自己相関関数

山内 仁喬

2022 年 3 月 9 日

1　自己相関関数の定義

自己相関関数 $C(\tau)$ は

$$C(\tau) = \frac{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle\langle x(t+\tau)\rangle}{\langle x(t)x(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2} \tag{1}$$

と計算される.

2　解析的に自己相関関数が計算できる関数の例

ここでは解析的に自己相関関数が計算できる例として, 正弦波と余弦波の自己相関関数を紹介する. このような例はプログラムを実装したときの確認として役に立つ.

2.1　正弦波の自己相関関数

正弦波を

$$x(t) = a\sin(\omega t + \phi) \tag{2}$$

とおく. 時刻 $t+\tau$ での正弦波は

$$\begin{aligned} x(t+\tau) &= a\sin(\omega(t+\tau)+\phi) &(3)\\ &= a\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega\tau) + a\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega\tau) &(4)\end{aligned}$$

であるので, その積は

$$\begin{aligned} x(t)x(t+\tau) &= a^2\sin^2(\omega t+\phi)\cos(\omega\tau) + a^2\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega\tau) &(5)\\ &= \frac{a^2}{2}[1-\cos(2\omega t+2\phi)]\cos(\omega\tau) + \frac{a^2}{2}[\sin(2\omega t+2\phi)]\sin(\omega\tau) &(6)\\ &= \frac{a^2}{2}[\cos(\omega\tau) + \sin(2\omega t+2\phi)\sin(\omega\tau) - \cos(2\omega t+2\phi)\cos(\omega\tau)] &(7)\\ &= \frac{a^2}{2}[\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t+2\phi+\omega\tau)] &(8)\end{aligned}$$

と計算される. 続いて自己相関関数の計算に必要な平均を求めていく.

$$\langle x(t)\rangle = \langle a\sin(\omega t+\phi)\rangle = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t+\tau)\rangle &= \langle a\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega\tau) + a\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega\tau)\rangle & (10)\\
&= a[\cos(\omega\tau)\langle\sin(\omega t+\phi)\rangle + \sin(\omega\tau)\langle\cos(\omega t+\phi)\rangle] & (11)\\
&= 0 & (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t)x(t+\tau)\rangle &= \frac{a^2}{2}\langle\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t+2\phi+\omega\tau)\rangle & (13)\\
&= \frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau) & (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t)x(t)\rangle &= \langle a^2\sin^2(\omega t+\phi)\rangle & (15)\\
&= a^2\langle\sin^2(\omega t+\phi)\rangle & (16)
\end{aligned}$$

以上を用いると, 自己相関関数は

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \frac{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle\langle x(t+\tau)\rangle}{\langle x(t)x(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2} & (17)\\
&= \frac{\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)}{a^2\langle\sin^2(\omega t+\phi)\rangle} & (18)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\cos(\omega\tau)}{\langle\frac{1-\cos(2\omega t+2\phi)}{2}\rangle} & (19)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\cos(\omega\tau)}{\frac{1}{2}[1-\langle\cos(2\omega t+2\phi)\rangle]} & (20)\\
&= \cos(\omega\tau) & (21)
\end{aligned}$$

と計算される. まとめると, 正弦波の自己相関関数は余弦波となる.

2.2 余弦波の自己相関関数

余弦波を

$$x(t) = a\cos(\omega t+\phi) \tag{22}$$

とおく. 時刻 $t+\tau$ での正弦波は

$$\begin{aligned}
x(t+\tau) &= a\cos(\omega(t+\tau)+\phi) & (23)\\
&= a\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega\tau) + a\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega\tau) & (24)
\end{aligned}$$

であるので, その積は

$$\begin{aligned}
x(t)x(t+\tau) &= a^2\cos^2(\omega t+\phi)\cos(\omega\tau) - a^2\sin(\omega t+\phi)\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega\tau) & (25)\\
&= \frac{a^2}{2}[1+\cos(2\omega t+2\phi)]\cos(\omega\tau) - \frac{a^2}{2}[\sin(2\omega t+2\phi)]\sin(\omega\tau) & (26)\\
&= \frac{a^2}{2}[\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t+2\phi)\cos(\omega\tau) - \sin(2\omega t+2\phi)\sin(\omega\tau)] & (27)\\
&= \frac{a^2}{2}[\cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t+2\phi+\omega\tau)] & (28)
\end{aligned}$$

と計算される．続いて自己相関関数の計算に必要な平均を求めていく．

$$\langle x(t)\rangle = \langle a\cos(\omega t+\phi)\rangle = 0 \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t+\tau)\rangle &= \langle a\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega\tau) - a\sin(\omega t+\phi)\sin(\omega\tau)\rangle && (30)\\
&= a[\cos(\omega\tau)\langle\cos(\omega t+\phi)\rangle - \sin(\omega\tau)\langle\sin(\omega t+\phi)\rangle] && (31)\\
&= 0 && (32)
\end{aligned}$$

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle = \frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau) \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t)x(t)\rangle &= \langle a^2\cos^2(\omega t+\phi)\rangle && (34)\\
&= a^2\langle\frac{1}{2}[1+\cos(2\omega t+2\phi)]\rangle && (35)\\
&= \frac{a^2}{2} && (36)
\end{aligned}$$

以上を用いると, 自己相関関数は

$$\begin{aligned}
C(\tau) &= \frac{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle - \langle x(t)\rangle\langle x(t+\tau)\rangle}{\langle x(t)x(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2} && (37)\\
&= \frac{\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)}{\frac{a^2}{2}} && (38)\\
&= \cos(\omega\tau) && (39)
\end{aligned}$$

と計算される．まとめると, 余弦波の自己相関関数は余弦波となる．