基礎マクロ：経済成長

日野将志

一橋大学

2021

ロードマップ：それぞれの関係

家計の選択
1．消費と貯蓄
2．消費と労働

企業の選択
1．生産と投資

均衡の理論
1．家計のみの均衡
2．家計と企業の均衡

景気循環入門
資産価格理論入門

経済成長入門

物価・景気循環・マクロ経済政策
1．貨幣と物価
2．IS-LM モデル
3．AD-AS モデル

- 教科書：Kurlat 4 章，二神・堀 8 章

経済成長

- これまで学んだこと：2 期間モデル
- ここで学ぶこと：経済成長 (より長期間の問題)

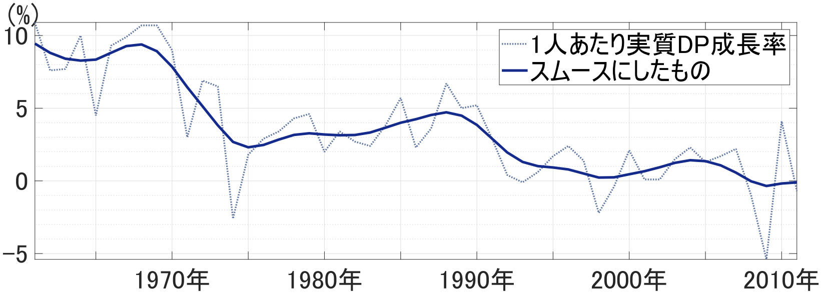
ここで考えること：

考えたい問い

これまで学んだことを使った長期間のモデルは，経済成長を考えるのに適している？特に議論したいこと

- どういう側面を使ってモデルを検証する？
- もしモデルと現実が一致しないときどうする？

現実の経済成長の特徴



長い時間をかけて，1 人当たり実質 GDP の成長率は下がっていった

- 一人当たりの指数を見る理由：一人あたりの指標の方が豊かさの指標として適切

back

前提：ソローモデルの前に...

長期間の最大化問題は数学的に少し難しい

- そこで家計はケインズ型のような消費関数に従うとする

$$C = \underbrace{(1-s)}_{\text{限界消費性向}} Y$$

ここで s は限界貯蓄性向

- 復習：ケインズ型消費関数

$$C = \alpha_1 Y + \underbrace{\alpha_2}_{=0}$$

- 企業は静学的に利潤を最大化する

前提：数学的記法

これからある変数 x_t の差分方程式 (高校では漸化式などと呼ぶ)

$$x_{t+1} = f(x_t)$$

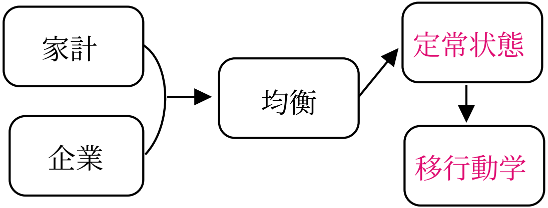
が頻出する．マクロ経済学では

$$x' = f(x)$$

と記法を単純化するのがとても一般的．ここではそのような表記はしないものの，徐々に慣れると良いと思います

(※今後も勉強する人向け：数学的には，t を除いた書き方ができるモデルを再帰的な構造と言います)

経済成長モデルの分析の流れ



議論の流れを理解するために定常状態と移行動学の区別が鍵になる

今回学ぶこと

1. ソローモデル
   - モデルの基本構成
   - 定常状態
   - 移行動学
2. ソローモデルの応用
   - 絶対的収束と相対的収束
   - 日本経済
3. 連続時間
   - 連続時間ソローモデル
4. 補足

ソローモデル (a.k.a., Solow-Swan Model)

家計

ケインズ型よりも更に単純な消費行動を行うとする

$$C_t = (1 - s)Y_t$$

ここで $s \in (0, 1)$ は貯蓄率．外生的
したがって，貯蓄 S_t は

$$\begin{aligned} & C_t + S_t = Y_t \\ \Rightarrow\ & (1 - s)Y_t + S_t = Y_t \\ \Rightarrow\ & S_t = \underbrace{s}_{\text{限界貯蓄性向}} Y_t \end{aligned}$$

