数学

1　線形代数

1.1　行列式

1.1.1　余因子行列とクラメールの公式　P.54

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と書く。

余因子展開

1. 第 j 列に関する余因子展開
   $|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$
2. 第 i 行に関する余因子展開
   $|A| = (-1)^{i+1} a_{1j} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$

余因子行列

n 次正方行列 $|a_{ij}|$ に対し、

$$\check{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

さらに、以下のようにおき、A の余因子行列という。

$$\tilde{A} = [\check{a}_{ij}]$$

定理 3.4.1

正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると、以下の関係が成立する。

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = dE\,(d = \det(\mathrm{A}))$$

1.1.2　固有値と固有ベクトル (P.98)

1.1.3　行列の対角化

正方行列 A が与えられたとき、$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような生息行列 P と対角行列 B を求めることを行列 A の対角化という。

固有多項式

正方行列 A に対し、以下の多項式 $g_A(t)$ を A の固有多項式という。

$$g_A(t) = |tE - A|$$

1.1.4　対角化可能性

正方行列 A は常に対角化されるとは限らない。

対角化の条件

A が N 次の正方行列のとき、「A が対角化可能」とは A が N 個の独立な固有ベクトルを持つことと同値である。

2 微積分

2.1 多変数関数

2.1.1 偏微分

多変数関数の微分 $\rightarrow$ 偏微分

2.1.2 多変数関数の極値

定理 4.3.3 極値を持つ必要条件

$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ である。

定理 4.3.4 極値の判定

$f(x,y)$ は C^2 の関数であり、点 (a,b) において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ であるとする.
判別式を、$D = f_{xx}(a,b) f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$ と定義する。

1. $D > 0$ とする。
   $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば、f は点 (a,b) で極小値をとる。
   $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば、f は点 (a,b) で極大値をとる。
2. $D < 0$ ならば、f は点 (a,b) で極値をとらない。

2.1.3 接線の方程式

定理 4.4.1 陰関数の定理

$f(x,y)$ が C^1 級の関数で、$f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) \neq 0$ ならば、
a を含む開区間で定義された $f(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \phi(x)$ で、$\phi(a) = b$ となるものが存在する。
このとき、$y = \phi(x)$ は微分可能で、次の式が成り立つ。

$$\phi'(x) = \frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))},\ \text{すなわち、}\ \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

例題