

基礎マクロ練習問題の解答例：一般均衡

日野将志 *

1 動学的な純粋交換経済

1.1 2 人の場合

1.1.1 対数効用の計算問題 1

配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ であり，価格は r である．

競争均衡は，以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 r の組である．

- 家計 A の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A \\ \text{s.t.} \quad & c_1^A + s^A = 2 \\ & c_2^A = (1+r)s^A \end{aligned}$$

- 家計 B の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad & \log c_1^B + \beta \log c_2^B \\ \text{s.t.} \quad & c_1^B + s^B = 0 \\ & c_2^B = (1+r)s^B + 2\beta \end{aligned}$$

- 市場均衡条件

$$\begin{aligned} c_1^A + c_1^B &= 2 \\ c_2^A + c_2^B &= 2\beta \\ s^A + s^B &= 0 \end{aligned}$$

なお，予算制約を生涯予算制約

$$c_1^i + \frac{c_2^i}{1+r} = y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}$$

で書いても問題ない．

それではそれぞれの家計 i の効用最大化問題の解き方はすでに学んだ．つまり，予算制約を効用関数に代入して微分すればよい．この一階の条件は，一旦家計のインデックスを落として記述すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} &= \beta(1+r)\frac{1}{c_2} \\ \Rightarrow c_2 &= \beta(1+r)c_1 \end{aligned}$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

である。これを予算制約に代入すると、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right] \\ c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right] \\ s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} (c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{2}{1+\beta}, \frac{2\beta(1+r)}{1+\beta}, \frac{2\beta(1+r)}{(1+\beta)(1+r)} \right) \\ (c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2\beta}{(1+\beta)(1+r)}, \frac{2\beta^2}{1+\beta}, \frac{-2\beta}{(1+\beta)(1+r)} \right) \end{aligned}$$

が最適化の解である。

最後に市場均衡条件を確認する。例えば 1 期の財市場の均衡条件にこの結果を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+\beta} + \frac{2\beta}{(1+\beta)(1+r)} &= 2 \\ \Rightarrow 1 + \frac{\beta}{1+r} &= 1 + \beta \\ \Rightarrow \beta &= \beta(1+r) \\ \Rightarrow r &= 0 \end{aligned}$$

となる。つまり、均衡金利は $r = 0$ と定まる。

なお、これは 2 期目の財市場均衡条件や資産市場の均衡条件からも同じように求められる。確認として同様に計算しよう。まず 2 期目の財市場条件に家計の消費関数を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2\beta(1+r)}{1+\beta} + \frac{2\beta^2}{1+\beta} &= 2\beta \\ \Rightarrow (1+r) + \beta &= 1 + \beta \\ \Rightarrow r &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

資産市場の場合、

$$\begin{aligned} \frac{2\beta(1+r)}{(1+\beta)(1+r)} + \frac{-2\beta}{(1+\beta)(1+r)} &= 0 \\ \Rightarrow (1+r) - 1 &= 0 \\ \Rightarrow r &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

このように均衡価格は $r = 0$ と求まった。

最後に均衡配分を求めるためには、この $r = 0$ を消費関数に代入すればいい。すると、

$$\begin{aligned}(c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{2}{1+\beta}, \frac{2\beta}{1+\beta}, \frac{2\beta}{(1+\beta)} \right) \\ (c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2\beta}{(1+\beta)}, \frac{2\beta^2}{1+\beta}, \frac{-2\beta}{(1+\beta)} \right)\end{aligned}$$

と均衡配分が求まる。

コメントおよび問題の主旨：均衡の計算に慣れるための練習である。なお、この手の 2 期間の純粋交換経済の計算問題は大学院入試で頻出だと思われる（例えば京大令和 2 年度等）

1.1.2 対数効用の計算問題 2

配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ であり、価格は r である。

競争均衡は、以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 r の組である。

- 家計 A の効用最大化：

$$\begin{aligned}\max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A \\ \text{s.t.} \quad & c_1^A + s^A = 1 \\ & c_2^A = (1+r)s^A + 1\end{aligned}$$

