基礎マクロ練習問題の解答例：企業投資

日野将志 *

1 生産技術

1.1 一次同次

$n > 0$ とする．全てのケースに解答方針は，$F(x)$ に対して $F(nx)$ と $nF(x)$ を求めて，一致するかどうか確認すれば良い．

- $F(K) = \alpha K$
  $F(nK) = \alpha nK$ かつ $nF(k) = n\alpha K$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = \alpha K + (1-\alpha)H$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = \alpha nK + (1-\alpha)nH = n[\alpha K + (1-\alpha)H]$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K + (1-\alpha)H]$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = \alpha K + \beta H$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
  $F(nK, nH) = \alpha nK + \beta nH = n[\alpha K + \beta H]$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K + \beta H]$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = (nK)^\alpha (nH)^{1-\alpha} = n^\alpha K^\alpha n^{1-\alpha} H^{1-\alpha} = nK^\alpha H^{1-\alpha}$ かつ $nF(K, H) = nK^\alpha H^{1-\alpha}$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = K^\alpha H^\beta$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
  $F(nK, nH) = (nK)^\alpha (nH)^\beta = n^\alpha K^\alpha n^\beta H^\beta = n^{\alpha+\beta} K^\alpha H^\beta$ かつ $nF(K, H) = nK^\alpha H^\beta$ である．したがってこれらは一致せず，一次同次ではない．
- $F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + (1-\alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = [\alpha(nK)^\epsilon + (1-\alpha)(nH)^\epsilon]^{1/\epsilon} = [\alpha n^\epsilon K^\epsilon + (1-\alpha)n^\epsilon H^\epsilon]^{1/\epsilon} = [n^\epsilon\{\alpha K^\epsilon + (1-\alpha)H^\epsilon\}]^{1/\epsilon} = n[\alpha K^\epsilon + (1-\alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K^\epsilon + (1-\alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$ である．したがってこれらは一致する．
- $F(K, H) = [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
  $F(nK, nH) = [\alpha(nK)^\epsilon + \beta(nH)^\epsilon]^{1/\epsilon} = [\alpha n^\epsilon K^\epsilon + \beta n^\epsilon H^\epsilon]^{1/\epsilon} = [n^\epsilon\{\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon\}]^{1/\epsilon} = n[\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$ かつ $nF(K, H) = n[\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$ である．したがって，これらは一致する．
- $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．なお，$\alpha \in (0, 1)$ とする
  $F(nK, nH) = \min\{\alpha nK, (1-\alpha)nH\} = n \min\min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．かつ，$nF(K, H) = n\min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$ である．したがって，これらは一致する．

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- $F(K,H)=\min\{\alpha K,\beta H\}$．なお，$\alpha+\beta\neq 1$ かつとする
  $F(nK,nH)=\min\{\alpha nK,\beta nH\}=n\min\min\{\alpha K,\beta H\}$．かつ，$nF(K,H)=n\min\{\alpha K,\beta H\}$ である．したがって，これらは一致する．

コメント：ここでは経済学でよく使われる多くの生産関数が一次同次かどうかを確認した．その結果，$F(K,H)=K^\alpha H^\beta$ だけが一次同次ではないことを確認した．一般にマクロ経済学の教科書で出てくるような関数はほぼ全て一次同次である．

2 静学的な企業の選択

2.1 生産要素 1 つの場合：労働のみ

この最大化問題は，

$$\max_H \ H^\alpha - wH$$

である．

一階の条件は，

$$\alpha H^{\alpha-1}=w$$

であり，これを変形すると，

$$\Rightarrow H=\left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

と H が求まる．

2.2 生産要素 2 つの場合

2.2.1 曲率のある和

この最大化問題は，

$$\max_{K,H} \ K^\alpha + H^\beta - wH - rK$$

である．

一階の条件は，

$$K \ : \alpha K^{\alpha-1}=r \tag{2.1}$$
$$H \ : \beta H^{\beta-1}=w \tag{2.2}$$

である．

これらをそれぞれ整理すると，

$$K=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$
$$H=\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

