

材料力学

目次

1	引張・圧縮	2
1.1	微小区間のひずみ	2
1.2	ポアソン比	2
2	ねじり・せん断応力	3
2.1	微小区間のねじれ角	3
3	曲げ	3
4	平等強さ	3
5	断面二次モーメントと断面二次極モーメント	4
5.1	断面二次モーメント	4
5.2	断面二次モーメントの求め方	4
5.3	平行軸の定理	4
5.4	断面二次極モーメント	5
6	たわみの微分方程式	5
7	線膨張係数と熱応力	6
7.1	(例題) 熱応力問題を解く	6
8	SFD と BMD	7
8.1	せん断力線図 (SFD)	7
8.2	曲げ応力線図 (BMD)	7
8.3	(例題) BMD と SFD を書く	7
9	不静定問題	7
9.1	(例題) 不静定問題を解く	8
10	モールの応力円	9
11	材料の破断	9
11.1	最大主応力説	9
11.2	最大せん断応力説	9
11.3	せん断ひずみエネルギー説	9
12	薄肉円筒	10
12.1	それぞれの応力を求める	10

1 引張・圧縮

重要公式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{\lambda}{L} \\ \sigma &= E\varepsilon \\ P &= \frac{AE}{l}\lambda = AE\varepsilon \\ AE &: \text{引張剛性}\end{aligned}$$

1.1 微小区間のひずみ

微小区間のひずみ

$$d\varepsilon = \frac{d\lambda}{dx}$$

1.2 ポアソン比

例えば丸棒を引張ると引張方向に**縦ひずみ**が発生し、同時に径が小さくなる**横ひずみ**が発生する。
このときの縦ひずみと横ひずみの比を**ポアソン比**という。

ポアソン比

x 軸方向に材料に力を加えるとき

$$\nu = -\frac{(\text{横ひずみ})}{(\text{縦ひずみ})} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

※ 「-」 は、ポアソン比の値を正にするため

ポアソン比と応力・ひずみの関係式

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E}\end{aligned}$$

ポアソン比と弾性係数の関係

$$E = 2G(1 + \nu)$$

2 ねじり・せん断応力

重要公式

$$\begin{aligned}\tau(r) &= \frac{T}{I_p} r \\ \gamma(r) &= \frac{\lambda(r)}{L} = \frac{\varphi}{L} r = \theta r \\ \tau(r) &= G\gamma(r) = G\theta r \\ T &= \frac{I_p G}{L} \varphi \\ I_p &: \text{断面二次極モーメント} \\ \theta = \frac{\varphi}{L} &: \text{比ねじれ角} \\ I_p G &: \text{ねじれ剛性}\end{aligned}$$

2.1 微小区間のねじれ角

微小区間のねじれ角

$$d\gamma = \frac{rd\varphi}{dx}$$

3 曲げ

重要公式

$$\begin{aligned}\sigma_z(z) &= \frac{M}{I} z \\ I &: \text{断面二次モーメント}\end{aligned}$$

4 平等強さ

どの断面でも応力が一定である状態のことをいう。

(1) 引張・圧縮

どの断面でも垂直応力が等しい

(2) 曲げ

どの断面でも最大曲げ応力が等しい

5 断面二次モーメントと断面二次極モーメント

Point

断面二次極モーメントは直交座標系における x 軸, y 軸の断面二次モーメントを足し合わせた値になる。
ねじりと曲げの重要公式に酷似しているものが多い

5.1 断面二次モーメント

断面二次モーメントは、部材の断面形状の特性を表した値であり、その形状が曲げに対してどのくらい**硬い**のかを表す。

断面二次モーメント

$$I = \int_A z^2 dA$$

代表的な断面二次モーメント

長方形	$\frac{bh^3}{12}$	(高さ : h , 幅 : b)
円	$\frac{\pi D^4}{64}$	(直径 : D)
三角形	$\frac{bh^3}{36}$	(高さ : h , 幅 : b)

5.2 断面二次モーメントの求め方

断面二次モーメントを求める具体的なステップ

- (1) 計算の基準になる z 軸を決定する
- (2) 微小面積 dA を求める
- (3) 基準の z 軸に関して $I_z = \int_A z^2 dA$ を求める
- (4) 平行軸の定理を用いて解を求める

5.3 平行軸の定理

図心基準の断面二次モーメントから任意の軸基準の断面二次モーメントを求めるときに利用することができる。

平行軸の定理

調べる断面形状 (断面積: A) の中立軸を z 軸, それに平行に z だけ離れた位置の軸を z' 軸とする。

中立軸に対する断面二次モーメントを I_z , z だけ離れた位置の断面二次モーメントを $I_{z'}$ とすると, 以下のように表すことができる。

$$I_{z'} = I_z + Az^2$$

5.4 断面二次極モーメント

半径 r に関する (極座標に関する) 断面二次モーメントのことを断面二次極モーメントという.

