2019 年度予備テスト　解答と補足

Masataka HAMADA

2019 年 4 月 13 日

1　関数の一様連続性

1.1　問題と解答

$\boxed{1}$ f を開区間 $(0,1)$ で定義された函数とする．f が一様連続であるとは，

> 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0,1)$ に対して，$|f(x) - f(y)| < \epsilon$ が成り立つ

ことである．このとき，次の問に答えよ．

1. $f(x) = \sin(1/x)$ とするとき，f は一様連続か？理由とともに答えよ．
2. f が一様連続ならば有界であることを示せ．ここで，f が有界であるとは，
   ある正実数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \in (0,1)$ に対して，$|f(x)| < M$ が成り立つ
   ことである．
3. f が一様連続ならば，$x_n \in (0,1)$ かつ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ となる任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列になることを示せ．

1. f は一様連続でない．実際，$\epsilon = 1$ とすると，任意の $\delta > 0$ に対して
   $$\left|\frac{1}{(2n+1/6)(2n+7/6)\pi}\right| < \delta$$
   を満たす自然数 n をとって $x = [(2n+1/6)\pi]^{-1}, y = [(2n+7/6)\pi]^{-1}$ とおけば，$x, y \in (0,1)$ であり，
   $$|x-y| = \left|\frac{1}{(2n+1/6)(2n+7/6)\pi}\right| < \delta$$
   かつ
   $$|f(x) - f(y)| = \left|\sin\left(2n + \frac{1}{6}\right)\pi - \sin\left(2n + \frac{7}{6}\right)\pi\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| = 1 \geq \epsilon$$
   となる．
2. f は一様連続であるから，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0,1)$ に対して，

$|f(x)-f(y)|<1$ が成り立つ．このとき，

$$(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \delta),\ \text{ただし}\ B(x_i,\delta) := \{x \in \mathbb{R} : |x_i - x| < \delta\}$$

を満たす $x_1, x_2, \cdots, x_N \in (0,1)$ が存在する．よって，任意の $x \in (0,1)$ に対して，ある $i = 1, 2, \cdots, N$ が存在して $|x_i - x| < \delta$ が成り立つから，$M := \max_{1 \le i \le N} |f(x_i)|$ とおくと，

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| < 1 + |f(x_i)| \le 1 + M$$

となる．従って，f は有界である．

3. 任意の $\epsilon > 0$ に対して，f が一様連続であることから，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-y| < \delta$ となる任意の $x, y \in (0,1)$ に対して $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ となる．さらに $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ なので，ある自然数 N が存在して，$n \ge N$ となる任意の自然数 n に対し $|x_n| < \delta/2$ となる．このとき，$m, n \ge N$ となる任意の自然数 m, n について $|x_m - x_n| \le |x_m| + |x_n| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$ となるから $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$ であることが従う．以上より，$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である．

1.2 補足

1. f が一様連続でない，すなわち一様連続であることの定義の否定は

   ある $\epsilon > 0$ が存在し，任意の $\delta > 0$ に対して，$|x-y| < \delta$ かつ $|f(x)-f(y)| \ge \epsilon$ となる $x, y \in (0,1)$ が存在する

   となります．
2. 証明にあたってはこちらを参照しました．
3. 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとは，

   任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，$m, n \ge N$ となる任意の自然数 m, n に対して $|x_m - x_n| < \epsilon$ が成り立つ

   ことです．

2　広義積分

2.1　問題と解答

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ．

1. 次の広義積分が収束するための実数 p の充たすべき必要十分条件を求めよ：
$$\int_0^1 (1-x)^p\,dx$$
2. 次の広義積分が収束することを示せ
$$\int_0^1 \frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}}\,dx$$
3. 次の広義積分が収束しないことを示せ：
$$\int_0^\infty \frac{2+\sin e^x}{x}\,dx$$

1. $p>-1$ のとき，
$$\int_0^1 (1-x)^p\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$
となる．
$p=-1$ のとき，$0<\epsilon<1$ に対して
$$\int_0^\epsilon (1-x)^p\,dx = [-\log(1-x)]_0^\epsilon = -\log(1-\epsilon)$$
となるが，$\lim_{x\to 0+0}\log x = -\infty$ であるから $\lim_{\epsilon\to 1-0}[-\log(1-\epsilon)]=\infty$ である．つまり，広義積分
$$\int_0^1 (1-x)^p\,dx$$
は発散する．
$p<-1$ のとき，$0<\epsilon<1$ に対して
$$\int_0^\epsilon (1-x)^p\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{p+1}}{p+1}\right]_0^\epsilon = -\frac{(1-\epsilon)^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{p+1}$$
となるが，$\lim_{x\to 0+0} x^{p+1}=\infty$ であるから $\lim_{\epsilon\to 1-0}[-\frac{(1-\epsilon)^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{p+1}]=-\infty$ であるから，広義積分
$$\int_0^1 (1-x)^p\,dx$$
は発散する．従って，広義積分
$$\int_0^1 (1-x)^p\,dx$$
が収束するための実数 p の充たすべき必要十分条件は $p>-1$ である．

