

自己相関関数

山内 仁喬

2024 年 3 月 7 日

1 自己相関関数の定義

自己相関関数 $C(\tau)$ は

$$C(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t+\tau) \rangle}{\langle x(t)x(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2} \quad (1)$$

と計算される.

2 解析的に自己相関関数が計算できる関数の例

ここでは解析的に自己相関関数が計算できる例として, 正弦波と余弦波の自己相関関数を紹介する. このような例はプログラムを実装したときの確認として役に立つ.

2.1 正弦波の自己相関関数

正弦波を

$$x(t) = a \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

とおく. 時刻 $t + \tau$ での正弦波は

$$x(t + \tau) = a \sin(\omega(t + \tau) + \phi) \quad (3)$$

$$= a \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega \tau) + a \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega \tau) \quad (4)$$

であるので, その積は

$$x(t)x(t + \tau) = a^2 \sin^2(\omega t + \phi) \cos(\omega \tau) + a^2 \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega \tau) \quad (5)$$

$$= \frac{a^2}{2} [1 - \cos(2\omega t + 2\phi)] \cos(\omega \tau) + \frac{a^2}{2} [\sin(2\omega t + 2\phi)] \sin(\omega \tau) \quad (6)$$

$$= \frac{a^2}{2} [\cos(\omega \tau) + \sin(2\omega t + 2\phi) \sin(\omega \tau) - \cos(2\omega t + 2\phi) \cos(\omega \tau)] \quad (7)$$

$$= \frac{a^2}{2} [\cos(\omega \tau) - \cos(2\omega t + 2\phi + \omega \tau)] \quad (8)$$

と計算される. 続いて自己相関関数の計算に必要な平均を求めていく.

$$\langle x(t) \rangle = \langle a \sin(\omega t + \phi) \rangle = 0 \quad (9)$$

$$\langle x(t + \tau) \rangle = \langle a \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega \tau) + a \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega \tau) \rangle \quad (10)$$

$$= a [\cos(\omega \tau) \langle \sin(\omega t + \phi) \rangle + \sin(\omega \tau) \langle \cos(\omega t + \phi) \rangle] \quad (11)$$

$$= 0 \quad (12)$$

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \frac{a^2}{2} \langle \cos(\omega \tau) - \cos(2\omega t + 2\phi + \omega \tau) \rangle \quad (13)$$

$$= \frac{a^2}{2} \cos(\omega \tau) \quad (14)$$

$$\langle x(t)x(t) \rangle = \langle a^2 \sin^2(\omega t + \phi) \rangle \quad (15)$$

$$= a^2 \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle \quad (16)$$

以上を用いると、自己相関関数は

$$C(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t + \tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t + \tau) \rangle}{\langle x(t)x(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2} \quad (17)$$

$$= \frac{\frac{a^2}{2} \cos(\omega \tau)}{a^2 \langle \sin^2(\omega t + \phi) \rangle} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos(\omega \tau)}{\langle \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\phi)}{2} \rangle} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos(\omega \tau)}{\frac{1}{2} [1 - \langle \cos(2\omega t + 2\phi) \rangle]} \quad (20)$$

$$= \cos(\omega \tau) \quad (21)$$

と計算される。まとめると、正弦波の自己相関関数は余弦波となる。

2.2 余弦波の自己相関関数

余弦波を

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi) \quad (22)$$

とおく。時刻 $t + \tau$ での正弦波は

$$x(t + \tau) = a \cos(\omega(t + \tau) + \phi) \quad (23)$$

$$= a \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega \tau) + a \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega \tau) \quad (24)$$

であるので、その積は

$$x(t)x(t + \tau) = a^2 \cos^2(\omega t + \phi) \cos(\omega \tau) - a^2 \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega \tau) \quad (25)$$

$$= \frac{a^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] \cos(\omega \tau) - \frac{a^2}{2} [\sin(2\omega t + 2\phi)] \sin(\omega \tau) \quad (26)$$

$$= \frac{a^2}{2} [\cos(\omega \tau) + \cos(2\omega t + 2\phi) \cos(\omega \tau) - \sin(2\omega t + 2\phi) \sin(\omega \tau)] \quad (27)$$

$$= \frac{a^2}{2} [\cos(\omega \tau) + \cos(2\omega t + 2\phi + \omega \tau)] \quad (28)$$

と計算される。続いて自己相関関数の計算に必要な平均を求めていく。

$$\langle x(t) \rangle = \langle a \cos(\omega t + \phi) \rangle = 0 \quad (29)$$

$$\langle x(t + \tau) \rangle = \langle a \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega \tau) - a \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega \tau) \rangle \quad (30)$$

$$= a[\cos(\omega \tau) \langle \cos(\omega t + \phi) \rangle - \sin(\omega \tau) \langle \sin(\omega t + \phi) \rangle] \quad (31)$$

$$= 0 \quad (32)$$

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = \frac{a^2}{2} \cos(\omega \tau) \quad (33)$$

$$\langle x(t)x(t) \rangle = \langle a^2 \cos^2(\omega t + \phi) \rangle \quad (34)$$

$$= a^2 \langle \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] \rangle \quad (35)$$

$$= \frac{a^2}{2} \quad (36)$$

以上を用いると、自己相関関数は

$$C(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t + \tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t + \tau) \rangle}{\langle x(t)x(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2} \quad (37)$$

$$= \frac{\frac{a^2}{2} \cos(\omega \tau)}{\frac{a^2}{2}} \quad (38)$$

$$= \cos(\omega \tau) \quad (39)$$

と計算される。まとめると、余弦波の自己相関関数は余弦波となる。