断面二次極モーメント

$$I_p = \int r^2 dA$$

ここで, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると, $r^2 = x^2 + y^2$ と表せるので,

$$I_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

ここで, ある図形に対して直交座標系を考え, x 軸及び y 軸における断面二次モーメントをそれぞれ I_x, I_y とすると,

$$I_x = \int x^2 dA$$

$$I_y = \int y^2 dA$$

であるので, 断面二次極モーメントは以下のように表すことができる.

$$I_p = I_x + I_y$$

したがって, 断面二次極モーメントは直交座標系における x 軸, y 軸の断面二次モーメントを足し合わせた値になる.

代表的な断面二次極モーメント

$$\text{円} \quad \frac{\pi D^4}{32} \quad (\text{直径: } D)$$

$$\text{円筒} \quad \frac{\pi}{32} (D_1^2 - D_2^2) \quad (\text{外径: } D_1, \text{内径: } D_2)$$

6 たわみの微分方程式

たわみの微分方程式

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$
$$\frac{dw}{dx} = \theta(x) : \text{たわみ角 (1 回積分)}$$
$$w(x) : \text{たわみ (2 回積分)}$$

境界条件

(1) 剛体壁

$$x = 0 \text{ のとき, } \omega = 0, \theta = 0$$

(2) 支点

$$x = 0 \text{ のとき, } \omega = 0, \text{力の加わっている個所で } \theta = 0$$

7 線膨張係数と熱応力

熱ひずみの公式

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

7.1 (例題) 熱応力問題を解く

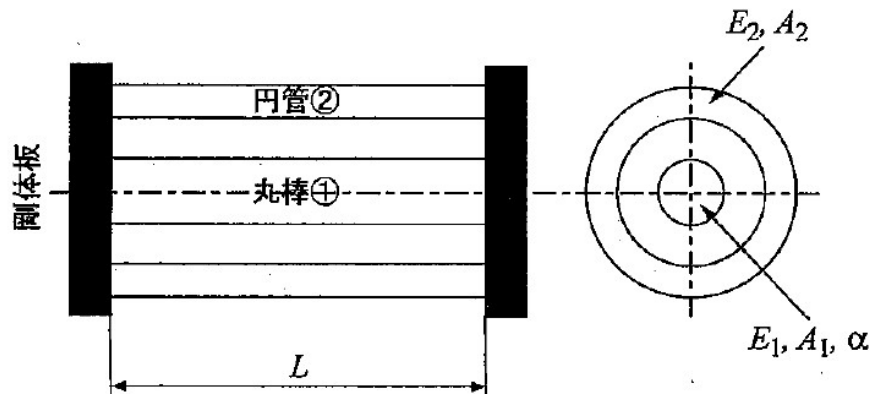


fig.1 H24 試験問題 [1]

(1) 丸棒 1 に生じるひずみ ε_1 を求める

Point

材料が温度 ΔT だけ上昇すると、ひずみに $\alpha \Delta T$ が追加される
 (合計のひずみ ε') = (温度上昇によるひずみ $\alpha \Delta T$) + (応力 (外力) によるひずみ ε)

ここで、熱ひずみ ε_T は温度 T だけ上昇したとき、

$$\varepsilon_T = \alpha T$$

また、応力によるひずみ ε_σ は

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_1}{E_1}$$

したがって、丸棒 1 のひずみ ε_1 は

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_T + \varepsilon_\sigma \\ &= \alpha T + \frac{\sigma_1}{E_1} \end{aligned}$$

