えばよい．つまり最適化問題は

$$\mathcal{M}=\max_s u(y_1-s)+\beta u(y_2+(1+r)s)$$

であり，二階の導関数は

$$\frac{\partial^2\mathcal{M}}{\partial s^2}=u''(c_1)+\beta(1+r)^2u''(c_2)<0$$

となる．したがって，$u''(c)<0$ を満たす効用関数であれば，二階の条件は満たされる事が分かる．

コメント及び問題の主旨：授業では二階の条件の確認を省略している．これは目的関数が上に凸であるためである．つまりその仮定のおかげで，最大化問題 $\mathcal{M}$ も上に凸になっている．すると，二階の条件は常に満たされるので，一階の条件さえ確認すれば良くなっている．

このように最適化問題を作る時点で，「一階条件さえ確認すれば解ける」ように学部レベルの経済学の問題は作られていることが多いので，一階条件だけを確認するのが慣習となっている．

なお，この問題の 2 問目を通じて，一般形の証明にも少し慣れてもらえたら良いと思う．慣れてしまえば，一般形のほうが面倒な計算が無くなり，議論の一般性も担保でき，一般形のメリットが高くなる．

2.3　計算問題

2.3.1

初学者は計算手順の確認もかねて一個一個解いても良いが，これらの問題は一括して次のようにして解くことも出来る．

3 つの問題のうち，変わるのは (y_1,y_2) だけであるので，そこに数を代入せずに (y_1,y_2) のまま扱う．

このとき，最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s}\ &\log c_1+\log c_2\\ \text{s.t. }&c_1+s=y_1\\ &c_2=y_2+s\end{aligned}$$

である．$\beta=1$ と $r=0$ は共通しているので，代入している．

予算制約を目的関数に代入すると,

$$\max_s \log(y_1-s)+\log(y_2+s)$$

であるので，この導関数 $=0$ は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{y_1-s}&=\frac{1}{y_2+s}\\ \Rightarrow s&=\frac{y_1-y_2}{2}\end{aligned}$$

である．さらに，これを予算制約に代入すると，

$$c_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$c_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

である．

したがって，それぞれのケースを考えると，(y_1, y_2) が $(1, 1)$ のときのみ，

$$c_1 = c_2 = 1$$

であり，$s = 0$ である．

(y_1, y_2) が $(1, 2)$ または $(2, 1)$ のときはどちらも

$$c_1 = c_2 = 3/2$$

である．また s はそれぞれの場合において -0.5 と 0.5 となる．

この問題では割引因子が 1 で利子率も 0 なので，$\beta(1 + r) = 1$ が満たされる．これは $c_1 = c_2$ になる条件だったことを問題 2.1 で学んだ．この条件が満たされてるため，(y_1, y_2) の組み合わせにかかわらず $c_1 = c_2$ となっている．

s の解釈は次が一例である

- $(y_1, y_2) = (1, 1)$ のとき：今期と来期の所得が同じであるため，貯蓄をする必要がない
- $(y_1, y_2) = (1, 2)$ のとき：今期の所得が少ないため，借金して今期の消費を増やすのが最適となっている
- $(y_1, y_2) = (1, 2)$ のとき：来期の所得がすくないため，貯蓄をしておいて，来期の消費を増やすのが最適となっている

コメントおよび問題の主旨：一般的に，おそらく書店に行っても，このようなマクロ経済の計算問題が載っているような本はほとんど全く見つからないだろう．そこでこの練習問題では，手を動かしてもらって，マクロ経済の計算問題に慣れてもらうことが狙いである．

教員側からすると，このような問題は「数値が違うだけで，経済学の本質的には同じなのだから，こんなに問題作る必要ない」と思ってしまうことが一因で，こういう練習問題が少ないのだと思われる．

2.3.2　計算問題：弾力性

1. 消費関数は既に前問で $c_1 = \frac{y_1+y_2}{2}$ と求めたので，それを用いれば, 限界消費性向は 1/2 と直ちに分かる．

   これは，「y_1 が Δy_1 だけ増えると，消費は $1/2\Delta y_1$ だけ増える」ことを意味している．
2. 同様に，消費関数を用いて計算すれば求まる．

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}(y_1, y_2) &= \frac{\partial c_1}{\partial y_1}\frac{y_1}{c_1} \\ &= \frac{1}{2}y_1\frac{2}{y_1 + y_2} \\ &= \frac{y_1}{y_1 + y_2} \end{aligned}$$

   と求まる．

3. 仮に所得が $(1, 2)$ のとき,

$$\epsilon_{1,1} = \frac{1}{3}$$

となる．したがって，弾力性の定義より，「今期の所得 y_1 が 1% 増えた時，1/3% 消費が増える」ことを意味している．

限界消費性向は所得が Δy_1 だけ増える事に対する概念であったことに対して，弾力性は所得が 1% 増えることに対する概念である．

4. $(y_1, y_2) = (1, 2)$ のとき，$c_1 = 3/2$ である．また y_1 が 1% 増えると，$(y_1, y_2) = (1.01, 2)$ なので，$c_1' = 3.01/2$ である．

この変化率は $(c_1' - c_1)/c_1$ なので計算すると $[(3.01 - 3)/2]/[3/2] = 0.01/3$ であり，表記を書き換えると 1/3% である．これは弾力性の値 1/3% と一致している．