2. $0 < x \leq 1/2$ のとき，$1-x \geq 1/2$ であるから

$$\frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}} = \frac{1}{x^{1/3}(1-x)^{1/3}} \leq \frac{1}{x^{1/3}(1/2)^{1/3}} = 2^{1/3}x^{-1/3}$$

となる．よって，$r_0 \in (0, 1/2]$ に対して

$$\int_{r_0}^{1/2} \frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}}\,dx \leq 2^{1/3}\int_{r_0}^{1/2} x^{-1/3}\,dx = 2^{1/3}\left[\frac{2}{3}x^{2/3}\right]_{r_0}^{1/2} = \frac{2^{2/3}[1-(2r_0)^{2/3}]}{3}$$

であるから，$r_0 \to 0+0$ としたとき，最左辺の積分は収束する．また，$1/2 \leq x < 1$ のとき，

$$\frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}} = \frac{1}{x^{1/3}(1-x)^{1/3}} \leq \frac{1}{(1/2)^{1/3}(1-x)^{1/3}} = 2^{1/3}(1-x)^{-1/3}$$

となる．よって，$r_1 \in [1/2, 1)$ に対して

$$\int_{1/2}^{r_1} \frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}}\,dx \leq 2^{1/3}\int_{1/2}^{r_1}(1-x)^{-1/3}\,dx = 2^{1/3}\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{2/3}\right]_{1/2}^{r_1} = \frac{2^{4/3}}{3}[2^{-2/3}-(1-r_1)^{2/3}]$$

であるから，$r_1 \to 1-0$ としたとき，最左辺の積分は収束する．以上より，広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{[x(1-x)]^{1/3}}\,dx$$

は収束する．

3. $\epsilon, M > 0$ とするとき

$$\int_\epsilon^M \frac{2+\sin e^x}{x}\,dx \geq \int_\epsilon^M \frac{2-1}{x}\,dx = \int_\epsilon^M \frac{1}{x}\,dx = \log M - \log\epsilon$$

であり，

$$\lim_{M\to\infty}\log M = \infty,\ \lim_{\epsilon\to 0+0}\log\epsilon = -\infty$$

であるから，広義積分

$$\int_0^\infty \frac{2+\sin e^x}{x}\,dx$$

は収束しない．

2.2 補足

広義積分が収束することの定義は次の通りです．

定義 2.1. a を実数とし，$b \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ とする．$[a, b)$ に含まれる任意の有界閉区間上で可積分な関数 f に対して，広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

が収束するとは，

$$\lim_{r\to b-0}\int_a^r f(x)\,dx$$

が存在することをいう．$(a, b]$ で定義された関数についても，同様に

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a+0} \int_r^b f(x)\,dx$$

と定義する．また，(a, b) で定義された関数については，ある $c \in (a, b)$ をとって

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a+0} \int_r^c f(x)\,dx + \lim_{r \to b-0} \int_c^r f(x)\,dx$$

と定義する．

なお，2 の証明にあたっては友人の解答を参照しました．感謝申し上げます．

3　線形部分空間

3.1　問題と解答

$\boxed{3}$ V と W を d 次元実線型空間 $\mathbb{R}^d$ の部分空間とする．和 $V + W$ と交わり $V \cap W$ も $\mathbb{R}^d$ の部分空間となる．$\mathbb{R}^d$ の元 $u_1, \cdots, u_\ell, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n$ を次のように選ぶ：

- $u_1, \cdots, u_\ell$ は $V \cap W$ の基底である．
- $u_1, \cdots, u_\ell, v_1, \cdots, v_m$ は V の基底である．
- $u_1, \cdots, u_\ell, w_1, \cdots, w_n$ は W の基底である．

このとき，次の問に答えよ．

1. 和 $V + W$ の任意の元が $u_1, \cdots, u_\ell, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n$ の線型結合で表されることを示せ．
2. 元 $u_1, \cdots, u_\ell, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n$ は線型独立であることを示せ．
3. 和集合 $V \cup W$ は $\mathbb{R}^d$ の部分空間となるか？理由とともに答えよ．