(2) 丸棒 1 に生じる応力 σ_1 を求める

Point

σ_2 を σ_1 を用いた式で表す

力のつり合いより、

$$\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = 0$$

また、伸びは合わせて丸棒 1 の熱膨張分であるので、

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= -\lambda_2\end{aligned}$$

両辺を丸棒 1, 円管 2 の長さ L で割ると、ひずみのつり合いとなる。

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1}{L} &= -\frac{\lambda_2}{L} \\ \varepsilon_1 &= -\varepsilon_2\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -\varepsilon_1 = -\left(\alpha T + \frac{\sigma_1}{E_1}\right) \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_2 = -E_2 \left(\alpha T + \frac{\sigma_1}{E_1}\right)\end{aligned}$$

これを、力のつり合いの式に代入して整理すると

$$\sigma_1 = -\frac{E_1 E_2 A_2 \alpha T}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

8 SFD と BMD

8.1 せん断力線図 (SFD)

はりにはたらくせん断力を図で表したもの

Point

該当する範囲で、力のつり合い式を立てる

(1) 自由端の

8.2 曲げ応力線図 (BMD)

はりにはたらく曲げモーメントを図で表したもの

Point

該当する範囲で、モーメントのつり合い式を立てる

(1) 自由端の曲げモーメントは**ゼロ**

(2) 曲げモーメントが最大となる断面を**危険断面**という

8.3 (例題) BMD と SFD を書く

9 不静定問題

条件

- (1) 力・トルクのつり合い
- (2) 伸び・ねじれ角のつり合い

Point

力・トルクのつり合いから**伸び・ねじれ角**を含む式に変換する

9.1 (例題) 不静定問題を解く

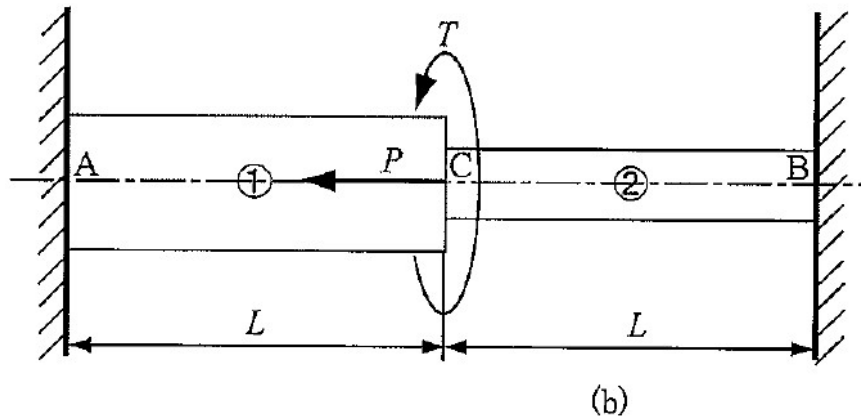


fig.2 H27 試験問題 [1]

(1) $x = L$ に荷重 P が加わっているときの丸棒 2 の伸び λ_2 を求める.

力のつり合いより,

$$\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = P$$

伸びは合計でゼロになるので,

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= -\lambda_2\end{aligned}$$

ここで, 応力 σ_1, σ_2 は, 伸び λ_1, λ_2 を用いて

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E \frac{\lambda_1}{L} \\ \sigma_2 &= E \frac{\lambda_2}{L}\end{aligned}$$

と表せることから, 力のつり合い式に代入すると,

$$E \frac{\lambda_2}{L} A_1 + E \frac{\lambda_2}{L} A_2 = P$$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{E}{L} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= P \\ \frac{E}{L} \lambda_2 (A_2 - A_1) &= P \\ \lambda_1 &= \frac{PL}{E(A_2 - A_1)}\end{aligned}$$

(2) $x = L$ にトルク T が加わっているときの丸棒 2 のねじれ角 φ_2 を求める.

トルクのつり合いより,

$$T_1 + T_2 = T$$

ねじり角は合わせてゼロになるので,

$$\begin{aligned}\varphi_1 + \varphi_2 &= 0 \\ \varphi_1 &= -\varphi_2\end{aligned}$$

ここで, トルク T_1, T_2 はねじれ角 φ_1, φ_2 を用いて,

$$\begin{aligned}T_1 &= I_{P1} G \frac{\varphi_1}{L} \\ T_2 &= I_{P1} G \frac{\varphi_2}{L}\end{aligned}$$

と表せることから, トルクのつり合い式に代入すると,

$$I_{P1} G \frac{\varphi_1}{L} + I_{P2} G \frac{\varphi_2}{L} = T$$

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{G}{L} (I_{P1} \varphi_1 + I_{P2} \varphi_2) &= T \\ \frac{G}{L} \varphi_2 (I_{P2} - I_{P1}) &= T \\ \varphi_2 &= \frac{TL}{G(I_{P2} - I_{P1})}\end{aligned}$$

10 モールの応力円

11 材料の破断

塑性変形するときは金属材料が単軸応力状態で変形することはなく, 2 軸または 3 軸の応力を受けている. このような組合せ応力のもとにおいて金属材料が弾性限度に達し, 塑性変形を開始するときの条件を降伏条件という. σ_Y を材料の降伏強度として代表的な降伏条件式を以下に示す.