- 家計 B の効用最大化：

$$\begin{aligned}\max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad & \log c_1^B \\ \text{s.t.} \quad & c_1^B + s^B = 1 \\ & c_2^B = (1+r)s^B + 1\end{aligned}$$

- 市場均衡条件

$$\begin{aligned}c_1^A + c_1^B &= 2 \\ c_2^A + c_2^B &= 2 \\ s^A + s^B &= 0\end{aligned}$$

なお、予算制約を生涯予算制約

$$c_1^i + \frac{c_2^i}{1+r} = y_1^i + \frac{y_2^i}{1+r}$$

で書いても問題ない。

家計の問題を解くと、

$$\begin{aligned}(c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{2+r}{1+\beta}, \frac{\beta(2+r)}{1+\beta}, \frac{\beta(1+r)-1}{(1+\beta)(1+r)} \right) \\ (c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2+r}{1+r}, 0, \frac{-1}{1+r} \right)\end{aligned}$$

を得る。

先ほどの問題と同様に、これらの消費関数もしくは貯蓄関数を財市場や資産市場の均衡条件に代入すると、

$$r = \frac{2}{\beta}$$

を得る。

これを家計の最適化の解に代入すると、均衡配分が求まる。

$$\begin{aligned}(c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{2}{2+\beta}, 2, \frac{\beta}{2+\beta} \right) \\ (c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2(1+\beta)}{2+\beta}, 0, \frac{-\beta}{2+\beta} \right)\end{aligned}$$

1.1.3 対数効用の計算問題 3

配分および均衡の定義は省略する。

二人の消費関数および貯蓄関数は、

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right] \\ c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right] \\ s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)}\end{aligned}$$

となる。

これまでと同様に、消費関数か貯蓄関数を市場の均衡条件に代入すれば、利子率が求まる。例えば貯蓄関数を資産市場の均衡条件に代入すると、

$$\begin{aligned}2 \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} &= 0 \\ \Rightarrow \beta(1+r)y_1 - y_2 &= 0 \\ \Rightarrow r &= \frac{y_2}{\beta y_1} - 1\end{aligned}$$

となる。

これを消費関数と貯蓄関数に代入すると、

$$\begin{aligned}c_1 &= y_1 \\ c_2 &= y_2 \\ s &= 0\end{aligned}$$

となる。つまり、今期の所得を今期消費し、一切貯蓄を行わないような行動が最適な行動になる。

なお、 $y_1 = y_2 \equiv y$ のとき、

$$r = \frac{1}{\beta} - 1$$

となる。さらに、 $c_1 = c_2 = y$ となる。

コメントおよび問題の主旨：この問題では、選好や所得が全く同じ個人が複数いる場合、取引が起きないことを示している問題である。つまり、対偶をとって言い換えれば、取引が起こるならば、選好か所得が異なる個人が経済にいるということを示している。

このように直観的に当たり前の結果をモデルは綺麗に描写出来る。

1.2 3 人の場合

競争均衡の定義は次のとおり。配分は $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B, c_1^C, c_2^C, s^C)$ であり、価格は r である*1。競争均衡は、以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B, c_1^C, c_2^C, s^C)$ と価格 r の組である。

- 家計 A の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^A, c_2^A, s^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A \\ \text{s.t.} \quad & c_1^A + s^A = 1 \\ & c_2^A = (1+r)s^A \end{aligned}$$

- 家計 B の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^B, c_2^B, s^B} \quad & \log c_1^B \\ \text{s.t.} \quad & c_1^B + s^B = 0 \\ & c_2^B = (1+r)s^B + 2 \end{aligned}$$

- 家計 C の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^C, c_2^C, s^C} \quad & \log c_1^C + \beta \log c_2^C \\ \text{s.t.} \quad & c_1^C + s^C = 2 \\ & c_2^C = (1+r)s^C + 1 \end{aligned}$$

