#### 投資

日野将志

最も単純な投資

生產技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理論:調整費用の無い場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

基礎マクロ:企業投資

日野将志

一橋大学

2021

長も単純な投資

**熱学的か企業** 

期間問題:投資

論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

間半な後自て収具垤柵の世間で

前回までに、家計消費 C の理論を学んだ.

今回は

$$C + I + G = Y$$

の投資 I の理論を学ぶ.

- ► Kurlat 8章
- ▶ 二神・堀3章, 宮尾4章

# ロードマップ: それぞれの関係

投資

日野将志

最も単純な投資

工/生1×1/11

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの

景気循環入門 資産価格理論入門

経済成長入門

物価・景気循環

- ・マクロ経済政策
- 1. 貨幣と物価
- 2. IS-LM モデル
- 3. AD-AS モデル

家計の選択

- 1. 消費と貯蓄
- 2. 消費と労働

企業の選択

1. 生産と投資

均衡の理論

- 1. 家計のみの均衡
- 2. 家計と企業の均衡

マクロ経済学において、一般的に、資本 (capital) K とは、労働以外の価値が測定

- - ▶ オフィス用品、PC、工具、建物、工場

可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ 経営者の経営手腕、組織運営の効率、秘伝の技術

$$K_{t+1}$$
 =  $I_t$  +  $(1-\delta)K_t$  来期に所有する資本 今期の投資 今期から持ち越す分

▶ 日常用語との区別:株式投資 ≠ 投資

投資

日野将志

最も単純な投資

上生1文1刊

浄学的な企業

ービンの〇理

高:調整費用の無い 場合

記:トービンの と凸型調整費用

マクロ経済学において、一般的に、資本 (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ 生産要素とは生産に使うもの. 主に労働と資本.
- ▶ 資本の例:
  - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例
  - ▶ 経営者の経営手腕、組織運営の効率、秘伝の技術
- ▶ 投資 I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$K_{t+1}$$
 =  $I_t$  +  $(1-\delta)K_t$  来期に所有する資本 今期の投資 今期から持ち越す分

δ ∈ (0, 1) は資本減耗率

▶ 日常用語との区別:株式投資 ≠ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

投資

日野将志

最も単純な投

トービンの Q 理

場合

浦足:トービンの 2 と凸型調整費用

マクロ経済学において、一般的に、資本 (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ 生産要素とは生産に使うもの. 主に労働と資本.
- ▶ 資本の例:
  - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例:
  - ▶ 経営者の経営手腕,組織運営の効率,秘伝の技術
- ▶ 投資 I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$egin{array}{cccccc} K_{t+1} &=& I_t &+& (1-\delta)K_t \ &&& \end{pmatrix}$$
来期に所有する資本  $&& \rightarrow$ 期の投資  $&& \rightarrow$ 期から持ち越す分

### δ ∈ (0,1) は資本減耗率

▶ 日常用語との区別:株式投資 ≠ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

投資 日野将志

マクロ経済学において、一般的に、資本 (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

」能な物理的に存在する主産安系のこと ▶ 生産要素とは生産に使うもの、主に労働と資本。

- ▶ 資本の例:
  - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例:
  - ▶ 経営者の経営手腕、組織運営の効率、秘伝の技術
- ▶ 投資 I とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

 $\delta\in(0,1)$  は資本減耗率

▶ 日常用語との区別:株式投資 ≠ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

も単純な投資

王库技術

浄字的な企業

2 期間問題:投

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

投資 日野将志

マクロ経済学において、一般的に、資本 (capital) K とは、労働以外の価値が測定可能な物理的に存在する生産要素のこと

- ▶ 生産要素とは生産に使うもの. 主に労働と資本.
- ▶ 資本の例:
  - ▶ オフィス用品, PC, 工具, 建物, 工場
- ▶ 資本でも労働でもないものの例:
  - ▶ 経営者の経営手腕、組織運営の効率、秘伝の技術
- ▶ 投資 *I* とは、一般に、資本を購入すること (売却は負の投資)

$$K_{t+1}$$
  $=$   $I_t$   $+$   $(1-\delta)K_t$  来期に所有する資本 今期の投資 今期から持ち越す分

 $\delta \in (0,1)$  は資本減耗率

▶ 日常用語との区別:株式投資 ≠ 投資

企業投資は景気循環にとても大きく反応する

単純な投資

当めけっへき

期間問題:

ービンの Q 理 i:調整費用の無い 合

足:トービンの と凸型調整費用

企業の意思決定は色んな側面がある.

