基礎マクロ練習問題解答例：数学

日野将志 *

1　微分の計算

1. $f'(x) = 0$
2. $f'(x) = a/x$
3. $f'(x) = x^{-a}$
4. $f'(x) = ax^{a-1}y^b$
5. $f'(x) = [x^a + y^a]^{1/a-1}x^{a-1}$
6. $f'(x) = \exp(-ax)$

2　最適化と高階の微分

1. 目的関数が

$$\log x - 2x$$

のとき，この一階の条件 (微分して 0 の条件) は

$$\frac{1}{x} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

である．さらに，二階の条件を調べると，

$$-\frac{1}{x^2} < 0$$

であるから，これは上に凸であることが分かる．したがって，これは $x = 1/2$ で最大値を取る．

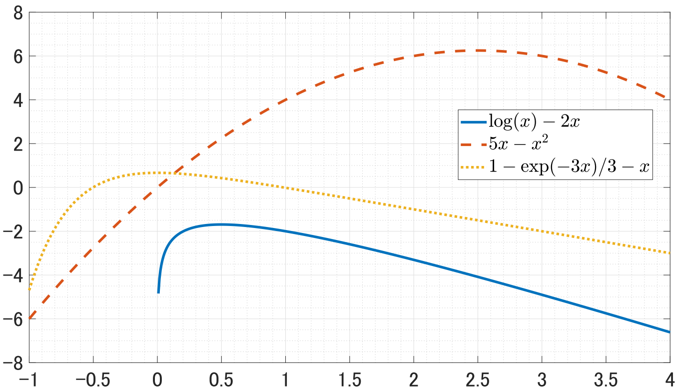
2.

$$5x - x^2$$

のとき，この一階の条件は，

$$5 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

* タイポや間違いに気付いたら教えてください。



である．さらに，二階の条件を調べると，

$$-2 < 0$$

である．したがって，この目的関数は上に凸デアリ，$x = \frac{5}{2}$ で最大値を取ることが分かる．

3. 目的関数が

$$1 - \exp(-3x)/3 - x$$

のとき，一階の条件は，

$$\begin{aligned} &\exp(-3x) - 1 = 0 \\ &\Rightarrow -3x = \log(1) \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

となることが分かる．さらに二階の条件を調べると，

$$-3\exp(-3x) < 0$$

であるので，これも $x = 0$ で最大値を取ることがわかる．

最後に，それぞれの目的関数を図示すると次のようになっている．

3　多変数の微分

3.1　偏微分

1. $f_x(x, y) = ax^{a-1}y^b, \quad f_x(x, y) = bx^a y^{b-1}$
2. $f_x(x, y) = ab/x, \quad f_y(x, y) = ab/y$
3. $f_x(x, y) = a/x, \quad f_y(x, y) = b/y$
4. $f_x(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b-1}ax^{b-1}, \quad f_y(x, y) = [ax^b + (1-a)y^b]^{1/b-1}(1-a)y^{b-1}$

3.2　全微分

いずれも上記の問題の解答を用いて，

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

とすれば求まる．

4　多変数の最適化

1. 目的関数が

$$\max_{x,y} 2\log x + 3\log y - 2x - 3y$$

のときの一階の条件は，

$$\begin{aligned} x: \frac{2}{x} - 2 = 0 \\ y: \frac{3}{y} - 3 = 0 \end{aligned}$$

である*1．これらをそれぞれ解くと，

$$(x, y) = (1, 1)$$

となる．つまり，$x = y = 1$ で最大値を取る．

2. 目的関数が

$$\max_{x,y} x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y$$

のとき，一階の条件は，

$$\begin{aligned} x: \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{5} = 0 \\ y: \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}}y^{-\frac{3}{5}} - \frac{2}{5} = 0 \end{aligned}$$

である．この 2 式を両辺で割ると

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x &= 2y \end{aligned}$$

と求まる．これを一階の条件の 2 式目に代入する

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^5 = 1 \\ \Rightarrow &\left(\frac{(2y)^2}{y^3}\right) = 1 \\ \Rightarrow &\frac{4}{y} = 1 \\ \Rightarrow &y = 4 \end{aligned}$$

と $x = 8$ が求まる．したがって，これを使って $y = 1/2$ で最大値を取る．

---

*1 ここでは $x:$ という表記は，「x に対する一階条件」という意味で使っている．

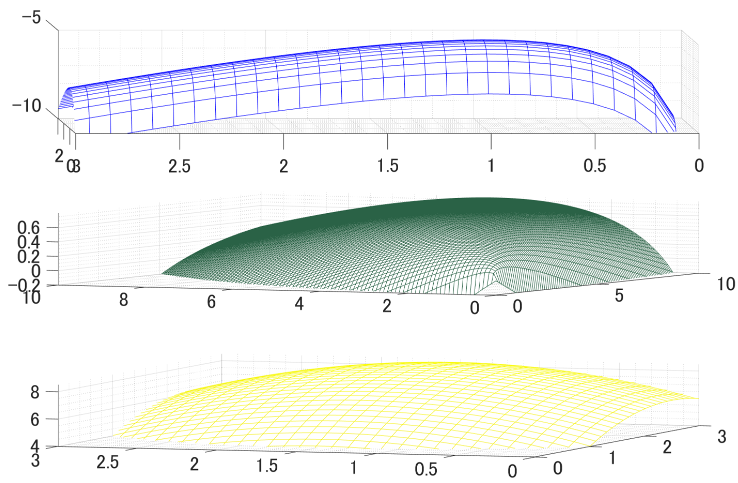


図 1　多変数の最適化の目的関数

3.

$$\max_{x,y} 5x - x^2 + 3y - y^2$$

が目的関数の時，この一階の条件は，

$$\begin{aligned} x &: 5 - 2x = 0 \\ y &: 3 - 2y = 0 \end{aligned}$$

であるので，これを解くと，

$$(x, y) = (5/2, 3/2)$$

が求まる．

最後に，図 1 が上から 1，2，３の目的関数の図示である．