

特別研究報告書

2次元散乱波動場における
LASSO を用いたクラック決定解析

指導教員 吉川仁 特定教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
令和2年4月入学

住岡 聖仁

令和6年1月26日提出

摘要

LASSO(L1 最適化手法) を用いて、2 次元無限領域に存在するクラックの位置を決定する問題を考える．服部・吉川の研究では、トポロジー導関数の分布を用いて向きや長さが決定されたクラックの候補を選び出し、候補クラックの配置ごとに目的汎関数を計算し、目的汎関数の値が最小となる候補クラックの組み合わせをクラック配置として決定する逆解析を行っている．しかし、候補クラックの数が多い場合には、目的汎関数の計算に多くの計算量を要するという課題が存在している．この問題を解決するために吉岡らは LASSO を用いて Laplace 方程式に支配される領域の問題でのクラック決定解析を行っている．本研究では、吉岡らの手法を時間域の問題に拡張し、波動方程式に支配される 2 次元無限領域に存在するクラックの位置を LASSO を用いて決定する問題を考える．候補クラックがまばらな配置にある場合、向きが酷似し間隔が詰まっている場合共に、正確に候補クラックから正解のクラックを決定できた．また、前述した 2 通りのクラック配置を混合したような複雑な問題においても候補クラックから複数本の正解のクラックを決定できた．

目次

1	序論	1
2	2次元スカラー散乱波動場におけるクラック問題	1
2.1	問題設定	2
2.2	スパースモデリングのための定式化	3
2.3	LASSO によるクラック決定解析	4
3	数値計算	5
3.1	LASSO のための係数行列と右辺ベクトルの選択	5
3.2	数値計算例 1	5
3.3	数値計算例 2	8
3.4	数値計算例 3	11
4	結論	14
	参考文献	15
	付録 A 開口変位の計算	16

1 序論

超音波非破壊評価手法の一つに、材料に超音波を入射し、内部の散乱体からの散乱波を材料表面で計測し、得られた計測データより内部散乱体の情報を決定する散乱体決定手法がある。近年、トポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価 (QNDE) に関する手法が注目を集めており [1],[2],[3], 服部・吉川による 2 次元散乱波動場におけるトポロジー導関数を用いたクラック決定解析 [4] などがある。

散乱体の決定手法については、決定したい散乱体がボイドのような領域を持つ欠陥である場合は、トポロジー最適設計手法で用いられる手法に倣い、トポロジー導関数の分布にレベルセット関数を導入し欠陥の決定が行われている [3]。しかし、ボイドとは異なり領域を持たないクラックの決定では、レベルセット関数を用いることはできず、トポロジー導関数の分布から正解となる複数のクラックの個数、大きさ、形状、配置を決定する手法が確立されたとは言えない現状である。Bellis らはトポロジー導関数を用いたクラック決定問題の解析を行い微小のクラック生成に伴うトポロジー導関数の分布を示し、トポロジー導関数が負の小さな値となる内点の集合の中に正解のクラックを見つけることができると推定している [2]。しかし、クラックの決定精度は十分とは言えず、トポロジー導関数の分布を用いたクラック決定解析の確立が求められている。服部らは、クラック決定問題を扱った研究 [4] において、トポロジー導関数が閾値よりも小さな負の値を持つ内点をつなぎ合わせ、これを候補クラックとして複数の候補クラックから正解のクラックを決定した。具体的には、 N 本の候補クラックから正解のクラック配置を見つけるために、組み合わせ $\sum_{i=1}^N N C_i$ の数だけ目的汎関数の値を計算し、目的汎関数を最小とする候補クラックの配置を正解のクラック配置として決定した。目的汎関数の計算には、偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く必要がある。このため、候補クラックの数が多い場合には、目的汎関数の計算に多くの計算量を要するという課題が存在している。

この問題を解決するために、吉岡らは大量のデータから必要な要素を抽出する圧縮センシング [5],[6],[7] に注目し、圧縮センシングの代表的な手法である LASSO (L1 最適化手法) [5],[6],[7] を用いて、Laplace 方程式に支配される領域の問題でのクラック決定解析を行っている [8]。本研究では、吉岡らの手法を時間域の問題に拡張し、波動方程式に支配される 2 次元無限領域 \mathbb{R}^2 に存在するクラックの位置を LASSO を用いて決定する問題を考える。

候補クラックから正解のクラックを決定する逆解析において、正解となる候補クラックには非ゼロの係数を、実際に存在しない候補クラックにはゼロを乗ずるという考えをもとにスパースベクトルを導入し、このスパースベクトルを LASSO を用いて求めることを考える。

2 2 次元スカラー散乱波動場におけるクラック問題

2 章では、2.1 節において 2 次元波動方程式のクラック問題における境界積分方程式の導出を示す。2.2 節において、スパースモデリングによるクラック決定解析において解くべきスパースベク

トルに対する代数方程式をクラック問題の解の積分表現を用いて導入する. 2.3 節では LASSO を用いたクラック決定の手順を示す.