となる．

2.2.2　コブ・ダグラス

この最大化問題は,

$$\max_{K,H}\ K^{\alpha}H^{\beta} - wH - rK$$

である．

一階の条件は,

$$K\ :\alpha K^{\alpha-1}H^{\beta} = r \tag{2.3}$$

$$H\ :\beta K^{\alpha}H^{\beta-1} = w \tag{2.4}$$

である．まず一階の条件の 1 本目の式 (2.3) を変更すると

$$K = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} H^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \tag{2.5}$$

と出来る．一階の条件の 2 本目の式 (2.4) も同様に整理すると,

$$H = \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} K^{\frac{\alpha}{1-\beta}}$$

であり，これを先ほど求めた (2.5) 式に代入すると,

$$\begin{aligned}
K &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} K^{\frac{\alpha}{1-\beta}}\right]^{\frac{\beta}{1-\alpha}} \\
K &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}} K^{\frac{\alpha\beta}{(1-\beta)(1-\alpha)}} \\
\Rightarrow K^{(1-\beta)(1-\alpha)} &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\beta} K^{\alpha\beta} \\
\Rightarrow K^{1-\beta-\alpha} &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\beta} \\
\Rightarrow K &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}$$

と求まる．これを H の式に代入すると,

$$\begin{aligned}
H &= \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}}\right]^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta\alpha}{(1-\alpha-\beta)(1-\beta)}+\frac{1}{1-\beta}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}$$

このように，K と H が求まる．

次に rK/Y と wH/Y を求める．これはそれぞれ一階の条件を変形した方が手早く求められる．すなわち，(2.3) より，

$$\begin{aligned}
&\alpha\frac{K^\alpha H^\beta}{K} = r\\
&\Rightarrow\ \alpha\frac{Y}{K} = r\\
&\Rightarrow\ \alpha = \frac{rK}{Y}
\end{aligned}$$

と求まる．同様に，(2.4) より $wH/Y = \beta$ も求まる．これらは「生産した価値 Y のうち，α の割合を資本に支払い (rK)，β の割合を労働に支払う (wH)」ことを意味している．

次に，K/H を求める．

$$\begin{aligned}
\frac{K}{H} &= \left(\frac{\alpha}{r}\right)^{\frac{1-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{\beta}{w}\right)^{\frac{\beta+\alpha-1}{1-\alpha-\beta}}\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\frac{w}{r}
\end{aligned}$$

例えばもし，$r = w$ であれば，K と H の比率は α/β で決まることが分かる．このように，コブダグラス型関数 $K^\alpha H^\beta$ はそれぞれの投入量のシェアを決めるパラメータであることが分かる．

最後に $\beta = 1-\alpha$ の場合を議論する (つまり，$1 = \alpha+\beta$ のケース)．このとき，指数の部分の分母が $1-\alpha-\beta = 0$ となる．したがって，解は定義できない．

コメントおよび問題の主旨：コブ・ダグラスは再頻出の生産関数であるので，その特徴を学んでもらうことがこの問題の目的である．まずコブ・ダグラスの係数が投入量や支払いのシェアを表すパラメータであることを示した．

次に，コブ・ダグラスにおいて $1 = \alpha+\beta$ の時，K と H はそれぞれ一意に定まらないことを示した．コブ・ダグラスの $1 = \alpha+\beta$ のとき，K/H の比しか求まめることができないことは良く知られているので，覚えておくと良い．

2.2.3　CES 関数

最大化問題は，

$$\max_{K,H}\ [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon} - wH - rK$$

である．

一階の条件は，

$$\begin{aligned}
K:\ [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon-1}\,\alpha K^{\epsilon-1} &= r\\
H:\ [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon-1}\,\beta H^{\epsilon-1} &= w
\end{aligned}$$

である．

次に代替の弾力性を計算する．一階の条件の左辺は，それぞれ F_K と F_H であることを利用すると，一階の条件の左辺を割ると

$$F_H/F_K = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{1-\epsilon}$$

である．これを K/H に対して微分を取ると[*1]，

$$\frac{d(F_K/F_H)}{d(K/H)} = (1-\epsilon)\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{-\epsilon}$$

が求まる．したがって，代替の弾力性は，

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon} &= \frac{\frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}}{\frac{K/H}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}} \\
&= \frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}\frac{H}{K}F_H(K/H)/F_K(K/H) \\
&= \frac{1}{(1-\epsilon)\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{-\epsilon}} \times \frac{H}{K} \times \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{K}{H}\right)^{1-\epsilon} \\
&= \frac{1}{1-\epsilon}
\end{aligned}$$

