高速フーリエ変換

1　フーリエ解析

point

複雑な関数・現象を**三角関数**に分解して考える

1.1　フーリエ級数展開

関数 $f(x)$ の性質を知るために、より**基本的な関数系**

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots\}$$

で級数展開を考える.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$$

$f(x)$ が無限回微分可能 (マクローリン展開)
→ $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots\right\}$ で級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f(x)$ が周期関数 (フーリエ級数展開)
→ $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$ (三角関数系) で級数展開

$$f(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ \cdots \ (※)$$

1.1.1　三角関数の利点

→ 直交性 (自身以外との内積が 0)

関数の内積

$$f(x), g(x) \text{：周期関数} (2\pi)$$
$$\int_{\pi}^{\pi} f(x) \quad g(x)\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \ \sin(nx)\, dx = \begin{cases} 0 \ \ (m \neq n) \\ \pi\, (m = n) \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \ \cos(nx)\, dx = \begin{cases} 0 \ \ (m \neq n) \\ \pi\, (m = n) \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \ \sin(nx)\, dx = 0$$

1.1.2 定数を求める

(※) の両辺に $\cos mx$ をかけて,$\pi \sim -\pi$ で積分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} a \cos mx \ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) \cos mx \ + b_n \sin(nx) \cos mx \ )\, dx$$
$$= a_m \pi$$

(※) の両辺に $\sin mx$ をかけて,$\pi \sim -\pi$ で積分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} a \sin mx \ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) \sin mx + b_n \sin(nx) \sin mx)\, dx$$
$$= b_m \pi$$

(※) の両辺を $\pi \sim -\pi$ で積分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2\pi a$$

上記の式より

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \ dx$$
$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \ dx$$
$$a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

a_m の式に $m = 0$ を代入すると

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2a$$

$\rightarrow$ 以後、a を $\dfrac{a_0}{2}$ として,(※) は以下のように書き表せる.

$f\,(x)$ のフーリエ級数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\,(x)\cos nx\;dx \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\,(x)\sin nx\;dx \end{cases}$$

これを、$f\,(x)$ **のフーリエ級数**という.

$f\,(x)$ に収束するかどうか ($f\,(x)$ と一致するか) は別問題.

1.1.3 フーリエ級数の収束性

周期 2π の周期関数 $f\,(x)$ が**区分的に滑らか**であるとき、$f\,(x)$ のフーリエ級数は以下のように収束する。

フーリエ級数の収束

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right)\right)=\begin{cases} f\,(x)\ \ (\text{連続な点}) \\ \\ \dfrac{f\,(x-0)+f\,(x+0)}{2}\ (\text{不連続な点}) \end{cases}$$

区分的に滑らか

$a\leq x\leq b$ 上の関数 $f\,(x)$ が次の条件を満たすとき,$a\leq x\leq b$ で**区分的に連続**であるという。

(i) $a\leq x\leq b$ で有限個の点を除いて連続

(ii) 不連続点 c において $f\,(c-0)\,,f\,(c+0)$ が存在する。

さらに、導関数 $f'\,(x)$ が**区分的に連続**であるとき、関数 $f\,(x)$ を**区分的に滑らか**という。

1.2 複素フーリエ級数

オイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\begin{cases} e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta \\ e^{-in\theta}=\cos n\theta-i\sin n\theta \end{cases}\quad \text{より}\quad \begin{cases} \cos nx=\dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} \\ \cos nx=\dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$$

これをフーリエ級数に代入して整理すると、以下のように表すことができる.