2.1 問題設定

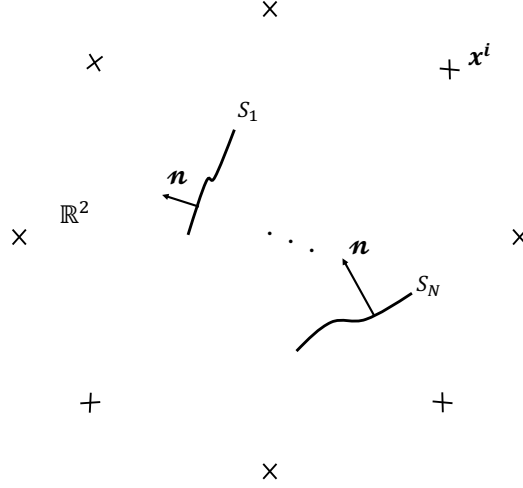


図1 2次元無限領域におけるクラック問題

波動方程式に支配される2次元無限領域 \mathbb{R}^2 において N 本のクラック S_j , $j = 1, \dots, N$ が存在すると仮定し, 以下の初期値境界値問題を考える.

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) - \ddot{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus S, t > 0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \mathbf{n}^\pm}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x} \in S_j^\pm, t > 0) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus S)$$

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &\rightarrow u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{as } (|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) \\ \phi(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in \partial S) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに, $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$ で, \mathbf{n} はクラックの単位法線ベクトル, ϕ はクラックを跨ぐことによるポテンシャルの不連続量で $\phi = u^+ - u^-$, $u^+(u^-)$ はクラックの法線 \mathbf{n} が向いている (向いていない) 方向のポテンシャル u のクラックへの法線方向の極限である. 以下, ϕ をクラックの開口変位と呼ぶ. また, u^{inc} は入射波である.

初期値境界値問題の解は以下のように表される.

$$u(\mathbf{x}, t) = u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^N \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus S) \quad (4)$$

ここに、 Γ は 2 次元波動方程式の因果律 $\Gamma(\mathbf{x}, t) = 0, t < 0$ を満たす基本解であり

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t - |\mathbf{x}|)}{2\pi\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|}} \quad (5)$$

である．なお，本研究では波速を 1 としてスケーリングしている．

式 (4) において $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S \rightarrow x \in S$ の極限移行と境界条件 (2) を適用することでクラック問題の境界積分方程式 (6) が導出される．

$$0 = \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n_x}(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^N \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial n_x \partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in S) \quad (6)$$

境界積分方程式 (6) を解くことでクラックの開口変位 ϕ を求める．

2.2 スパースモデリングのための定式化

N 本の候補クラックの内，正解のクラックの本数を K とする．なお， K の値は未知である．領域 \mathbb{R}^2 内の M 個の観測点 $\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, M$ で計測されたポテンシャル $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ を用いて，正解のクラックをスパースモデリングにより決定する問題を考える．具体的には次の代数方程式を K -スパースなベクトル $\boldsymbol{\xi}$ について解く．

$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b} \quad (7)$$

$$\{A\}_{ij} := \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (8)$$

$$\{\boldsymbol{\xi}\}_i := \xi_i \quad (9)$$

$$\{\mathbf{b}\}_i := u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t) - u^{\text{inc}}(\mathbf{x}^i, t) \quad (10)$$

正解の K 個のクラックの開口変位 ϕ が与えられていれば，式 (8) より係数行列 A が求められ，代数方程式 (7) を解くことで，計測データ $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ より，ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ は正解のクラック番号の成分が 1，それ以外の成分が 0 となる K -スパースなベクトルとして求められ，候補クラックから正解のクラックを選び出せる．

しかし，代数方程式 (7) において，候補クラックの開口変位 $\phi(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in S_j, j = 1, 2, \dots, N$ を求めることができず，係数 $\{A\}_{ij}$ を一意に決めることはできない．実際，正解でない候補クラックは存在しておらず，そのクラックに対応する開口変位など存在しない．そこで本研究では，次の 2 つのケースを考えて係数行列 A を仮定し，正解クラックを決める逆解析を行う．

(ケース 1)

候補クラック N 本全てを存在すると仮定し，開口変位 $\phi(\mathbf{y}, s), \mathbf{y} \in S_j, j = 1, \dots, N, 0 \leq s \leq t$ を境界積分方程式 (6) により計算する．この開口変位の値を用いて式 (8) より求めた係数行列を A_{all} と呼ぶ．

(ケース 2)

候補クラック N 本の内, j 番目の候補クラックが 1 つだけ存在していると仮定し, 次式

$$0 = \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n_x}(\mathbf{x}, t) + \int_0^\infty \int_{S_j} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in S) \quad (11)$$

により開口変位 $\phi(\mathbf{y}, s)$, $\mathbf{y} \in S_j$, $j = 1, \dots, N$, $0 \leq s \leq t$ を計算する. この開口変位の値を用いて式 (8) より求めた係数行列を A_{one} と呼ぶ.

2.3 LASSO によるクラック決定解析

座標勾配法を用いて,

$$\operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|_1 \quad (12)$$

となる最適なベクトル $\boldsymbol{\xi}^{\text{opt}}$ を計算する. なお, $\|\cdot\|_2$ は L_2 ノルム, $\|\cdot\|_1$ は L_1 ノルム, α は正則化パラメータである.

