基礎マクロ練習問題の**解答例**：消費 (難しい問題集)

日野将志 *

目次

* タイポや間違いに気付いたら教えて下さい.

分数が出たとき、分母が非ゼロであることは仮定する.

1　発展：複数財

1. 予算制約は,
$$c_1^a + c_1^b + s = y_1$$
$$c_2^a + c_2^b + s = y_2 + (1+r)s$$
である.
2 期目の予算制約を
$$\frac{1}{1+r}c_2^a + \frac{1}{1+r}c_2^b = \frac{1}{1+r}y_2 + s$$
として，1 期目の予算制約の両辺に足すと,
$$c_1^a + c_1^b + \frac{c_2^a}{1+r} + \frac{c_2^b}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$
と生涯予算制約が求まる.
2. またオイラー方程式は,
$$\frac{1}{c_1^a} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2^a}$$
$$\frac{1}{c_1^b} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2^b}$$
と 2 本求まる.
同時点の代替関係は，$t = 1, 2$ について,
$$c_t^b = \alpha c_t^a$$
となる.
3. オイラー方程式を生涯予算制約に代入すると,
$$c_1^a(1+\beta) + c_1^b(1+\beta) = Y$$
となる．さらに同時点の代替関係より,
$$(1+\beta)(1+\alpha)c_1^a = Y$$
$$\Rightarrow c_1^a = \frac{1}{(1+\beta)(1+\alpha)}Y$$
となる．これをオイラー方程式に代入すると,
$$c_2^a = \frac{\beta(1+r)}{(1+\beta)(1+\alpha)}Y$$
が得られる．さらに，同時点の代替関係より,
$$c_1^b = \frac{\alpha}{(1+\beta)(1+\alpha)}Y$$
$$c_2^b = \frac{\alpha\beta(1+r)}{(1+\beta)(1+\alpha)}Y$$

が求まる．

これはすべて y_1 と y_2 に対して，切片がない線形である．言い換えれば，財の比率 $c_t^a/(c_t^a+c_t^b)=\frac{1}{1+\alpha}$ となり，この消費の比率は所得から独立して決まることが分かる．

補足コメント：例えば，一般的に，貧しいと食費や住居費が所得に占める割合が非常に高くなるだろう．一方で，所得が高い人は，食費や住居費が所得の低い割合を占め，趣味等の割合が高くなるだろう．このモデルではそうはならず，「所得の一定割合を a,b 財に割り振る」となっていることに注意してほしい．

4. この消費関数から明らかなように，これは，まず a 財と b 財を合成した財 c_t を考え，その消費関数 c_t を求めた上で，$\frac{1}{1+\alpha}$ 割合を a 財に割り当て，$\frac{\alpha}{1+\alpha}$ 割合を b 財に割り当てるのと同じである．

   補足コメント：これは (マクロの) 動学的な問題と (ミクロの) 一期間は切り離して考えても問題ないとも解釈できる．つまり，もし動学的な事象，例えば経済成長，景気変動のみに興味があるなら，合成した１つの財のみ考えれば十分である．もし各財への分配が気になるなら，合成した財の中から比重 (weight) だけ計算すれば事足りる．[*1]

5. オイラー方程式は，

$$\frac{1}{c_1^a}=\beta(1+r)\frac{1}{c_2^a}$$
$$\frac{1}{c_1^b+\epsilon}=\beta(1+r)\frac{1}{c_2^b+\epsilon}$$

   となる．同時点の代替関係は，$t=1,2$ については，

$$\frac{1}{c_t^a}=\alpha\frac{1}{c_t^b+\epsilon}$$

   である．

6. オイラー方程式を生涯予算制約に代入すると，

$$c_1^a(1+\beta)+c_1^b(1+\beta)+\epsilon[\beta-\frac{1}{1+r}]=Y$$

   となる．さらに同時点の代替関係を代入すると，

$$\left[\frac{c_1^b+\epsilon}{\alpha}+c_1^b\right](1+\beta)=Y-\epsilon\left[\beta-\frac{1}{1+r}\right]$$
$$\Rightarrow c_1^b=\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}Y-\left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}\left(\beta-\frac{1}{1+r}\right)+\frac{1}{1+\alpha}\right]\epsilon$$

   と c_1^b の消費関数が得られる．再度，同時点の代替関係を使うと，

$$\begin{aligned}c_1^a&=\frac{c_1^b}{\alpha}+\frac{\epsilon}{\alpha}\\&=\frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}Y-\left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}\left(\beta-\frac{1}{1+r}\right)+\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right]\epsilon\end{aligned}$$

   さらにオイラー方程式より，

$$c_2^a=\frac{1}{1+\alpha}\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}Y-\beta(1+r)\left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}\left(\beta-\frac{1}{1+r}\right)+\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right]$$

[*1] なお，この主張は，効用関数の関数形と相対価格に依存する．ここでは効用関数の役割について次の問題で確認する．

と a 財に関する消費関数が求まる．最後に c_2^b に関しては，c_1^b とオイラー方程式を用いて，

$$c_2^b = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{\beta(1+r)}{1+\beta}Y - \left[\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}\left(\beta - \frac{1}{1+r}\right) + \frac{1}{1+\alpha}\right]\epsilon + \beta(1+r)\epsilon - \epsilon$$