- 参 参 入
  - ▶ 新しい会社の設立,新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- - ▶ 定価の変更、セール、
- - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- - ▶ 新しい工場や設備 (e.g., JR のリニア、携帯会社の基地局)

最も単純な投資

生產技術

静学的な企業

2 期间问题, 仅其

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

哺足:トービンの O と凸型調整費用

企業の意思決定は色んな側面がある.

- ▶ 参入
  - ▶ 新しい会社の設立,新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
  - ▶ 定価の変更,セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
  - ▶ 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア,携帯会社の基地局)
- ここでは投資のみ教える. 他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

最も単純な投資

生產技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの O と凸型調整費用

m= 1=5 -1-

企業の意思決定は色んな側面がある.

- ▶ 参入
  - ▶ 新しい会社の設立,新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
  - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
  - ▶ 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア,携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える. 他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

トービンのQ理

論:調整費用の無い場合

哺足:トービンの O と凸型調整費用

企業の意思決定は色んな側面がある.

- ▶ 参入
  - ▶ 新しい会社の設立,新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
  - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
  - ▶ 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア,携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える. 他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

トービンの〇理

トーピンの Q 理 倫:調整費用の無い 易合

補足:トービンの 〇 と凸型調整費用

企業の意思決定は色んな側面がある.

- ▶ 参入
  - ▶ 新しい会社の設立,新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
  - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
  - ▶ 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア,携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える.他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

トービンの0理

論:調整費用の無い 場合

浦足:トービンの Q と凸型調整費用

企業の意思決定は色んな側面がある.

- ▶ 参入
  - ▶ 新しい会社の設立,新分野への参入 (e.g., Sony の車)
- ▶ 倒産・撤退
- ▶ 価格設定
  - ▶ 定価の変更, セール,
- ▶ 新製品の開発や既存製品の撤廃
  - ▶ 高品質の製品 (e.g., 新しい iPhone), 別種の製品 (e.g., 新しい味のポテチ)
- ▶ 投資
  - ▶ 新しい工場や設備 (e.g.,JR のリニア,携帯会社の基地局)

ここでは投資のみ教える. 他のトピックは研究レベル (日本では教えてる人ほとんどいない...)

日野将志

最も単純な投資

お早純な仅貝

生産技術

学的な企業

期間問題:投資

・ービンの Q 理 前:調整費用の無い 場合

#足:トービンの € と凸型調整費用

静学的な企業 計算例:*K*<sup>α</sup>

2期間問題:投資

トービンの Q 理論:調整費用の無い場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

# 企業の投資は利子率に反応する

- ▶ 理由1:利子率が低いと借入がしやすい
  - ▶ 借金をしても利払いの負担が低い
- ▶ 理由2:投資の代わりに資産運用をしても利回りが低い
  - ▶ 投資の機会費用が小さい
- ⇒ 投資は利子率の減少関数

$$I=I(r), \qquad I'(r)<0$$

最も単純な投資

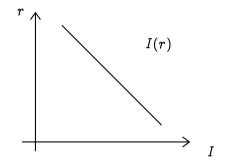
生產技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用



含意:金融政策でrが下がると、投資が増える。

日野将志

最も単純な投資

生產技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの の と品型調整費用

- I = I(r) は単純だけど次のような問題点:ミクロ的基礎の欠如
  - ▶ ミクロ経済学で学んでいるような、企業の目的や制約が記述されていない
  - ▶ 拡張可能性
    - ▶ 例:「投資減税に企業がどう反応するか?」のような分析には不向き
    - ⇒ 企業の目的と制約を記述して、投資関数を導く

### 投資

### 日野将志

せ 単純な投資

### 生産技術

学的な企業

門間問題:投質

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

# 生產技術

## 投資 日野将志

数学的には「労働と資本を投入して、製品が生まれる」ような関数 F

生産とは、労働 H と資本 K を使って、製品 Y を作ること、

Y = F(K, H)