LASSO を用いたクラック決定解析の手順を示す.

step1. 与えられた u^{inc} に対して, なんらかの計測により得られた観測点 \mathbf{x}^i における計測値 $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ より, 代数方程式 (7) の右辺ベクトル \mathbf{b} を得る. ここに, 候補クラック数 N が未知であるため, 観測点数 M はある程度の点数を確保するものとする. なお, 本論文では, 計測の代わりに境界積分方程式 (6) を用いて正解の K 本のクラックの開口変位 ϕ を計算, 正解の K 本のクラックに対する積分表現式 (4) を用いて $u^{\text{mes}}(\mathbf{x}^i, t)$ を求める.

step2. 候補クラックに対してケース 1 を仮定し, 開口変位 ϕ と係数行列 A_{all} を計算する. 同様に, ケース 2 を仮定し, A_{one} を計算する.

step3. それぞれのケースに対して, 座標勾配法を用いて,

$$\operatorname{argmin}_{\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}\|_2^2 + \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|_1 \quad (13)$$

となる最適なベクトル $\boldsymbol{\xi}^{\text{opt}}$ を計算する. $|\xi_i| < 0.1$, $i = 1, \dots, N$ となる成分がある場合, その成分に対応する候補クラックを存在しないと判定し step2 に戻る. 絶対値が 0.1 より小さい成分がない場合, step4 に移る.

step4. ベクトル $\boldsymbol{\xi}^{\text{opt}}$ の成分のうち, 残存する候補クラックに対応する成分の中での最大成分を $\xi_{\text{max}}^{\text{opt}}$, 最小成分を $\xi_{\text{min}}^{\text{opt}}$ とする. $\beta \xi_{\text{max}}^{\text{opt}} \leq \xi_{\text{min}}^{\text{opt}}$ ならば, 求めた $\boldsymbol{\xi}^{\text{opt}}$ を最終の解として計算終了. そうでなければ, $\xi_{\text{min}}^{\text{opt}}$ に対応する候補クラックを存在しないと判定し step2 に戻る.

なお, LASSO を用いたクラック決定解析では, ケース 1 においては, 残存する候補クラックに対応する係数行列 A_{all} を計算する必要があるため, step2~step4 の繰り返し回数だけ境界要素解析を実行する必要がある. 一方で, ケース 2 においては, 最初に想定した候補クラックの数である N 回だけ境界要素解析を実行する必要がある. ケース 1, ケース 2 のいずれの場合においても, 従来法 [4] の境界要素解析の実行回数 $\sum_{i=1}^N N C_i$ に比べて少ない実行回数であり, 計算時間の短縮が見込まれる.

3 数値計算

3.1 LASSO のための係数行列と右辺ベクトルの選択

式 (8), (10) に現れる係数行列 A と右辺ベクトル \mathbf{b} は時刻 t に依存する. どの時刻における値を用いるかについて, 次の 2 つの手法を考える.

(手法 1)

入射波を連続な波とし, 十分な時間が経過した時刻 t での係数行列, 右辺ベクトルを A^t と \mathbf{b}^t とし, LASSO を実行しスパースベクトル ξ を求める.

以下, 手法 1 でケース 1, ケース 2 に対応した係数行列は $A_{\text{all}}^t, A_{\text{one}}^t$ と表す.

(手法 2)

入射波を 1 波のみの入射とし適当な複数の観測時刻 t_1, \dots, t_L を選び, それらの時刻での係数行列, 右辺ベクトルを $A^{t_k}, \mathbf{b}^{t_k}, k = 1, \dots, L$ と表す. また, 次のように係数行列, 右辺ベクトルを定め LASSO を実行し, スパースベクトル ξ を求める.

$$C\xi = d \quad (14)$$

$$C = \begin{pmatrix} A^{t_1} \\ \vdots \\ A^{t_L} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$d = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{t_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{t_L} \end{pmatrix} \quad (16)$$

以下, 手法 2 でケース 1, ケース 2 に対応した係数行列は $C_{\text{all}}, C_{\text{one}}$ と表す.

3.2 数値計算例 1

3.2.1 問題設定

3 つの問題設定でクラック決定解析を行う. 先行研究 [8] と同様に, 本研究の数値計算では参考文献 [4] のトポロジー導関数の分布図 (図 2) から選出された図 3 のような候補クラックを参

照し図 4 に示すようなクラックの候補を設定する．方向と長さを既知としたまばらな配置での $N = 4$ 本の候補クラック S_1, S_2, S_3, S_4 を考える．候補クラックのデータは表 1 の通りである．なお，横軸正の向きに対する傾斜角を θ として $\tan\theta$ を傾きと定義する．図 5 のように正解のクラックを S_1, S_2 の $K = 2$ 本とする．正解のクラックを未知として，LASSO により候補クラックから正解クラックの決定を試みる．また，座標降下法で用いた正則化パラメータは $\alpha = 10^{-4}$ とする．半径 1 の円周上に等間隔な $M = 24$ 個の観測点 \mathbf{x}_i を置く．また，3.1 節手法 1 において $t = 3.5$ とし，手法 2 において C, \mathbf{d} に用いる観測時刻は $1.25 \leq t \leq 3.5$ を等間隔に分割した 10 点 $t_1 = 1.25, t_2 = 1.5, \dots, t_{10} = 3.5$ を選ぶ．入射波は手法 1 では

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.05}(t - x_2 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

手法 2 では

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.05}(t - x_2 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_2 \leq 1.55) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