消費関数は Y と線形の関係にあるが，いずれの消費関数も ϵ によって切片が加わっていることが分かる．切片があるため，消費の比率も Y に依存するようになる (これは次の問題で確認しよう)．
なお，細かい点を言えば，Y が十分に小さければ，各消費の第二項以降の方が Y の項よりも大きくなり，$c_t^i < 0$ となる可能性が出てきてしまう．その場合，$c_t^i \geq 0$ となるように場合分けが必要である．しかし，ここでは，Y は十分に大きいため，その場合分けには立ち入る必要はない．

7. $\beta(1+r) = 1$ と仮定すると，

$$c_1^a = \frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}Y + \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\right]\epsilon$$
$$c_1^b = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{1}{1+\beta}Y - \frac{1}{1+\alpha}\epsilon$$

なお $\alpha > 0$ なので，$\frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\alpha}$ である．これは，表記を単純化すると，

$$c_1^a = AY + B\epsilon$$
$$c_1^b = \alpha AY - \frac{1}{1+\alpha}\epsilon$$

と書ける．なお $B > 0$ である．
念のため，消費の比率を確認すると，

$$\frac{c_1^a}{c_1^a + c_1^b} = \frac{AY + B\epsilon}{AY + B\epsilon + \alpha AY - \frac{1}{1+\alpha}\epsilon}$$

となる．もし，$\epsilon = 0$ であれば，$\frac{c_1^a}{c_1^a + c_1^b} = \frac{1}{1+\alpha}$ と Y と独立になるが，$\epsilon \neq 0$ のとき，この消費の比率は Y から独立にはならないことが分かる．
それぞれの消費の所得弾力性は，

$$\epsilon_{a,Y} = \frac{\partial c_1^a}{\partial Y}\frac{Y}{c_1^a} = \frac{AY}{AY + B\epsilon} \in (0,1)$$
$$\epsilon_{b,Y} = \frac{\partial c_1^b}{\partial Y}\frac{Y}{c_1^b} = \frac{\alpha AY}{\alpha AY - \frac{1}{1+\alpha}\epsilon} > 1$$

となる．したがって，a 財は必需品であり，b 財は奢侈品である．さらにもし $\epsilon = 0$ のとき，どちらの財も弾力性は 1 となる．
補足コメント：なお，所得弾力性が 1 より大きいとは，所得が 1% 増加したとき，消費が 1% 以上増えることを意味する．先ほどの補足コメントと関連させると，非常に貧しい人は，おそらく趣味にお金を割くことは厳しいだろう．一方で，裕福になると，趣味や好きなモノのコレクションに所得の多くの割合が割けるようになるだろう．

コメントおよび問題の主旨：これまで 1 財モデルを基本的に説明してきた．この理由は，イントロの授業でも説明したようにマクロ経済では集計した変数に主要な関心があり，個別の財の消費の構成は重要度が下がるためである．そのため，分析を単純に保つために 1 財モデルを使ってきた．しかし，それでは不安を感じる学生もいるだろう．

そこで，ここでは，まず「ホモセティック効用関数 (の一例として対数効用) と相対価格が一定のとき，消費の構成の比率 $c_t^i/(c_t^a + c_t^b)$ は所得と独立して決定する」ことを学んだ．この結果，「(仮にホモセティックな選好と相対価格が変わらない世界を考えるならば，) マクロでは集計変数のみに注目し，個別財への比率は別のこととして考えれば十分」と解釈することが出来る．一方，非ホモセティック関数の $\log(c^a) + \alpha \log(c^b + \epsilon)$ の場合，消費の構成比率が所得に依存し，所得弾力性も 1 とならないことを確認した．

マクロで考えた時，現実には，経済が発展するほど，高級な新製品の開発が発展する．それが戦後発展の時期は，“3 種の神器” の家電 (冷蔵庫，洗濯機，テレビ) であり，現代では，大型のテレビ，ハイエンドのスマホやドラム式洗濯機等が考えられるかもしれない．これは家計が豊かになればなるほど，こういった高級なものにお金を支出する余裕が出ることが一因と考えられるだろう．

1.0.1　複数財：おまけ

実はこの問題は解析的に解くことが出来ない．

実際，一階条件は，

$$c^{-\sigma} = pd^{-\nu}$$

となり，これを d について解いて予算制約に代入すると，

$$pc + pc^{\frac{\sigma}{\nu}} = I$$

となる．これは c について解析的に解くことが出来ない．

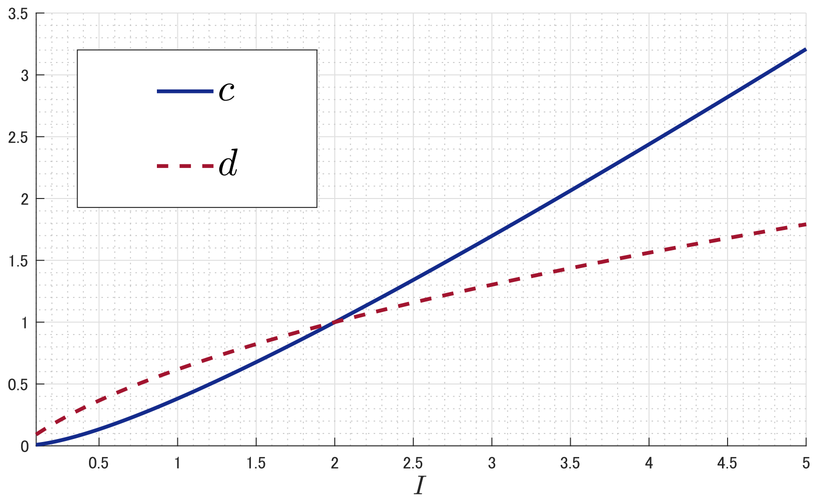
こういった場合，数値計算が役に立つ．数値的に解くことで，消費関数 $c(p, I)$ と $d(p, I)$ を解くことが出来る．ここではこの数値計算には触れないが，経済的な結果と直感を解説しよう．