Fを生産関数と呼ぶ

- ▶ 1次同次の意味:投入量を λ 倍すれば、生産量も λ 倍になる
- ▶ 例:畑(K)と農夫(H)を2倍にすれば、農作物(Y)は2倍に

▶ コブ・ダグラス型:  $F(K,H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$ 

生産技術

# 生產技術

### 投資 日野将志

数学的には「労働と資本を投入して、製品が生まれる」ような関数 F

生産とは、労働 H と資本 K を使って、製品 Y を作ること、

Y = F(K, H)

Fを生産関数と呼ぶ

- ▶ 生産関数は  $F_K > 0$ ,  $F_H > 0$  かつ  $F_{KK} < 0$ ,  $F_{HH} < 0$  が一般的な仮定

- ▶ 1次同次の意味:投入量を λ 倍すれば、生産量も λ 倍になる
- ▶ 例:畑(K)と農夫(H)を2倍にすれば、農作物(Y)は2倍に
- - ▶ コブ・ダグラス型:  $F(K,H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$

生産技術

11 / 40

# 生產技術

生産とは、労働 H と資本 K を使って、製品 Y を作ること、 数学的には「労働と資本を投入して、製品が生まれる」ような関数 F

$$Y=F(K,H)$$

Fを生産関数と呼ぶ

▶ 生産関数は  $F_K > 0$ ,  $F_H > 0$  かつ  $F_{KK} < 0$ ,  $F_{HH} < 0$  が一般的な仮定 ▶ 一次同次とすることが多い.  $n \in \mathbb{N}$  次同次とは、パラメータ $\lambda > 0$  に対して.

 $\lambda^n F(K, H) = F(\lambda K, \lambda H)$ 

が成り立つこと (N は自然数の集合)

- ▶ 1次同次の意味:投入量を λ 倍すれば、生産量も λ 倍になる
- ▶ 例:畑(K)と農夫(H)を2倍にすれば、農作物(Y)は2倍に
- ▶ 生産関数の代表例:
  - ▶ コブ・ダグラス型:  $F(K,H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$

生産技術

投資 日野将志

# コブ・ダグラス型

### 投資

### コブ・ダグラス型が一番頻繁に使われる

$$F(K, H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

- ▶ 頻繁に使われる背景
  - ▶ 現実には、「労働所得分配率 (wH/Y) が一定」だった
  - ▶ コブ・ダグラス型場合,労働所得分配率が一定になる

$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha$$

(これの導出は練習問題)

### 他の生産関数

- ► CES 型:  $F(K, H) = [\alpha K^{\epsilon} + (1 \alpha)H^{\epsilon}]^{1/\epsilon}$
- ▶ レオンチェフ型 :  $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1 \alpha)H\}$

日野将志

生産技術

争学的な企業

期間問題:投資

・ービンの Q 理 渝:調整費用の無い 場合

前足:トービンの )と凸型調整費用

# コブ・ダグラス型

### 投資

**コブ・ダグラス型**が一番頻繁に使われる

$$F(K,H) = K^{\alpha}H^{1-\alpha}$$

- ▶ 頻繁に使われる背景
  - ▶ 現実には、「労働所得分配率 (wH/Y) が一定」だった
  - ▶ コブ・ダグラス型場合,労働所得分配率が一定になる

$$\frac{wH}{Y} = 1 - \alpha$$

(これの導出は練習問題)

## 他の生産関数

- **CES** 型: $F(K, H) = \left[\alpha K^{\epsilon} + (1 \alpha)H^{\epsilon}\right]^{1/\epsilon}$
- ▶ レオンチェフ型:  $F(K, H) = \min\{\alpha K, (1 \alpha)H\}$

日野将志

生産技術

学的な企業

期間問題:投資

- ビンの Q 理 調整費用の無い î

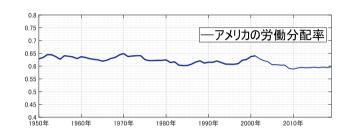
足:トービンの と凸型調整費用

# 労働所得分配率



日野将志

生産技術



ざっくり見ると、概ね安定して 0.6-0.64 程度  $\Rightarrow$  コブ・ダグラス型で OK そう

## 細かい論点:

- ▶ ズームして見ると、労働所得分配率は下降傾向
- ▶ 含意:労働者に回される割合が減っている、格差の一つの要因?