コメントおよび問題の主旨：これは弾力性の定義の確認と数字の桁の感覚を身に着けることが狙いである．例えばこの問題であれば，限界消費性向は 1/2 と大きい値を取る．一方で，弾力性は 1/3% ととても小さい値に見えるかもしれない．

2.3.3　計算問題：所得の大小と消費の大小

この最大化問題は講義スライドと全く同じである．したがって，この解は,

$$s = \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)}$$
$$c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]$$
$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]$$

である．

ここに $y_1 = y_2 = 1$ を代入すると,

$$s = \frac{\beta(1+r) - 1}{(1+\beta)(1+r)}$$
$$c_1 = \frac{2+r}{(1+\beta)}$$
$$c_2 = \frac{\beta(1+r)(2+r)}{1+\beta}$$

である．特に貯蓄関数に注目する．$\beta \in [0, 1]$ かつ $r \in [0, \infty)$ なので，これの分母は常に正である．したがって，s の符号は分子だけで決まる．すなわち,

$$s \gtreqless 0 \Leftrightarrow \beta(1+r) \gtreqless 1$$

と決まる．

なお，消費の成長の条件は，

$$
\begin{aligned}
&c_2 - c_1 \gtreqless 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta(1+r)(2+r)}{1+\beta} - \frac{2+r}{(1+\beta)} \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow \beta(1+r)(2+r) - (2+r) \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow \beta(1+r) \gtreqless 1
\end{aligned}
$$

と求まる．まとめると，消費の成長の条件も

$$
c_2 - c_1 \gtreqless 0 \Leftrightarrow \beta(1+r) \gtreqless 1
$$

である．

なお，s の条件が求まった時点で，消費の成長の条件を直観的に求めることも出来た方もいるかもしれない．つまり，「今，$y_1 = y_2 = 1$ なので，今期と来期の所得は同じである．もし，$s > 0$ ならば，来期の消費が今期より多くなるはずである」と考えることもできる．

コメントおよび問題の主旨：$\beta(1+r) = 1$ というのは動学的なマクロ経済学では頻出の条件である．これは二期間だけでなく，無限期間でも同様に消費の成長を決定づける上で重要である．したがって，早いうちから馴染んでもらうのが趣旨である．

2.4　予算制約の違い

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_1, c_2} u(c_1) + \beta u(c_2) \\
&\text{s.t. } c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}
\end{aligned}
$$

という最大化問題を考える．

予算制約を，

$$
c_1 = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \frac{c_2}{1+r}
$$

として，目的関数に代入すると，

$$
\max_{c_2} \ u\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \frac{c_2}{1+r}\right) + \beta u(c_2)
$$

となる．これの一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
&-u'(c_1)\frac{1}{1+r} + \beta u'(c_2) = 0 \\
&\Rightarrow \ u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)
\end{aligned}
$$

となる．このように同じオイラー方程式が得られる．したがって，予算制約を生涯予算制約で書くか，講義スライドのように各時点ごとに別々に書くかは本質的に違わない．

対数効用関数の場合は，これ以降スライドと同様に計算すれば得られるので割愛する．

2.5　相対価格と利子率

$$\begin{aligned} \max_{c_1,c_2}\ & u(c_1)+\beta u(c_2) \\ \text{s.t. } & p_1c_1+s=p_1y_1 \\ & p_2c_2=p_2y_2+s \end{aligned}$$

という最大化問題を考える．

まず 2 本の予算制約の s について代入することで次の生涯予算制約を得る．

$$\begin{aligned} p_1c_1+p_2c_2 &= p_1y_1+p_2y_2 \\ \Rightarrow c_1+\frac{p_2}{p_1}c_2 &= y_1+\frac{p_2}{p_1}y_2 \end{aligned}$$

ここで仮に，$1+r\equiv\frac{p_1}{p_2}$ と定義すると，

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}=y_1+\frac{y_2}{1+r}$$

を得る．これは講義スライドの生涯予算制約と全く同じである．このように，今期と来期の価格を導入することと，利子率を導入することは同じことである[*2]．

以上で $p_1/p_2=1+r$ とすると，講義スライドと同じ予算制約になることが分かった．最適化の目的関数は講義スライドと同じで，予算制約も同じになることが分かったので，最適化解も同じになるはずである．これを実際に確認しよう．

予算制約これまで同様に予算制約を目的関数に代入すると次のようになる．

$$\max_s\ u(y_1-s/p_1)+\beta u(y_2+s/p_2)$$

s について一階の条件を求めると，

$$\begin{aligned} u'(c_1)\frac{-1}{p_1}+\beta u'(c_2)\frac{1}{p_2} &= 0 \\ \Rightarrow\ u'(c_1) &= \beta\frac{p_1}{p_2}u'(c_2) \end{aligned}$$

となる．もし仮に，$(1+r)=\frac{p_1}{p_2}$ と定義すると，

$$\Rightarrow\ u'(c_1)=\beta(1+r)u'(c_2)$$

と講義スライドで学んだオイラー方程式を得る．

コメントおよび問題の主旨：これは，利子率 $1+r$ とは本質的に，今日と明日の価格比 p_1/p_2 であることを示している例です．つまり，利子率 $1+r$ とは，「今日 1 単位消費を我慢することで，来期得られる価値」と今期と来期の価値を比較する概念であり，その意味で価格比と全く同じであることが数式として理解できる．