- 市場均衡条件

$$\begin{aligned} c_1^A + c_1^B + c_1^C &= 3 \\ c_2^A + c_2^B + c_2^C &= 3 \\ s^A + s^B + s^C &= 0 \end{aligned}$$

2 人のときと特に違うのは、C さんの効用最大化条件と、市場均衡条件の左辺に C さんの消費や貯蓄も加わった点である。

最適化問題を解くと消費関数と貯蓄関数が求まる。全員、対数効用関数なので、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right] \\ c_2 &= \frac{\beta(1+r)}{1+\beta} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right] \\ s &= \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} \end{aligned}$$

*1 記法が汚く感じる人は、 $(c_1^i, c_2^i, s^i)_{i \in \{A, B, C\}}$ 等とまとめてもよい。

という消費関数と貯蓄関数を持つ*2. あとは $(y_1^i, y_2^i)_{i \in \{A, B, C\}}$ を代入すれば、それぞれの家計の消費関数と貯蓄関数が求まる. ここでは省略する.

例えば c_1 に A,B,C さんの $(y_1^i, y_2^i)_{i \in \{A, B, C\}}$ を代入して, A,B,C さんの消費関数を求め, それを市場均衡条件に代入すると, 次のように均衡利子率が求まる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\beta} \left[1 + \frac{0}{1+r} + 0 + \frac{2}{1+r} + 2 + \frac{1}{1+r} \right] &= 3 \\ \Rightarrow 3 \left[1 + \frac{1}{1+r} \right] &= 3(1+\beta) \\ \Rightarrow r &= \frac{1}{\beta} - 1 \end{aligned}$$

これで均衡利子率が求まった.

最後にこの均衡利子率を消費関数と貯蓄関数に代入すれば, 均衡配分が求まる.

$$\begin{aligned} (c_1^A, c_2^A, s^A) &= \left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{1}{1+\beta}, \frac{\beta}{(1+\beta)} \right) \\ (c_1^B, c_2^B, s^B) &= \left(\frac{2\beta}{1+\beta}, \frac{2\beta}{1+\beta}, \frac{-2\beta}{(1+\beta)} \right) \\ (c_1^C, c_2^C, s^C) &= \left(\frac{2+\beta}{1+\beta}, \frac{2+\beta}{1+\beta}, \frac{\beta}{(1+\beta)} \right) \end{aligned}$$

コメントおよび問題の主旨: おそらく市場均衡条件を正しく書くことが出来れば最後まで解ける問題と思われる. 市場均衡の考え方, 「左辺は使うもの, 右辺は作ったものや存在している資源」, が理解できていれば, 授業で説明していなくとも解けた人がいるのではないかと期待している.

1.3 3 期間の場合

次に 2 人 3 期間の場合である.

配分は $(c_1^A, c_2^A, c_3^A, s_1^A, s_2^A, c_1^B, c_2^B, c_3^B, s_1^B, s_2^B)$ であり, 価格は r_1, r_2 である.

競争均衡は, 以下を満たす配分 $(c_1^A, c_2^A, s^A, c_1^B, c_2^B, s^B)$ と価格 r の組である.

- 家計 A の効用最大化:

$$\begin{aligned} \max_{c_1^A, c_2^A, c_3^A, s_1^A, s_2^A} \quad & \log c_1^A + \beta \log c_2^A + \beta^2 \log c_3^A \\ \text{s.t.} \quad & c_1^A + s_1^A = 2 \\ & c_2^A + s_2^A = (1+r_1)s_1^A \\ & c_3^A = (1+r_2)s_2^A \end{aligned}$$

*2 授業スライドやこれまでの問題参照.