図:生産関数

投資

日野将志

最も単純な投資

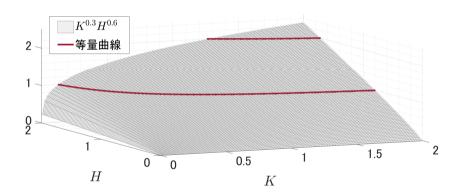
#### 生産技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用



#### 投資

#### 日野将志

最も単純な投資

生産技術

### 静学的な企業

計算例: K

2 期間問題:投資

ービンの Q 理 ネ:調整費用の無い }合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

静学的な企業の選択

まず静学的な場合から始める、企業は次のようなことを考えるとする

- ▶ 家計から、労働を雇い、資本を借りるとする
  - ▶ 労働には労働所得 wH を支払う
  - ▶ 資本には賃料 rK を支払う
  - ► 資本は生産に使うことで減耗する (δK)
- ▶ 労働と資本を使って生産を行う
- ▶ 利潤は生産物から労働所得と資本の賃料、資本の減耗費用を引いたもの

$$\pi = \max_{K,H} F(K,H) - wH - rK - \delta K$$

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

- ▶ 企業は、利潤を最大化するように、資本と労働を選択する
- ► 価格 (r, w) は所与 (⇔ 企業は選べない)

企業の利潤最大化は以下のとおり

$$\max_{K,H} F(K,H) - wH - rK - \delta K$$

最も単純な投資

上産技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理論:調整費用の無い場合

補足:トービンの 〇 と凸型調整費用

. . . .

K,H についてそれぞれ微分して0を求める

 $K : F_K(K,H) = r + \delta$ 

 $H: F_H(K,H)=w$ 

この式を覚えていて欲しい.

▶ 次に見せること:動学的なモデルを考えても、結局この形になる (2 明問)

静学的な企業

先ほどの一階の条件の2式を割ると、

$$rac{F_K(K,H)}{F_H(K,H)} = rac{r+\delta}{w}$$
=等量曲線の傾き

家計の場合 (復習)

$$\dfrac{u'(c_1)}{eta u'(c_2)} = \underbrace{(1+r)}_{\text{価格比}}$$
無差別曲線の傾き

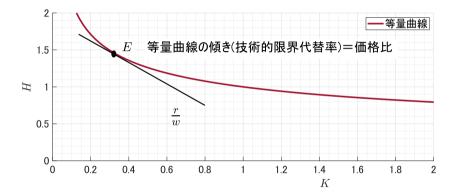
王座技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用



等量曲線の傾きを技術的限界代替率とも呼ぶ

- ▶ 本来本節でやりたいことは、資本形成が利子率にどのように反応するか見ること
- ightharpoons 一方,F(K,H) という一般形のままだと,投資関数を導けない
- $\Rightarrow$  F(K,H) を簡単な関数形を設定して解いてみる

仮に, 単純化のために労働投入は捨象して,

$$F(K,H) = F(K) = K^{\alpha}$$

としてみる.  $\alpha \in (0,1)$  とする.

- ▶ 本来本節でやりたいことは、資本形成が利子率にどのように反応するか見る こと
- ightharpoonup 一方,F(K,H) という一般形のままだと,投資関数を導けない
- $\Rightarrow$  F(K,H) を簡単な関数形を設定して解いてみる 仮に、単純化のために労働投入は捨象して、

$$F(K, H) = F(K) = K^{\alpha}$$

としてみる.  $\alpha \in (0,1)$  とする.

さらに単純化のために $\delta = 0$ とする.このときの利潤最大化問題は.

$$\max_K K^{\alpha} - rK$$

である. これの微分して 0 は,

$$lpha K^{lpha-1} = r \ \Rightarrow K = \left(rac{lpha}{r}
ight)^{rac{1}{1-lpha}}$$

# 企業の資本形成

投資

日野将志

最も単純な投資

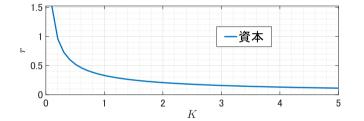
生産技術

静学的な企業 計算側: Κ<sup>α</sup>

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用



## 資本は利子率の減少関数

- ▶ 今, 導出したのは K(r).
- ▶ 本来分析したものは *I(r)*
- 一方,投資は本来

$$I_t = K_{t+1} - (1 - \delta)K_t$$

と定義される. 投資を議論するためには時間と言う概念が不可欠!

