関数の近似と補完法

山内 仁喬

2021 年 10 月 31 日

1　線形最小二乗法

次のような n 組みのデータのあてはめ問題を考える:

$$\text{観測点}: t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n \tag{1}$$

$$\text{測定値}: f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n \tag{2}$$

$$\text{測定値の分散}: \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n \tag{3}$$

測定の誤差 (分散)σ_i^2 は, 測定値 f_i の信頼性を表す尺度として考えることができる. このデータを, ある一次独立な関数系

$$\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \ldots,\ \phi_m(t) \tag{4}$$

の一次結合

$$f(t) = \sum_{j}^{m} x_j \phi_j(t) \tag{5}$$

によってあてはめる. この形の $f(t)$ は $\{\phi_j(t)\}$ に関して線形であるから, 線形モデルと呼ばれる. 一次独立な関数系として, 単項式

$$\phi_j(t) = t^{j-1} \tag{6}$$

が最も広く採用されている.

最小二乗法は,

$$S(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[f_i - f(t_i)]^2}{\sigma_i^2} \tag{7}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{[f_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t_i)]^2}{\sigma_i^2} \tag{8}$$

を最小にすることによって, 未知係数 $x_1,\ \ldots,\ x_m$ の組みを決定する方法である. S を最小にする条件は,

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{9}$$

によって与えられるので,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{[f_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t_i)]\phi_k(t_i)}{\sigma_i^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m \tag{10}$$

とかける．ここで i, j 成分が

$$A_{ij} = \frac{\phi_j(t_j)}{\sigma_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m) \tag{11}$$

で定義される $n \times m$ 行列を導入する．この A_{ij} はヤコビアン行列あるいは計画行列と呼ばれている．このとき，式 (10) は

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\phi_j(t_i)}{\sigma_i}\frac{\phi_k(t_i)}{\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\phi_k(t_i)}{\sigma_i}\frac{f_i}{\sigma_i} \tag{12}$$

$$\to \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}A_{ik}A_{ij}\right)x_j = \sum_{i=1}^{n}A_{ik}\frac{f_i}{\sigma_i}, \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{13}$$

となる．さらに

$$b_i = \frac{f_i}{\sigma_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

を第 i 成分にもつベクトル $\boldsymbol{b}$, x_j を第 j 成分にもつベクトルを $\boldsymbol{x}$ とおくと，式 (13) は次のようにかける:

$$A^t A\boldsymbol{x} = A^t\boldsymbol{b} \tag{15}$$

ここで，A^t は行列 A の転置である．これを正規方程式という．この方程式を解けば，未知係数 x_i を求めることができる．

1.1 単純な多項式 $\phi_j(t) = t^{j-1}$ の場合

単純な多項式 $\phi_j(t) = t^{j-1}$ を用いた，最小二乗法を考える．

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m}x_j t^{j-1} = x_1 + x_2 t + \ldots + x_m t^{m-1}, \tag{16}$$

$$A_{ij} = \frac{t_i^{j-1}}{\sigma_i}, \tag{17}$$

$$A_{ik} = \frac{t_i^{k-1}}{\sigma_i}, \tag{18}$$

$$b_i = \frac{f_i}{\sigma_i} \tag{19}$$

であるので，式 (13) に代入すると，

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{k-1}}{\sigma_i}\frac{t_i^{j-1}}{\sigma_i}\right)x_j = \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^{k-1}}{\sigma_i}\frac{f_i}{\sigma_i} \tag{20}$$

を得る．行列形式で愚直に書くと，

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^0 t_i^0 & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^0 t_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^0 t_i^{m-1} \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^1 t_i^0 & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^1 t_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^1 t_i^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^m t_i^0 & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^m t_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}t_i^m t_i^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}f_i \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}f_i t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}f_i t_i^{m-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

となる．左辺の左の行列について，

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^0 & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^{m-1} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^1 & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^{m-1} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^{m} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^{2m-1} \end{bmatrix} \tag{22}
$$

と置くと，正規方程式は

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} &= \boldsymbol{D}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i^{m-1} \end{bmatrix} & (23) \\
&= \begin{bmatrix} D_{11}^{-1} & D_{12}^{-1} & \cdots & D_{1m}^{-1} \\ D_{21}^{-1} & D_{22}^{-1} & \cdots & D_{2m}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{m1}^{-1} & D_{m2}^{-1} & \cdots & D_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i^{m-1} \end{bmatrix} & (24) \\
&= \begin{bmatrix} D_{11}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i + D_{12}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i + \ldots + D_{1m}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i^{m-1} \\ D_{21}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i + D_{22}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i + \ldots + D_{2m}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i^{m-1} \\ \vdots \\ D_{m1}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i + D_{m2}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i + \ldots + D_{mm}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} f_i t_i^{m-1} \end{bmatrix} & (25)
\end{aligned}
$$