また，価格 (p_1,p_2) を導入した方が，ミクロ経済学と同じことを学んでいることも認識しやすいでしょう．結局，価格として書いても，利子率として書いても同じことなので，ミクロ経済学で学んだ消費者理論とここで学んでいる家計消費理論はとても似ています．

[*2] 言い換えれば，利子率とは今期と来期の財の相対価格である，とも言える．

2.6　後ろ向きの解き方

まず 2 期の問題を考える．

$$
\begin{aligned}
V(s) = \max_{c_2}\ & \log(c_2) \\
\text{s.t. } & c_2 = (1+r)s + y_2
\end{aligned}
$$

対数関数は単調増加関数である．つまり，この家計は，予算内で多く消費すればするほど幸福になれる．したがって，s を所与とした最適な消費は，単純に予算を全て使い果たすことであり，

$$c_2 = (1+r)s + y_2$$

である．これを目的関数に代入すると，

$$V(s) = \log((1+r)s + y_2)$$

となる．

次に，この解を所与として，1 期の問題に移る．1 期の最大化問題は，

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1, s}\ & \log(c_1) + \beta \log((1+r)s + y_2) \\
\text{s.t. } & c_1 + s = y_1
\end{aligned}
$$

である．予算制約を目的関数に代入すると，

$$\max_{s}\ \log(y_1 - s) + \beta \log((1+r)s + y_2)$$

となる．この一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y_1 - s} &= \beta(1+r)\frac{1}{(1+r)s + y_2} \\
\Rightarrow \quad s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+r)(1+\beta)}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，これを予算制約に代入すると，

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]$$

となる．

さらに，$c_2 = (1+r)s + y_2$ に求めた s を代入すると，

$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r}\right]$$

が求まる．スライドと見比べると，(c_1, c_2, s) はどれも等しいことが分かる．

コメントおよび問題の主旨：後々，中級マクロや上級マクロでは動的計画法 (Dynamic Programming) という計算方法を学ぶだろう．この動的計画法は，まさに後ろ向きの解を無限期間に適用した解法である．ここでは 2 期間のモデルを用いて動的計画法の考え方に馴染んでもらうのが目的である．対数効用を用いたが効用関数の形が変わっても，基本的には，後ろ向きの解き方と，普通の解き方 (前向きの解き方) の解は一致する．

前向きと後ろ向きの解が一致しない例として有名なのは，行動経済学的な要素 (特に双曲割引) のケースである．また政府の最適政策を考える際も後ろ向きと前向きの解が一致しない場合が数多く出てくる．このような内容は，専門的な内容であるので，初めのうちは「後ろ向きと前向きの解は殆どの場合一致する」と思っておいて良いと思われる．

2.7　様々な効用関数

ここまで解いてきた学生ならば，略解でも理解できると思うので，ここでは式展開や説明を省略して解説する．なお $Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ と恒常所得を書くことにする．

2.7.1　対数

対数効用はスライドと同じため省略．効用関数が $\alpha \log(c)$ のときの解答は $\log c$ のときと変わりないことを確認できていれば良い．ほとんどの解答は次の CRRA の問題と同じであるため，そちらを参考にすると良い．

2.7.2　CRRA

この効用関数

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

を微分すると，

$$\begin{aligned} u'(c) &= c^{-\sigma} > 0 \quad \text{if } c > 0 \\ u''(c) &= -\sigma c^{-\sigma-1} < 0 \quad \text{if } c > 0 \end{aligned}$$

となる．

例えば仮に，分子の -1 を無視して，

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

と効用関数を定義しても，全く同じ限界効用が得られる．

さらに，$\sigma = 1$ のとき，

$$u'(c) = \frac{1}{c}$$

となる．これは対数効用関数の限界効用と一致する．

余談：CRRA 型効用関数と対数効用関数

前問の結果，つまり「$\sigma = 1$ の CRRA 型効用関数と対数効用関数は一致する」という結果は次のようにしても示すことが出来る．まず，次のように指数関数と対数関数を取る演算ができる．

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} = \lim_{\sigma \to 1} \frac{\exp\left((1-\sigma)\log(c)\right) - 1}{1-\sigma}$$

そして，ロピタルの定理 (L'Hopital's rule) を用いると，

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{c^{1-\sigma}(-\log(c))}{-1} = \log(c)$$

となる．

最適化問題は次の通り．

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \ & \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma} \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

これのオイラー方程式は,

$$c_1^{-\sigma} = \beta(1+r)c_2^{-\sigma}$$

となる[*3]．さらに，これを変形すると

$$c_2 = [\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1$$

となる．これを生涯予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} & c_1 + \frac{1}{1+r}[\beta(1+r)]^{1/\sigma} c_1 = Y \\ \Rightarrow \ & \left[1 + \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+r}\right] c_1 = Y \\ \Rightarrow \ & c_1 = \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y \end{aligned}$$