とした．なお，ケース 2 の係数行列 $A_{\text{all}}, C_{\text{all}}$ を用いた場合，LASSO の手順 (step1 から step4) において候補クラックの数が正解のクラック本数 K になった際，スパースベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の非ゼロ成分は 1 となる．そのため，数値誤差を考慮し $\beta = 0.99$ とした．ケース 2 の係数行列 $A_{\text{one}}, C_{\text{one}}$ を用いた場合には明確な基準が存在しないが，2 つのケースの影響係数 $\{A_{\text{all}}\}_{ij}, \{A_{\text{one}}\}_{ij}, \{C_{\text{all}}\}_{ij}, \{C_{\text{one}}\}_{ij}$ の値を比較し $\beta = 0.5$ とした．以上のパラメータは数値計算例 2, 3 でも同様とする．また，LASSO の計算終了条件は 2.3 節に従った．2.3 節の step4 において，外れの候補クラックと判定された候補クラックについては，表中に“—”で示す．

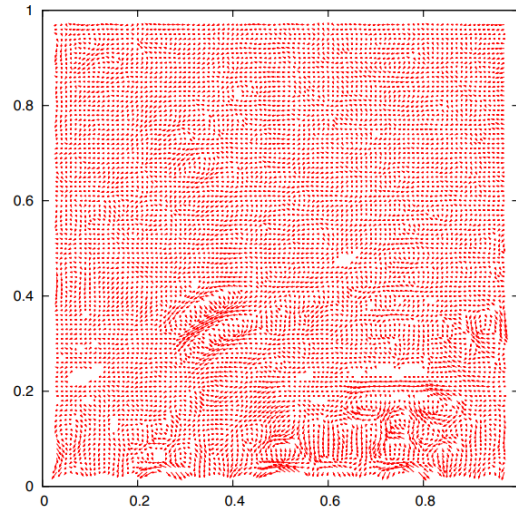


図 2 各内点におけるトポロジー導関数の計算結果 (論文 [4] から引用)

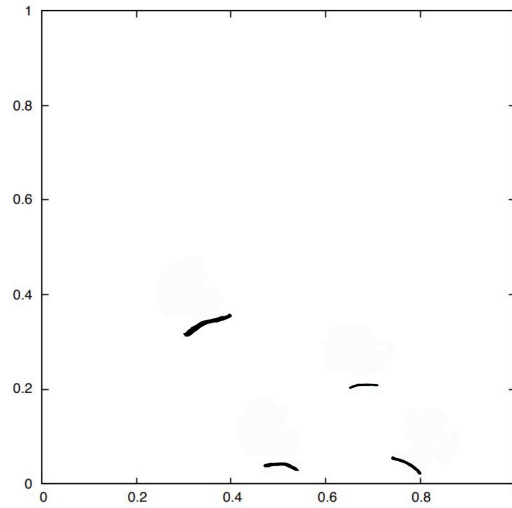


図3 図2から想定される候補クラック (論文 [4] から引用)

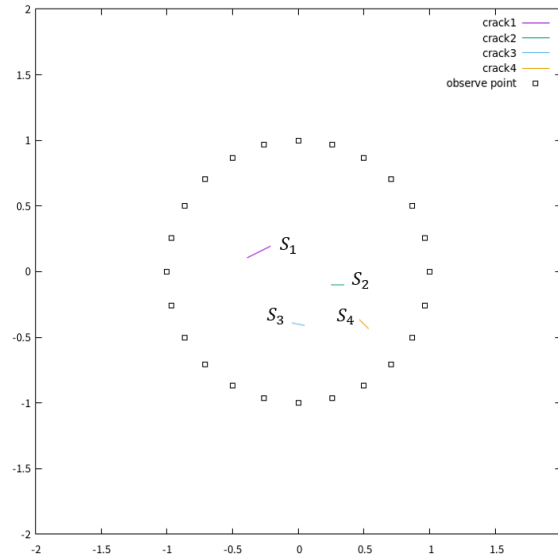


図4 例1：候補クラック，図中の”□”は観測点を示す

3.2.2 計算結果

A_{one}^t , A_{all}^t , C_{one} , C_{all} を用いてそれぞれ計算を行った．重みベクトル ξ の遷移は表 2 ～ 5 の通りである．これらの結果から，どの係数を用いても 1 回目の計算 (loop1) から正確に候補クラックから正解のクラックを特定することができている．また，4 本の候補クラックに対しても 1 回目の計算 (loop1) 結果の精度が高いため，2 回の境界要素解析を行うだけの計算量で済んでおり，どの係数行列の場合も同等に決定精度が高いと言える．

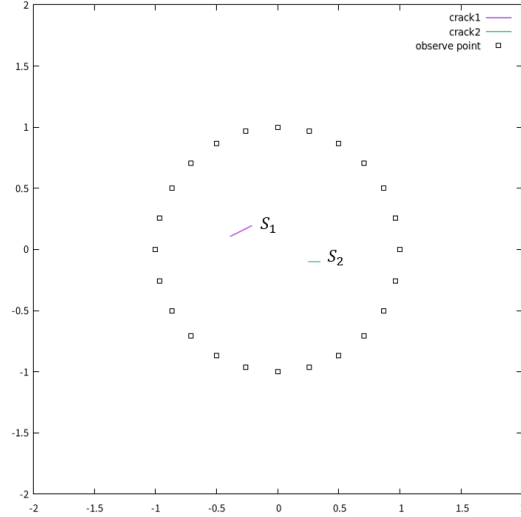


図5 例1：正解のクラック，図中の”□”は観測点を示す

表1 例1：候補クラックの中心座標とクラック長と傾き

候補クラック	中心座標	クラック長	傾き
S_1	(-0.3,0.15)	0.2	0.5
S_2	(0.3,-0.1)	0.1	0.0
S_3	(0.0,-0.4)	0.1	-0.2
S_4	(0.5,-0.4)	0.1	-1.0

