

# 基礎マクロ練習問題：ソローモデル

日野将志 \*

## 1 離散時間

### 1.1 生産性の成長のあるソローモデルの生産要素

スライドと同じケースで、

- $(r, w)$  をそれぞれ,  $\tilde{k}$  の関数として求めよ
- $(r, w)$  の定常状態での成長率を求めよ

### 1.2 生産性の成長のないソローモデル

生産関数は

$$Y = F(K, N)$$

とする。つまり、授業の場合と比較して、生産性  $A$  が  $A = 1$  と固定されている場合を考える。

$k = K/N$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

- 基本方程式を求めよ。
- 定常状態を  $k = k'$  と定義する。このとき定常状態で  $k$  はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の  $k$  が決まる条件を求めよ。

### 1.3 コブ・ダグラス型生産関数とソローモデル

コブ・ダグラス型の生産関数

$$Y = K^\alpha N^{1-\alpha}$$

を仮定する。

このとき次の問いに答えよ。

- $f(k) = k^\alpha$  となることを示せ
- 基本方程式を求めよ
- 黄金律の  $k$  を求めよ
- 黄金律の水準における、家計の一人当たりの消費水準を求めよ

---

\* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

## 1.4 人口成長

次のような人口成長を考える.

$$N' = (1 + n)N$$

つまり,  $n$  は人口成長率である. この  $n$  は外生変数とする. このとき, 次の問いに答えよ. なお, 生産関数は一般の形のまま (つまり,  $F$  や  $f$  のまま) とする.

- 基本方程式を求めよ. ただし,  $N$  が式中出现ないようにすること ( $n$  は出てきて良い).
- 黄金律の  $k$  が決まる条件を求めよ.

## 1.5 生産性の成長とコブ・ダグラス型生産関数

次のような生産性  $A$  を考える

$$Y = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$$

さらに, この生産性  $A$  は次のように成長するとする.

$$A' = (1 + a)A$$

したがって, この  $a$  は生産性の成長率である. このとき, 次の問いに答えよ. なお, 生産関数は一般の形のまま (つまり,  $F$  や  $f$  のまま) とする.

なお, 以降では  $k$  の代わりに  $\tilde{k} \equiv K/(AN)$  を用いて, 以下の問いに答えること.

- 生産性の成長のある生産関数は次のように分類される. このコブ・ダグラス型生産関数はいずれに分類されるか答えよ
  - ハロッド中立:  $F(K, AN)$
  - ヒックス中立:  $F(AK, N)$
  - ソロー中立:  $AF(K, N)$
- 基本方程式を求めよ. ただし,  $A$  が式中出现ないようにすること ( $a$  は出てきて良い).
- 定常状態を  $\tilde{k} = \tilde{k}'$  と定義する. このとき定常状態で  $k(\neq \tilde{k})$  はどのように動くか分析せよ
- 黄金律の  $\tilde{k}$  を求めよ. さらに  $a$  が変わるとどうなるか分析せよ.
- 黄金律における一人当たり消費  $C/N$  を求めよ.
- 定常状態における  $r$  と  $w$  の動きを分析せよ.

## 2 連続時間

### 2.1 連続時間化

離散時間モデル  $A_{t+1} = (1 + g)A_t$  の式を連続時間に直せ.

## 2.2 連続時間と離散時間の違い：コブ・ダグラス型関数の場合

$F(K, AN) = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$  とする.  $\dot{A}_t = aA_t$  と成長する.

連続時間において, 定常状態は  $\dot{k}_t = 0$  と定義される. このとき, 次の問いに答えよ.

- 黄金律の  $\tilde{k}$  を求めよ.
- 黄金律の  $\tilde{k}$  は離散時間の場合と異なるか? 比較・議論せよ.