

# 高速フーリエ変換

## 1 フーリエ解析

point

複雑な関数・現象を三角関数に分解して考える

### 1.1 フーリエ級数展開

関数  $f(x)$  の性質を知るために、より基本的な関数系

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$$

で級数展開を考える.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$$

$f(x)$  が無限回微分可能 (マクローリン展開)

→  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  で級数展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$f(x)$  が周期関数 (フーリエ級数展開)

→  $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$  (三角関数系) で級数展開

$$f(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \dots (\ast)$$

#### 1.1.1 三角関数の利点

→ 直交性 (自身以外との内積が 0)

$f(x), g(x)$  : 周期関数 ( $2\pi$ )

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx &= 0\end{aligned}$$

### 1.1.2 定数を求める

(※) の両辺に  $\cos mx$  をかけて,  $\pi \sim -\pi$  で積分.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) dx \\ &= a_m \pi\end{aligned}$$

(※) の両辺に  $\sin mx$  をかけて,  $\pi \sim -\pi$  で積分.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) dx \\ &= b_m \pi\end{aligned}$$

(※) の両辺を  $\pi \sim -\pi$  で積分.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a$$

上記の式より

$$\begin{aligned}a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \\ a &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx\end{aligned}$$

$a_m$  の式に  $m = 0$  を代入すると

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2a$$

→ 以後、 $a$  を  $\frac{a_0}{2}$  として, (※) は以下のように書き表せる.

$f(x)$  のフーリエ級数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{cases}$$

これを、 $f(x)$  のフーリエ級数という。

$f(x)$  に収束するかどうか ( $f(x)$  と一致するか) は別問題。

### 1.1.3 フーリエ級数の収束性

周期  $2\pi$  の周期関数  $f(x)$  が区分的に滑らかであるとき、 $f(x)$  のフーリエ級数は以下のように収束する。

フーリエ級数の収束

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \begin{cases} f(x) & (\text{連続な点}) \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & (\text{不連続な点}) \end{cases}$$

#### 区分的に滑らか

$a \leq x \leq b$  上の関数  $f(x)$  が次の条件を満たすとき、 $a \leq x \leq b$  で区分的に連続であるという。

- (i)  $a \leq x \leq b$  で有限個の点を除いて連続
- (ii) 不連続点  $c$  において  $f(c-0), f(c+0)$  が存在する。

さらに、導関数  $f'(x)$  が区分的に連続であるとき、関数  $f(x)$  を区分的に滑らかという。

## 1.2 複素フーリエ級数

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{cases} e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \\ e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} \cos nx = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin nx = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$$

これをフーリエ級数に代入して整理すると、以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \\ \begin{cases} C_0 = \frac{a_0}{2} \\ C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} &\quad \text{とする}\end{aligned}$$

複素フーリエ級数

$$\text{複素フーリエ級数: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$$

$$\text{複素フーリエ係数: } C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

### $C_n$ の性質

$f(x)$  が実関数であるとき  $C_{-n} = C_n^*$  が成立する。( $C_n^*$  は  $C_n$  の複素共役)

→  $n$  が非負なものを計算すれば求められる。

$$\begin{aligned}C_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \\ C_n^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{inx})^* dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\ &= C_{-n}\end{aligned}$$

## 1.3 一般周期のフーリエ級数

point

周期  $2\pi$  の関数へと変換する

周期が  $2L$  の関数を考える。

$$\begin{aligned}f(x) &: \text{周期 } 2L \\ \downarrow x = \frac{L}{\pi}t &\text{として変数変換} \\ f\left(\frac{L}{\pi}t\right) &: \text{周期 } 2\pi \\ f\left(\frac{L}{\pi}t\right) &= h(t) \text{ とする} \\ \text{グラフは横軸方向に } &\frac{\pi}{L} \text{ 倍される}\end{aligned}$$

$h(t)$  をフーリエ級数展開すると、

$$h(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \cos nt dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \sin nt dt \end{cases}$$

$t$  を  $x$  に戻すと

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \end{cases}$$

複素数の場合

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( i \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp \left( -i \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

## 1.4 フーリエ変換

### 1.4.1 フーリエの積分公式

point

非周期関数  $\rightarrow$  周期  $\infty$  として考える.