図 1.1 は消費関数を数値計算によって得た場合を描いている．ここでは横軸に所得 I をおいた，所得消費曲線を描いている．図 1.1 で興味深いのは，所得 I が小さい間は d の所得のほうが c よりも大きいが，所得 I が大きくなればこの関係は逆転することである．所得 I が大きくなるほど，c は増えるが，相対的に d が減っている．これも c が奢侈財になっていることを表している．

数学的には，$\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ と $\frac{d^{1-\eta}}{1-\eta}$ を比べると，十分に所得が増えると d のほうが concavity が高いので，d を増やしても限界効用が上がらない構造になっている．そのため，d よりも c を積極的に増やすようになる．

これまでの効用関数から得られた消費関数はいずれも Y に線形であった．これは静学な予算制約にしても買わない．特に，Stone-Geary 以外の効用関数 (対数，CRRA，CARA，2 次) から得られる所得消費曲線は原点から伸びる直線となる．

図 1.1　非線形な所得消費曲線



2　発展：借入制約

1. 最大化問題は，$s \geq 0$ を追加して書けばよい．つまり，

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s}\ & \log(c_1)+\beta\log(c_2)\\ \text{s.t. } & c_1+s=y_1\\ & c_2=y_2+(1+r)s\\ & s\geq 0\end{aligned}$$

である．例えば，

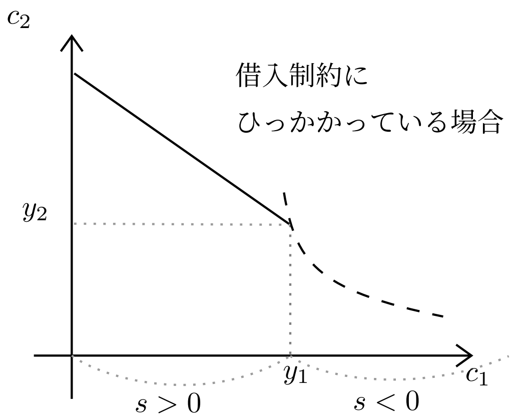
$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s\geq 0}\ & \log(c_1)+\beta\log(c_2)\\ \text{s.t. } & c_1+s=y_1\\ & c_2=y_2+(1+r)s\end{aligned}$$

と max オペレータの下に書いても良い．
なお，$s \geq 0$ という借入制約を，1 期の予算制約に代入すると，$c_1 \leq y_1$ となることも分かる．つまり，「借入できない」ことは，「1 期において所得より大きな消費は出来ない」ことと同じことを意味する．同様に 2 期について考えると，$c_2 \geq y_2$ となる．つまり，借入できないことは「2 期においては所得以上の消費しか出来ない」ことと同じであることが分かる．
このような知識を使うと，借入制約があるときの図示が理解しやすくなる．まず予算制約は，

$$c_2=\begin{cases}(1+r)y_1+y_2-(1+r)c_1 & \text{if } y_1\leq c_1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となっており，$c_2 = y_2$ の点で切れていること分かる．この点が $s \gtreqless 0$ となる境界である．これを図示したのが図 2.1 であり，特に家計は借入制約にひっかかっている状況を図示している．そして，図の中の右側，すなわち，$c_1 > y_1$ の領域では，家計の無差別曲線が予算制約と接する点で，無差別曲

図 2.1　借入制約にひっかかっている場合



線と予算制約の傾きが一致していないことが視覚的にも分かる．すなわち，借入制約にひっかかっているとき，「無差別曲線の傾き > 予算制約の傾き」となっている．

2. この解答は授業スライドにも載っている．

$$(c_1, c_2, s) = (c_1^*, c_2^*, s^*) \equiv \left(\frac{1}{(1+\beta)} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right], \frac{\beta(1+r)}{(1+\beta)} \left[y_1 + \frac{y_2}{1+r} \right], \frac{\beta(1+r)y_1 - y_2}{(1+\beta)(1+r)} \right)$$

と定義できる．

3. ここからが重要である．場合分けによって解いていく必要がある．制約式を目的関数に代入すると，

$$\max_{s \geq 0} \ \log(y_1 - s) + \beta \log([1+r]s + y_2)$$

となる．

そして一階条件は，$s \geq 0$ の場合であれば，借入制約が問題とならないので，これまでどおり，「微分してゼロ」で良く，

$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1+r}{[1+r]s + y_2}$$

となる．一方，借入制約にひっかかってしまう場合，$s < 0$ は取れないので，

$$s = 0$$

となる．

4. さきほどの一階条件を用いると，$s \geq 0$ の場合，

$$s = \frac{1}{1+\beta} \left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r} \right] = s^*$$

となり，そうでなければ，

$$s = 0$$

となる．

これをまとめて表記すると，

$$s = \begin{cases} s^* & \text{if } s^* \geq 0 \\ 0 & \text{if } s^* < 0 \end{cases}$$