- 家計 B の効用最大化：

$$\begin{aligned} \max_{c_1^B, c_2^B, c_3^B, s_1^B, s_2^B} \quad & \log c_1^B + \beta \log c_2^B + \beta^2 \log c_3^B \\ \text{s.t.} \quad & c_1^B + s_1^B = 0 \\ & c_2^B + s_2^B = (1 + r_1)s_1^B + 1 \\ & c_3^B = (1 + r_2)s_2^B + 1 \end{aligned}$$

- 市場均衡条件

$$\begin{aligned} c_1^A + c_1^B &= 2 \\ c_2^A + c_2^B &= 1 \\ c_3^A + c_3^B &= 1 \\ s_1^A + s_1^B &= 0 \\ s_2^A + s_2^B &= 0 \end{aligned}$$

3 期間の問題は，家計消費の練習問題 3 でも出題した．一応，ここでも解き方を復習しておく．最大化問題を解くときのみ，表記を単純化するために家計のインデックス $i \in \{A, B\}$ を落として書く．目的関数に予算制約を代入すると

$$\max_{s_1, s_2} \log(y_1 - s_1) + \beta \log(y_2 + (1 + r_1)s_1 - s_2) + \beta^2 \log(y_3 + (1 + r_2)s_2)$$

となる．これの一階の条件は，

$$\begin{aligned} s_1 : \frac{1}{y_1 - s_1} &= \beta(1 + r) \frac{1}{y_2 + (1 + r_1)s_1 - s_2} \\ s_2 : \frac{1}{y_2 + (1 + r_1)s_1 - s_2} &= \beta(1 + r) \frac{1}{y_3 + (1 + r_2)s_2} \end{aligned}$$

となる．これを予算制約を使って書き直すと，

$$\begin{aligned} c_2 &= \beta(1 + r_1)c_1 \\ c_3 &= \beta(1 + r_2)c_2 \end{aligned}$$

となる．便宜上，これらを消費の成長式と呼ぶ．

さらに 3 期と 2 期の予算制約を 1 期の予算制約に代入すると，次の生涯予算制約を得る．

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r_1} + \frac{c_3}{(1 + r_1)(1 + r_2)} = y_1 + \frac{y_2}{1 + r_1} + \frac{y_3}{(1 + r_1)(1 + r_2)} \equiv Y$$

この生涯予算制約に，先ほどの消費の成長式を代入すると，

$$\begin{aligned} c_1 [1 + \beta + \beta^2] &= Y \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{1 + \beta + \beta^2} Y \end{aligned}$$

を得る。これを消費の成長式に代入すると、

$$c_2 = \frac{\beta(1+r_1)}{1+\beta+\beta^2}Y$$

$$c_3 = \frac{\beta^2(1+r_1)(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}Y$$

を得る。

最後に貯蓄関数はこれらを予算制約に代入すると求まる。

$$s_1 = y_1 - c_1 = y_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}Y$$

$$s_2 = \frac{c_3 - y_3}{1+r_2} = \frac{\beta^2(1+r_1)}{1+\beta+\beta^2}Y - \frac{y_3}{1+r_2}$$

さて、これが一般的な解である。ここで A,B さんそれぞれの問題に戻る。 Y^A と Y^B はそれぞれ、

$$Y^A = 2$$

$$Y^B = \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)}$$

である。これらを Y に代入することで A, B さんのそれぞれの消費関数と貯蓄関数が求まる。

均衡価格 (r_1, r_2) は次のように求まる。まず r_1 は 1 期と 2 期の財市場の均衡上条件より、

$$\frac{1}{1+\beta+\beta^2} \left[2 + \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \right] = 2$$

$$\frac{\beta(1+r_1)}{1+\beta+\beta^2} \left[2 + \frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)} \right] = 1$$

を得る。これを両辺割ると、

$$\frac{1}{\beta(1+r_1)} = 2$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

と均衡利子率 r_1 を得る。

次も同様に、2 期と 3 期の財市場の均衡条件の比を取ると、

$$\frac{1}{\beta(1+r_2)} = 1$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{1}{\beta} - 1$$

