基礎マクロ練習問題：企業投資

日野将志 *

1　生産技術

1.1　一次同次

以下の生産関数が一次同次かどうか答えよ．なお，一次同次ならば一次同次であることを示し，そうでないならば、そうでないことも示すこと．

何も言及しなければ，パラメータは正とする．

- $F(K) = \alpha K$
- $F(K,H) = \alpha K + (1-\alpha)H$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = \alpha K + \beta H$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = K^\alpha H^{1-\alpha}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = K^\alpha H^\beta$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = [\alpha K^\epsilon + (1-\alpha)H^\epsilon]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = [\alpha K^\epsilon + \beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする
- $F(K,H) = \min\{\alpha K, (1-\alpha)H\}$．なお，$\alpha \in (0,1)$ とする
- $F(K,H) = \min\{\alpha K, \beta H\}$．なお，$\alpha + \beta \neq 1$ かつとする

2　静学的な企業の選択

2.1　生産要素 1 つの場合

授業では，資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した．一方，ここでは労働だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，

$$F(K,H) = F(H) = H^\alpha$$

を考えてみる．$\alpha \in (0,1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH を行う必要があるとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．

---

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。

- 最適な H を求めよ．

2.2　生産要素 2 つの場合

2.2.1　曲率のある和

$$F(K,H)=F(H)=K^\alpha+H^\alpha$$

を考えてみる．$\alpha\in(0,1)$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K,H) を求めよ．

2.2.2　コブ・ダグラス

$$F(K,H)=K^\alpha H^\beta$$

を考えてみる．$\alpha+\beta\neq 1$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K,H) を求めよ．
- $Y=F(K,H)$ と生産量 Y を定義する．このとき，rK/Y および wH/Y を求めよ．
- K/H の比について議論せよ．例えば $r=w$ のときどうなるだろう．
- 仮に，$\beta=1-\alpha$ のときにどうなるか，1，2 行で議論せよ．

2.2.3　CES 関数

$$F(K,H)=[\alpha K^\epsilon+\beta H^\epsilon]^{1/\epsilon}$$

を考えてみる．$(\alpha,\beta)\in(0,1)$ かつ $\epsilon>0$ とする．

この労働には，賃金支払い wH と利子支払い rK を行う必要があるとする．一方，資本減耗率 δ はゼロとする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- この生産関数は CES(constant elasticity substitution) 関数と呼ばれる関数形である．この特徴は，代替の弾力性 (elasticity of substitution) が一定 (constant) であることである．次の代替の弾力性

$$\hat{\epsilon} \equiv \frac{\frac{d(K/H)}{(K/H)}}{\frac{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}} = \frac{\frac{d(K/H)}{d(F_H(K,H)/F_K(K,H))}}{\frac{K/H}{F_H(K/H)/F_K(K/H)}}$$

  を計算してみよ．
- 限界代替率 = 価格比の式を求め，次のケースを比較せよ．
  - CES 関数かつ $\epsilon \searrow 0$ のときの限界代替率と，コブ・ダグラスのときを比較せよ[*1]
  - CES 関数かつ $\epsilon \to 1$ のときの限界代替率と，線形 ($F(K,H) = K + H$) のときを比較せよ

3　2 期間問題

3.1　生産要素 1 つの場合

授業では，資本と労働の二つが生産に必要なケースとして導入した．一方，ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，生産関数が

$$F(K_t) = K_t^{\alpha}$$

という場合を考えてみる．$\alpha \in (0,1)$ とする．また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な K_2 を求めよ．

3.2　生産要素が 1 つの場合：調整費用

前の問題 (つまり $F(K_t) = K_t^{\alpha}$) に加えて，次のような調整費用 $\Phi(K_1, K_2)$ がある場合を考えてみよう．

$$\Phi(K_1, K_2) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{K_2 - (1-\delta)K_1}{K_1}\right)^2 K_1 = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I}{K_1}\right)^2 K_1$$

ここで $\phi > 0$ とする．この調整費用の意味は，$I \neq 0$ という (負を含む) 投資をするには企業は費用 $\Phi(\cdot)$ を支払う必要があることを意味している．また，前問と同様に $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．

- この調整費用関数が K_1 と K_2 に対して一次同次であることを確認せよ．
- $I > 0$ のとき，この調整費用関数が $\Phi_2(\cdot) > 0$ かつ $\Phi_{22}(\cdot) > 0$ であることを示せ．
- この調整費用関数があるときの最大化問題を書いてみよ
  - ヒント：スライドの補足を参考にすると良い

[*1] $\epsilon \searrow 0$ は「正の値 (つまり直観的には上) から 0 に近づく」という意味である．これは $\epsilon > 0$ だからこうしている．

- 最大化問題の一階条件を書いてみよ．
- この一階条件を調整費用がない場合 ($\phi = 0$ の場合) と比べて，どのように解が異なるか比べてみよ．

4　曲率のある線形和

$$F(K, H) = F(H) = K^{\alpha} + H^{\alpha}$$

を考えてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．調整費用はないとする．また $\delta = 0$ とする．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な (K_2, H_1, H_2) を求めよ．
- 最適な解を 2.2.1 の問題と比較せよ

4.1　3 期間問題

4.2　生産要素 1 つの場合

次に 3 期間あるとする．ここでは資本だけが生産要素として必要なケースを考えてみよう．例えば，生産関数が

$$F(K_t) = K_t^{\alpha}$$

という場合を考えてみる．$\alpha \in (0, 1)$ とする．また $K_1 > 0$ は企業にとって所与とする．また $\delta = 0$ としよう．

このとき，

- 最大化問題を書いてみよ．
- 最大化問題の一階の条件を求めよ．
- 最適な K_2 を求めよ．