である．
家計の人口を一定とする $(N_t = N_{t+1})$．

企業

企業は，労働 L と資本 K を，生産技術 F を利用して，生産物 Y として生産する

$$Y_t = F(K_t, \underbrace{A_t}_{\text{労働生産性}} \underbrace{\underbrace{H_t}_{\text{労働時間}} \underbrace{N_t}_{\text{労働人口}}}_{\equiv L})$$

- 労働時間 H_t も人口 N_t も常に 1 と固定する
  - 労働時間は長期間ではさほど変動しないと考えられていた (1/3 程度)
  - 人口成長は長期間では重要 (練習問題).
- ここで生産技術は一次同次とする (復習)
- A_t は労働生産性．ここでは次のように外生的に成長するとする

$$A_{t+1} = (1 + g^A)A_t, \qquad g^A \geq 0$$

企業

企業は，労働 L と資本 K を，生産技術 F を利用して，生産物 Y として生産する

$$Y_t = F(K_t, \underbrace{\underbrace{A_t}_{\text{労働生産性}} \underbrace{\underbrace{H_t}_{\text{労働時間}} \underbrace{N_t}_{\text{労働人口}}}_{\equiv L})$$

- 労働時間 H_t も人口 N_t も常に 1 と固定する
  - 労働時間は長期間ではさほど変動しないと考えられていた (1/3 程度)
  - 人口成長は長期間では重要 (練習問題).
- ここで生産技術は一次同次とする (復習)
- A_t は労働生産性．ここでは次のように外生的に成長するとする

$$A_{t+1} = (1 + g^A)A_t, \qquad g^A \geq 0$$

企業

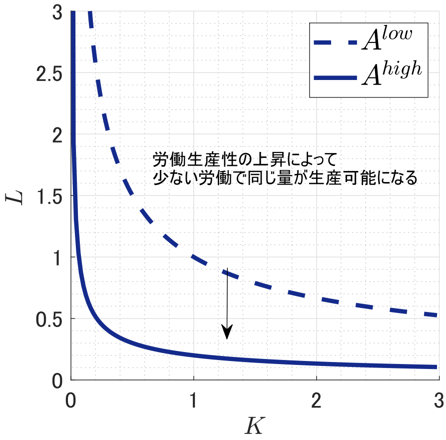
企業は，労働 L と資本 K を，生産技術 F を利用して，生産物 Y として生産する

$$Y_t = F(K_t, \underbrace{A_t}_{\text{労働生産性}} \underbrace{\underbrace{H_t}_{\text{労働時間}} \underbrace{N_t}_{\text{労働人口}}}_{\equiv L})$$

- 労働時間 H_t も人口 N_t も常に 1 と固定する
  - 労働時間は長期間ではさほど変動しないと考えられていた (1/3 程度)
  - 人口成長は長期間では重要 (練習問題).
- ここで生産技術は一次同次とする (復習)
- A_t は労働生産性．ここでは次のように外生的に成長するとする

$$A_{t+1} = (1 + g^A)A_t, \qquad g^A \geq 0$$

企業 (cont'd)：労働生産性の成長の役割



労働生産性 A が上昇 ($A^{\mathrm{low}} \to A^{\mathrm{high}}$) することで，少ない労働でも同じ量の Y が生産できるようになる．

企業の利潤最大化

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, A_t L_t) - w_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

一階条件は，次のとおり

$$\begin{aligned} K &: F_K(K_t, A_t L_t) = r_t + \delta \\ L &: A_t F_L(K_t, A_t L_t) = w_t \end{aligned}$$

ソローモデルの競争均衡

- 家計の行動：

$$C_t = (1 - s)Y_t$$

- 企業の行動：

$$F_K(K_t, A_tL_t) = r_t + \delta,$$
$$A_tF_L(K_t, A_tL_t) = w_t$$

- 市場の均衡条件

$$C_t + \underbrace{K_{t+1} - (1 - \delta)K_t}_{=I_t} = F(K_t, A_tL_t)$$

ソローモデルの基本方程式の導出

市場の均衡条件と家計の消費関数と生産関数より，

$$(1-s)F(K_t, A_tL_t) + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F(K_t, A_tL_t)$$
$$\Rightarrow K_{t+1} = sF(K_t, A_tL_t) + (1-\delta)K_t$$