と代替の弾力性 $\hat{\epsilon}$ は $1/(1-\epsilon)$ と定数のみで決まることが分かる．

なお，(重要な) 補足であるが

- $\hat{\epsilon} < 1$：(粗) 補完的
- $\hat{\epsilon} > 1$：(粗) 代替的
- $\hat{\epsilon} = 1$：コブ・ダグラス
- $\hat{\epsilon} = \infty$：完全代替的 (線形)
- $\hat{\epsilon} = 0$：完全補完的 (レオンチェフ)

と整理出来る．一般に，応用研究ではコブ・ダグラスを使うことが多いが，補完関係 (つまり $\hat{\epsilon} < 1$) を表したい経済問題を扱うときは CES 型関数を使うことが多い．

さて，一階の条件に戻ろう．二つの一階条件を両辺で割ると，

$$\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{K}{H}\right)^{\epsilon-1} = \frac{r}{w}$$

である．この左辺は (技術的) 限界代替率である．

- $\epsilon \searrow 0$ のとき，(技術的) 限界代替率は，

  $$\frac{\alpha}{\beta}\frac{H}{K}$$

  となる．これはコブ・ダグラスのときと一致する．
- $\epsilon \to 1$ のとき，技術的限界代替率

  $$\frac{\alpha}{\beta}$$

  となる．つまり，(K,H) に依存しない．これは線形の場合と同じである．

[*1] K/H を一つの変数と見れば良い．これが分かりづらい場合，例えば，$\omega \equiv K/H$ などと定義すればより分かりやすいだろう．

3　2 期間問題

3.1　生産要素 1 つの場合

最大化問題は,

$$\begin{aligned} &\max_{K_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\ &\text{s.t. } \pi_1 = K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 \\ &\pi_2 = K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 \end{aligned}$$

である．ここで max の下に K_1 がないことに注意.

この制約式を目的関数に代入すると,

$$\max_{K_2} K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 + \frac{1}{1+r}\left[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2\right]$$

となる．この一階の条件は，次のとおり．それをそのまま変形もすると,

$$\begin{aligned} &-1 + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 0 \\ &\Rightarrow K_2 = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

と，最適な K_2 も求まる.

3.2　生産要素が一つの場合：調整費用

まず調整費用関数 $\Phi(K_1, K_2)$ が一次同次であることぉ確認する．$\lambda > 0$ をパラメータとすると,

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda K_1, \lambda K_2) &= \frac{\phi}{2}\left(\frac{\lambda K_2 - (1-\delta)\lambda K_1}{\lambda K_1}\right)^2 \lambda K_1 \\ &= \frac{\phi}{2}\left(\frac{\lambda(K_2 - (1-\delta)K_1)}{\lambda K_1}\right)^2 \lambda K_1 \\ &= \lambda\frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 \\ &= \lambda\Phi(K_1, K_2) \end{aligned}$$

と一次同次であることが確認できる.

次に，この偏導関数を取ると,

$$\begin{aligned} \Phi_2(K_1, K_2) &= \phi\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)\frac{1}{K_1}K_1 \\ &= \phi\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right) \end{aligned}$$

であるため，$I = K_2 - (1-\delta)K_1 > 0$ ならば，$\Phi_2 > 0$ であることが分かる.

次に，二階の偏導関数も同様に取ると,

$$\Phi_{22}(K_1, K_2) = \frac{\phi}{K_1}$$

が求まる．$\phi > 0$ かつ $K_1 > 0$ なので，この二階の偏導関数も正である．

最大化問題は,

$$\begin{aligned}
&\max_{K_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\
&\text{s.t. } \pi_1 = K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 - \underbrace{\frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2-(1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1}_{=\Phi(K_1,K_2)} \\
&\qquad \pi_2 = K_2^\alpha + (1-\delta)K_2
\end{aligned}$$

である．

目的関数に制約式を代入すると,

$$\max_{K_2} \ K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2-(1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2]$$

でる．これの一階条件は,

$$-1 - \phi\left(\frac{K_2^\alpha + (1-\delta)K_1}{K_1}\right) + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + 1 - \delta] = 0$$