3.3 数値計算例2

候補クラックの向きが同じで候補クラックの間隔が狭い複数の候補クラックから正解のクラックの決定を試みる．なお，トポロジー導関数を用いる手法に限らずクラック問題の非破壊評価における材料内部の可視化画像から，図2のような近い位置に同じ向きの複数のクラック候補を読み取れることが多くある [9]．このような候補クラックから正解のクラックを決定することは工学的にも重要である．

3.3.1 問題設定

方向と長さを既知とした図6のような間隔を詰めた $N = 3$ 本の候補クラック S_1, S_2, S_3 を考える．候補クラックのデータは表6の通りである．正解のクラックは， S_1, S_2, S_3 をそれぞれ1本を正解とする3つの問題を考える ($N = 3, K = 1$)．正解のクラックを未知として，LASSOにより候補クラックから正解クラックの決定を試みる．入射波は手法1では

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.1}(t - x_1 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

手法 2 では

$$u^{\text{inc}}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.1}(t - x_1 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_1 \leq 1.6) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

とした. なお, として. また, 座標降下法で用いた正則化パラメータは $\alpha = 10^{-4}$ とした.

表 2 例 1: A_{one}^t によるクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.98167272	0.98842889
ξ_2	1.02157503	1.02936388
ξ_3	-0.02530064	——
ξ_4	0.00350034	——

表 3 例 1: A_{all}^t によるクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.93895526	0.99999999
ξ_2	0.93758079	0.99999999
ξ_3	-0.09416687	——
ξ_4	0.04410321	——

表 4 例 1: C_{one} によるクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.99303047	0.99303047
ξ_2	0.95286410	0.95286410
ξ_3	0.00000000	——
ξ_4	0.00000000	——

表 5 例 1: C_{all} によるクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.967458657	0.99999999
ξ_2	0.86354779	0.99999999
ξ_3	0.03017001	——
ξ_4	-0.02364852	——

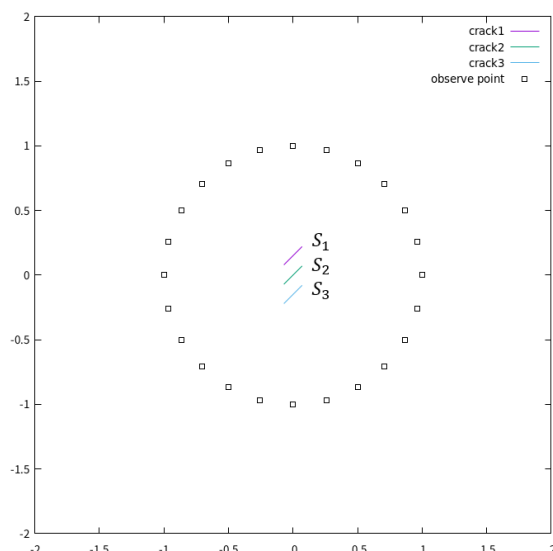


図6 例2：候補クラック，図中の”□”は観測点を示す

表6 例2：候補クラックの中心座標とクラック長と傾き

候補クラック	中心座標	クラック長	傾き
S_1	(0.0,0.15)	0.2	1.0
S_2	(0.0,0.0)	0.2	1.0
S_3	(0.0,-0.15)	0.2	1.0

3.3.2 計算結果

各クラック S_1, S_2, S_3 が正解となる3つの問題において， $A_{\text{one}}^t, A_{\text{all}}^t, C_{\text{one}}, C_{\text{all}}$ を用いて計算を行った．重みベクトル ξ の遷移は表7-12の通りである．どの係数行列を用いても全ての正解のパターンで正確に決定を行うことができています．しかし， $A_{\text{one}}^t, C_{\text{one}}$ と $A_{\text{all}}^t, C_{\text{all}}$ の決定精度に少し差がある． $A_{\text{one}}^t, C_{\text{one}}$ の場合、平均2.3回の境界要素解析で正解のクラックを決定できているのに対し， $A_{\text{all}}^t, C_{\text{all}}$ の場合は平均2.8回で正解のクラックを決定している．また，1回目の計算(loop1)の ξ の値も $A_{\text{one}}^t, C_{\text{one}}$ の方が決定精度が高い．精度の差の原因として， $A_{\text{one}}^t, C_{\text{one}}$ の場合、正解のクラックが1本であるため，正解のクラックを仮定した係数列とそれぞれ \mathbf{b}, \mathbf{d} が完全に一致する．一方， $A_{\text{all}}^t, C_{\text{all}}$ の場合，間隔が狭い3本の候補全てを仮定しているので正解の観測波との乖離が大きくなるのが原因と考えられる．また，手法1と手法2については手法1，手法2共に平均2.5回での決定をしていることからほぼ同等の決定精度だと言える．

