基礎マクロ練習問題の**解答例**：IS-LM モデル

日野将志 *

1 IS-LM

1.1 金融政策

マクロ経済は，以下の方程式で表される．

$$
\begin{aligned}
&Y = C + I && (1.1)\\
&C = 50 + 0.8Y && (1.2)\\
&I = 40 - 100r && (1.3)\\
&L = 300 && (1.4)\\
&L = 1.2Y - 400r && (1.5)
\end{aligned}
$$

- IS 曲線は (1.1), (1.2), (1.3) 式から得られる．

$$
\begin{aligned}
&Y = 50 + 0.8Y + 40 - 100r\\
&\Rightarrow 100r = 90 - 0.2Y\\
&\Rightarrow r = 0.9 - 0.002Y
\end{aligned}
$$

  なお，IS 曲線は r を縦軸に描くので，それと一貫性があるように r について解いておくことが望ましい．

- LM 曲線は (1.4)，(1.5) 式から得られる．

$$
\begin{aligned}
&300 = 1.2Y - 400r\\
&\Rightarrow r = 0.003Y - 0.75
\end{aligned}
$$

- 均衡における (Y, r) は,

$$(Y, r) = (330, 0.24)$$

  である．

- これは，M を一般に置いて，dY/dM を解くのでも良いし，$M = 301$ として再度，連立方程式を解いても良い．数値的に解くと,

$$Y = 330.5$$

  となる．すなわち，M を 1 単位増やしたことで，0.5 単位 Y が増えている．

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

これの波及メカニズムは次のようなものである．まず中央銀行が M を増やすと，貨幣の需給条件

$$L(Y,r)=M/p$$

より，次のように 2 つの経路で影響を受ける．家計からすると，取引に必要以上の貨幣を持つことになる．

- 取引増加：手持ちの貨幣が増えたので，取引を増やす．これが Y を増やす．
- 利子率低下と投資刺激：資産を貨幣ではなく金融資産に預け入れる．これが金融資産のリターン r を引き下げる．この利子率の低下が投資を刺激する．

コメントおよび問題の主旨：IS-LM の計算問題は資格試験や公務員試験等，経済学を使うような試験で高い確率で一問は出るような典型問題と思われる．そのような資格試験等に関心のある学生は良く練習しておくと良いと思う．

また，意欲的な学部生からすると IS-LM はしょせん連立方程式なのでつまらないかもしれない．例えば，これらを行列で解いたり，簡単な計算ソフトウェア (python, matlab, R 等々) で解いてみたりしても良いかもしれない．

例えば，matlab のコードだとこんな感じが一例である．

```
clc
clear

x0=100*ones(5,1); % this line is preparetion
fun=@ISLM; % the line here defines the function in the main code
x_sol=fsolve(fun,x0)  % the line here solves the system of the equations.

function F=ISLM(x)
% this part defines the function which is named ISLM.
% x(1): C
% x(2): Y
% x(3): I
% x(4): r
% x(5): L

F(1)=50+0.8*x(2)-x(1); % C=50+0.8Y
F(2)=40-100*x(4)-x(3); % I=40-100r
F(3)=x(1)+x(3)-x(2); % Y=C+I
F(4)=300-x(5);
F(5)=1.2*x(2)-400*x(4)-x(5);
end
```

1.2 財政政策 1

- IS 曲線は次のとおり

$$r=1.1-0.002Y$$

- LM 曲線は上の問題と同じ．
- 均衡における (Y,r) は

$$(Y,r)=(370,0.36)$$

である．

- もし $G = 21$ となると，$Y = 372$ となる．つまり，G が一単位増えると，Y は 2 単位増えている．微分を用いて計算する場合でも，$dY/dG = 2$ となることが確認できる．
- ケインジアン・クロスで学んだ乗数効果は，

$$\left.\frac{dY}{dG}\right|_{r=\bar{r}} = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-0.8} = 5$$

であった[*1]．つまり，G が 1 単位増えると Y は 5 単位増える．結果的に，実際には 2 しか増えていないので，3 単位分はクラウディング・アウトしてしまったことがわかる．
- $G = 100$ のとき，Y は 530 である．また $G = 101$ のとき，$Y = 532$ である．つまり，100 から 101 への 1 単位の G の増加であっても，やはり $dY/dG = 2$ である．なお，これは数学的には，(IS-LM) モデルが線形性から生じると言える．
- これも計算すれば分かる．もしくは，計算せずとも，数学的には線形方程式を考えているだけなので，G の増加分が 5 倍になれば Y の増加分も 5 倍になることが分かる．

1.3　財政政策 2

- IS 曲線は，次のように得られる．

$$\begin{aligned} &Y = 50 + 0.8(Y - 10) + 40 - 100r + 20 \\ &\Rightarrow r = 1.02 - 0.002Y \end{aligned}$$

- LM 曲線は前の問題と同じ．
- $(Y, r) = (354, 0.312)$
- 前問と同様，Y は 2 だけ増える．
- $T = 9$ としたとき，Y は 1.6 だけ増えることが分かる．
- 租税乗数は，

$$\left.\frac{dY}{dT}\right|_{r=\bar{r}} = -\frac{c}{1-c} = -\frac{0.8}{0.2} = -4$$

である．したがって，r が動いてしまうことによるクラウディング・アウトは $4 - 1.6 = 2.4$ であることが分かる．

コメントおよび問題の主旨：減税を通じた財政政策の効果を検討することがこの問題の主旨である．この計算問題では，(ケインジアン・クロスと同様に，)Y を増やすには財政政策のほうが減税よりも効果的であることが分かる．

