数学

1　線形代数

1.1　行列式

1.1.1　余因子行列とクラメールの公式

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と書く.

余因子展開

(1) 第 j 列に関する余因子展開
$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$

(2) 第 i 行に関する余因子展開
$|A| = (-1)^{i+1} a_{1j} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$

余因子行列

n 次正方行列 $|a_{ij}|$ に対し,

$$\check{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

さらに, 以下のようにおき,A の余因子行列という.

$$\tilde{A} = [\check{a}_{ij}]$$

定理 3.4.1

正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると, 以下の関係が成立する.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = dE \, (d = \det(\mathrm{A}))$$

クラメールの公式

1.2　連立一次方程式, 基本変形

1.2.1　連立一次方程式の消去法による解法

(i) 連立一次方程式より拡大係数行列を抽出（行列のデータ化）
(ii) 抽出した拡大係数行列を簡約化する（未知数の整理）
(iii) 簡約化の結果を連立一次方程式に還元し解を作成する

1.2.2　解が不定の場合

「1 式に 1 未知数」という形は, 一般には成り立たない. そこで,「1 式に 1 未知数」に近い形に整理したものが**階段行列** (=**簡約行列**) である. 一般の連立 1 次方程式の場合, 未知数, 方程式の本数, 任意定数の間には以下の関係が成り

立つ.

$$(\text{未知数の個数}) = (\text{有効な方程式の数}) + (\text{任意定数の数})$$

1.3　固有値と固有ベクトルの計算

1.3.1　固有値と固有ベクトル

定義

n 次正方行列 A とスカラー λ に対し,

$$Ax = \lambda x$$

となる**零ベクトル** o **ではないベクトル** x が存在するとき,λ を A の固有値といい,
λ に対し上の条件を満たす o ではないベクトル x を A の固有ベクトルという．また, 固有値を求める際には,$|\lambda E - A| = 0$ を解けば良い.

1.3.2　行列の対角化

正方行列 A が与えられたとき,$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような生息行列 P と対角行列 B を求めることを行列 A の対角化という.

固有多項式

正方行列 A に対し, 以下の多項式 $g_A(t)$ を A の固有多項式という.

$$g_A(t) = |tE - A|$$

1.3.3　対角化可能性

正方行列 A は常に対角化されるとは限らない.

対角化の条件

A が N 次の正方行列のとき,「A が対角化可能」とは A が N 個の独立な固有ベクトルを持つことと同値である.
（固有値の重複度と固有空間の次元が一致している）

1.3.4　対角化の手順

対角化の作業は以下の手順で行われる.

(i) 固有値の計算
(ii) 各固有値に対する固有ベクトルの計算
(iii) 上の手順で得られた（一次独立な）固有ベクトルの組を並べてできた行列を P としたとき,
　　この P は正則行列であり,$P^{-1}AP$ は対角行列となる.

2　微積分

2.1　関数のべき級数展開

関数のべき級数展開とは, 関数を多項式で近似していくことを指す. 工学分野では, 必要不可欠なツールであり, 出題内容として (1) 関数を展開す問題 (2) 近似・誤差の評価という 2 種類が主なものである.

2.1.1　Taylor 展開

Taylor 展開

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n}x^n$$

2.2　1 変数の積分

2.2.1　偶関数と奇関数

2.3　多変数関数

2.3.1　偏微分

多変数関数の微分　→　偏微分

2.3.2　多変数関数の極値

定理 4.3.3 極値を持つ必要条件

$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ である.

定理 極値の判定

$f(x,y)$ は C^2 の関数であり, 点 (a,b) において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ であるとする.
判別式を,$D = f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$ と定義する.

(1) $D > 0$ とする.
　$f_{xx}(a,b) > 0$ ならば,f は点 (a,b) で極小値をとる.
　$f_{xx}(a,b) < 0$ ならば,f は点 (a,b) で極大値をとる.
(2) $D < 0$ ならば,f は点 (a,b) で極値をとらない.

2.3.3　接平面の方程式

関数のグラフ $z = f(x,y)$ は空間内の局面を定める。この曲面上の $p(x_0, y_0, z_0)$ における接平面の方程式は、

接平面の方程式

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

により与えられる。

2.3.4 接線の方程式と陰関数の定理

定理 4.4.1 陰関数の定理

$f\left(x,y\right)$ が C^1 級の関数で,$f_x\left(a,b\right)=0,\ f_y\left(a,b\right)\neq 0$ ならば,
a を含む開区間で定義された $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\phi\left(x\right)$ で,$\phi\left(a\right)=b$ となるものが存在する.
このとき,$y=\phi\left(x\right)$ は微分可能で, 次の式が成り立つ.

$$\phi'\left(x\right)=\frac{f_x\left(x,\phi\left(x\right)\right)}{f_y\left(x,\phi\left(x\right)\right)},\ すなわち,\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x\left(x,y\right)}{f_y\left(x,y\right)}$$

3　材料力学

3.1　重要公式

引張・圧縮

$$\sigma = \frac{P}{A}$$
$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L}$$
$$\sigma = E\varepsilon$$
$$P = \frac{AE}{l}\lambda = AE\varepsilon$$

AE : 引張剛性

ねじり

$$\tau(r) = \frac{T}{I_p} r$$
$$\gamma(r) = \frac{\lambda(r)}{L} = \frac{\varphi}{L} r = \theta r$$
$$\tau(r) = G\gamma(r) = G\theta r$$
$$T = \frac{I_p G}{L}\varphi$$

$\theta = \dfrac{\varphi}{L}$: 比ねじれ角

$I_p G$: ねじれ剛性