である．なお，これは K_2 について手で解き切ることは出来ない．

そこで，一階の条件を使って，調整費用がないケース (前問 3.1) と比較する．もし，$\phi = 0$ の場合，一階条件は,

$$-1 + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + 1 - \delta] = 0$$

である．これは前問の一階条件と一致する．したがって，調整費用があるケースは調整費用のないケースの一般化と考えられる．

3.3　曲率のある線形和

この最大化問題は

$$\begin{aligned}
&\max_{K_2,H_1,H_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\
&\text{s.t. } \pi_1 = K_1^\alpha + H_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 \\
&\qquad \pi_2 = K_2^\alpha + H_2^\alpha + (1-\delta)K_2
\end{aligned}$$

である．

制約式を目的関数に代入すると,

$$\max_{K_2,H_1,H_2} K_1^\alpha + H_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 - wH_1 + \frac{1}{1+r}\left[K_2^\alpha + H_2^\alpha + (1-\delta)K_2 - wH_2\right]$$

となる．

一階条件は,

$$\begin{aligned}
&K_2: \ -1 + \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 0 \\
&H_1: \alpha H_1^{\alpha-1} = w \\
&H_2: \alpha H_1^{\alpha-1} = w
\end{aligned}$$

である．これを解くと，

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
H_1 &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
H_2 &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と求められる．

4　3 期間問題

本質的には 2 期間から 3 期間に延長しても問題は変わらない．そのため，2 期間をよく理解していれば解けるのではないかと思う．この最大化問題は，

$$
\begin{aligned}
\max_{K_2,K_3}\ & \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 + \frac{1}{(1+r)^2}\pi_2 \\
\text{s.t. } & \pi_1 = K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 \\
& \pi_2 = K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 - K_3 \\
& \pi_3 = K_3^\alpha + (1-\delta)K_3
\end{aligned}
$$

である．

したがって，制約式を目的関数に代入すると，

$$
\max_{K_2,K_3}\ K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 - K_3] + \frac{1}{(1+r)^2}[K_3^\alpha + (1-\delta)K_3]
$$

とできる．この一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
K_2 &: \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 1 \\
K_3 &: \frac{1}{1+r}[\alpha K_3^{\alpha-1} + (1-\delta)] = 1
\end{aligned}
$$

である．これらは両方，

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
K_3 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

となる．

5　補論：企業金融

5.1　Equity Finance: 株式発行による資金調達

企業の最大化問題を

$$
\begin{aligned}
&\max_{k_2}\ \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\
&\qquad \pi_1 = z_1 k_1^{\alpha} + (1-\delta)k_1 - k_2 \\
&\qquad \pi_2 = z_2 k_2^{\alpha} + (1-\delta)k_2
\end{aligned}
$$

なので，最大化問題は，

$$
\max_{k_2}\ \ z_1 k_1^{\alpha} + (1-\delta)k_1 - k_2 + \frac{1}{1+r}\left[z_2 k_2^{\alpha} + (1-\delta)k_2\right]
$$

となる．この一階の条件は，

$$
\begin{aligned}
&1 = \frac{1}{1+r}\left[\alpha z_2 k_2^{\alpha-1} + (1-\delta)\right] \\
&\Rightarrow\ \ r+\delta = \alpha z_2 k_2^{\alpha-1} \\
&\Rightarrow\ \ k_2 = \left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

である．これ制約式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= z_1 k_1^{\alpha} + (1-\delta)k_1 - \left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
\pi_2 &= z_2\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-\delta)\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

が最適な (π_1, π_2) である．

次に符号の条件を考える．まず π_1 は，

$$
\begin{aligned}
&\pi_1 \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow z_1 k_1^{\alpha} + (1-\delta)k_1 - \left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow z_1 k_1^{\alpha} + (1-\delta)k_1 \gtreqless \left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

となる．例えば，z_1, r, δ のいずれか，もしくは全てが十分に低い場合は，π_1 が負になる．

また π_2 に関しても同様に，

$$
\begin{aligned}
&\pi_1 \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow z_2\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + (1-\delta)\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow \left[z_2\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\alpha} + (1-\delta)\right]\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \gtreqless 0 \\
&\Rightarrow z_2\left[\frac{\alpha}{r+\delta}\right]^{\alpha} + 1-\delta \gtreqless 0
\end{aligned}
$$