はじめに、周期  $2L$  の関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開を考える。

$$\begin{cases} f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left( i \frac{n\pi}{L} x \right) \\ c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \exp \left( -i \frac{n\pi}{L} x \right) dx \end{cases}$$

ここで、 $c_n$  をそのまま  $f(x)$  に代入すると、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \exp \left( -i \frac{n\pi}{L} t \right) dt \right] \exp \left( i \frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L}$$

書き換えると、

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) \exp(-i\omega_n t) dt \right] \exp(i\omega_n x) \Delta\omega$$

また、 $G(\omega_n)$  を、以下のようにおく。

$$G(\omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(t) \exp(-i\omega_n t) dt$$

ここで、 $L \rightarrow \infty$  で  $\Delta\omega \rightarrow 0$  より、

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(\omega_n) \Delta\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega\end{aligned}$$

フーリエの積分公式

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right] \exp(i\omega x) d\omega$$

※成立する条件：  $f(x)$  が  $(-\infty, \infty)$  で区分的に滑らかで、 $(-\infty, \infty)$  において絶対可積分

絶対可積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

#### 1.4.2 フーリエ変換

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right] \exp(i\omega x) d\omega$$

ここで

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

として、元の式に代入すると

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega$$

フーリエ変換

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \\ &= F[f(t)]\end{aligned}$$

※ 絶対可積分であれば  $F(\omega)$  は存在

## 1.5 フーリエの反転公式と逆フーリエ変換

フーリエの反転公式

$F(\omega) = F[f(t)]$  とすると、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega = \begin{cases} f(x) & (\text{連続な点}) \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} & (\text{不連続な点}) \end{cases}$$

フーリエ逆変換

$F(\omega) = F[f(t)]$  とすると、

$$F^{-1}[F(\omega)] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega$$

## 1.6 まとめ

point

- ・ フーリエ級数 → 周期関数を波の合成で表す → ある程度の周波数の波で事足りる
- ・ フーリエ変換 → 非周期関数を波の合成で表す → 無数の連続的な周波数の波が必要

## 2 離散フーリエ変換 (dicrete Fourier transform)

### 2.1 離散フーリエ変換とは

信号処理等の離散化されたデジタル信号の周波数解析等によく利用される。また、偏微分方程式や畳み込み積分の数値計算を効率的に行うことに利用される。離散フーリエ変換は、計算機上で後述の高速フーリエ変換 (FFT) を使って高速に計算することができる。

離散フーリエ変換

$$F(t) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi t x}{N}\right)$$

$N$  : 任意の自然数

$$F\left(\frac{n}{\Delta t N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t \cdot f(k \cdot \Delta t) \exp\left(-i \frac{2\pi n k}{N}\right)$$

$N$  : 値の数

$\Delta t$  : サンプルング周期

$\frac{1}{\Delta t N}$  : 基本周波数

$k$  : 時間領域において何番目の数値か

$n$  : 基本周数の何倍か

## 2.2 逆離散フーリエ変換 (inverse discrete Fourier transform)

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} F(t) \exp\left(i \frac{2\pi x t}{N}\right)$$

## 3 高速フーリエ変換 (fast Fourier transform)

### 3.1 高速フーリエ変換とは

**高速フーリエ変換** (fast Fourier transform) とは、離散フーリエ変換を計算機上で高速に計算するアルゴリズムである。

$$F(t) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp\left(-i \frac{2\pi t x}{N}\right)$$

## 4 用語

### バッファ

バッファとは、データが 1 つの場所から別の場所に転送する際に、データを一時的に保持するメモリストレージ領域のことをいいます。

プログラムがデータをバッファに書き込もうとした際に、データの量がメモリバッファのストレージ容量を超えてしまうと、隣接するメモリ位置を上書きしてしまいます。

この結果発生する事象をバッファオーバーフロー (バッファオーバーラン) と呼びます。



## 5 ファイルの読み書き

ファイルへの読み書き

(1) 1 文字の読み込み

```
int fgetc(FILE *fp);
```

(2) 1 文字の書き出し

```
int fputc(int c, FILE *fp);
```

(3) 文字列の書き出し

(4) `int fprintf(FILE *stream, char *format, ...);`