表 7 例 2：正解のクラックを S_1 とし， A_{one}^t によるクラック決定 (左) と A_{all}^t によるクラック決定 (右) の結果

	loop1	loop2
ξ_1	1.16435151	1.00000000
ξ_2	0.09164351	——
ξ_3	0.09671736	——

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	0.64263255	1.22891329	1.00000000
ξ_2	-0.03552983	——	——
ξ_3	0.34292079	0.01141914	——

表 8 例 2：正解のクラックを S_2 とし， A_{one}^t によるクラック決定 (左) と A_{all}^t によるクラック決定 (右) の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.00449044	——
ξ_2	1.06862389	1.00000000
ξ_3	-0.02258670	——

	loop1	loop2
ξ_1	-0.01064249	——
ξ_2	1.27708092	1.00000000
ξ_3	0.00000000	——

表 9 例 2：正解のクラックを S_3 とし， A_{one}^t によるクラック決定 (左) と A_{all}^t によるクラック決定 (右) の結果

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	0.27840362	0.00000000	——
ξ_2	0.02686878	——	——
ξ_3	0.86044625	0.99999999	1.00000000

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	0.12629098	0.01430181	——
ξ_2	-0.04345088	——	——
ξ_3	0.8483233	1.10501907	1.00000000

表 10 例 2：正解のクラックを S_1 とし， C_{one} によるクラック決定 (左) と C_{all} によるクラック決定 (右) の結果

	loop1	loop2
ξ_1	1.15516486	1.00000000
ξ_2	0.00000000	——
ξ_3	-0.0285112	——

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	0.59820438	0.64289809	1.00000000
ξ_2	0.22592613	0.21531011	——
ξ_3	0.13433685	——	——

3.4 数値計算例 3

これまでの数値計算結果を踏まえ，向きがバラバラでクラック間の間隔が十分に離れている候補クラックと，向きが同じでクラック間の間隔が短い候補クラックが混在した領域において，正解のクラックを決定することを試みる．

3.4.1 問題設定

方向と長さを既知とした図 7 のような数値計算例 1，2 のクラックが混在したような配置の $N = 6$ 本の候補クラック $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ を考える．候補クラックのデータは表 13 の通

表 11 例 2：正解のクラックを S_2 とし, C_{one} によるクラック決定 (左) と C_{all} によるクラック決定 (右) の結果

	loop1	loop2
ξ_1	-0.00208057	——
ξ_2	0.95536507	1.00000000
ξ_3	0.01078147	——

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	0.10315748	0.03243670	——
ξ_2	0.95445901	1.09664475	1.00000000
ξ_3	0.00000000	——	——

表 12 例 2：正解のクラックを S_3 とし, C_{one} によるクラック決定 (左) と C_{all} によるクラック決定 (右) の結果

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	-0.02378719	——	——
ξ_2	0.24766460	0.30675332	——
ξ_3	1.06169559	1.06358728	1.00000000

	loop1	loop2
ξ_1	0.01466138	——
ξ_2	0.03082692	——
ξ_3	1.05502680	1.00000000

りである．図 8 のように正解のクラックを S_3, S_4 の $K = 2$ 本とする．正解のクラックを未知として, LASSO により候補クラックから正解クラックの決定を試みる．入射波は手法 1 では

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.05}(t - x_2 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_2) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

手法 2 では

$$u^{\text{inc}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{0.05}(t - x_2 - 1.5)\right), & (1.5 \leq t - x_2 \leq 1.55) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

とした．また, 座標降下法で用いた正則化パラメータは $A_{\text{all}}^t, C_{\text{one}}, C_{\text{all}}$ の計算では $\alpha = 10^{-4}$ とした． A_{one}^t では $\alpha = 10^{-4}$ ではうまく決定できなかったため, $\alpha = 10^{-2}$ とした．

表 13 例 3：候補クラックの中心座標とクラック長と傾き

候補クラック	中心座標	クラック長	傾き
S_1	(-0.3, 0.35)	0.2	0.8
S_2	(-0.3, 0.2)	0.2	0.8
S_3	(-0.3, 0.05)	0.2	0.8
S_4	(0.4, -0.1)	0.2	0.0
S_5	(0.0, -0.4)	0.1	-0.2
S_6	(0.5, -0.4)	0.1	-1.0

3.4.2 計算結果

$A_{\text{one}}^t, A_{\text{all}}^t, C_{\text{one}}, C_{\text{all}}$ を用いてそれぞれ計算を行った．重みベクトル ξ の遷移は表 14 ～ 17 の通りである．どの係数行列を用いても正解のクラックを特定することができた．特に $A_{\text{one}}^t, C_{\text{one}}$