である．F は一次同次なので，$F(K_t, A_tL_t)/(A_tL_t) = F(K_t/A_tL_t, A_tL_t/A_tL_t)$．したがって，

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} = s\frac{F(K_t, A_tL_t)}{A_tL_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t} \qquad (A_tL_t\text{で割る})$$
$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}(1+g^A) = sF\left(\frac{K_t}{A_tL_t}, 1\right) + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t}$$

となる．さらに $\tilde{k}_t \equiv K_t/A_tL_t$，$f(\tilde{k}_t) \equiv F(\tilde{k}_t, 1)$ と書く．すると，

$$(1+g^A)\tilde{k}_{t+1} = sf(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t$$

を得る．これをソローモデルの基本方程式などと呼ぶ．

ソローモデルの基本方程式の導出

市場の均衡条件と家計の消費関数と生産関数より，

$$(1-s)F(K_t, A_tL_t) + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F(K_t, A_tL_t)$$
$$\Rightarrow K_{t+1} = sF(K_t, A_tL_t) + (1-\delta)K_t$$

である． F は一次同次なので， $F(K_t, A_tL_t)/(A_tL_t) = F(K_t/A_tL_t, A_tL_t/A_tL_t)$.
したがって，

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} = s\frac{F(K_t, A_tL_t)}{A_tL_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t} \qquad (A_tL_t\text{で割る})$$
$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}(1+g^A) = sF\left(\frac{K_t}{A_tL_t}, 1\right) + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t}$$

となる． さらに $\tilde{k}_t \equiv K_t/A_tL_t$， $f(\tilde{k}_t) \equiv F(\tilde{k}_t, 1)$ と書く． すると，

$$(1+g^A)\tilde{k}_{t+1} = sf(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t$$

を得る． これをソローモデルの基本方程式などと呼ぶ．

ソローモデルの基本方程式の導出

市場の均衡条件と家計の消費関数と生産関数より，

$$(1-s)F(K_t, A_tL_t) + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F(K_t, A_tL_t)$$
$$\Rightarrow K_{t+1} = sF(K_t, A_tL_t) + (1-\delta)K_t$$

である． F は一次同次なので， $F(K_t, A_tL_t)/(A_tL_t) = F(K_t/A_tL_t, A_tL_t/A_tL_t)$. したがって，

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} = s\frac{F(K_t, A_tL_t)}{A_tL_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t} \qquad (A_tL_t\text{で割る})$$
$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}}(1+g^A) = sF\left(\frac{K_t}{A_tL_t}, 1\right) + (1-\delta)\frac{K_t}{A_tL_t}$$

となる． さらに $\tilde{k}_t \equiv K_t/A_tL_t$， $f(\tilde{k}_t) \equiv F(\tilde{k}_t, 1)$ と書く． すると，

$$(1+g^A)\tilde{k}_{t+1} = sf(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t$$

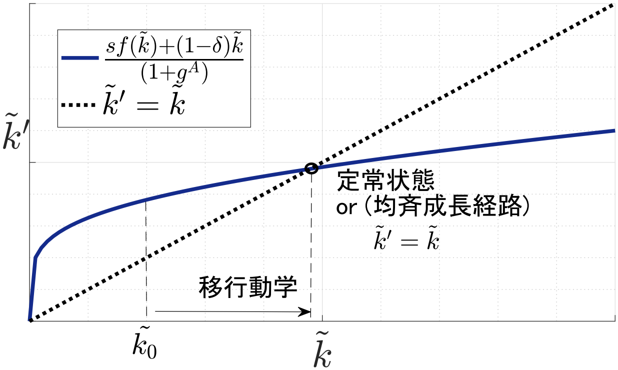
を得る． これをソローモデルの基本方程式などと呼ぶ．

ソローの基本方程式の意味

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{sf(\tilde{k}_t) + (1-\delta)\tilde{k}_t}{(1+g^A)}$$

- 意味：$\tilde{k}_t$ は (効率労働) 一人当たり資本，$f(\tilde{k}_t)$ は (効率労働) 一人当たり生産量.
- 来期の一人当たり資本 $\tilde{k}_{t+1}$ は，基本方程式の右辺に従って決まる.
  - 数学的には一階の差分方程式　(高校では漸化式)

定常状態と移行動学



定常状態 (steady state) とは $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1}$ となる状態
(※ $g^A = 0$ のとき定常状態に呼ばれ、$g^A > 0$ のときに均斉成長経路と呼ばれることが一般的)

(経済成長の専門家は厳密に区別することが多いが，その他のマクロ経済学者は一括して定常状態と呼ぶことも多い)