となる．もしくは，別の表記法を用いると

$$s = \max\{s^*, 0\}$$

や

$$s = \mathbb{1}_{s \geq 0}\ s^*$$

という表記を使っても解答できる．$s = \max\{s^*, 0\}$ とは「s^* と 0 のどちらか大きい方」という意味である．$\mathbb{1}$ とは指示関数 (indicator function) と呼ばれ，下付きの条件を満たしたときに 1 を取り，それ以外では 0 を取る関数である．ここでは，「$s \geq 0$ のとき 1 をとり，それ以外 (つまり $s < 0$) では 0 を取る」関数になっている．様々な記法になれておくと，後々の学習で便利である．
どの解答でも意味は同じである．

5. $\beta = 1$ かつ $r = 0$ なので，$\beta(1+r) = 1$ である．このとき，

$$s^* = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

となる．したがって，

- $(y_1, y_2) = (2, 1)$ ならば，$s^* = (2-1)/2 = 1/2$ である．これは正なので，$s = 1/2$ である．
- $(y_1, y_2) = (1, 2)$ ならば，$s^* = (1-2)/2 = -1/2$ である．これは負なので，借入制約に引っかかる．そのため $s = 0$ である．

(y_1, y_2) の値を特定しない場合，一般に，$s^* = (y_1 - y_2)/2$ であるため，

$$y_1 \gtreqless y_2 \ \Leftrightarrow\ s^* \gtreqless 0$$

と，$y_1 > y_2$ ならば，そのときのみ $s^* > 0$ のような関係が分かる．不等号の向きが逆の時もしかりである．
これは，当たり前であるが，「今期の所得が来期よりも多いならば，貯蓄をする．このときには借入制約が問題とならない」が，「今期の所得が来期よりも小さいならば，借金をしたい．しかし，借入制約のせいで借金ができない」という風になっている．

6. これまで確認してきたように，$s^* = 0$ かどうかは重要な場合分けが生じてくる．より一般的に，どのようなパラメータの場合に $s^* = 0$ となるかを確認するのがこの問題の狙いである．
そして，これは次のようにすれば求まる．

$$\begin{aligned} & s^* \gtreqless 0 \\ & \Rightarrow \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r}\right] \gtreqless 0 \\ & \Rightarrow \beta(1+r) \gtreqless \frac{y_2}{y_1} \end{aligned}$$

つまり，$\beta(1+r) = \frac{y_2}{y_1}$ という条件が満たされるとき，$s^* = 0$ となり．左辺が大きいときは，$s^* > 0$，右辺が大きいときは，$s^* < 0$ となる．
この左辺 $\beta(1+r)$ は消費を 1 期先延ばしするときの純利益のような項である．一方，右辺 y_2/y_1 は所得の成長率を表す項である．つまり，消費の先延ばしの純利益と所得の伸び率が同じ時には $s^* = 0$ となることが分かる．

7. 次に消費関数を求めよう．このときも借入制約がひっかかるかどうかの場合分けが重要になる．まず，借入制約がひっかからず正の貯蓄をしているならば，c_1 は c_1^* となることが，直ちに分かる．一方，借入制約がひっかかる場合は予算制約を見れば良い．つまり，$s = 0$ のとき，1 期目の予算制約は

$$c_1 = y_1$$

となる．
これをまとめると，

$$c_1 = \begin{cases} c_1^* & \text{if } s > 0 \\ y_1 & \text{if } s = 0 \end{cases}$$

となる．なお，先ほど，$s^* = 0$ になる条件を求めたので，条件付けを内生変数の s ではなくて，パラメータのみによって書くこともできる．つまり，これは

$$c_1 = \begin{cases} c_1^* & \text{if } \beta(1+r) > \frac{y_2}{y_1} \\ y_1 & \text{if } \beta(1+r) \leq \frac{y_2}{y_1} \end{cases}$$

と書くと，より正確である．
また同様に c_2 も借入制約にひっかかるかどうかが重要になる．もし借入制約にひっかからず正の貯蓄をしているならば，$c_2 = c_2^*$ である．一方，もし借入制約がひっかかっているならば，$s = 0$ である．このとき，2 期目の予算制約より，

$$c_2 = y_2$$

となる．
これをまとめると，

$$c_2 = \begin{cases} c_2^* & \text{if } \beta(1+r) > \frac{y_2}{y_1} \\ y_2 & \text{if } \beta(1+r) \leq \frac{y_2}{y_1} \end{cases}$$

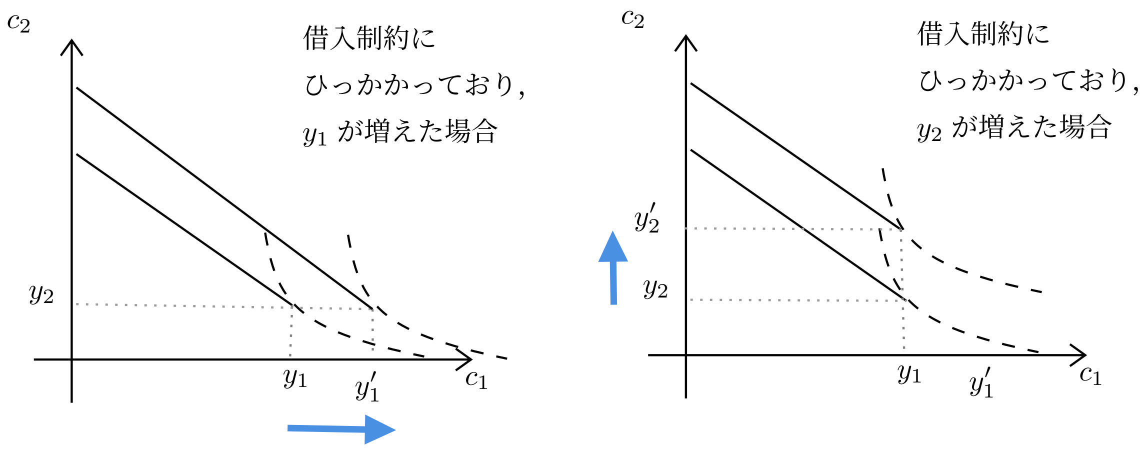
となる．

8. 最後に借入制約が引っかかる場合の限界消費性向を求める．このとき $(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ である．そのため，