1. 任意の $v \in V, w \in W$ は，ある $a_1, \cdots, a_{\ell+m}, b_1, \cdots, b_{\ell+n} \in \mathbb{R}$ を用いて

$$v = \sum_{i=1}^{\ell} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} a_{\ell+j} v_j,\ w = \sum_{i=1}^{\ell} b_i u_i + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell+k} w_k$$

と表すことができ，このとき

$$v + w = \sum_{i=1}^{\ell} (a_i + b_i) u_i + \sum_{j=1}^{m} a_{\ell+j} v_j + \sum_{k=1}^{n} b_{\ell+k} w_k$$

となる．従って，$V + W$ の任意の元は $u_1, \cdots, u_\ell, v_1, \cdots, v_m, w_1, \cdots, w_n$ の線型結合で表される．

2. $a_1, \cdots, a_\ell, b_1, \cdots, b_m, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i u_i + \sum_{j=1}^{m} b_j v_j + \sum_{k=1}^{n} c_k w_k = 0 \tag{1}$$

であるとする．このとき

$$v=\sum_{i=1}^{\ell}a_iu_i+\sum_{j=1}^{m}b_jv_j$$

とおくと，$v\in V$ である．さらに，(1) より

$$v=-\sum_{k=1}^{n}c_kw_k=\sum_{k=1}^{n}(-c_k)w_k$$

であるから $v\in W$ である．よって $v\in V\cap W$ であるから，$v=d_1u_1+\cdots+d_\ell u_\ell$ となる $d_1,\cdots,d_\ell\in\mathbb{R}$ が存在する．つまり

$$\sum_{i=1}^{\ell}a_iu_i+\sum_{j=1}^{m}b_jv_j=\sum_{i=1}^{\ell}d_iu_i$$

であるから

$$\sum_{i=1}^{\ell}(a_i-d_i)u_i+\sum_{j=1}^{m}b_jv_j=0 \tag{2}$$

となる．ここで，$u_1,\cdots,u_\ell,v_1,\cdots,v_m$ は線型独立であるから，(2) より特に $b_1=\cdots=b_m=0$ である．よって (1) は

$$\sum_{i=1}^{\ell}a_iu_i+\sum_{k=1}^{n}c_kw_k=0$$

となるが，$u_1,\cdots,u_\ell,w_1,\cdots,w_n$ も線型独立であるから，これより $a_1=\cdots=a_\ell=c_1=\cdots=c_n=0$ である．

以上より，$u_1,\cdots,u_\ell,v_1,\cdots,v_m,w_1,\cdots,w_n$ は線型独立である．

3. $d=1$ のとき，$\dim V,\dim W\le 1$ であるから，V も W も $\{0\}$ または $\mathbb{R}$ のいずれかである．よって $V\cup W$ も $\{0\}$ または $\mathbb{R}$ のいずれかである．従って，$V\cup W$ は $\mathbb{R}$ の部分空間である．
   $d>1$ のとき，例えば $V=\{(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d : x_1=0\}$，$W=\{(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d : x_2=0\}$ とすると，$V\cup W$ は $\mathbb{R}^d$ の部分空間ではない．実際，$ab\neq 0$ を満たす $a,b\in\mathbb{R}$ に対して，$(a,0,0,\cdots,0)\in V\subset V\cup W$，$(0,b,0,\cdots,0)\in W\subset V\cup W$ であるが，$(a,0,0,\cdots,0)+(0,b,0,\cdots,0)=(a,b,0,\cdots,0)\notin V\cup W$ となる．従って，$V\cup W$ は $\mathbb{R}^d$ の部分空間であるとは限らない．
   以上より，$V\cup W$ は，$d=1$ のとき $\mathbb{R}^d$ の部分空間となり，$d>1$ のとき $\mathbb{R}^d$ の部分空間であるとは限らない．

3.2 補足

3 の解答では次の命題の 1 を用いています．

命題 3.1. V を有限次元線形空間，W を V の部分空間とするとき，次が成り立つ．

1. W も有限次元であり，$\dim W\le\dim V$
2. $\dim W=\dim V$ ならば $W=V$

証明は，例えば「線形代数の世界」(斎藤毅，東京大学出版会，2007) の 1.5 節を参照してください．

4　核と像，表現行列，固有空間

4.1　問題と解答

$\boxed{4}$ 二次以下の実数係数多項式の全体からなる実線型空間を V として，V 上の線型変換 $D\colon V \to V$ を

$$f(x) \mapsto \frac{d}{dx}[(1+x)f(x)]$$

と定める．このとき，次の問に答えよ．

1. $\operatorname{Ker} D$ と $\operatorname{Im} D$ を求めよ．
2. V の基底 $\{1, 1+2x, 2x+3x^2\}$ に関する D の表現行列を求めよ．
3. D の固有空間の全てについて，それぞれの基底を一組ずつ求めよ．