11.1 最大主応力説

この破損則は脆性材料に一致することが多い.

最大主応力説

$$\sigma_1 \geq \sigma_Y$$

11.2 最大せん断応力説

この破損則は, 延性材料に一致することが多い. Tresca の説とも呼ばれる.

最大せん断応力説

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \geq \frac{\sigma_Y}{2}$$

11.3 せん断ひずみエネルギー説

この破損則は, 延性材料に一致することが多い. Von-Mises の説とも呼ばれる.

$$\frac{1}{2} \left[(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \geq (\sigma_Y)^2$$

12 薄肉円筒

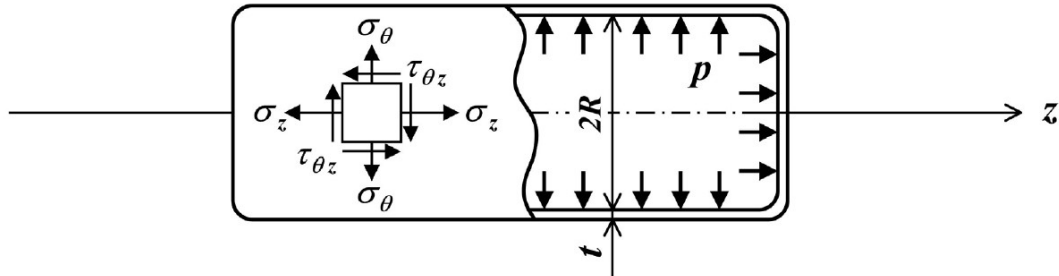


fig.3 材料力学 2 講義資料 1

薄肉とは、上図の内半径 R に比べて、板厚 t が十分に小さい、すなわち $t/R \geq 0.1$ のとき程度の場合を指す。このとき、以下の近似が成り立つものとする。

- (1) 半径方向応力 σ_r は無視できる
- (2) 周方向応力 σ_θ は板厚に沿って一様である

12.1 それぞれの応力を求める

周方向応力 σ_θ は近似が成立することから、

$$\sigma_r = 0$$

上図は、円筒を切断したものであり、図の上下方向の力のつり合いより、周方向応力 σ_θ は、

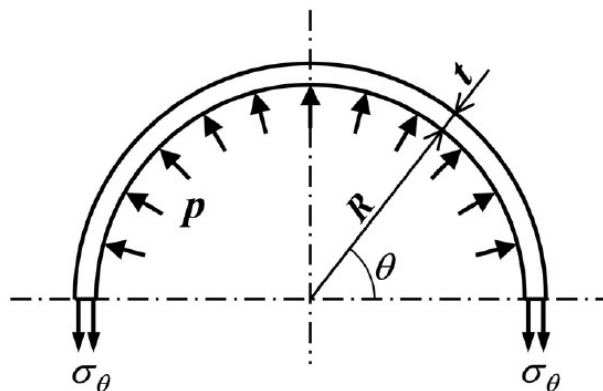


fig.4 材料力学 2 講義資料 2

$$2t\sigma_\theta = \int_0^\pi pR \sin \theta d\theta = 2pR$$

$$\sigma_\theta = \frac{pr}{t}$$

また、軸方向応力 σ_z は z 方向の力のつり合いより、

$$2\pi R t \sigma_z = \pi R^2 p$$
$$\sigma_z = \frac{pr}{2t}$$

したがって、内圧 p を受ける薄肉円筒に加わる応力は、

薄肉円筒に働く応力

$$\sigma_r = 0 \quad \sigma_\theta = \frac{pr}{t} \quad \sigma_z = \frac{pr}{2t}$$

なお、外力として荷重 Q とトルク T を受けている場合は、以上の円筒に生じる応力に、荷重 Q による垂直応力とトルク T によるせん断応力を加えれば良い。