$$\frac{\partial c_1}{\partial y_1} = 1$$
$$\frac{\partial c_1}{\partial y_2} = 0$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial y_1} = 0$$
$$\frac{\partial c_2}{\partial y_2} = 1$$

となる．このように，t 期の所得増加は，そのまま t 期の消費を増やすようになる．
このように，借入制約にひっかかっている場合，限界消費性向は 1 となり，とても高くなる．これは借入制約があるときの重要な帰結なので，是非覚えておいてほしい．

図 2.2　借入制約にひっかかっているとき：所得の増加



9. 図示 (オプショナル)
   所得が増えた時も図示しておく．図 2.2 は借入制約にひっかかっている状況で，y_1 が増えた場合と，y_2 が増えた場合をそれぞれ図示している．まず左図の y_1 が増えた場合を見てみると，このとき c_1 のみが増えており，c_2 は変わっていないことが分かる．右図も同様に y_2 が増えた場合には c_2 のみが増えている．このように，借入制約にひっかかっている状況では，y_t の増加は c_t の増加をもたらす．

コメントおよび問題の主旨：この問題の主旨は主に二つある．まずは，数学的な観点からは不等式制約をどのように対処するか一例を見せることである．すこしレベルが上がると，ラグランジュ未定乗数法を応用した，カルーシュ・クーン・タッカー条件 (KKT 条件, Karush-Kuhn-Tucker condition) を学び，KKT 条件を使うともっと楽に解けるようになるだろう．

経済学的な観点からは，借入制約は非常に重要かつ頻繁に登場する制約であるため，取り扱った．借り入れが現実には簡単にできないという事例も重要であり，借入制約の結果，限界消費性向が高まるという結論も非常に重要である．また，借入制約に制限されているような家計の消費関数は $c_t = y_t$ となっており，今期の所得だけで決まっていることが分かる．この意味で，借入制約に制限されているような家計はケインジアン的な消費関数に似ている側面がある．

さらに金融経済学の観点からは，「借り入れが自由にできるか否か」で様々な経済学の定理が成り立つかどうかが変わることが知られている．このように実証的・理論的観点からも，進んだマクロ・金融経済学では借入制約は非常に重要なモデルになる．

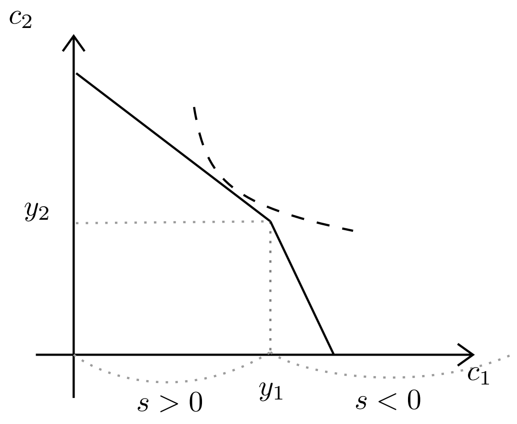
2.1

解答省略：本質的には，上記の解答通りの手続きで解答が得られるはずである．

2.2　発展：利子率の違い (とても難しい)

1. 複数の最大化問題の書き方が考えられる．

図 2.3　貸借で利子率に違いがあるとき



例えば，最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s}\ & \log(c_1) + \beta\log(c_2)\\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1\\ & c_2 = y_2 + (1+r^l)s \quad \text{if } s \geq 0\\ & c_2 = y_2 + (1+r^h)s \quad \text{if } s < 0\end{aligned}$$

と書くことができる.
もしくは,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s}\ & \log(c_1) + \beta\log(c_2)\\ \text{s.t. } & c_1 + s = y_1\\ & c_2 = y_2 + (1+r(s))s\end{aligned}$$

と書いて $r(s)$ の説明を書いても良い．私は $r(s)$ の説明は問題文でしているので省略する．後者の定式化の方が，次の小問に答える際には便利かもしれない.
貸借で利子率に違いがあるとき，次のような図が描ける．この予算制約は,

$$c_2 = \begin{cases}(1+r^l)y_1 + y_2 - (1+r^l)c_1 & \text{if } c_1 \leq y_1\\ (1+r^h)y_1 + y_2 - (1+r^h)c_1 & \text{if } c_1 > y_1\end{cases}$$

となっている．図を見ると，予算制約は連続関数であり，$c_1 = y_1$ で微分不可能な点を持つことが分かる

2. 目的関数に予算制約を代入すると,

$$\max_s\ \log(y_1 - s) + \beta\log([1 + r(s)]s + y_2)$$

となる.
一階条件は,

$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta\frac{1 + r(s)}{[1 + r(s)]s + y_2}$$

である.