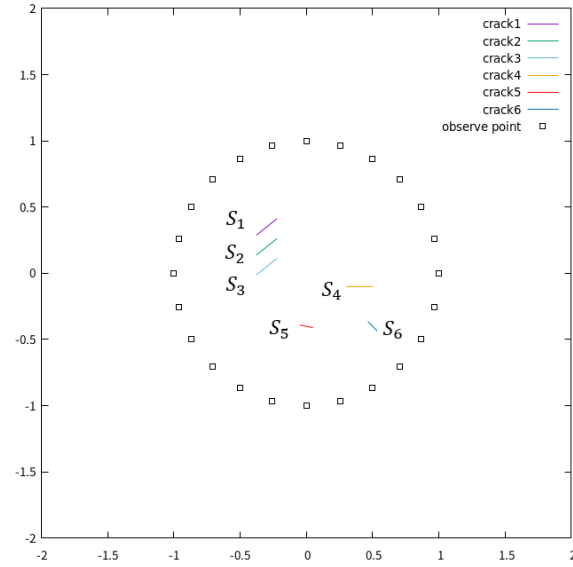


図 7 例 3：候補クラック，図中の”□”は観測点を示す

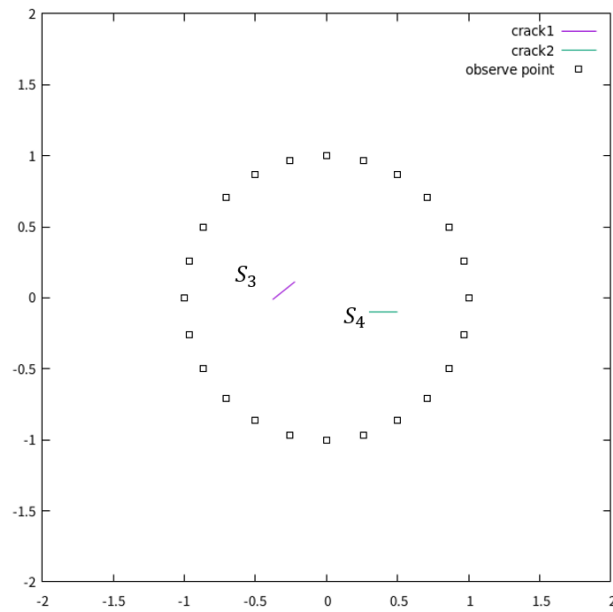


図 8 例 3：正解のクラック，図中の”□”は観測点を示す

の決定精度が非常に良い．1 回目の計算 (loop1) で ξ が K -スパースになっているため，2 回の境界要素解析を行うだけで正解のクラックを決定できている．また，手法 1 と 2 においても，手法 2 の方が表 15, 17 から正解のクラックの決定までの回数が短縮されており，決定精度が良いと言える．

表 14 例 3 : A_{one}^t によるクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.00000000	——
ξ_2	0.00000000	——
ξ_3	0.98046400	0.98046400
ξ_4	0.82359930	0.82359930
ξ_5	0.00000000	——
ξ_6	0.00000000	——

表 15 例 3 : A_{all}^t によるクラック決定の結果

	loop1	loop2	loop3	loop4	loop5
ξ_1	-0.45049136	-0.55742864	——	——	——
ξ_2	0.15814596	0.17544724	0.06391261	——	——
ξ_3	1.10749919	1.07845936	1.13605240	1.14920435	0.99999999
ξ_4	0.74246174	0.75831843	0.75784657	0.74451495	0.99999999
ξ_5	0.04262597	——	——	——	——
ξ_6	0.54041182	0.53768513	0.44781714	0.36134330	——

表 16 例 3 : C_{one} によるクラック決定の結果

	loop1	loop2
ξ_1	0.00000000	——
ξ_2	0.00000000	——
ξ_3	0.94083173	0.94083173
ξ_4	0.98632346	0.98632346
ξ_5	0.00000000	——
ξ_6	0.00000000	——

表 17 例 3 : C_{all} によるクラック決定の結果

	loop1	loop2	loop3
ξ_1	0.00000000	——	——
ξ_2	0.00743334	——	——
ξ_3	0.62290579	0.83979472	1.00000000
ξ_4	1.24597744	1.24735868	1.00000000
ξ_5	-0.00010117	——	——
ξ_6	0.17913711	0.21894271	——

4 結論

本研究では, LASSO を用いて 2 次元散乱波動場におけるクラック決定を行った. 候補クラックがまばらな配置にある場合, 向きが酷似し間隔が詰まっている場合共に, 候補クラックを 1 つ

ずつ仮定する，または候補クラックが全て存在すると仮定することで，求めた係数行列を用いて LASSO により正確にクラックの位置を決定できた．また，時間域のデータに対しては入射波を連続な波とし，十分な時間が経過した時刻での値を用いる，または 1 波のみの入射波に対して複数の観測時刻のデータを用いることで正確なクラックの位置を決定できた．前述した 2 通りのクラックの配置を混合したような複雑な問題では特に，候補クラックを 1 つずつ仮定し係数行列を求め，1 波のみの入射波に対して複数の観測時刻のデータを用いる手法が望ましいという結果が得られた．なお，実際の非破壊評価では，計測誤差を含むデータを用いて候補クラックが求められる．向きや位置に誤差を含む候補クラックから，どの程度の精度で正解のクラックを決定できるのかは今後の課題である．本研究では 2 次元散乱波動場の外部問題において正解のクラックを決定する問題を考えたが，研究 [4] では内部問題でのクラックの推定を行っており，本研究のクラック決定手法が内部問題についても同様に決定可能であるか，またその決定精度を検討することは今後の課題である．また，クラックの数を更に増やした規模の大きく複雑な問題についても決定可能性，決定精度を検討することも今後の課題として挙げられる．