定常状態の分析

定常状態の特徴：

定常状態は $\tilde{k}_t = \tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}^*$ なので，次のようになる

$$\tilde{k}^* = \frac{sf(\tilde{k}^*) + (1-\delta)\tilde{k}^*}{1+g^A}$$
$$\Rightarrow sf(\tilde{k}^*) = (g^A + \delta)\tilde{k}^*$$

定常状態の (効率労働) 一人当たり消費 $\tilde{c}^*$ は次の通り

$$\tilde{c}^* = (1-s)f(\tilde{k}^*)$$

仮に，s がパラメータではなく，家計が選べる変数とする．このとき，この (効率労働) 一人当たり消費を最大化する貯蓄率 s を黄金律 (golden rule) と呼ぶ．

定常状態 (均斉成長経路) の特徴

ソローモデルの定常状態 (均斉成長経路) では，K_t, Y_t, C_t と A_t は同じ速度で成長する．つまり，

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{C_{t+1}}{C_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = (1 + g^A)$$

注意：A_{t+1}/A_t は外生的に g^A の成長率で成長する．

解釈：「先進国の経済成長は生産性の成長 g^A のみで決まる」

定常状態の特徴 (1): K の成長

定常状態の定義より...,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{k}_{t+1} = \tilde{k}_t \\
&\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} = \frac{K_t}{A_t L_t} \\
&\Rightarrow \frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = (1 + g^A)
\end{aligned}
$$

意味：定常状態において，資本 K_t は生産性 A_t と同じ速度で成長する．

定常状態の特徴 (2): Y の成長

$$
\begin{aligned}
Y_t &= F(K_t, A_t L_t) \\
\Rightarrow \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= \frac{F(K_{t+1}, A_{t+1} L_{t+1})}{A_{t+1} L_{t+1}} \frac{A_{t+1} L_{t+1}}{A_t L_t} \frac{A_t L_t}{F(K_t, A_t L_t)} \\
\Rightarrow \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= f(\tilde{k}_{t+1})(1 + g^A) \frac{1}{f(\tilde{k}_t)} \\
\Rightarrow \frac{Y_{t+1}}{Y_t} &= (1 + g^A)
\end{aligned}
$$

意味：定常状態において，生産量 Y は生産性 A と同じ速度で成長する．

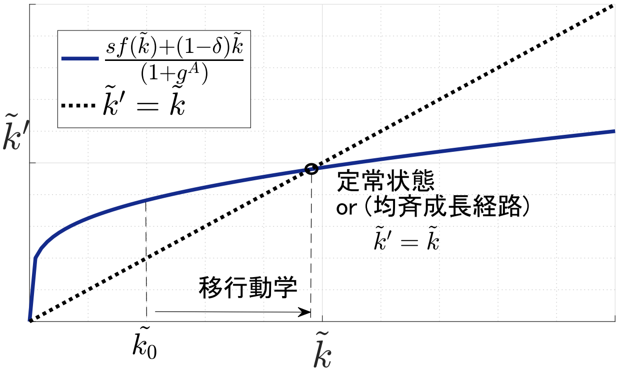
定常状態の特徴 (3): C の成長

$$
\begin{aligned}
C_t &= (1-s)Y_t \\
\Rightarrow \frac{C_{t+1}}{C_t} &= \frac{(1-s)Y_{t+1}}{(1-s)Y_t} \\
\Rightarrow \frac{C_{t+1}}{C_t} &= \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = (1+g^A)
\end{aligned}
$$

意味：定常状態において，消費 C は生産性 A と同じ速度で成長する．

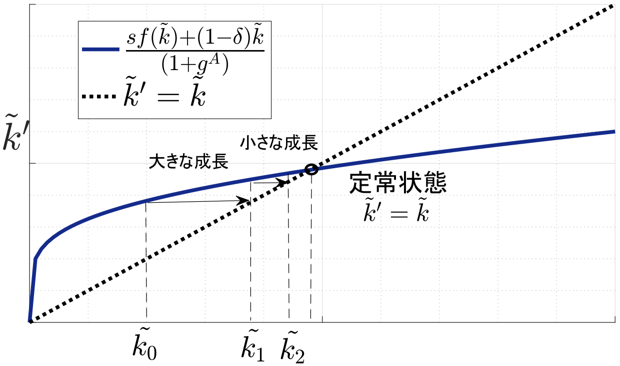
移行動学の分析

定常状態と移行動学 (再掲)



