PIV 計測 (1) -2

来代 勝胤

2021 年 4 月 12 日

【演習 1】

格子点 (i,j) における渦度 $\omega_{zi,j}$ を速度 $u_{i,j}$，$v_{i,j}$ を用いて，中心差分で差分表示する．

格子点 (i,j) における x 方向速度成分を $u_{i,j}$ としたとき，速度 $u_{(i,j+1)}$，$u_{(i,j-1)}$ をテーラー展開を用いて表すと，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
u_{(i,j+1)} &= u_{(i,j+\Delta y)} \\
&= u_{(i,j)} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) + \dots \\
&= u_{(i,j)} + \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \mathrm{O}\left(\Delta y^3\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{(i,j-1)} &= u_{(i,j-\Delta y)} \\
&= u_{(i,j)} - \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) + \dots \\
&= u_{(i,j)} - \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \mathrm{O}\left(\Delta y^3\right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

式 (1),(2) より，

$$
u_{(i,j+1)} - u_{(i,j-1)} = 2\Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{O}\left(\Delta y\right) \tag{3}
$$

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\Delta y}\left\{u_{(i,j+1))} - u_{(i,j-1)}\right\} \tag{4}
$$

同様に，格子点 (i,j) における y 方向速度成分を $v_{i,j}$ としたとき，速度 $v_{(i+1,j)}$，$v_{(i-1,j)}$ をテーラー展開を用いて表すと，以下のようになる．

$$
v_{(i+1,j)} - v_{(i-1,j)} = 2\Delta x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mathrm{O}\left(\Delta x\right) \tag{5}
$$

$$
\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\Delta x}\left\{v_{(i+1,j))} - v_{(i-1,j)}\right\} \tag{6}
$$

【Programs】