謝辞

本研究に取り組むにあたって助言をいただいた吉川仁特定教授に深く感謝する．

参考文献

- [1] Bonnet, M.: Topological sensitivity for 3D elastodynamics and acoustic inverse scattering in the time domain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.195, pp.5239–5254, 2006.
- [2] Bellis, C. and Bonnet, M.: Qualitative identification of cracks using 3D transient elastodynamic topological derivative: formulation and FE implementation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.253, 1, pp.89–105, 2013.
- [3] 吉川仁, 寺沢龍: 3 次元スカラー波動問題における時間域境界積分方程式法を用いたトポロジー最適化による散乱体決定解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.71, No.2, pp.I 71–I 78, 2015.
- [4] 服部潤也, 吉川仁, 2 次元散乱波動場におけるトポロジー導関数を用いた様々なクラックの決定解析, 応用力学論文集 Vol.20(特集), p.255-262, 2017.
- [5] 永原正章, LASSO のための凸最適化—近接勾配法による高速アルゴリズム, システム/情報/制御, Vol.61, p.20-28, 2017.
- [6] 田中利幸, 圧縮センシングの数理, IEICE Fundamentals Review, Vol.4, No.1, pp.39-47 2010.
- [7] 川野秀一, スパース正則化に基づく回帰モデリングとその計算アルゴリズム, 計算機統計学 p.173-186 2020.
- [8] 吉岡明紀, トポロジー導関数を用いた定量的非破壊評価のための LASSO によるクラック決

定, 土木学会論文集, Vol. 80, No. 15, 2024(accepted)..

- [9] Komura I. Hirasawa T, Nagai S., Takabayashi J. and Naruse K.: Crack detection and sizing technique by ultrasonic and electromagnetic methods, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 206, Issues 2–3, pp.351–362, 2001.

付録 A 開口変位の計算

$$0 = \frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n_x}(\mathbf{x}, t) + \int_0^\infty \int_S \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \phi(\mathbf{y}, s) dS_y ds \quad (\mathbf{x} \in S) \quad (23)$$

境界式 (23) を選点法により数値計算する. まず, 式 (23) を境界 S を境界要素 S_m , $m = 1, \dots, N_S$ に分割し, $t = k\Delta t$, $k = 1, \dots, N_T$ と離散化する.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_T} \sum_{m=1}^{N_S} \phi(\mathbf{x}^m, k\Delta t) M_s^m(\mathbf{x}) M_T^k(t) \quad (24)$$

ここに, 点 \mathbf{x}^m は境界要素 S_i の代表点であり, $M_s^m(\mathbf{x})$, $M_T^k(t)$ は区分一定な空間内挿関数, 区分線形な時間内挿関数である.

$$M_s^m(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & , \mathbf{x} \in S_m \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (25)$$

$$M_T^k(t) = \begin{cases} \frac{t}{\Delta t} - k + 1 & , (k-1)\Delta t \leq t < k\Delta t \\ \frac{t}{\Delta t} + k + 1 & , k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

境界積分方程式 (23) は次式のようにになる.

$$0 = \mathbf{q}_n^{\text{inc}} + \sum_{m=1}^{N_S} W_{N_S-m+1} \phi_m \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}_n^{\text{inc}}\}_i &= \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{inc}}}{\partial \mathbf{n}_x}(\mathbf{x}, k\Delta t) \\ \{\phi_m\}_i &= \phi(\mathbf{x}^m, k\Delta t) \\ \{W_{N_S-m+1}\}_{ij} &= \int_0^T \int_S \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, k\Delta t - s) M_s^m(\mathbf{x}) M_T^k(t) dS_y ds \end{aligned} \quad (28)$$

式 (27) を解くことで開口変位 ϕ を数値的に計算する.

※線に沿って切り取って下さい。

特別研究報告書

2次元散乱波動場における
LASSO を用いたクラック決定解析

指導教員 吉川仁 特定教授

京都大学工学部情報学科
数理工学コース
令和2年4月入学

住岡 聖仁

令和6年1月26日提出

次元散乱波動場におけるLASSOを用いたクラック決定解析

住岡 聖仁

令和5年度

2次元散乱波動場における LASSO を用いたクラック決定解析

住岡 聖仁

摘要

LASSO(L1 最適化手法) を用いて, 2次元無限領域に存在するクラックの位置を決定する問題を考える. 服部・吉川の研究では, トポロジー導関数の分布を用いて向きや長さが決定されたクラックの候補を選び出し, 候補クラックの配置ごとに目的汎関数を計算し, 目的汎関数の値が最小となる候補クラックの組み合わせをクラック配置として決定する逆解析を行っている. しかし, 候補クラックの数が多い場合には, 目的汎関数の計算に多くの計算量を要するという課題が存在している. この問題を解決するために吉岡らは LASSO を用いて Laplace 方程式に支配される領域の問題でのクラック決定解析を行っている. 本研究では, 吉岡らの手法を時間域の問題に拡張し, 波動方程式に支配される 2次元無限領域に存在するクラックの位置を LASSO を用いて決定する問題を考える. 候補クラックがまばらな配置にある場合, 向きが酷似し間隔が詰まっている場合共に, 正確に候補クラックから正解のクラックを決定できた. また, 前述した2通りのクラック配置を混合したような複雑な問題においても候補クラックから複数本の正解のクラックを決定できた.