移行動学とは，初期の資本 $\tilde{k}_0$ から定常状態に向けて成長していく過程のこと

移行動学：ソローモデルの図解



- 特徴１：経済は定常状態へ向けて成長していく
- 特徴２：最初の方が早く成長する
  - 言い換え：途上国ほど経済成長が早い 現実

移行動学の $\tilde{k}$ の経済成長率

単純化のために $g^A = 0$ とする．基本方程式を変形すると，

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= f(\tilde{k}_t) - \delta\tilde{k}_t \\ \Rightarrow \frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} &= \frac{sf(\tilde{k}_t)}{\tilde{k}_t} - \delta\end{aligned}$$

を得る．これは $\tilde{k}_t$ の成長率を表している．これを $\tilde{k}_t$ に対して微分を取ると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{k}_t}\frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = -\frac{s[f(\tilde{k}_t) - f'(\tilde{k}_t)\tilde{k}_t]}{\tilde{k}_t^2} = -s\frac{w}{\tilde{k}_t^2} < 0$$

となる ($f - \tilde{k}f' = w$ は宿題参照)．これは，「経済水準が高くなればなるほど，成長率が下がる」ことを数学的に示している．

移行動学の $\tilde{k}$ の経済成長率

単純化のために $g^A = 0$ とする．基本方程式を変形すると，

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = f(\tilde{k}_t) - \delta \tilde{k}_t$$
$$\Rightarrow \frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{sf(\tilde{k}_t)}{\tilde{k}_t} - \delta$$

を得る．これは $\tilde{k}_t$ の成長率を表している．これを $\tilde{k}_t$ に対して微分を取ると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{k}_t} \frac{\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t}{\tilde{k}_t} = -\frac{s[f(\tilde{k}_t) - f'(\tilde{k}_t)\tilde{k}_t]}{\tilde{k}_t^2} = -s\frac{w}{\tilde{k}_t^2} < 0$$

となる ($f - \tilde{k} f' = w$ は宿題参照)．これは，「経済水準が高くなればなるほど，成長率が下がる」ことを数学的に示している．

一言：移行動学の注意

- 移行動学では,

$$\frac{K'}{K} = \frac{Y'}{Y} = \frac{C'}{C} = \frac{A'}{A} = (1 + g^A)$$

とは一般にはならない.

ソローモデルの応用１：絶対的収束と相対的収束

ソローモデルの含意

ソローモデルの含意：「経済水準が高くなればなるほど，成長率が下がる」

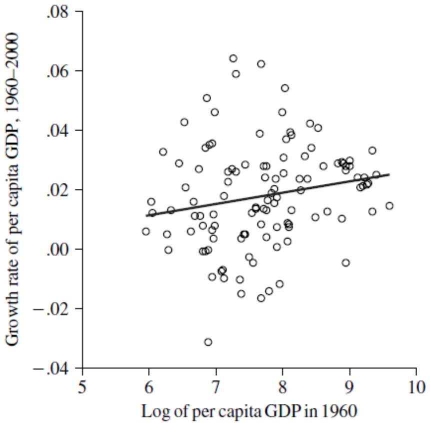
Q. これは現実でも成り立っているんだろうか？

現実 $\Rightarrow$ 全ての国？

絶対的収束仮説

まず，出来る限り多くの国 (114 カ国) の 1960-2000 年の成長率の散布図を見る

Figure: 経済成長率の散布図 (ソース：Barro Sala-i-Martin 2003)



絶対的収束仮説 (続)

前ページの図を見ると

- どうも，経済規模が大きい (GDP が大きい) からと言って，経済成長率が低いわけではない
  - このように，何らの条件付けも行わずに成長率を比較することで，ソローモデルの成長率の含意が正しいかどうかを検証した仮説を，**絶対的収束仮説**と呼ぶ
  - (まとめると) 絶対的収束仮説はどうやら成り立たない
- しかし，ソローモデルには色々なパラメータ (例えば s, α, δ) があり，異なる国ではこれらのパラメータが大きく異なる可能性が高い．
  - そこで，似通った国や地域で比べてみるのはどうだろう？
  - このように，似通った国や地域の成長率を比較することで，ソローモデルの成長率の含意が正しいかどうかを検証した仮説を，**相対的収束仮説**と呼ぶ