と均衡利子率 r_2 が求まる。

これらの均衡利子率 (r_1, r_2) を消費関数に代入すれば、均衡配分が求まる。均衡利子率を Y^B に代入して、先に $Y^B = 2\beta(1+\beta)$ である事を求めておくと、

$$(c_1^A, c_2^A, c_3^A, s_1^A, s_2^A) = \left(\frac{2}{1+\beta+\beta^2}, \frac{1}{1+\beta+\beta^2}, \frac{1}{1+\beta+\beta^2}, \frac{2\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, \frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \right)$$

$$(c_1^B, c_2^B, c_3^B, s_1^B, s_2^B) = \left(\frac{2\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, -\frac{2\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}, -\frac{\beta}{1+\beta+\beta^2} \right)$$

2 静学的な生産経済

家計の最大化問題は

$$\begin{aligned} \max_{c,l} \quad & \log(c) + B \log(l) \\ \text{s.t.} \quad & c = w(1-l) + \pi \end{aligned}$$

である。企業の利潤を受け取りを忘れないこと。

競争均衡は次を満たす、 (c, l, H, w, π) の組である。

- 家計は次の効用最大化問題を解く。

$$\begin{aligned} \max_{c,l} \quad & \log(c) + Bl \\ \text{s.t.} \quad & c = w(1-l) + \pi \end{aligned}$$

- 企業は次の利潤最大化問題を解く。

$$\pi = \max_H H^\alpha - wH$$

- 市場は均衡する。

$$\begin{aligned} c &= H^\alpha \\ l &= 1 - H \end{aligned}$$

まず家計の最大化問題を解くために制約を目的関数に代入すると、

$$\max_l \log[w(1-l) + \pi] + Bl$$

となる。この一階の条件は、

$$\begin{aligned} \frac{w}{w(1-l) + \pi} &= B \\ \Rightarrow \frac{w}{B} &= w(1-l) + \pi \\ \Rightarrow wl &= \pi + w - \frac{w}{B} \\ \Rightarrow l &= \frac{\pi}{w} + 1 - \frac{1}{B} \end{aligned}$$

である。したがって、予算制約より、

$$\begin{aligned} c &= w \left[\frac{1}{B} - \frac{\pi}{w} \right] + \pi \\ &= \frac{w}{B} \end{aligned}$$

である。

次に、企業の利潤最大化問題を解くと、

$$\begin{aligned} \alpha H^{\alpha-1} &= w \\ \Rightarrow H &= \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

を得る。したがって、生産量 Y は、

$$Y = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

である。利潤は、

$$\begin{aligned}\pi &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= Y - \alpha Y \\ &= (1 - \alpha)Y = (1 - \alpha) \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

である。

まず財市場の市場均衡条件 $c = Y$ より、

$$\begin{aligned}\frac{w}{B} &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \Rightarrow w &= \alpha^\alpha B^{1-\alpha}\end{aligned}$$

と均衡賃金が求まる。

次に労働市場の均衡条件 $1 - l = H$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{B} - \frac{1}{w} \underbrace{(1 - \alpha) \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{\pi} &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ \Rightarrow \frac{1}{B} w^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} - (1 - \alpha) \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} &= \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} w^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}} \\ \Rightarrow \frac{1}{B} w^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} + (1 - \alpha) \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \Rightarrow w^{\frac{1}{1-\alpha}} &= B \left[\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \\ \Rightarrow w &= B^{1-\alpha} \alpha^\alpha\end{aligned}$$

と労働市場の均衡条件からも同様の均衡賃金が求まる。

最後に均衡配分を求める。まず消費は

$$\begin{aligned}c &= \frac{\alpha^\alpha B^{1-\alpha}}{B} \\ &= \alpha^\alpha B^{-\alpha}\end{aligned}$$

である。労働時間は、

$$\begin{aligned}H &= \left(\frac{\alpha}{\alpha^\alpha B^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= [\alpha B]^{-1}\end{aligned}$$

であり、利潤は、

$$\begin{aligned}\pi &= (1 - \alpha) \left(\frac{\alpha}{\alpha^\alpha B^{1-\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= (1 - \alpha) [\alpha B]^{-\alpha}\end{aligned}$$

である。労働時間を使い、

$$l = 1 - [\alpha B]^{-1}$$

と余暇時間も求まる。