⇒ 二期間モデルへ

#### 投資

日野将志

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

2期間問題:投資の決定

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの 〇 と凸型調整費用

静学的な企業の場合では,企業は資本を借りていると仮定した

ightharpoonup そのため、賃料 rK を払っていた

次に,企業が資本を保有すると考える.

- ightharpoonup 企業は投資 I をすることで、今期費用を払い、来期の資本を増やすことが出来る
- ightharpoons 仮定:企業は  $K_1$  を既に保有しているところから操業を始める
  - **▶** *K*<sub>1</sub> は変更できない

2 期間問題:投資

今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - \underbrace{I}$$
投資  
where  $I = K_2 - (1 - \delta)K_1$ 

来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1-\delta)K_2}_{=$$
資本の残存価値

#### 企業の目的関数

投資

日野将志

日野将志

も単純な投資

生産技術

静学的な企業 2 期間問題:投資

ービンのQ理

**第台** 甫足:トービンの

#足:トービンの ) と凸型調整費用

企業は次のように割引現在価値の利潤を最大化するとする。

$$V \equiv \max \pi_1 + rac{1}{1+r}\pi_2$$

そして  $\pi_1$  と  $\pi_2$  はそれぞれ次のように決まる (再掲)

▶ 今期の利潤

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - I$$
  
where  $I = K_2 - (1 - \delta)K_1$ 

▶ 来期の利潤

$$\pi_2 = F(K_2, H_2) - wH_2 + \underbrace{(1-\delta)K_2}_{=$$
資本の残存価値

企業の2期間の利潤最大化(続)

企業の二期間の最大化をまとめると次の通り

$$\max_{I,K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - I + \frac{1}{1+r} [F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2]$$
  
s.t.  $I = K_2 - (1-\delta)K_1$ 

- ightharpoonup max の下に  $K_1$  が無いことに注意
  - ▶ K<sub>1</sub> は期首の時点で持ってる。変更できない
- ▶ 企業の割引因子は1/(1+r)とする

#### 2期間の利潤最大化を解く

日野将志

9 期間問題:投資

投資

投資の定義式を目的関数に代入すると,

$$egin{array}{l} \max_{K_2,H_1,H_2} \ F(K_1,H_1) - w H_1 - [K_2 - (1-\delta)K_1] \ &+ rac{1}{1+x} [F(K_2,H_2) - w H_2 + (1-\delta)K_2] \end{array}$$

となる. それぞれ微分を取って、導関数 = 0を解くと以下を得る.

$$K_2:F_K(K_2,H_2)=r+\delta$$

$$H_1: F_H(K_1, H_1) = w$$

$$H_2: F_H(K_2, H_2) = w$$

静学的な場合 ( トffが ) と同じ! ⇒ 多くの場合で静学的なモデルを使う

#### 利子率の変化と投資 (図示)



日野将志

最も単純な投資

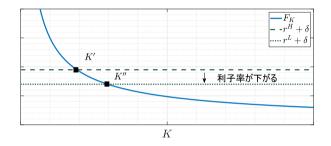
生產技術

静字的な企業 2 期間問題:投資

トービンのQ理

場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用



利子率が下がると、資本  $K_2$ (したがって投資 I) が上がる  $(K' \to K'')$ 

#### 応用例

ightharpoonup 中央銀行がrを下げると、投資が活発になる

最も単純な投資

生産技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

トービンの Q理論:調整費用の無い場合

#### 投資理論のメッセージ

- ightharpoonup 「 $F_K = r + \delta$  で投資が決まる」
- ▶ 問題点: F<sub>K</sub> は観察できない

もう少し、観察できるような指標はないだろうか?