ここで，$Y \equiv y_1 + \frac{y_2}{1+r}$ は恒常所得である．これをオイラー方程式に代入すると，

$$c_2 = \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y$$

さらに予算制約 $c_1 + s = y_1$ より，

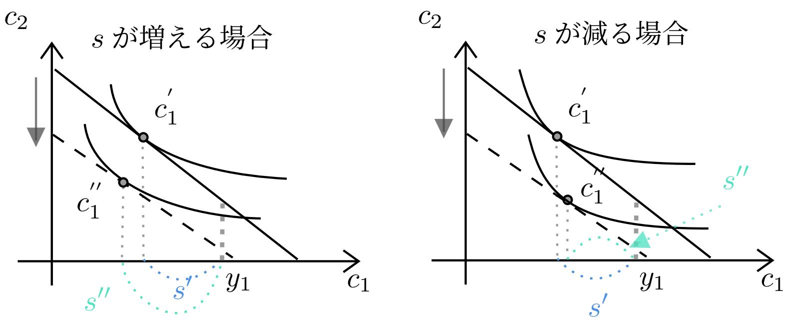
$$s = y_1 - \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} Y$$

と求まる．

次に $\beta(1+r) = 1$ の場合を考える．$\beta(1+r) = 1$ を上で求めた消費関数に代入すると，$c_1 = c_2$ となることが直ちに分かるだろう．

[*3] なお，$\sigma = 1$ のとき，対数効用と同じになることに気付いてほしい．

図 2.1　将来所得が下がったときの貯蓄の変動



注記：どちらの図も y_2 が実線から点線に下がった場合．左図は，c_1' から c_1'' に消費が減少している．代わりに，貯蓄が s' から s'' に増加している．右図は，c_1' から c_1'' に消費が減少している．そのため，貯蓄が s' から s'' に減少している．

一方で，$y_1 = y_2$ であっても，$\beta(1+r) \neq 1$ であるならば，$c_1 \neq c_2$ である．

限界消費性向は，

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} = \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial y_2} = \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}\frac{1}{1+r}$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1} = \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial y_2} = \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}\frac{1}{1+r}$$

である．

最後に実践的な問題として，将来所得 y_2 が減るとき，貯蓄が増えるか減るかを考えてみよう．直感的には，次の二つの効果が考えられる．

- 貯蓄が減る効果：生涯所得が減るのだから，貯蓄も減る
- 貯蓄が増える効果：将来の所得減に備えて，貯蓄が増える

図で描くと，図 2.1 のように描くことができる．

直感的に整理したうえで，実際に計算を確認しよう．CRRA 効用のとき s は以下のとおりである．

$$s = y_1 - \frac{y_1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} - \frac{\frac{y_2}{1+r}}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}$$

これを見ると，y_2 の減少は，s の増加になることが分かる．

コメントおよび問題の主旨：以下の問題を含めて，ここでは計算を繰り返してもらうことで，解くことに慣れてもらうことが最大の目的である．基本的に，このような問題は (1)(代入法で) 一階条件を求める，(2) 予算制約から生涯予算制約を作る，(3) 一階条件を生涯予算制約に代入するという手続きで解くことができる．計算が苦手な人もいるだろうが，経済のような応用分野ではひとつひとつの式変形で「意味が分かるような式」にすると良い．意味が分かるような式変形が出来るようになると，「このモデルならこんな式が得

られるはずだ．よし，実際にそんな式が得られた」と検算ができるようになるし，慣れてくると暗算で済む計算が増えてくる．

また，経済学からの観点からすると，以下の問題も含めてすべての効用関数の下で，消費関数は生涯所得 $Y(\equiv y_1 + y_2/(1+r))$ の関数になっており，y_1 と y_2 は Y を通じてしか影響していないことに気づいてほしい．これはつまり，各期の所得は重要ではなく，所得の総額 (正確には割引現在価値の総和) のみが重要であることを表している．これは恒常所得仮説 (Permanent Income Hypothesis) で言われたことである．

大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足：さらにここでレベルを上げて注目すると，この問題集で出てくる消費関数はすべて生涯所得 Y の線形関数になっている．これは実際のデータでは観察されていないことであり，更なる発展が必要だと指摘されている[*4]．

2.7.3　2 次効用

この効用関数 $u(c) = \alpha c - \frac{\gamma c^2}{2}$ の導関数は

$$
\begin{aligned}
u'(c) &= \alpha - \gamma c > 0 \quad \text{if } \alpha/\gamma \text{ is sufficiently large} \\
u''(c) &= -\gamma < 0
\end{aligned}
$$

である．問題の構成より，α/γ は $u'(c) > 0$ を満たすほど常に大きいとする[*5]．

まず最大化問題は

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1, c_2, s} \ & \alpha c_1 - \frac{\gamma c_1^2}{2} + \beta \left[\alpha c_2 - \frac{\gamma c_2^2}{2} \right] \\
\text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\
& c_2 = y_2 + (1+r)s
\end{aligned}
$$

となる．例えば β を忘れてないことに注意すること．

次に、授業でやったように代入法で解くと、再度代入法で解く

- 予算制約を目的関数に代入する

$$
\max_s \alpha(y_1 - s) - \frac{\gamma(y_1 - s)^2}{2} + \beta \left[\alpha(y_2 + (1+r)s) - \frac{\gamma(y_2 + (1+r)s)^2}{2} \right]
$$

- s について微分して、導関数 $= 0$ を求める

$$
\begin{aligned}
& -[\alpha - \gamma(y_1 - s)] + \beta(1+r)[\alpha - \gamma(y_2 + (1+r)s)] = 0 \qquad (2.1) \\
\Rightarrow \ & [\alpha - \gamma c_1] = \beta(1+r)[\alpha - \gamma c_2] \\
\Rightarrow \ & c_1 = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta(1+r)}{\gamma}[\alpha - \gamma c_2] \\
\Rightarrow \ & c_1 = \frac{\alpha}{\gamma}[1 - \beta(1+r)] + \beta(1+r)c_2
\end{aligned}
$$

この第 2 式がオイラー方程式.

