

高速フーリエ変換

1 フーリエ解析

point

複雑な関数・現象を三角関数に分解して考える

1.1 フーリエ級数展開

関数 $f(x)$ の性質を知るために、より基本的な関数系

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$$

で級数展開を考える.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$$

$f(x)$ が無限回微分可能 (マクローリン展開)

→ $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ で級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f(x)$ が周期関数 (フーリエ級数展開)

→ $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ (三角関数系) で級数展開

$$f(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots (\ast)$$

1.1.1 三角関数の利点

→ 直交性 (自身以外との内積が 0)

$f(x), g(x) : \text{周期関数}(2\pi)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx &= 0 \end{aligned}$$

1.1.2 定数を求める

(※) の両辺に $\cos mx$ をかけて, $\pi \sim -\pi$ で積分.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) dx \\ &= a_m \pi \end{aligned}$$

(※) の両辺に $\sin mx$ をかけて, $\pi \sim -\pi$ で積分.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) dx \\ &= b_m \pi \end{aligned}$$

(※) の両辺を $\pi \sim -\pi$ で積分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a$$

上記の式より

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \\ a &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

a_m の式に $m = 0$ を代入すると

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2a$$

→ 以後、 a を $\frac{a_0}{2}$ として, (※) は以下のように書き表せる.

$f(x)$ のフーリエ級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{cases}$$

これを、 $f(x)$ のフーリエ級数という。

$f(x)$ に収束するかどうか ($f(x)$ と一致するか) は別問題。

1.1.3 フーリエ級数の収束性

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が区分的に滑らかであるとき、 $f(x)$ のフーリエ級数は以下のように収束する。

フーリエ級数の収束

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \begin{cases} f(x) & (\text{連続な点}) \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & (\text{不連続な点}) \end{cases}$$

区分的に滑らか

$a \leq x \leq b$ 上の関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき、 $a \leq x \leq b$ で区分的に連続であるという。

- (i) $a \leq x \leq b$ で有限個の点を除いて連続
- (ii) 不連続点 c において $f(c-0), f(c+0)$ が存在する。

さらに、導関数 $f'(x)$ が区分的に連続であるとき、関数 $f(x)$ を区分的に滑らかという。

1.2 複素フーリエ級数

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{cases} e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \\ e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} \cos nx = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin nx = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$$

これをフーリエ級数に代入して整理すると、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \\ \begin{cases} C_0 = \frac{a_0}{2} \\ C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} &\quad \text{とする}\end{aligned}$$

複素フーリエ級数

$$\text{複素フーリエ級数: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$\text{複素フーリエ係数: } C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

C_n の性質

$f(x)$ が実関数であるとき $C_{-n} = C_n^*$ が成立する。 $(C_n^*$ は C_n の複素共役)

→ n が非負なものを計算すれば求められる。

$$\begin{aligned}C_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \\ C_n^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{inx})^* dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= C_{-n}\end{aligned}$$

1.3 一般周期のフーリエ級数

point

周期 2π の関数へと変換する

周期が $2L$ の関数を考える。

$$\begin{aligned}f(x) &: \text{周期 } 2L \\ \downarrow x = \frac{L}{\pi}t &\text{として変数変換} \\ f\left(\frac{L}{\pi}t\right) &: \text{周期 } 2\pi \\ f\left(\frac{L}{\pi}t\right) &= h(t) \text{ とする} \\ \text{グラフは横軸方向に } \frac{\pi}{L} &\text{倍される}\end{aligned}$$

$h(t)$ をフーリエ級数展開すると、

$$h(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos nt dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin nt dt \end{cases}$$

t を x に戻すと

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \end{cases}$$

複素数の場合

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(i \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp \left(-i \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

1.4 フーリエ変換

1.4.1 フーリエの積分公式

point

非周期関数 \rightarrow 周期 ∞ として考える.

はじめに、周期 $2L$ の関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える。

$$\begin{cases} f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left(i \frac{n\pi}{L} x \right) \\ c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \exp \left(-i \frac{n\pi}{L} x \right) dx \end{cases}$$

ここで、 c_n をそのまま $f(x)$ に代入すると、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \exp \left(-i \frac{n\pi}{L} t \right) dt \right] \exp \left(i \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

書き換えると、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \right] \exp(i\omega_n x) \Delta\omega$$

また、 $G(\omega_n)$ を、以下のようにおく。

$$G(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) \exp(-i\omega_n t) dt$$

ここで、 $L \rightarrow \infty$ で $\Delta\omega \rightarrow 0$ より、

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n) \Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega\end{aligned}$$

フーリエの積分公式

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right] \exp(i\omega x) d\omega$$

※成立する条件： $f(x)$ が $(-\infty, \infty)$ で区分的に滑らかで、 $(-\infty, \infty)$ において絶対可積分

絶対可積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

1.4.2 フーリエ変換

フーリエ変換

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right] \exp(i\omega x) d\omega$$

ここで

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

として、元の式に代入すると

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega$$

式の意味

2 FFT

2.1 FFT とは

FFT とは、**高速フーリエ変換** (fast Fourier transform) の略称であり、離散フーリエ変換を計算機上で高速に計算するアルゴリズムである。

3 用語

バッファ

バッファとは、データが 1 つの場所から別の場所に転送する際に、データを一時的に保持するメモリストレージ領域のことをいいます。

プログラムがデータをバッファに書き込もうとした際に、データの量がメモリバッファのストレージ容量を超えてしまうと、隣接するメモリ位置を上書きしてしまいます。

この結果発生する事象をバッファオーバーフロー（バッファオーバーラン）と呼びます。

4 ファイルの読み書き

ファイルへの読み書き

- (1) 1 文字の読み込み

```
int fgetc(FILE *fp);
```

- (2) 1 文字の書き出し

```
int fputc(int c, FILE *fp);
```

- (3) 文字列の書き出し

- (4)

```
int fprintf(FILE *stream, char *format, ...);
```