これは $\delta \in (0,1)$ であり，第一項のパラメータはすべて正なので，正である．

問題の主旨およびコメント：マクロ経済を考えると π は企業の利潤 (損失) であり，株主に還元される．例えば $\pi > 0$ のときは配当と考えればよい．一方，$\pi_t < 0$ は，株式を発行して，株主から資金を調達していると解釈できる．このように株式発行によって資金を調達することを equity finance 等と呼ぶ．

5.2　Corporate Bond：借入

$$\max_{k_2} \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2$$
$$\pi_1 = z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 + b$$
$$\pi_2 = z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 - (1+(1-\tau)r)b$$

の制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_{k_2} \; z_1 k_1^\alpha + (1-\delta)k_1 - k_2 + b + \frac{1}{1+r}\left[z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 - (1+(1-\tau)r)b\right] \tag{5.1}$$

である．まず簡単な k_2 に関しての一階条件は，

$$1 + r = z_2 \alpha k_2^{\alpha-1} + (1-\delta) \tag{5.2}$$

である．

問題となるのは b に関する一階条件である．(5.1) 式を青字に注目してほしい．この青字の部分は b に関して線形になっている．そのため次のことが言える．b に関する 2 つの項の導関数はそれぞれ，前者が b が増えることによる限界利益，後者が b が増えることによる限界費用 (利息の支払い) を表している．もし，限界利益が限界費用より大きいなら，企業は b を増やすことで利潤が増えることを意味している．そのため，このときは借入をするべきである．逆に限界費用が限界利益より大きいならば借り入れはするべきではない．これを数式で書くと，

$$\text{if } 1 > \frac{1+(1-\tau)r}{(1+r)}, \text{ then } b > 0 \tag{5.3}$$

$$\text{if } 1 = \frac{1+(1-\tau)r}{(1+r)}, \text{ then } b \in (-\infty, \infty) \tag{5.4}$$

$$\text{if } 1 < \frac{1+(1-\tau)r}{(1+r)}, \text{ then } b < 0 \tag{5.5}$$

である．上段は限界利益のほうが大きいため，必ず社債を発行するべき状況である．中段は限界利益が限界費用と等しいため，社債の発行は利益にもならないし損失にもならず，社債の量は利益に関係しない．そのため，社債の量 b はなんでも良い状況である．下段は限界費用のほうが大きく，社債の発行は利益を減らす (または損失を増やす) ため，b は小さい方が望ましく，b は負の値になる．

それでは $\tau = 0$ の場合を考えよう．これは中段のケース (5.4) に該当する．このとき社債発行の限界利益と限界費用が一致している．言い換えると，企業の社債の発行は特に利益に影響しない．ここで仮に $\pi_1 < 0$ となるような場合を考える．5.1 の問題で解説したように，$\pi_1 < 0$ の場合，企業は株式発行で資金を調達していた．今，この 5.2 の問題では，企業は株式発行だけでなく社債でも資金調達ができる．この問題では，**もし $\tau = 0$ であれば，社債発行と株式発行による資金調達はどちらも等価**であることが次のようにして分かる．なお，これを**モディリアーニ・ミラーの等価定理** (Modigliani-Miller theorem) 等と呼ぶ．

k_2 は (5.2) より b と関係なく決まる．そのため，

$$\pi_1 = z_1 k_1^\alpha + (1-\delta) - k_2 + b$$

という式から b の増加は，そのまま π_1 の増加につながることが分かる．つまり，「仮に社債 b を発行すると，そのまま利益 π_1 を増える」事が分かる．

$$\pi_2 = z_2 k_2^\alpha + (1-\delta)k_2 - (1+r)b$$

から「b の増加は $(1+r)$ 倍だけ利益 π_2 の下落につながる」ことが分かる．結果的に，利潤は，

$$\pi_1 + \frac{\pi_2}{1+r}$$

なので，結果的に b の増加は π_1 の増加と π_2 の下落は相殺される．このように，b の変更は利潤に何ら影響せず，かつ，株式発行と同じと考えることができる．