のように解くことができる．また，係数の誤差は，

$$
\sigma_{xk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2} \tag{26}
$$

であるので，式 (25) を用いると具体的に

$$
\sigma_{xk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} D_{kj}^{-1} \frac{1}{\sigma_i} t_i^{j-1} \right)^2} \tag{27}
$$

と計算される．

1.2　具体例: 一次関数 $f(t) = x_0 t + x_1$ で最小二乗法

一次関数 $f(t) = x_0 t + x_1$ で最小二乗法を実行するときの，具体的な未知係数と誤差の表式を見ていく．行列 (22) を具体的に計算すると，

$$
\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} t_i^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} w_i & \sum_{i=1}^{n} w_i t_i \\ \sum_{i=1}^{n} w_i t_i & \sum_{i=1}^{n} w_i t_i^2 \end{bmatrix} \tag{28}
$$

なので, 逆行列は

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_i t_i^2 & \sum_{i=1}^n w_i t_i \\ \sum_{i=1}^n w_i t_i & \sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\Delta \equiv \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 \tag{30}$$

と計算される. ここで, $w_i = 1/\sigma_i^2$ とおいた. したがって, 未知係数は

$$x_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i f_i\right)}{\Delta} \tag{31}$$

$$x_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i f_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n w_i f_i\right)}{\Delta} \tag{32}$$

と計算される.

続いて, 係数の誤差を求めていく. x_0 の誤差は,

$$\sigma_{x_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_0}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2} \tag{33}$$

である. 以下, 具体的に計算をしていく:

$$\frac{\partial x_0}{\partial f_i} \sigma_i = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\sum_i^n w_i t_i^2 \right) w_i - \left(\sum_i^n w_i t_i \right) w_i t_i \right] \sigma_i \tag{34}$$

$$\left(\frac{\partial x_0}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right)^2 w_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 w_i^2 t_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right) w_i^2 t_i \right] \sigma_i^2 \tag{35}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right)^2 w_i + \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 w_i t_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right) w_i t_i \right] \tag{36}$$

最後の式変形には, $w_i = 1/\sigma_i^2$ であることを用いた. さらに, i について和をとると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_0}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2 \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n w_i t_i^2}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^n w_i t_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i t_i \right)^2 \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n w_i t_i^2}{\Delta}
\end{aligned} \tag{37}$$

したがって, x_0 の誤差は,

$$\sigma_{x_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i t_i^2}{\Delta^2}} \tag{38}$$

である.

同様にして, x_1 の誤差,

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_1}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2} \tag{39}$$

を計算する.

$$\frac{\partial x_1}{\partial f_i} \sigma_i = \frac{1}{\Delta} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) w_i t_i - \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right) w_i \right] \sigma_i \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right)^2 w_i^2 t_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right)^2 w_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right) w_i^2 t_i \right] \sigma_i^2 \tag{41}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right)^2 w_i t_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right)^2 w_i - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right) w_i t_i \right] \tag{42}$$

最後の式変形には, $w_i = 1/\sigma_i^2$ であることを用いた. i について和をとると,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_1}{\partial f_i} \sigma_i \right)^2 \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} w_i t_i \right) \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\Delta^2} \left[\left(\sum_{i=1}^{2} w_i \right) \left(\sum_{i=1}^{2} w_i t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{2} w_i t_i \right)^2 \right] \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\Delta}
\end{aligned} \tag{43}$$

したがって, x_1 の誤差は,

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\Delta}} \tag{44}$$

である.

2　スプライン補完

スプライン補完ではデータ点間の区画を補完する関数を決定する際に, 関数のつなぎ目において, できるだけ高次の微分まで滑らかになるように条件を課す.

2.1　3 次のスプライン補完

2.1.1　区分多項式

データ点 x_i と x_{i+1} の区間を次の 3 次関数で補完することを考える:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1) \tag{45}$$

この式を区分多項式と呼ぶ. N+1 個のデータをつなぐためには, N 個の区分多項式を使用する. データを補完するには, 係数 a_i, b_i, c_i, d_i が決める必要がある. 未知係数は全部で $4N$ 個であるので, $4N$ 個の方程式が必要である. そこで, 以下の条件を課すことで未知係数を決定するための方程式を得る.