- ▶ ⇒ トービンの Q 理論
  - ▶ 資本の増加が、費用以上に企業価値を増やすかどうかが大事

で企業が投資するかどうか決める

最も単純な投資

生產技術

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

### トービンのQ理論の概要

#### 投資

日野将志

....

生產共結

静学的な企業

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの のと品型調整費用

各期の企業価値は利潤の割引現在価値の総和

企業の価値 $V(K_1)$ ,  $V(K_2)$ 

$$V(K_1) \equiv \max \pi_1 + rac{1}{1+r}\pi_2 
onumber \ V(K_2) \equiv \max \pi_2 
onumber$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由:期首において  $K_t$  は所与だから.

次のように変数 q と Q(トービンの限界 q, トービンの平均 Q) を定義する.

$$q\equivrac{1}{1+r}rac{\partial V(K_2)}{\partial K_2},\quad Q\equivrac{1}{1+r}rac{V(K_2)}{K_2}$$

> 1 は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している

### トービンの〇理論の概要

投資

日野将志

产技術

学的な企業

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

X点 野将志

71%及

各期の企業価値は利潤の割引現在価値の総和

企業の価値 $V(K_1)$ ,  $V(K_2)$ 

$$egin{aligned} V(K_1) &\equiv \max \pi_1 + rac{1}{1+r}\pi_2 \ V(K_2) &\equiv \max \pi_2 \end{aligned}$$

各期の企業価値が資本の関数になる理由:期首において  $K_t$  は所与だから.

次のように変数 q と Q(トービンの限界 q, トービンの平均 Q) を定義する.

$$q\equivrac{1}{1+r}rac{\partial V(K_2)}{\partial K_2},\quad Q\equivrac{1}{1+r}rac{V(K_2)}{K_2}$$

q > 1 は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している

2 期间问題 · 仅頁 トービンの O 理

論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

- ightharpoonup q>1は「資本が増えると企業価値がコスト以上に増える」ことを意味している
  - ▶ q > 1 ならば投資すべき
- ightharpoonup q < 1 は「資本を増やしても,コストの方が企業価値の増加より大きい」ことを意味している
  - ▶ *q* < 1 ならば投資は控えるべき(むしろ資本を売却してもよい)
- $\Rightarrow$  トービンの限界 q は投資判断に役に立つ!

問題点:でもやっぱり,トービンの限界 Q は観察できない….  $\Rightarrow$  平均 Q は観察できる

(※もう少し計算すると、q = Q となることも分かる. <sup>補足</sup>)

 $\Rightarrow q=1$ 

投資

# s.t. $I = K_2 - (1 - \delta)K_1$ 一階の条件は、次の通り $K_2: rac{1}{1+r} rac{\partial V(K_2)}{\partial K_2} = 1$ $H_1: F_H(K_1, H_1) = w$ $H_2: F_H(K_2, H_2) = w$

 $V(K_1) = \max_{I,K_2,H_1,H_2} F(K_1,H_1) - wH_1 - I + rac{1}{1+r} [\underbrace{F(K_2,H_2) - wH_2 + (1-\delta)K_2}_{=V(K_2)}]$ 

- ▶ q = Q. 平均 Q だけを見れば、限界 q も分かる!
- ▶ Q ≥ 1 が投資の符号を決定する
  - ▶ Q > 1: 企業価値 V を投資によって高められる. したがって投資すべき

  - ightharpoonup Q < 1: 企業価値 V は投資をすると下がる. したがって投資は控えるべき
- ▶ マイナーコメント:この分野は Havashi 先生や、Yoshikawa 先生が活躍した 古典

実証:回帰式 (Tobin's Q-regression)

$$rac{I}{\kappa} = lpha + eta Q + \epsilon$$

意味「投資の決定がトービンの平均Qだけで決まっているか」 (※被説明変数をIではなく、I/Kとする理由は補足もしくは練習問題参照)

トービンの 〇 理 論:調整費用の無い

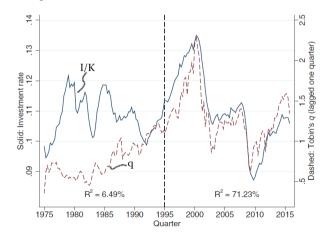
トービンの 〇 理



Andrei, Mann and Moyen (2019)