コメント：モディリアーニ・ミラーは重要な定理なので，正確に定義しておくと，もし税が存在せず，取引費用や情報の非対称も存在せず，効率的な市場において，企業価値は資金調達の方法に影響されないという定理である．
つまり，今の問題を通じて確認したように，株式発行と社債による資金調達はどちらも同じということである．ただ，現実には税の存在や社債や株式の発行にはコストがかかるため，モディリアーニ・ミラーの定理がそのまま現実に成り立つわけではなく，コーポレート・ファイナンスを考える際のベンチマークとして考えられている．

一方，もし $\tau > 0$ ならば，上段が当てはまるため，$b > 0$ となる．この場合，社債による資金発行は，限界利益が限界費用よりも大きいため，株式発行よりも社債発行によって資金を調達したの方が望ましい．結果的に，$\tau > 0$ の場合，すべての資金調達を社債によって行う．このように，税が存在する場合は，モディリアーニ・ミラーの定理は崩れることになる．

6　発展：非可逆性

1. $I = K_2 - (1-\delta)K_1$ を用いて，非可逆性制約を整理すると，

$$\begin{cases} K_2 - (1-\delta)K_1 & \text{if } K_2 \geq (1-\delta)K_1 \\ q[K_2 - (1-\delta)K_1] & \text{if } K_2 < (1-\delta)K_1 \end{cases}$$

と書き直すことができる．
それでは，まず正の投資をするときの最大化問題は，

$$\begin{aligned} V^u(K_1) \equiv \max_{K_2 \geq (1-\delta)K_1} \ & \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\ \text{s.t. } & \pi_1 = K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 \\ & \pi_2 = K_2^\alpha + (1-\delta)K_2 \end{aligned}$$

と書ける．K_2 に関する不等式は忘れないようにすること．

負の投資をするときの最大化問題は

$$
\begin{aligned}
V^d(K_1) \equiv \max_{K_2<(1-\delta)K_1} \ & \pi_1 + \frac{1}{1+r}\pi_2 \\
\text{s.t. } \pi_1 &= K_1^\alpha + q[(1-\delta)K_1 - K_2] \\
\pi_2 &= K_2^\alpha + (1-\delta)K_2
\end{aligned}
$$

となる．K_2 に関して不等式の制約があること，1 期の制約式の投資に該当する部分に q が加えられていることに注意してほしい．

これらを比較して望ましい方を取る式は次のように書ける．企業の目的は利潤の最大化なので，$V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ の高い方を取ればよい．すなわち，

$$
\max\{V^u(K_1), V^d(K_1)\}
$$

で良い．もしくは，不等式を使って，

$$
\begin{cases}
V^u(K_1) & \text{if } V^d(K_1) \le V^u(K_1) \\
V^d(K_1) & \text{if } V^u(K_1) < V^d(K_1)
\end{cases}
$$

というような書き方も出来る．

2. 次にこの最大化問題をそれぞれ解く．

まず正の投資をするときを考える．制約式を目的関数に代入すると，

$$
\max_{K_2 \ge (1-\delta)K_1} \ K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2]
$$

であり，一旦，不等式制約を無視すると，一階条件は，

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + 1 - \delta] \\
\Rightarrow K_2 &= \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

と不等式制約を無視したときの，正の投資のときの資本水準が求まる．記法の便宜上，この一階条件から得られた解を $\bar{k}^*$ と書くことにする．次に，不等式制約を考慮しよう．すると，次のように整理できる．

$$
\text{when investing,} \ \ K_2 = \begin{cases}
\bar{k}^* & \text{if } \bar{k}^* \ge (1-\delta)K_1 \\
(1-\delta)K_1 & \text{if } \bar{k}^* < (1-\delta)K_1
\end{cases}
$$

となる．これを直感的に解釈すると，「K_1 が十分に低いような場合には，企業は $\bar{k}^*$ という資本水準にする．K_1 を十分に多く持っているような場合には，企業は正の投資も負の投資も起こさず何もしない．結果的に K_1 が多い場合には，減耗して残った資本 $(1-\delta)K_1$ のみを来期に持ち越す」となる．

次に，負の投資の時の最大化問題を解こう．制約式を目的関数に代入すると，

$$
\max_{K_2<(1-\delta)K_1} \ K_1^\alpha + q[(1-\delta)K_1 - K_2] + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2]
$$