1. 各 $S_i(x)$ に対して両端の値が決まっている. つまり, 全てのデータ点を通る.
   (a) 各区間の始点はデータ点の値をとる (N 個の方程式).
   (b) 隣合う区分多項式は, 境界点で同じ値をとる (N 個の方程式).
2. 各 $S_i(x)$ について, 境界点の一次微分は連続である ($N - 1$ 個の方程式).
3. 各 $S_i(x)$ について, 境界点の二次微分は連続である ($N - 1$ 個の方程式).
4. 自然なスプラインである条件: 最初と最後のデータ点 ($j = 0, N + 1$) において, 二次微分がゼロである (2 個の方程式).

区分多項式の一次微分と二次微分はそれぞれ

$$S_i' = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \tag{46}$$

$$S_i'' = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \tag{47}$$

である.

2.1.2　未知係数の決定

■条件 1-(a): 各区間の始点はデータ点の値をとる　各区間の始点 $S_i(x_i)$ でデータ点と同じ値であるとすると,

$$S_i(x_i) = y_i$$

すなわち,

$$a_i = y_i \tag{48}$$

を得る.

■条件 4: 自然なスプラインである条件　最初と最後のデータ点において, 二次微分がゼロであるので直ちに

$$c_0 = 0 \tag{49}$$

$$c_{N-1} = 0 \tag{50}$$

を得る.

■条件 3: **境界点での二次微分の連続性**　境界点の二次微分は連続性は

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$$

とかける．具体的に計算すると，

$$2c_i + 6d_i(x_{i+1} - x_i) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})$$

である．これより直ちに

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3(x_{i+1} - x_i)} = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \tag{51}$$

を得る．ここで $h_i \equiv x_{i+1} - x_i$ を定義した．

■条件 1-(b): **隣合う区分多項式は，境界点で同じ値をとる**　この条件を書き下すと

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

とかける．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned}
& a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 \\
= \ & a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_i)^2 + d_{i+1}(x_{i+1} - x_i)^3 \\
\\
\rightarrow \ & a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3
\end{aligned}$$

結果を整理すると，

$$\begin{aligned}
b_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2 \\
&= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - c_i h_i - \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^2 \\
&= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i(c_{i+1} + 2c_i)}{3}
\end{aligned} \tag{52}$$

■条件 2: **境界点での一次微分の連続性**　この条件を書き下すと

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \tag{53}$$

とかける．具体的に計算すると，

$$\begin{aligned}
& b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 \\
= \ & b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + 3d_{i+1}(x_{i+1} - x_i)^2 \\
\\
\rightarrow \ & b_{i+1} = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2 \\
\rightarrow \ & b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2
\end{aligned}$$

を得る．ここまでに得られた a_i, b_i, d_i の表式を代入すると，

$$\left[\frac{a_{i+2} - a_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i(c_{i+2} + 2c_{i+1})}{3}\right] = \left[\frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - \frac{h_i(c_{i+1} + 2c_i)}{3}\right] + 2c_i h_i + 3\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}\right) h_i^2 \tag{54}$$

となる．さらに整理すると

$$
\begin{aligned}
&h_{i+1}c_{i+2} + 2(h_{i+1}+h_i)c_{i+1} + c_i h_i = \frac{3}{h_{i-1}}(a_{i+2}-a_{i+1}) - \frac{3}{h_i}(a_{i+1}-a_i) \\
&= \frac{3}{h_{i-1}}(y_{i+2}-y_{i+1}) - \frac{3}{h_i}(y_{i+1}-y_i)
\end{aligned}
\tag{55}
$$

を得る．この式を行列形式で書くと

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h_0 & 2(h_0-h_1) & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & h_1 & 2(h_1-h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & h_2 & 2(h_2-h_3) & h_3 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1}
\end{pmatrix}
=
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 \\
\frac{3}{h_1}(y_2-y_1) - \frac{3}{h_0}(y_1-y_0) \\
\vdots \\
\vdots \\
\frac{3}{h_{n-1}}(y_n-y_{n-1}) - \frac{3}{h_i}(y_{n-1}-y_{n-2}) \\
0
\end{pmatrix}
$$

となる．この連立方程式を解くと係数 c_i を決定できる．