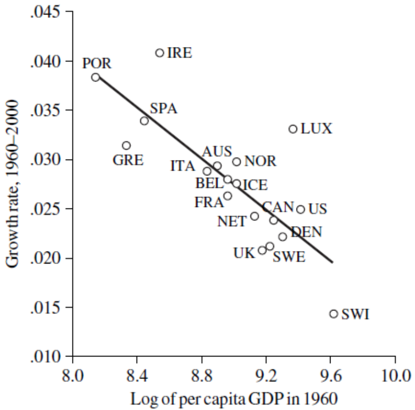
絶対的収束仮説 (続)

前ページの図を見ると

- どうも，経済規模が大きい (GDP が大きい) からと言って，経済成長率が低いわけではない
  - このように，何らの条件付けも行わずに成長率を比較することで，ソローモデルの成長率の含意が正しいかどうかを検証した仮説を，**絶対的収束仮説**と呼ぶ
  - (まとめると) 絶対的収束仮説はどうやら成り立たない
- しかし，ソローモデルには色々なパラメータ (例えば s, α, δ) があり，異なる国ではこれらのパラメータが大きく異なる可能性が高い．
  - そこで，似通った国や地域で比べてみるのはどうだろう？
  - このように，似通った国や地域の成長率を比較することで，ソローモデルの成長率の含意が正しいかどうかを検証した仮説を，**相対的収束仮説**と呼ぶ

相対的収束仮説1：OECD 諸国

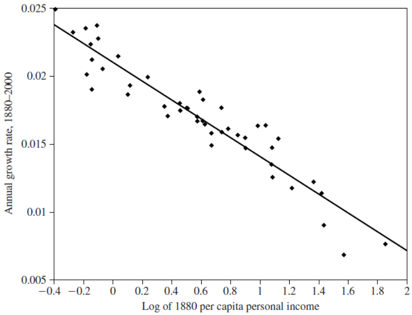
Figure: OECD 諸国の経済成長率の散布図 (ソース：Barro Sala-i-Martin 2003)



OECD 諸国に限定して見ると，成長率と経済規模には相関が見られる

相対的収束仮説 2：アメリカの州

Figure: アメリカの州ごとの経済成長率の散布図 (ソース：Barro Sala-i-Martin 2003)



もっと似通ってる地域としてアメリカの州ごとに限定して見ると，成長率と経済規模には一層綺麗な相関が見られる

ソローモデルと収束仮説のまとめ

- 何も条件づけない絶対的収束仮説はどうやら成り立たない
- 一方，似通った国や地域で成長率を比較すると，ソローモデルの含意は正しそうに見える
  - つまり相対的収束仮説は成り立っていそうに見える

ソローモデルの応用２：日本経済の停滞
林文夫 (2003)『構造改革なくして成長なし』(『失われた 10 年の真因は何か』)
(※ Hayashi and Prescott 2002 の単純化日本語版)

前提：一般的な成長会計

コブ・ダグラス型生産関数 $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ を仮定する．
このとき，Y の成長率は次のように分解出来ることが知られている．

$$\underbrace{\frac{\Delta Y}{Y}}_{Y\text{ の成長率}} = \underbrace{\frac{\Delta A}{A}}_{A\text{ の成長率}} + \alpha \underbrace{\frac{\Delta K}{K}}_{K\text{ の成長率}} + (1-\alpha) \underbrace{\frac{\Delta L}{L}}_{L\text{ の成長率}}$$

導出は例えば https://www.yuhikaku.co.jp/static_files/studia_ws/data/isbn_9784641150065/chapter3_supplement.pdf
または連続時間の場合は簡単に導出可能．44 頁

林 (2003) の成長会計

コブ・ダグラス型生産関数 $Y = AK^\alpha (EH)^{1-\alpha}$ を仮定する (H は労働時間，E は雇用者数)．N を労働人口として，労働人口一人あたりに直すと，

$$\frac{Y}{N} = A\frac{K^\alpha}{Y^\alpha}\frac{Y^\alpha}{N^\alpha}\left(\frac{E}{N}\right)^{1-\alpha} H^{1-\alpha}$$
$$\Rightarrow y = A^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} eH$$