なお，例えば，アメリカのコロナ禍の特別給付金はコロナ減税 (coronavirus tax relief) 等と言われ，法律上，減税の形態をとっている (はずである)．このような給付金の配布はアメリカでは日本よりも多いと思われる (07 年頃からリーマン危機時も 2 回行われた)．近年のマクロ経済学者の中でも，財政政策よりも減税の方が支援されている傾向が強まっているように思う．

[*1] $\left.\frac{dY}{dG}\right|_{r=\bar{r}}$ は「利子率 r が $\bar{r}$ の水準で固定されているときの，dY/dG」という意味である．

1.4　財政政策 3

- IS 曲線は,

$$
\begin{aligned}
&Y = 50 + 0.8(Y - 20) + 40 - 100r + 20 \\
&\Rightarrow r = 0.94 - 0.002Y
\end{aligned}
$$

- LM 曲線は前問と変わらない.
- $(Y, r) = (338, 0.264)$
- $G = T$ を 1 単位引き上げると，$Y = 338.4$ になる．つまり,

$$
\left.\frac{dY}{dG}\right|_{G=T} = 0.4 < 1
$$

  である．これは今期に増税と同時に財政出動をしても，財政出動以下の効果しか見込めないことを示している.

コメントおよび問題の主旨：これは増税のタイミングによって，財政政策の効果が大きく変わることを確認する問題である.

1.5　流動性の罠 1

流動性の罠とは，LM 曲線が水平になるような状態である．したがって，LM 曲線が $dr/dY = 0$ となる.

1.6　流動性の罠 2

- この IS 曲線は $r = 1.1 - 0.002Y$
- このときの LM 曲線は,

$$
\begin{aligned}
&300 = 300 - 400r \\
&\Rightarrow \ r = 0.0
\end{aligned}
$$

  である.
- $(Y, r) = (550, 0.0)$
- $Y = 555$ となる．つまり，$dY/dG = 5$ である.
- 乗数効果は 5 である．したがって，流動性の罠では，一切クラウディング・アウトが起きていない.
- $r = 0$ より下がらないので，金融政策は一切の効果がない.

2　動学的 IS-LM

2.1　財政金融政策

- オイラー方程式は

$$
C_2 = C_1\beta(1 + r)
$$

である．これを予算制約に代入すると，

$$
\begin{aligned}
C_1 + \frac{C_1\beta(1+r)}{(1+r)} &= Y_1 - \tau_1 + \pi + \frac{Y_2-\tau_2}{1+r} \\
\Rightarrow\ C_1 &= \frac{1}{1+\beta}\left[Y_1 - \tau_1 + \pi + \frac{Y_2-\tau_2}{1+r}\right] \\
\Rightarrow\ C_1 &= \frac{1}{2}\left[Y_1 - \tau_1 + \pi + \frac{Y_2-\tau_2}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

また，1 期の予算制約を解くと，

$$
\begin{aligned}
s &= Y_1 - \tau_1 - \frac{1}{2}\left[Y_1 - \tau_1 + \pi + \frac{Y_2-\tau_2}{1+r}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[Y_1 - \tau_1 + \pi - \frac{(Y_2-\tau_2)}{1+r}\right]
\end{aligned}
$$

- 企業の最大化問題を解くと，

$$
\begin{aligned}
&K_2^{-0.5} = 1 \\
\Rightarrow\ &\frac{1}{K_2^{0.5}} = 1 \\
\Rightarrow\ &K_2 = 1
\end{aligned}
$$

これより，$I = 1$ と $Y_2 = 2 \times 1^{0.5} = 2$ である．したがって，$\pi = 1$ も得られる．

- オイラー方程式と財市場の均衡条件より，

$$
\begin{aligned}
&(Y_2 - G_2) = \beta(1+r)(Y_1 - I - G_1) \\
\Rightarrow\ &(2 - G_2) = \beta(1+r)(Y_1 - G_1 - 1) \\
\Rightarrow\ &r = \frac{2-G_2}{Y_1 - G_1 - 1} - 1
\end{aligned}
$$

- $I = S$ を解くと，

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\left[Y_1 - G_1 + \pi - \frac{Y_2 - G_2}{1+r}\right] && (\because \text{政府の予算制約}) \\
&\Rightarrow 2 - (Y_1 - G_1 + 1) = -\frac{Y_2-G_2}{1+r} \\
&\Rightarrow r = \frac{2-G_2}{Y_1-G_1-1} - 1
\end{aligned}
$$

このように，$I = S$ と家計，企業の最大化条件からも同様の IS 曲線が導けることが分かる．

- IS 曲線を全微分することで，求まる．

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{-(2-G_2)}{(Y_1-G_1-1)^2}dY_1 + \frac{(2-G_2)}{(Y_1-G_1-1)^2}dG_1 \\
\Rightarrow\ &\frac{dY_1}{dG_1} = 1
\end{aligned}
$$

コメント：このように，二期間の最大化問題に基づいたとき，乗数的な効果 $(dY_t/dG_t > 1)$ が出てくることは難しい．

- LM 曲線は簡単に求まる．

$$r = Y_1 - 121/40$$

- IS 曲線と LM 曲線はそれぞれ,

$$r = \frac{2}{Y_1 - 1} - 1$$
$$r = Y_1 - 121/40$$

なので,

$$\frac{2}{Y_1 - 1} - 1 = r = Y_1 - 121/40$$

これを解くと,

$$Y \approx 3.0167 \approx 3$$
$$r \approx 0.0084$$

となる．