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし，$f(x) = ax^2 + bx + c \in V$ とすると

   $$(Df)(x) = \frac{d}{dx}[(1+x)(ax^2+bx+c)] = 3ax^2 + 2(a+b)x + b + c$$

   となる．ここで

   $$\begin{cases} 3a &= 0 \\ 2(a+b) &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$$

   の解は $a = b = c = 0$ であるから，$\operatorname{Ker} D = \{0\}$ である．
   また，$\operatorname{Im} D = V$ である．実際，任意の $f \in V$ が $p, q, r \in \mathbb{R}$ を用いて $f(x) = px^2 + qx + r$ と表されるとき，

   $$a = \frac{p}{3},\ b = \frac{q}{2} - \frac{p}{3},\ c = r - \frac{q}{2} + \frac{p}{3}$$

   とおけば

   $$f(x) = 3ax^2 + 2(a+b)x + b + c = (D(ax^2+bx+c))(x)$$

   となるから $f \in \operatorname{Im} D$ である．
2. 1 での計算結果を用いて
   - $(D1)(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+2x) + 0 \cdot (2x+3x^2)$
   - $(D(1+2x))(x) = 4x + 3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (1+2x) + 0 \cdot (2x+3x^2)$
   - $(D(2x+3x^2))(x) = 9x^2 + 10x + 2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (1+2x) + 3 \cdot (2x+3x^2)$

   であることがわかる．従って，V の基底 $\{1, 1+2x, 2x+3x^2\}$ に関する D の表現行列は

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   である．

3. 2 の表現行列を A とする．A の固有多項式 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -2 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3)$$

であるから，A の固有値は 1,2,3 である．以下，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする．

$$Ax = x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = x_1 \\ 2x_2 + 2x_3 & = x_2 \\ 3x_3 & = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$$

であるから，固有値 1 に関する固有空間の基底の 1 つは 1 である．

$$Ax = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = 2x_1 \\ 2x_2 + 2x_3 & = 2x_2 \\ 3x_3 & = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

であるから，固有値 2 に関する固有空間の基底の 1 つは $1 + (1 + 2x)$ である．

$$Ax = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 & = 3x_1 \\ 2x_2 + 2x_3 & = 3x_2 \\ 3x_3 & = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

であるから，固有値 3 に関する固有空間の基底の 1 つは $1 + 2(1 + 2x) + (2x + 3x^2)$ である．

4.2 補足

1. (別解) 命題 3.1 と次の命題を用いると，$\mathrm{Ker}\, D = \{0\}$ であることから $\mathrm{Im}\, D = V$ が直ちに従います．

   命題 4.1. 有限次元線形空間 V, W および線形変換 $f\colon V \to W$ に対し，次の等式が成り立つ：

   $$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rank}\, f$$

   証明は，例えば「線型代数入門」(齋藤正彦，東京大学出版会，1966) の第 4 章 §4[4.5] や「線形代数の世界」(斎藤毅，東京大学出版会，2007) の 2.4 節を参照してください．

2. 特にありません．
3. 固有空間の定義は次の通りです．

   定義 4.2. V を K 線形空間，$T : V \to V$ を V 上の線形変換とする．0 でない $v \in V$ が T の固有ベクトルであるとは，ある $\lambda \in K$ が存在して $T(v) = \lambda v$ が成り立つことをいう．このとき，λ を固有ベクトル v に関する固有値といい，さらに

   $$W_\lambda := \{w \in V : T(w) = \lambda w\}$$

   によって定義される線形空間 W_λ を，固有値 λ に関する固有空間と呼ぶ．

従って，D の表現行列を用いて V を $\mathbb{R}^3$ とみなして考えたときの固有空間は，D の固有空間そのものではありません．V を $\mathbb{R}^3$ とみなして考えたとき，固有値 1,2,3 に関する固有空間の基底の 1 つは，それぞれ

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

なので，対応する D の固有空間の基底は，それぞれ

$$1, 1+(1+2x), 1+2(1+2x)+(2x+3x^2)$$

となります．