1995年まで: Q 理論は的外れ

1995年以降: Q理論は割と正しい



静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理論:調整費用の無い場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

- ▶ 「 $q \ge 1$  が投資の符号を決定する」という条件は、学部だけで教えられており、あまり大学院以降では出てこなくなる
  - ▶ 理由:伝統的には、 Q 理論は「実証的に的外れ」という風潮だった
  - ▶ 例: Adda and Cooper (2003)
  - ▶ 大学院では、むしろ、「 $Q^M$  が投資 I を決定するための十分な情報量になる」ということを教える.
    - ▶ 一応、このスライドの補足でも、そういう解説を付けているので、興味がある人は 読んでみてください

#### 投資理論のまとめ

投資

日野将志

も単純な投資

生産技術

静学的な企業

トービンのの細

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

- ▶ 投資とは資本の購入(または売却)
- ▶ 静学的なモデルでも, 動学的なモデルでも (基本的なケースでは) 同じになる.

生產技術

静学的な企業

! 期間問題:投貧

トービンの Q 埋 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

補足:トービンの Q 理論と凸型調整費用

も単純な投資

生産技術

静学的な企業

期間問題:投貧

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Qと凸型調整費用

注意:この補足は他の補足よりも難しいかもしれません. 大学院進学に関心がある人のみ読むと良いかもしれません.

も単純な投資

部字的な 企業

トービンの Q 理 論:調整費用の無い

補足:トービンの O と凸型調整費用

前節で q が投資の決定において重要なことは分かった.

- ▶ 問題点:限界的な概念は実証的に観察がほぼ不可能.
  - ▶ 限界トービンの q は,仮に 1 単位資本が増えたら,企業価値が増えるかどうか

Abel(1979) や Hayashi(1982) は、『特定の条件の下で、投資を判断するうえで平均的な指標 Q さえ見れば良い』ことを示した.

$$Q\equivrac{1}{1+r}rac{V(K)}{K}$$

特定の条件 (および前節の拡張)

- ▶ 条件:生産関数が1次同次
- ightharpoons 拡張:一次同次の調整費用関数  $\Phi(K_1,I)$  と資本の購入価格 p

# トービンの〇理論:モデル

投資 日野将志

2期間モデルの拡張として、次のように、投資をするためには調整費用  $\Phi(K_1, K_2)$  がかかるとする.

$$\pi_1 = F(K_1, H_1) - wH_1 - pI - \Phi(K_1, I)$$
 where  $I = K_2 - (1 - \delta)K1$   $\Phi_2(K_1, I) > 0$ ,  $\Phi_{22}(K_1, I) < 0$ ,  $\Phi(\cdot)$  は一次同次関数

調整費用の意味

- ▶ 投資  $I \neq 0$  をすると、費用  $\Phi$  を払わなければいけない
  - ▶ 資本を買うにも、売るにも費用がかかる
- ▶ 代表的な関数形の例:

$$\Phi(K_1,I)=rac{\phi}{2}\left(rac{I}{K_1}
ight)^2K_1=rac{\phi}{2}\left(rac{K_2-(1-\delta)K_1}{K_1}
ight)^2K_1$$

補足:トービンの O と凸型調整費用

$$egin{aligned} V(K_1) &= \max_{K_2, H_1, H_2} \, F(K_1, H_1) - w H_1 - p [K_2 - (1 - \delta) K_1] - \Phi(K_1, I) \ &+ rac{1}{1 + r} [\underbrace{F(K_2, H_2) - w H_2 + (1 - \delta) K_2}_{V(K_1)}] \end{aligned}$$

この一階の条件は.

$$K_2: rac{1}{1+r} [\underbrace{F_K(K_2, H_2) + (1-\delta)}_{=rac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}}] = p + \Phi_2(K_1, I)$$
 (1)

 $H_1: F_H(K_1, H_1) = w$ 

 $H_2: F_H(K_2, H_2) = w$ 

## 計算手順(1):労働の整理

### 補題

ある微分可能な関数 F(x) が n 次同次のとき、導関数  $F_x(x)$  は n-1 次同次にな る (証明は50)

この補題を使うと、 $F_H(K_t, H_t)$ は0次同次であることが分かる. したがって、次 のことが成り立つ.