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inx}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}C_0=\dfrac{a_0}{2}\\C_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}\\C_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}\end{cases}\qquad \text{とする}$$

複素フーリエ級数

$$\text{複素フーリエ級数}:\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{inx}$$

$$\text{複素フーリエ係数}:C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx$$

C_n の性質

$f(x)$ が実関数であるとき $C_{-n}=C_n*$ が成立する。(C_n^* は C_n の複素共役)
$\rightarrow n$ が非負なものを計算すれば求められる。

$$\begin{aligned}C_{-n}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{inx}\,dx\\C_n^*&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left(e^{inx}\right)^*\,dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{inx}\,dx\\&=C_{-n}\end{aligned}$$

1.3 一般周期のフーリエ級数

point

周期 2π の関数へと変換する

周期が $2L$ の関数を考える.

$$\begin{aligned}f(x)\quad&:\quad\text{周期 }2L\\\downarrow\quad&\quad x=\frac{L}{\pi}t\text{ として変数変換}\\f\left(\frac{L}{\pi}t\right)\quad&:\quad\text{周期 }2\pi\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{L}{\pi}t\right)=h(t)\ \text{とする}$$

$$\text{グラフは横軸方向に }\frac{\pi}{L}\text{ 倍される}$$

$h(t)$ をフーリエ級数展開すると、

$$h(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos nt dt \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin nt dt \end{cases}$$

t を x に戻すと

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \end{cases}$$

複素数の場合

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \exp\left(-i \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

1.4 フーリエ変換

1.4.1 フーリエの積分公式

point

非周期関数 $\to$ 周期 ∞ として考える.

はじめに、周期 $2L$ の関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える。

$$\begin{cases} f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{n\pi}{L} x \right) \\ c_n = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(t) \exp\left(-i \frac{n\pi}{L} x \right) dx \end{cases}$$

ここで、c_n をそのまま $f(x)$ に代入すると、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \exp\left(-i \frac{n\pi}{L} t \right) dt \right] \exp\left(i \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

書き換えると,

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \right] \exp(i\omega_n x) \Delta\omega$$

また、$G(\omega_n)$ を, 以下のようにおく。

$$G(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(t) \exp(-i\omega_n t) dt$$

ここで、$L\to\infty$ で $\Delta\omega\to 0$ より、

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\omega\to 0} f(x) &= \lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n)\Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\, d\omega\end{aligned}$$

フーリエの積分公式

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\right]\exp(i\omega x)\, d\omega$$

※成立する条件：$f(x)$ が $(-\infty,\infty)$ で区分的に滑らかで,$(-\infty,\infty)$ において**絶対可積分**

絶対可積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\, dx<\infty$$

1.4.2 フーリエ変換

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt\right]\exp(i\omega x)\, d\omega$$

ここで

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)\, dt$$

として,元の式に代入すると

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega x)\, d\omega$$

フーリエ変換

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t) \\ &= F[f(t)]\end{aligned}$$

※ 絶対加積分であれば $F(\omega)$ は存在

1.5 フーリエの反転公式と逆フーリエ変換

フーリエの反転公式

$$F(\omega) = F[f(t)] \text{ とすると、}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega x)\,d\omega = \begin{cases} f(x) & \text{(連続な点)} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{(不連続な点)} \end{cases}$$

フーリエ逆変換

$$F(\omega) = F[f(t)] \text{ とすると、}$$

$$F^{-1}[F(\omega)] := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega x)\,d\omega$$

1.6 まとめ

point

・フーリエ級数 → 周期関数を波の合成で表す → ある程度の周波数の波で事足りる
・フーリエ変換 → 非周期関数を波の合成で表す → 無数の連続的な周波数の波が必要

2 高速フーリエ変換 (fast Fourier transform)

2.1 高速フーリエ変換とは

高速フーリエ変換 (fast Fourier transform) とは、離散フーリエ変換を計算機上で高速に計算するアルゴリズムである。

3 用語

バッファ

バッファとは、データが 1 つの場所から別の場所に転送する際に、データを一時的に保持するメモリストレージ領域のことをいいます。
プログラムがデータをバッファに書き込もうとした際に、データの量がメモリバッファのストレージ容量を超えてしまうと、隣接するメモリ位置を上書きしてしまいます。
この結果発生する事象をバッファオーバーフロー（バッファオーバーラン）と呼びます。

4　ファイルの読み書き

ファイルへの読み書き

(1) 1 文字の読み込み
int fgetc(FILE *fp);

(2) 1 文字の書き出し
int fputc(int c, FILE *fp);

(3) 文字列の書き出し

(4) int fprintf(FILE *steram, char *format, ...);