場合分けをして書くと，

$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1+r^l}{[1+r^l]s + y_2} \quad \text{if } s \geq 0$$
$$\frac{1}{y_1 - s} = \beta \frac{1+r^h}{[1+r^h]s + y_2} \quad \text{if } s < 0$$

である．

3. 一階条件を解くと

$$s = \begin{cases} \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r^l}\right] & \text{if } s \geq 0 \\ \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r^h}\right] & \text{if } s < 0 \end{cases}$$

が得られる．ここで，二つの条件は，

$$\frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1 \quad \text{iff } s > 0 \tag{2.1}$$
$$\beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h} \quad \text{iff } s < 0 \tag{2.2}$$

と言い換えることが出来る[*2]．そして，$r^l < r^h$ より，

$$\frac{1}{1+r^h} < \frac{1}{1+r^l}$$

が満たされる．したがって，$\frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l}$ のときを考える必要がある．このとき，もし $s > 0$ ならば (2.1) に反し，$s < 0$ ならば (2.2) に反する．そのためこのとき $s = 0$ でなければならない．

したがって，現時点で分かったことをまとめると，次のようになる．

- $\frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1$ のとき：
$$s = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r^l}\right] > 0$$
- $\beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h}$ のとき：
$$s = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta y_1 - \frac{y_2}{1+r^l}\right] < 0$$
- $\frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l}$ のとき：
$$s = 0$$

このように 3 種類の場合分けをして最適な貯蓄関数が決まることに注意してほしい．

問題では要求していないが，この意思決定を視覚的に分類したのが図 2.4 である．このように，$\frac{y_2}{\beta(1+r^h)}$ と $\frac{y_2}{\beta(1+r^l)}$ が二つの閾値となって，y_1 がどこに位置するかで $s \gtreqless 0$ のいずれになるかが決まる．

4. 上で確認したように貯蓄関数は 3 つの場合によって異なる．したがって，消費も同様に影響を受ける．

1 期の消費関数は，1 期の予算制約に貯蓄関数を代入すれば直ちに求まる．すなわち，

$$c_1 = \begin{cases} \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^l}\right] & \text{if } \frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1 \\ y_1 & \text{if } \frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l} \\ \frac{1}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^h}\right] & \text{if } \beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h} \end{cases}$$

[*2] iff とは必要十分 (IF and only iF) であることを意味する．

図 2.4　貯蓄の場合分け

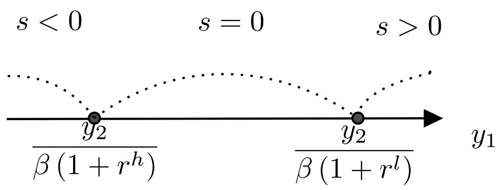
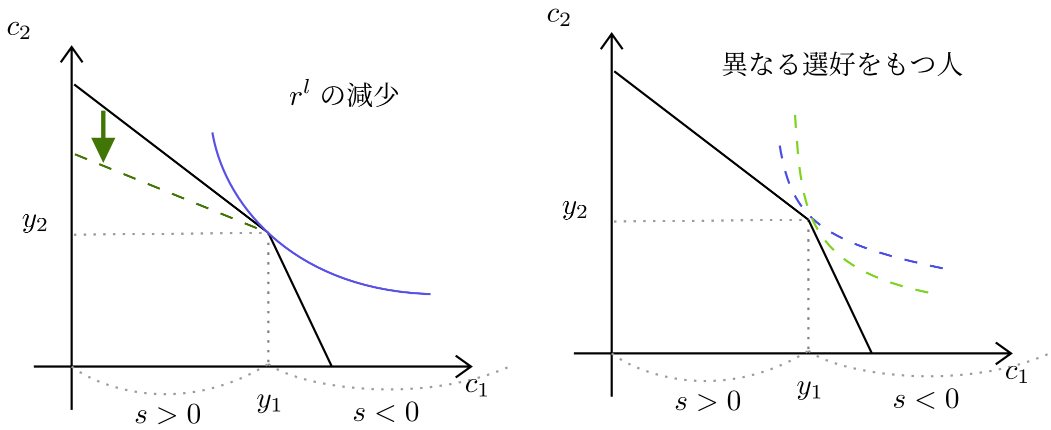


図 2.5　貯蓄関数や消費関数が 3 つの場合分けになる理由



2 期目の消費関数を求める際は，予算制約に場合分けがあることに注意する必要がある．

$$c_2 = \begin{cases} \frac{\beta(1+r^l)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^l}\right] & \text{if } \frac{y_2}{1+r^l} < \beta y_1 \\ y_2 & \text{if } \frac{y_2}{1+r^h} \leq \beta y_1 \leq \frac{y_2}{1+r^l} \\ \frac{\beta(1+r^h)}{1+\beta}\left[y_1 + \frac{y_2}{1+r^h}\right] & \text{if } \beta y_1 < \frac{y_2}{1+r^h} \end{cases}$$

となる．

問題では要求していないが，このように $(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ が重要な意思決定であることを視覚的に説明しよう．図 2.5 では，二つの例によって，$(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ におけるキンクが，解として重要なことを描いている[*3]．例えば左図では r_l が下がった例を描いている．通常のモデルであれば，予算制約の傾きが変われば，意思決定も変化するが，この例では，$(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ から変化していない．また，右図では，異なる無差別曲線を 2 種類描いているが，どちらも $(c_1, c_2) = (y_1, y_2)$ となっている．通常のモデルでは，異なる無差別曲線を持ち，予算制約が同じとき，異なる消費を選ぶ．その点でもこのモデルは特異である．