[*4] Ludwig (2019) “Consumption, Savings, and the Distribution of Permanent Income.”

[*5] もし $u'(c) = 0$ を迎える場合，そこで満腹になる (satiation) ようなものと思えばいい．その場合，予算制約が不等号で成り立つ (直観的には満腹なので予算が余っていても気にしない状態) が，そういう場合は難しいかつ経済学的に対して興味深いケースでもないので議論しないのが一般的である．

- これを生涯予算制約に代入する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]+\beta(1+r)c_2+\frac{1}{1+r}c_2=Y\\
&\Rightarrow c_2\left[\beta(1+r)+\frac{1}{1+r}\right]=Y-\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]\\
&\Rightarrow c_2=\frac{1+r}{1+\beta(1+r)^2}\left[Y-\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]\right]
\end{aligned}
$$

これを (2.1) の 4 番目の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c_1&=\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]+\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta(1+r)^2}\left[Y-\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]\right]\\
&=\frac{\beta(1+r)^2}{1+\beta(1+r)^2}Y+\frac{1}{1+\beta(1+r)^2}\frac{\alpha}{\gamma}[1-\beta(1+r)]
\end{aligned}
$$

- $\beta(1+r)=1$ のとき，

$$
c_1=c_2=\frac{1+r}{2+r}Y
$$

となることが分かる．

- 限界消費性向については，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial y_1}&=\frac{\beta(1+r)}{1+\beta(1+r)^2}\\
\frac{\partial c_1}{\partial y_2}&=\frac{\beta}{1+\beta(1+r)^2}\\
\frac{\partial c_2}{\partial y_1}&=\frac{1+r}{1+\beta(1+r)^2}\\
\frac{\partial c_2}{\partial y_2}&=\frac{1}{1+\beta(1+r)^2}
\end{aligned}
$$

となる．

コメント及び問題の主旨：二次効用関数はとても重要なケースである[*6]．

なお、$\beta(1+r)=1$ とは、一期間消費を我慢する分の効用の費用 β と一期間消費を我慢することで得られる利息 $1+r$ がちょどう同じになる状態であり、マクロ経済学ではよく登場する環境である．

大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足：二次効用関数の大きな特徴は、一度微分すると、線形になることです．そのため、無限期間の問題や複雑な所得過程を仮定しても解析解が得られるとても便利なケースです．現代的には限界消費性向等がマクロの政策の効果決定づける上でとても重要な変数であることが知られていますが、二次効用関数がベンチマークになることは多々あります．サーベイとして、Jappelli and Pistaferri(2010ARE)“The Consumption Response to Income Changes” は (前半の方だけでも) 一読の価値が高いと思います．

[*6] 一方で、残念ながら大学院の授業でも時間の都合で省略されてしまっている．しかし、とても伝統がある効用関数であり、とても重要なベンチマークである．

2.7.4　CARA 型効用関数

この効用関数 $u(c) = -\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c)$ の導関数は

$$\begin{aligned} u'(c) &= \exp(-\gamma c) > 0 \quad \text{if } c > 0 \\ u''(c) &= -\gamma \exp(-\gamma c) < 0 \end{aligned}$$

である．

まず最大化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2, s} \quad & -\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c_1) - \beta\frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma c_2) \\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1 \\ & c_2 = y_2 + (1+r)s \end{aligned}$$

となる．

オイラー方程式は次の第 1 式である．

$$\begin{aligned} & \exp(-\gamma c_1) = \beta(1+r)\exp(-\gamma c_2) && (2.2) \\ & \Rightarrow -\gamma c_1 = \log(\beta(1+r)) - \gamma c_2 && (\because \text{両辺対数を取っている}) \\ & \Rightarrow c_2 = c_1 + \frac{1}{\gamma}\log(\beta(1+r)) \end{aligned}$$

これを生涯予算制約に代入すると，

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{1}{1+r}\left[c_1 + \frac{1}{\gamma}\log(\beta(1+r))\right] &= Y \\ \Rightarrow \ c_1\frac{2+r}{1+r} &= Y - \frac{1}{\gamma(1+r)}\log(\beta(1+r)) \\ \Rightarrow \ c_1 &= \frac{1+r}{2+r}Y - \frac{1}{\gamma(2+r)}\log(\beta(1+r)) \end{aligned}$$

と c_1 を得る．これを (2.2) 式の 3 番目の式に代入すると，

$$c_2 = \frac{1+r}{2+r}Y + \frac{1+r}{\gamma(2+r)}\log(\beta(1+r))$$

となる．

限界消費性向は，

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{2+r} \\ \frac{\partial c_1}{\partial y_2} &= \frac{1}{2+r} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_1} &= \frac{1+r}{2+r} \\ \frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{1}{2+r} \end{aligned}$$

となる．ここで，y_1 の変化は c_1 と c_2 に同じように影響する事が分かる．また y_2 も同様に c_1 と c_2 に同様に影響する．

コメント及び問題の主旨：CARA 型効用関数は有名な効用関数ですが、それほどマクロ経済学では使われてこなかったように思います (資産価格分野では使われているかも)[*7]．ややマニアックな問題ではありますが、大学院等を目指す方は一度経験しておくと役に立つと思い出題しました．

大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足：CARA 型効用も解析解が得られる稀有な効用関数の例です．例えば近年であれば、Acharya and Dogra (2020 Econometrica) “Understanding HANK: Insights from a PRANK” 等といった最新の研究でも使われています．

日本の大学院生となる場合、即座に結果が出るような分析をすることが (欧米で PhD を取る人たちと比べて) 重要です．その場合、「データ分析」や数値計算の習熟には時間がかかりやすいため、解析解がある場合に習熟するのは一つの良い生存戦略と思います (他にも生存戦略はあるでしょうが).