ここで $y = Y/N$，$e = E/N$，$k = K/Y$．
このとき，Y の成長率は次のように分解出来ることが知られている．

$$\underbrace{\frac{\Delta y}{y}}_{\text{一人当たり生産量の成長率}} = \underbrace{\frac{\Delta A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}}_{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\text{の成長率}} + \alpha \underbrace{\frac{\Delta k^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k^{\frac{1}{1-\alpha}}}}_{k^{\frac{1}{1-\alpha}}\text{の成長率}} + \underbrace{\frac{\Delta H}{H}}_{\text{労働時間の成長率}} + \underbrace{\frac{\Delta e}{e}}_{\text{雇用率の成長率}}$$

日本経済の失われた『20年』

$$\underbrace{\frac{\Delta y}{y}}_{\text{一人当たり生産量の成長率}} = \underbrace{\frac{\Delta A^{\frac{1}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}}}}_{A^{\frac{1}{1-\alpha}}\text{の成長率}} + \alpha \underbrace{\frac{\Delta k^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k^{\frac{1}{1-\alpha}}}}_{k^{\frac{1}{1-\alpha}}\text{の成長率}} + \underbrace{\frac{\Delta H}{H}}_{\text{労働時間の成長率}} + \underbrace{\frac{\Delta e}{e}}_{\text{雇用率の成長率}}$$

期間	y	$A^{\frac{1}{1-\alpha}}$	$k^{\frac{1}{1-\alpha}}$	労働時間	雇用率
1960-70	7.7%	7.7%	1.7%	−0.8%	−0.8%
1970-80	3.2%	1.3%	3.0%	−0.6%	−0.6%
1980-88	3.0%	2.8%	0.2%	0.0%	−0.1%
1991-00	0.5%	0.3%	1.4%	−0.9%	−0.4%

コメント：

- A の成長率↓
- 労働時間・雇用率は一貫して負

林 (2003)「この二つが日本の停滞の要因」

連続時間のソローモデル

連続時間とは

時間の概念

- 離散時間：$t \to t+1$ と期間の区切りが明確
  - 月次，四半期，年に対応
  - 数式の例：差分方程式 (differen*ce* eq.)

$$x_{t+1} = (1+g)x_t$$

- 連続時間：一瞬の変化
  - 現実の時間の流れに区切りはない
  - 数式の例：微分方程式 (differen*tial* eq.)

$$\dot{x}_t = g x_t$$

離散時間と連続時間：一般的な例

離散時間のモデルを連続時間のモデルにすることを考える．
離散時間の期間は 1 であったが，期間を Δ とする．すると，離散時間は

$$x_{t+\Delta} = (1 + \underbrace{g\Delta}_{\Delta\text{期間の成長}})x_t$$

とできる．連続時間とは，$\Delta \to 0$ の世界．したがって，

$$\begin{aligned} &\frac{x_{t+\Delta} - x_t}{\Delta} = gx_t \\ \Rightarrow &\lim_{\Delta \to 0} \frac{x_{t+\Delta} - x_t}{\Delta} = gx_t \\ \Rightarrow &\frac{dx_t}{dt} = gx_t \end{aligned}$$

一般に，時間に関する微分は $\dot{x}_t \equiv dx_t/dt$ のようにドット付きで書くのが慣例．

なんで連続時間？

(私の主観的な) マクロ経済学の小史

- 伝統的に手計算がしやすく 80 年代まではよく使われていた.
  - 例：経済成長論
- 90-2010 あたりまでは影をひそめる
  - コメント：こんなことを大っぴらに言うと怒る人もいるだろうけど…
- 近年，連続時間の数値計算が発達・流行
  - 参考：Ben Moll LSE

若くて研究者になることに興味ある人は連続時間の勉強しておくべき

連続時間の利便性：成長会計

生産関数 $Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$ を両辺，対数を取って，時間で微分する:

$$\log Y_t = \log A_t + \alpha \log K_t + (1-\alpha) \log L_t$$
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\dot{Y}_t}{Y_t}}_{Y\text{ の成長率}} = \underbrace{\frac{\dot{A}_t}{A_t}}_{A\text{ の成長率}} + \alpha \underbrace{\frac{\dot{K}_t}{K_t}}_{K\text{ の成長率}} + (1-\alpha) \underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}}_{L\text{ の成長率}}$$