となる．一旦，不等式制約を無視すると，一階条件は，

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{1+r}[\alpha K_2^{\alpha-1} + 1 - \delta] \\
\Rightarrow K_2 &= \left(\frac{\alpha}{q(1+r)-(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

となる．ここで記法の便宜上，$\underline{k}^* \equiv \left(\frac{\alpha}{q(1+r)-(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ と定義する．そして再度，不等式制約を考慮すると，負の投資をするときの企業の行動は次のように整理できる．

$$\text{when disinvesting,}\quad K_2 = \begin{cases} (1-\delta)K_1 & \text{if } \underline{k}^* \geq (1-\delta)K_1 \\ \underline{k}^* & \text{if } \underline{k}^* < (1-\delta)K_1 \end{cases}$$

これは直感的には，次のようなことを意味している．「K_1 が十分に低いような企業は，1 期に保有している資本のうち減耗を除いた $(1-\delta)K_1$ という資本を来期に持ち越す．K_1 が十分に大きな企業は資本を売却して $\underline{k}^*$ という水準に調整する」

3. $\bar{k}^*$ と $\underline{k}^*$ を比較しよう．つまり，

$$\bar{k}^* \equiv \left(\frac{\alpha}{(1+r)-(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \lesseqgtr \left(\frac{\alpha}{q(1+r)-(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv \underline{k}^*$$

と比較する．なお，比較しやすいように，左辺の分母に 1 を足して引いている．すると $q<1$ なので，右辺の分母が小さいことが分かる．つまり，

$$\bar{k}^* < \underline{k}^*$$

であることが分かる．

4. まず正の投資の場合から考えよう．$V^u(K_1)$ を求めると，次のようになる．

$$\begin{aligned}
V^u(K_1) &= \max_{K_2 \geq (1-\delta)K_1} K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - K_2 + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2] \\
&= \begin{cases} K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - \bar{k}^* + \frac{1}{1+r}\left[(\bar{k}^*)^\alpha + (1-\delta)\bar{k}^*\right] & \text{if } \bar{k}^* \geq (1-\delta)K_1 \\ K_1^\alpha + \frac{1}{1+r}\left[[(1-\delta)K_1]^\alpha + (1-\delta)^2 K_1\right] & \text{if } \bar{k}^* < (1-\delta)K_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

次に負の投資の場合は，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
V^d(K_1) &= \max_{K_2 < (1-\delta)K_1} K_1^\alpha + q[(1-\delta)K_1 - K_2] + \frac{1}{1+r}[K_2^\alpha + (1-\delta)K_2] \\
&= \begin{cases} K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - \underline{k}^* + \frac{1}{1+r}\left[(\underline{k}^*)^\alpha + (1-\delta)\underline{k}^*\right] & \text{if } \underline{k}^* < (1-\delta)K_1 \\ K_1^\alpha + \frac{1}{1+r}\left[[(1-\delta)K_1]^\alpha + (1-\delta)^2 K_1\right] & \text{if } \underline{k}^* \geq (1-\delta)K_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$V^u(K_1)$ と $V^d(K_1)$ を比較しよう．すると，次のような 3 つの場合分けができることが分かる．そしてそのときの解が以下のとおりである．

(a) K_1 が大きいとき：$\underline{k}^* < (1-\delta)K_1$

このとき，

$$\begin{aligned}
V^u(K_1) &= K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - (1-\delta)K_1 + \frac{1}{1+r}\left[(1-\delta)K_1^\alpha + (1-\delta)^2 K_1\right] \\
V^d(K_1) &= K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - \underline{k}^* + \frac{1}{1+r}\left[(\underline{k}^*)^\alpha + (1-\delta)\underline{k}^*\right]
\end{aligned}$$

であり，青字の部分を比較すればこの大小関係は分かる．この青字の部分を $F(k) \equiv -k + \frac{1}{1+r}[k^\alpha + (1-\delta)k]$ と定義すると，

$$
\begin{aligned}
F'(k) > 0 &\quad \text{if } k < \bar{k}^* \\
F'(k) = 0 &\quad \text{if } k = \bar{k}^* \\
F'(k) < 0 &\quad \text{if } k > \bar{k}^*
\end{aligned}
$$