2.8　財政政策

これを真正面から解いてもよいが，次のようなショートカットも不可能ではない．つまり，

$$\underbrace{y_1}_{\text{スライドの } y_1} = \underbrace{y_1 - G_1}_{\text{問題の } y_1}$$
$$\underbrace{y_2}_{\text{スライドの } y_2} = \underbrace{y_2 - G_2}_{\text{問題の } y_2}$$

とみなすことで，スライドの情報を消費関数をそのまま使うことが出来る．つまり，

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r}\right]$$
$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\beta}\left[y_1 - G_1 + \frac{y_2 - G_2}{1+r}\right]$$

となる．この解に不安を感じる方は真面目に最適化問題を解いてみてほしい．

限界消費性向は，y_1, y_2 の限界消費性向の符号を変更するだけで良い．つまり，

$$\frac{\partial c_1}{\partial G_1} = -\frac{1}{1+\beta}$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial G_2} = -\frac{1}{(1+\beta)(1+r)}$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial G_1} = -\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial G_2} = -\frac{\beta}{1+\beta}$$

となる．このように，財政支出 G_1, G_2 の増加は消費の減少をもたらす．

[*7] おそらくこの理由は，オイラー方程式が $c_2 = c_1 +$ 利子率と割引率 という形になるために思います．この形の場合，消費に成長・変動が出てきづらいのが，マクロ経済の説明には使いにくい原因に感じます．

3　発展：課税政策の分析

3.1　消費税１

1. 1 期と 2 期の予算制約はそれぞれ，
$$(1+\tau_1)c_1 + s = y_1$$
$$(1+\tau_2)c_2 = (1+r)s + y_2$$
である．
2. 生涯予算制約は，2 つの予算制約を組み合わせると導出できる．例えば，2 期目の予算制約の両辺を $(1+r)$ で割り，
$$\frac{1+\tau_2}{1+r}c_2 = s + \frac{1}{1+r}y_2$$
とし，これを 1 期目の予算制約に足すと，
$$(1+\tau_1)c_1 + \frac{1+\tau_2}{1+r}c_2 = y_1 + \frac{1}{1+r}y_2$$
となる．
3. 最大化問題を解くことで，オイラー方程式を得ることが出来る．例えば，予算制約を目的関数に代入すると，
$$\max_s u\left(\frac{y_1 - s}{1+\tau_1}\right) + \beta u\left(\frac{y_2 + (1+r)s}{1+\tau_2}\right)$$
となる．これを s について微分して 0 を解くと，
$$\frac{u'(c_1)}{1+\tau_1} = \beta\frac{1+r}{1+\tau_2}u'(c_2)$$
$$\Rightarrow u'(c_1) = \beta(1+r)\frac{1+\tau_1}{1+\tau_2}u'(c_2)$$
となる．これがオイラー方程式である．
4. 対数効用関数の場合，オイラー方程式は，
$$\frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1+\tau_1}{1+\tau_2}\frac{1}{c_2}$$
$$\Rightarrow c_2 = \beta(1+r)\frac{1+\tau_1}{1+\tau_2}c_1$$
となる．これを生涯予算制約に代入すると，
$$(1+\tau_1)c_1 + (1+\tau_1)\beta c_1 = Y$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{(1+\tau_1)(1+\beta)}Y$$
と 1 期の消費関数が求まる．
これをオイラー方程式に代入すると 2 期の消費関数が求まる．2 期の消費関数は，
$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\tau_2}Y$$
となる．

5. $\tau_1 = 0$ と置くと，

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta}Y$$
$$c_2 = \frac{\beta(1+r)}{1+\tau}Y$$

となる．つまり，1 期の消費は，2 期目の消費税率から無関係に決まることが分かる．
これはつまり，2 期目に増税 $(0 \to \tau)$ が起こると分かっているが，家計は駆け込み需要を行わないことを表している．この理由は対数効用感が原因である．対数効用関数は所得効果と代替効果がちょうど相殺されるような効用関数である．したがって，「$(1+\tau)$ のせいで 1 期の財の方が安いため，c_1 を増やす効果 (代替効果)」と「$(1+\tau)$ のせいで実質的に所得が下がり，c_1 が減る効果 (所得項)」が全く同じだけ効く．そのために，駆け込み需要が生じない．

6. CRRA 型のときオイラー方程式は,

$$c_1^{-\sigma} = \beta(1+r)\frac{1}{1+\tau}c_2^{-\sigma}$$
$$\Rightarrow c_2 = \left[\beta\frac{1+r}{1+\tau}\right]^{\frac{1}{\sigma}} c_1$$

