数学 [1]：解答

問 (1)

POINT

$|\lambda - A|$ or $|A-\lambda|$ を落ち着いて因数分解する!!

$$|A-\lambda| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2$$

特性方程式は,

$$-\lambda(\lambda^2-3) = 0$$

これを解くと，$\lambda = 0, 3.$
しがって，求める固有値は $\underline{\lambda = 0, 3.}$

(2)

基底とは

定義

W を部分空間とするとき,W 内のベクトルの系 $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ に対して，以下の 2 つの条件が成立するとき $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ を W の**基底**であるという.

(1) W の任意のベクトルが,$(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ の一次結合で表される
(2) $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ は一次独立である

条件より,W の任意のベクトル $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

とただ一通りに表すことができる.

POINT

(1) $|\lambda - A| = 0$ にそれぞれの固有値 λ を代入して整理.
(2) 任意定数を与えて，連立方程式を解く.
(3) 好きな任意定数を固定して，その他の任意定数との関係を調べる.
※ 解が定まらないときは，更に追加で任意定数を固定する!!
(4) 出てきた値がベクトル空間の基底になる.

(i) $\lambda = 0$ のとき

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2-0 & -1 & -1 \\ -1 & 2-0 & -1 \\ -1 & -1 & 2-0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

任意定数を C_1，C_2，C_3 とすると

$$\begin{aligned} -C_1 - C_2 + 2C_3 &= 0 \\ C_2 - C_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$C_1 = C_2 = C_3$$

ここで，仮に $C_1 = 1$ とすると，$C_2 = C_3 = 1$ となる．

したがって，$\lambda = 0$ における基底は，$\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$

(ii) $\lambda = 3$ **のとき**

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2-3 & -1 & -1 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ -1 & -1 & 2-3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) と同様に任意定数 C_1，C_2，C_3 とすると，

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$C_1 = 1$ としたとき，

$$C_2 + C_3 = -1$$

$C_2 = -1$ とすると，

$$C_3 = 0$$

このとき，$\lambda = 3$ における基底は $\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}$

また，$C_3 = -1$ とすると，

$$C_2 = 0$$

このとき，$\lambda = 3$ における基底は $\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}$

問 (3)

行列の対角化

問 (2) の基底のベクトルを正規直行化すると，$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

以上の正規直交基底より，$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

これを用いて対角化すると，$P^t AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$