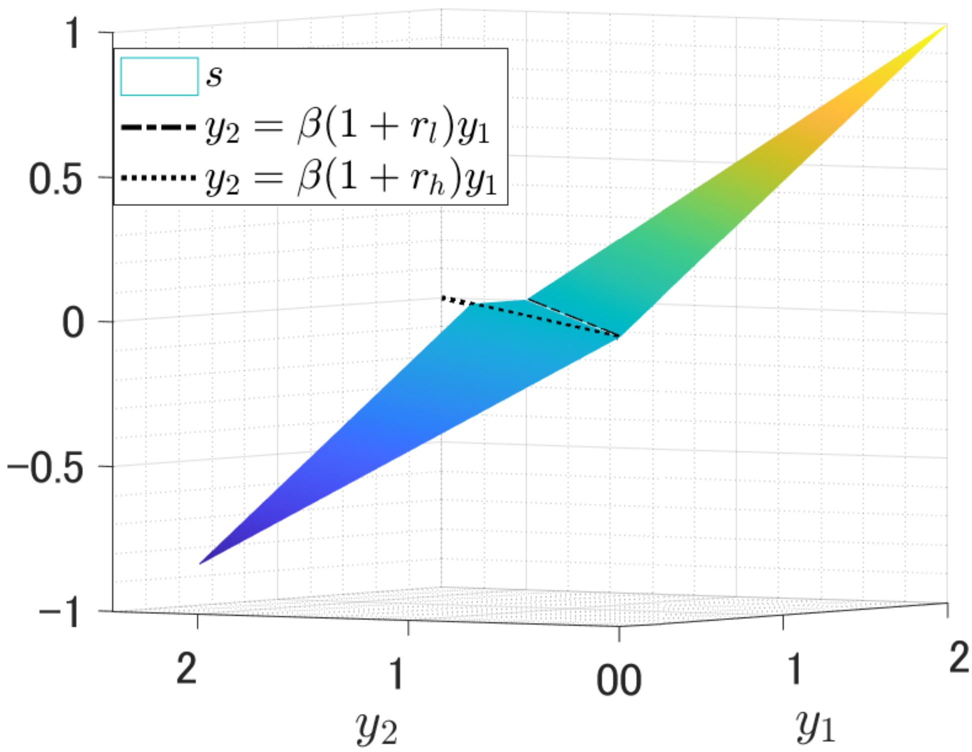
また貯蓄関数も図示しておくと図 2.6 のようになる．見て分かるように，$s = 0$ の領域で平面な領域を持つ．

コメントおよび問題の主旨：このモデルは，かなり難しいモデルである．このように「ある変数 (ここでは貯蓄) が正のときと，負の時で違う」という制約は投資理論では伝統的によく使われてきた制約である．投資分野では非可逆性制約と呼ぶ．非可逆性制約は投資の分野でも扱うことにする．

この問題の狙いは，このように少しだけ現実っぽい要素を入れてみると，途端にモデル分析が複雑になる

[*3] 直線や曲線がゆがみを持つことをキンク (kink) すると呼ぶことがある．これは正式な学術用語というよりは分野でよく使う jargon である．

図 2.6 貯蓄関数：貸借で利子率が違う場合



ことがあることを紹介することである．特に，今回のように非線形・非連続・非凸な制約を導入するとモデル分析が複雑になることが多い．

3　発展：Two Type Agent Model とケインズ消費関数

1. 個々の Savers と Spenders の消費関数はそれぞれ簡単に求まる．Savers は，当然，

$$c_1 = \frac{1}{1+\beta}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}\right]$$

である．一方，Spenders の消費関数は，既に問題で与えられており，

$$\hat{c}_1 = Y_1$$

この問題は 2 種類の家計を集計することを求めている．それぞれの家計は μ と $1-\mu$ だけ存在するので，総消費を C_1 と書くと，

$$C_1 = \mu c_1 + (1-\mu)\hat{c}_1 = \frac{\mu}{1+\beta}\left[Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}\right] + (1-\mu)Y_1$$

となる．

2. 求めた消費関数の Y_1 に関する微分を取るだけで良い．つまり，

$$\frac{\partial C_1}{\partial Y_1} = \mu\frac{1}{1+\beta} + (1-\mu)$$

である．

3. これは μ が小さくなるほど，大きくなる．なぜなら，そもそも Spenders のほうが限界消費性向が高く，μ が小さくなるほど，その高い限界消費性向を持つ Spenders が経済に占める割合が多くなるためである．

コメントおよび問題の主旨：このモデルは，ケインズ型消費関数と 2 期間の消費関数を組み合わせたモデルの紹介である．その意味で，これまでの知識の応用問題になっていると思われる (集計は教えていないが，それは均衡の部分で教える)．

また，数多くの研究では「データと比較した時，(2 期間モデルをさらに長期にした) モデルでは限界消費性向が低く出過ぎてしまう」という問題が指摘されてきた．そこで，このように「稼いだお金をすぐに使い切ってしまう家計」という Spenders を考慮することでモデルの限界消費性向を高くする工夫が 1989 年時点でされた[*4]．このモデルの良いところは学部の知識の組み合わせで，現実に近いことが出来ることである．