となる．これを生涯予算制約に代入すると,

$$c_1\left[1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}\left[\frac{1+r}{1+\tau}\right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right] = Y$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}\left[\frac{1+r}{1+\tau}\right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}Y$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{(1+\tau)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}+\beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}$$

となる．
τ が変化したときに，c_1 が増えるか減るかは直ちに自明ではない．これを正確に計算するために，導関数を計算する．記法の簡便化のために，$\Delta(\tau) \equiv 1+\beta^{\frac{1}{\sigma}}\left[\frac{1+r}{1+\tau}\right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} > 0$ と定義すると,

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = \frac{Y}{\Delta(\tau)^2}\left[-\Delta'(\tau)\right]$$
$$\text{where } \Delta'(\tau) = \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\frac{1-\sigma}{\sigma}\left[\frac{1}{1+\tau}\right]^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}\frac{-1}{(1+\tau)^2}$$

である．1 行目の偏導関数の符号は $\Delta'(\tau)$ の符号が分かれば分かる．そして，この $\Delta'(\tau)$ の符号は次のように整理できる．

- もし $\sigma > 1$ ならば，$\Delta'(\tau) > 0$
- もし $\sigma = 1$ ならば，$\Delta'(\tau) = 0$
- もし $\sigma < 1$ ならば，$\Delta'(\tau) < 0$

したがって,

- もし $\sigma > 1$ ならば，$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} < 0$
  すなわち，$\sigma > 1$ のとき，増税する $(0 \to \tau)$ と家計は 1 期目の消費を減らす．言い換えると，駆け込み需要とは逆のことが起きる．これは代替効果よりも所得効果が強く働いていることを意味する．

- もし $\sigma = 1$ ならば，$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = 0$
  すなわち，$\sigma = 1$ のとき，増税する $(0 \to \tau)$ しても家計は 1 期目の消費は変化しない．これは前問と同じケースである．
- もし $\sigma < 1$ ならば，$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} > 0$
  すなわち，$\sigma < 1$ のとき，増税する $(0 \to \tau)$ と家計は 1 期目の消費を増やす．これはまさに駆け込み需要である．言い換えると，代替効果の方が所得効果よりも強く働いていることを意味する．

と整理できる．
解説として補足しよう．CRRA 効用関数のとき σ は効用関数の曲率（曲がる度合い）を表している．σ が高ければ高いほど，効用関数の曲率は高くなり，その場合，家計は消費の平準化を望むようになる．σ が高いときには，将来の増税があろうと，消費の平準化動機の方が強いために，c_1 を増やすような駆け込み需要は行わない．逆に σ が 1 よりも低いような場合，家計は消費の平準化動機がとても弱く，将来の増税によって c_1 が割安であることが重要になる．

コメント及び問題の主旨：この問題は 3 つの狙いがある．第一に，課税の分析である．第二に，消費増税に対する駆け込み需要という例を，所得効果・代替効果に分離して分析してもらう事である．第三に，CRRA 効用関数のパラメータ σ と所得効果・代替効果の関係を理解してもらうことである．

このように，モデルを正しく理解していくと，「どのような政策実験があれば，モデルのパラメータを知ることができるか」という考え方も出来てくるようになる．そして，パラメータを正しく知ることが出来れば，モデルを用いて仮想的な実験をして，定量的な答えを導くことが出来るようになる．

4　3期間モデル

2 期間モデルと $T > 2$ 期間モデルで異なる点は，資産量と貯蓄額の区別をしなければならない点である．その点を最初の問題で考えてもらっている．

答えから書くと，ここの s は資産量である．なぜなら，貯蓄 (額) とは「所得から消費を差し引くことによって次期に持ち越す財の量」なので，$t = 2$ の貯蓄は，

$$\underbrace{s_2 - s_1}_{\text{貯蓄}} = \underbrace{rs_1 + y_2}_{\text{利子所得 + 外生的な所得}} - c_2$$

である．

2 期間モデルの場合は，そもそも予算制約の左辺にも右辺にも s_{t+1} と s_t が登場するということはなかった．そのため，貯蓄と資産が同じものになっていた．例えば分かりやすいように (バカバカしいほど) 単純な例を考える．利子率を 0 とする．今日 0 円持っている人 (資産 0 円の人) を考える．この人の明日の資産が 10 万円になった場合，10 万円貯蓄したということであり，10 万円の資産を持つということでもある．2 期間モデルではこのように最初の資産の保有量が 0 になっていたせいで，貯蓄と資産を同一視していた．言い換えると，貯蓄はフローの概念であり，資産はストックの概念である．勘違いしやすい点なので，気を付けてほしい．

最大化問題は,

$$\begin{aligned}
\max_{c_1,c_2,c_3,s_1,s_2} \quad & \log(c_1) + \beta\log(c_2) + \beta^2\log(c_3) \\
\text{s.t. } & c_1 + s_1 = y_1 \\
& c_2 + s_2 = y_2 + (1+r)s_1 \\
& c_3 = y_3 + (1+r)s_2
\end{aligned}$$

である．予算制約を目的関数に代入すると,

$$\max_{s_1,s_2} \log(y_1 - s_1) + \beta\log(y_2 + (1+r)s_1 - s_2) + \beta^2\log(y_3 + (1+r)s_2)$$