これは 37 頁と同じもの．連続時間なら手軽に導出可能！

資本蓄積

離散時間では,

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$

だった．さきほどの例と同様に，時間を Δ とおくと

$$K_{t+\Delta} = \underbrace{I_t\Delta}_{\Delta\text{期間における投資}} + (1 - \underbrace{\Delta\delta}_{\Delta\text{期間における減耗}})K_t$$

$$\frac{K_{t+\Delta} - K_t}{\Delta} = I - \delta K_t$$

この $\Delta \to 0$ という極限を取ると,

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$$

生産性の成長

これは最初の例において x と置いていた変数を A に置き換えればすぐにできる.
(各自確認してみてください)

連続時間のソローモデル

ソローモデルを連続時間で記述すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
C_t &= (1-s)Y_t \\
C_t + I_t &= F(K_t, A_t N_t) \\
\dot{K}_t &= I_t - \delta K_t \\
\dot{A}_t &= g^A A_t
\end{aligned}
$$

変わったのは，最後の 2 つの式のみ！

変わった式は，元々 $t+1$ と t の二時点が出ていた式．
(例：$A' = (1+g^A)A$)

連続時間ソローモデルの基本方程式

$\tilde{k} = K/AL$ と定義する．この時間微分は,

$$\dot{\tilde{k}}_t = \dot{K}_t \frac{1}{A_t L_t} + \frac{-\dot{A}_t L_t K_t}{(A_t L_t)^2} + \frac{-\dot{L}_t A_t K_t}{(A_t L_t)^2}$$

である．前頁の方程式を代入すると,

$$\dot{K}_t = sF(K_t, A_t, L_t) - \delta K_t$$

なので，これを上の式に代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{k}}_t &= sf(\tilde{k}_t) - \delta \tilde{k}_t - \frac{\dot{A}_t}{A_t} \frac{K_t}{A_t L_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \frac{K_t}{A_t L_t} \\ &= sf(\tilde{k}_t) - (g^A + \delta)\tilde{k}_t \qquad (\because \dot{L}/L = 0) \end{aligned}$$

これが連続時間のときのソローの基本方程式

経済成長 (ソローモデル) のまとめ

ソローモデルに関して二つのまとめ

- (市場) 経済は定常状態に向けて成長する
  - 背景１：当時の共産主義
  - 背景２：当時の考え「市場経済は不安定では？」
- 発展途上の国や地域ほど成長が速い
  - 相対的収束仮説 ◯

補足 (これは試験範囲外でも無いかも)

一次同次の生産関数の特徴：完全分配

一次同次の生産関数の特徴として，完全分配となることが知られている

- 完全分配とは，企業は利潤を産むことなく，生産要素に全てを分配することである．数学的には，

$$F(K,N) = (r+\delta)K + wN$$

  が成り立つことを意味する．
  - 完全分配が成り立つとき，利潤 π は常に 0．したがって家計の配当所得も 0．
  - なので，配当は考えなくて良い．

補足：一次同次の生産関数のとき，完全分配の証明

一次同次の生産関数なので $nF(K,N) = F(nK,nN)$ がどんな $n > 0$ についても成り立つ．そこで，この両辺を n について微分すると，次を得る (n は任意なので2行目では $n=1$ とする)．

$$
\begin{aligned}
&F(K,N) = F_1(nK,nN)K + F_2(nK,nN)N \\
\Rightarrow\ &F(K,N) = F_1(K,N)K + F_2(K,N)N
\end{aligned}
$$

さらに，企業の最大化条件より，次が成り立つ．

$$F_1(K,H) = r+\delta, \quad F_2(K,N) = w$$

これを最初の式に代入すると，完全分配の式を得る．

$$F(K,N) = (r+\delta)K + wN$$

(復習用) 一次同次の生産関数

- 一次同次とは，生産投入量を λ 倍すれば，生産量も λ 倍になるということ
  - 数学的には，任意の $\lambda > 0$ に対して，次が成り立つこと

$$\lambda F(L, K) = F(\lambda L, \lambda K)$$

  - イメージ：畑 (K) を $\lambda(=2)$ 倍の広さにして，農家の人数 (L) も $\lambda(=2)$ 倍にすると，農作物 (Y) も $\lambda(=2)$ 倍になる
  - 一次同次の関数の例 (証明は投資の宿題参照)：
    - 線形な関数 $F(L) = \alpha L$
    - 次のコブ・ダグラス型 $F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$