という関数形であり，k が $\bar{k}^*$ より大きいときには F は減少関数関数であることが分かる．$\bar{k}^* < \underline{k}^* < (1-\delta)K_1$ なので，この (a) の場合は，F は減少関数である．したがって，$\underline{k}^* < (1-\delta)K_1$ より $V^u(K_1) < V^d(K_1)$ となる．結果的にこの場合では，負の投資のときの解を用いれば良いことが分かり，$K_2 = \underline{k}^*$ である．

（b）K_1 が真ん中の時：$\bar{k}^* < (1-\delta)K_1 \leq \underline{k}^*$
このとき，

$$
V^u(K_1) = V^d(K_1) = K_1^\alpha + \frac{1}{1+r}\left[[(1-\delta)K_1]^\alpha + (1-\delta)^2 K_1\right]
$$

となる．したがって，このときは，解が一致している．結果的にこの場合では，$K_2 = (1-\delta)K_1$ という解が利潤を最大化することが分かった．

（c）K_1 が小さいとき：$(1-\delta)K_1 < \bar{k}^*$
このときは，

$$
\begin{aligned}
V^u(K_1) &= K_1^\alpha + (1-\delta)K_1 - \bar{k}^* + \frac{1}{1+r}\left[(\bar{k}^*)^\alpha + (1-\delta)\bar{k}^*\right] \\
V^d(K_1) &= K_1^\alpha + \frac{1}{1+r}\left[(1-\delta)K_1^\alpha + (1-\delta)^2 K_1\right]
\end{aligned}
$$

である．これはやはり，$F(k)$ の部分だけを比較すれば良い．(a) のときの計算を利用すると，この領域では $F(k)$ は増加関数であることが分かる．したがって，$(1-\delta)K_1 < \bar{k}^*$ より，$V^d(K_1) < V^u(K_1)$ となることが分かる．結果的にこの場合では，正の投資をするときの解を用いればよく，$K_2 = \bar{k}^*$ であることが分かった．

見やすいように，企業の資本水準の最適解をまとめると，

$$
K_2 = \begin{cases}
\underline{k}^* & \text{if } \underline{k}^* < (1-\delta)K_1 \\
(1-\delta)K_1 & \text{if } \bar{k}^* < (1-\delta)K_1 \leq \underline{k}^* \\
\bar{k}^* & \text{if } (1-\delta)K_1 \leq \bar{k}^*
\end{cases}
$$

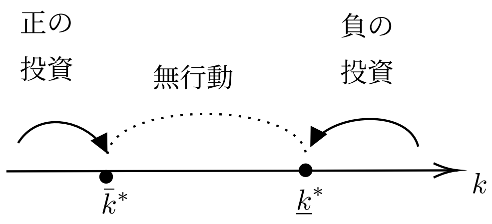
となる．これが非可逆性制約があるときの最適な投資行動である．

この解釈は次のようになる．「上段の場合は，K_1 が大きいときを表している．このとき，資本 K_1 が過剰なので，$q < 1$ であろうが売却する．中段の場合，K_1 はそこそこ多いが，$q < 1$ であるため売ると損する．それならば，何もせずに保有して資本が減耗によって減るのを待つ．下段の場合，資本が少ないので，正の投資を行う」．

図はこのような行動を視覚的に解説している．

5. 最後に $q = 1$ のときを確認する．このとき，$\bar{k}^* = \underline{k}^*$ となる．したがって，最適な資本は

$$
K_2 = \left(\frac{\alpha}{r+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$



となる．これは問題 3.1 の解に一致する．

コメントおよび問題の主旨：この問題の主旨は複数ある．まず場合分けが必要な最大化問題の定式化を学んでもらうことが一つ目の主旨である．非可逆性制約は，私たちの生活でも身近に感じられる制約である．例えば車や住宅は購入価格と売却価格が異なる．非可逆性制約はそういった家計の問題にも応用できる．

第二に，非可逆性制約の面白い点を学んでもらう点である．この問題の面白い点は，「最適化問題を定式化する際には，$I \geq 0$ か $I < 0$ かという 2 種類の場合分けで済むのに，企業の行動は正の投資，無行動，負の投資という 3 種類の場合分けが必要になる」点である．