である．この一階の条件は,

$$\begin{aligned}
s_1 : \frac{1}{y_1 - s_1} &= \frac{\beta(1+r)}{y_2 + (1+r)s_1 - s_2} \\
s_2 : \frac{\beta}{y_2 + (1+r)s_1 - s_2} &= \frac{\beta^2(1+r)}{y_3 + (1+r)s_2}
\end{aligned}$$

である．これを見ると，(s_1, s_2) という 2 つの未知の変数に対して，2 本の方程式があるので，(s_1, s_2) はこれを解けば求まることが判断できる．

しかし，非線形方程式を解くのは面倒なので，そのような計算手順を取らないことにする．まず予算制約を一階条件に代入すると，それぞれの一階の条件は,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_1} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_2} \\
\frac{1}{c_2} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_3}
\end{aligned}$$

と，それぞれオイラー方程式であることが分かる．このオイラー方程式は消費の成長を表しており,

$$\begin{aligned}
c_2 &= \beta(1+r)c_1 \\
c_3 &= \beta(1+r)c_2
\end{aligned}$$

とも書き直すことができる．

つぎに 3 期と 2 期の予算制約を 1 期の予算制約に代入すると，次のような生涯予算制約を得ることが出来る．

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+r)} + \frac{c_3}{(1+r)^2} = y_1 + \frac{y_2}{(1+r)} + \frac{y_3}{(1+r)^2} \equiv Y$$

なお，表記を単純化するために生涯所得の割引現在価値を Y とした．これに消費の成長の式を代入すると,

$$\begin{aligned}
& c_1 + \frac{c_1\beta(1+r)}{(1+r)} + \frac{c_1\beta^2(1+r)^2}{(1+r)^2} = Y \\
\Rightarrow \quad & c_1\left[1 + \beta + \beta^2\right] = Y \\
\Rightarrow \ & c_1 = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y
\end{aligned}$$

と求まる．これを消費の成長の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta^2}Y \\
c_3 &= \frac{\beta^2(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2}Y
\end{aligned}
$$

と消費関数が求まる．

貯蓄関数は，消費関数を予算制約に代入することで求まる．つまり，1 期の予算制約を使って，

$$
\begin{aligned}
s_1 &= y_1 - c_1 \\
&= y_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y
\end{aligned}
$$

および，3 期の予算制約を使って，

$$
\begin{aligned}
s_2 &= \frac{c_3 - y_3}{1+r} \\
&= \frac{\beta^2(1+r)}{1+\beta+\beta^2}Y - \frac{y_3}{1+r}
\end{aligned}
$$

と求まる．これで消費関数と貯蓄関数が求まった．

最後に限界消費性向を計算する．準備として，

$$
\frac{\partial Y}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_2} = \frac{1}{1+r}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_3} = \frac{1}{(1+r)^2}
$$

をおさえておく．これを使って，消費関数の偏導関数を求めると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial y_1} &= \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\frac{\partial Y}{\partial y_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2} \\
\frac{\partial c_2}{\partial y_2} &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta^2}\frac{\partial Y}{\partial y_2} = \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \\
\frac{\partial c_3}{\partial y_3} &= \frac{\beta^2(1+r)^2}{1+\beta+\beta^2}\frac{\partial Y}{\partial y_3} = \frac{\beta^2}{1+\beta+\beta^2}
\end{aligned}
$$

と求まる．

例えば，2 期間モデルの限界消費性向 $\partial c_1/\partial y_1$ は $1/(1+\beta)$ であった．したがって，3 期間モデルの限界消費性向のほうが小さい．$\partial c_2/\partial y_2$ に関しても同様である．

現実的な意味については，例えば，3 期間モデルは余命がより長いという意味で，若者，2 期間モデルは老人のように解釈できる．したがって，若者のほうが，限界消費性向が低いということが考えられる．

コメントおよび問題の主旨： 3 期間のモデルが解ければ，一般に $T > 2$ 期間のモデルも解くことが出来るようになるでしょう．例えば $T = 60$ 年とすれば，「成人した 20 歳から 80 歳まで」のモデルとして，このモデルを解釈できるようになります．そのようにすれば，より現実的な分析が出来るようになるでしょう．

またこの 3 期間のモデルを 2 期間のモデルと比べることは，若者と老人の理論的な消費行動を理解するためにも重要である．このモデルから，「若者のほうが限界消費性向が低い」ことが示唆された．このような示唆は，データによって検証可能な含意 (testable implication) である．このような検証可能な含意の形を得ることで，実証によってモデルをテストすることが可能になる．

大学院を目指すような上級の内容に興味がある学生用の補足：経済学的に踏み込んだコメントをすると，2期間モデルと3期間モデルの限界消費性向を比べると，2期間モデルの限界消費性向のほうが大きいことが分かります．このように，「短い期間のモデルほど，限界消費性向が高く出る」傾向があります．授業でも述べたように，限界消費性向は重要な指数なので，どのようなモデルを作るかによって，得られる限界消費性向が変わることは重要な教訓です[*8].

[*8] 大学院では $T = \infty$ という家計が無限期間生きると仮定するモデルを学びます．$T = \infty$ という仮定はとても非現実的ですが，数学的に便利な手法を使え，分析が簡単になります．ただ，このような無限期間生存モデルを使うと，限界消費性向が低くなりやすいということは覚えておいても良いでしょう．