4　発展：恒常所得と消費：遺産の役割

1. 2 期目の予算制約は，

$$c_2 + s_2 = (1+r)s_1 + y_2$$

となる．なお s_1 は 1 期目の貯蓄である．ここでは，通常の 2 期間モデルと異なり，s_2 が左辺に登場している．

[*4] 英語では「その日暮らし」という意味で Hand-to-Mouth という語がよく使われる

これまでのモデルでは，「2 期目が終わるとき (つまり死ぬとき) にお金を残すくらいなら，c_2 として全部消費してしまった方が良い」という観点から，$s_2 > 0$ は排除し $s_2 = 0$ と導かれていた．また，$s_2 < 0$ と借金を残して死ぬことを許してしまうと，無限大に借金をして死ぬという端点のような解が最適になる．これも排除していた．しかし，このモデルでは遺産を残すことによって効用を感じるので，死ぬときにお金を残すこと自体に価値がある．したがって，s_2 を予算制約の左辺に置く必要がある．

2. 生涯予算制約は,

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} + \frac{s_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

となる．これまでは，平たく言えば「消費の (割引現在価値の) 総和 = 恒常所得」であったが，このモデルでは s_2 のせいでそうならない事が分かる．

3. 最大化問題は,

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s_1,s_2} \quad & \log(c_1) + \beta\log(c_2) + \beta B\log(s_2) \\ \text{s.t. } & c_1 + s_1 = y_1 \\ & c_2 + s_2 = (1+r)s_1 + y_2\end{aligned}$$

である．

予算制約を目的関数に代入すると,

$$\max_{s_1,s_2} \ \log(y_1 - s_1) + \beta\log((1+r)s_1 + y_2 - s_2) + \beta B\log(s_2)$$

である．それぞれ s_1 と s_2 について微分を取ると,

$$\begin{aligned} s_1 \ &: \frac{1}{y_1 - s_1} = \beta(1+r)\frac{1}{(1+r)s_1 + y_2 - s_2} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2} \\ s_1 \ &: \beta\frac{1}{(1+r)s_1 + y_2 - s_2} = \beta B\frac{1}{s_2} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{c_2} = B\frac{1}{s_2}\end{aligned}$$

となる．したがって，2 本目の式より $s_2 = Bc_2$ となることが分かる．さらにオイラー方程式より，$c_2 = \beta(1+r)c_1$ であるため，これらを生涯予算制約に代入すると,

$$\begin{aligned} c_1 + \beta c_1 + B\beta c_1 &= Y \\ c_1 &= \frac{1}{1+\beta+B\beta}Y\end{aligned}$$

となる．

この消費関数は以前として恒常所得の比例関数になっている．したがって，素朴に遺産を導入しただけでは，問題文の最初に述べたような「現実では消費関数は恒常所得に対して比例的ではない」ということが説明できないことが分かる．

なお，$B = 0$ とおくと，標準的な 2 期間モデルの解と一致することが分かる．

4. s_2 は,

$$s_2 = B\frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta B}Y > 0$$

と求まる．したがって，このモデルでは，どんな Y の家計であっても遺産を残すモデルになっている．

5. 最大化問題は，

$$\begin{aligned}\max_{c_1,c_2,s_1,s_2} \quad & \log(c_1) + \beta\log(c_2) + \beta B\log(s_2+\epsilon)\\ \text{s.t.}\ & c_1 + s_1 = y_1\\ & c_2 + s_2 = (1+r)s_1 + y_2\end{aligned}$$

である．

予算制約を目的関数に代入して，それぞれ s_1 と s_2 について微分を取ると，

$$\begin{aligned} s_1\ &: \frac{1}{y_1-s_1} = \beta(1+r)\frac{1}{(1+r)s_1+y_2-s_2} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{c_1} = \beta(1+r)\frac{1}{c_2}\\ s_1\ &: \beta\frac{1}{(1+r)s_1+y_2-s_2} = \beta B\frac{1}{s_2+\epsilon} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{c_2} = B\frac{1}{s_2+\epsilon}\end{aligned}$$

となる．すると，2 本目の式より，$s_2 = Bc_2 - \epsilon$ となる．すると，再度，生涯予算制約に諸々代入すると，

$$\begin{aligned} c_1 + \beta c_1 + B\beta c_1 - \frac{\epsilon}{1+r} &= Y\\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{1+\beta+\beta B}\left[Y + \frac{\epsilon}{1+r}\right]\end{aligned}$$

このように，非ホモセティックな効用関数 (Stone-Geary 型) を仮定すると，消費関数が恒常所得の比例関数ではなく，切片のある一次関数になることが分かる．

6. s_2 は，

$$\begin{aligned} s_2 &= B\frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta B}\left[Y + \frac{\epsilon}{1+r}\right] - \epsilon\\ &= B\frac{\beta(1+r)}{1+\beta+\beta B}Y + \left[\frac{\beta B}{1+\beta+\beta B} - 1\right]\epsilon\end{aligned}$$

と求まる．なお，第二項の括弧内は $\beta B/(1+\beta+\beta B) < 1$ を満たす．したがって，十分に ϵ が大きいとき，このモデルでは s_2 が負になることもあり得る．言い換えれば，裕福な家計 (大きな Y を持つ家計) は遺産を残し，貧しい家計 (小さな Y を持つ家計) は負債を残すことが，このモデルでは生じる．

コメントおよび問題の主旨：遺産は世代間における重要な富の移転であり，社会の階層の固定化に直接的に繋がる重要な要素である．したがって遺産自体が経済にとって重要なので，それを学ぶための問題であった．

また，モデルを工夫しないと「すべての家計が遺産を残す」というような不思議な結果が出てくることをまず確認してもらい，その後，非ホモセティック効用を用いてこのような不思議な結果を解決する方法を紹介した．