 $\Rightarrow K_t = \hat{F}H_t$ 

$$w=F_H(K_t,H_t)=F_H(K_t/H_t,1)$$
 (両方の要素を  $H_1$  で割っている)

次に、 $F_H$  は単調 (減少) 関数なので、逆関数が取れる、したがって、  $rac{K_t}{H_t} = F_H^{-1}(w,1) \equiv \hat{F}$ 

このように 
$$K$$
 は  $H$  の線形関数であることが分かる.

日野将志

投資

補足: トービンの

O と凸型調整費用

# 計算手順(2): Kだけの問題の定義

さらにこれは生産関数の一次同次性より.

日野将志

投資

前頁の結果より、 $H_t$  を  $K_t$  に置き換えて最適化問題を定義できる.

 $V(K_1) = \max_{K_2} F(K_1, K_1 \hat{F}^{-1}) - w K_1 \hat{F}^{-1} - p [K_2 - (1 - \delta) K_1] - \Phi(K_1, I)$ 

補足:トービンの Oと凸型調整費用

 $egin{split} V(K_1) &= \max_{K_2} \, F(1,\hat{F}^{-1}) K_1 - w K_1 \hat{F}^{-1} - p [K_2 - (1-\delta) K_1] - \Phi(K_1,I) \ &+ rac{1}{1+r} [\underbrace{F(1,\hat{F}^{-1}) K_2 - w K_2 \hat{F}^{-1} + (1-\delta) K_2}_{K_2}] \end{split}$ 

 $+ \frac{1}{1+r} [\underbrace{F(K_2,K_2\hat{F}^{-1}) - wK_2\hat{F}^{-1} + (1-\delta)K_2}_{=V(K_2)}]$ 

と出来る.  $V(K_2)$  が  $K_2$  の線形関数となっていることが分かる.

 $V(K_2)$  が  $K_2$  の線形関数  $\hat{v}K_2$  と表せることが分かった. したがって、

$$q\equivrac{1}{1+r}rac{\partial V(K_2)}{\partial K_2}=rac{1}{1+r}\hat{v}=rac{1}{1+r}rac{V(K_2)}{K_2}\equiv Q$$

となることが分かる.

したがって、生産関数と調整費用が一次同次のとき、q が測定できずとも、Q をその代理変数 (proxy) として測定すれば十分であることを示している.

 $(コメント: なお V(K_1)$  が  $K_1$  の線形関数になることも示すことが出来る. 特に, 無限期間の時には,  $V(K_1)$  の線形性も示すことが必要になる. が, 今は必要ないので割愛.)

最も単純な投資

静学的な企業

2 期間問題:投資

トービンの Q 理 論:調整費用の無い 場合

補足:トービンの Q と凸型調整費用

q=Q を用いて (1) 式を再掲する. そして、再度、ゼロ次同次を使うと、次のように出来る.

$$egin{aligned} Q &= p + \Phi_2(K_1,I) \ &\Rightarrow Q &= p + \Phi_2(1,I/K_1) \ &\Rightarrow rac{I}{K_1} &= \hat{\Phi}_2^{-1}(Q-p) \end{aligned}$$

ここで  $\hat{\Phi}_2(I/K_1) \equiv \Phi_2(1,I/K_1)$  である. この式は回帰式の形になっている.  $F(x_1,x_2)$  が n 次同次なので、定義より次を満たす.

$$\lambda^n F(x_1,x_2) = F(\lambda x_1,\lambda x_2), \quad \forall \ x_1,x_2,\& \ \lambda > 0$$

したがって左辺と右辺の偏導関数は

$$rac{\partial \lambda^n F(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \lambda^n F_1(x_1,x_2) \ rac{\partial \lambda F(\lambda x_1,\lambda x_2)}{\partial x_1} = \lambda F_1(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

この左辺と右辺は常に等しいので.

$$egin{aligned} \lambda^n F_1(x_1,x_2) &= \lambda F_1(\lambda x_1,\lambda x_2) \ &\Rightarrow \lambda^{n-1} F_1(x_1,x_2) &= F_1(\lambda x_1,\lambda x_2) \end{aligned}$$