

大学院入試対策

1 基本知識

1.1 平方根

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

1.2 オイラーの公式

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

2 線形代数

2.1 行列

2.1.1 行列演算の性質

基本的には、普通の計算と同じ。ただし、**積**には注意が必要。

行列演算特有の性質

$$\begin{aligned}(AB)C &= A(BC) \\ A(B+C) &= AB+AC \\ (A+B)C &= AC+BC \\ AB &\neq BA\end{aligned}$$

※ 積をとる順番に注意する

※ 積の交換法則のみ成り立たない!!

2.2 一次独立・一次従属

物理的な意味

ある2つのベクトル a, b ($a \neq 0, b \neq 0$) が存在し、それらが並行でない ($a \nparallel b$) とき、**一次独立である**という。
また、それらが、平行である ($a \parallel b$) とき、**一次従属である**という。

2.3 連立一次方程式

2.3.1 行列の基本変形

- (1) 1つの行を何倍か ($\neq 0$ 倍) する
- (2) 2つの行を入れ替える
- (3) 1つの行にほかの行の何倍かを加える

2.3.2 連立一次方程式の消去法による解法

- (1) 連立一次方程式より拡大係数行列を抽出 (行列のデータ化)
- (2) 抽出した拡大係数行列を簡約化する (未知数の整理)
- (3) 簡約化の結果を連立一次方程式に還元し解を作成する

2.3.3 解が不定の場合

「1 式に 1 未知数」という形は、一般には成り立たない。そこで、「1 式に 1 未知数」に近い形に整理したものが**階段行列 (=簡約行列)**である。一般の連立 1 次方程式の場合、未知数、方程式の本数、任意定数の間には以下の関係が成り立つ。

$$(\text{未知数の個数}) = (\text{有効な方程式の数}) + (\text{任意定数の数})$$

2.3.4 単位行列

定義

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad AE = EA = A \quad (\text{対角成分は 1、他は 0})$$

2.3.5 逆行列

定義

n 次正方行列 A に対して、

$$AX = XA = E$$

となる正方行列 X が存在するとき、 A は**正則である**といい、 X を A の**逆行列**であるという。

一般に「 X 」を「 A^{-1} 」という記号で表す。

※「正則である」＝「逆行列を持つ」という意味

定理

n 次正方行列 A が正則であるとき、その逆行列 A^{-1} は、以下のように表せる。

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$$

※ \tilde{A} は余因子行列

n 次正方行列 A が正則であるとは...

(1) $\text{rank}(A) = n$ すなわち、**連立方程式の解が一意に定まる**ということ!!

(2) $|A| \neq 0$

2.3.6 逆行列の掃出法

$AX = E$ を満たす、 x を求めれば、それが A^{-1} になる。

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

※ x_i : n 次元列ベクトル e_i : n 次元単位ベクトル

を用いて、

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \\ (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n) &= (e_1, e_2, \dots, e_n) \end{aligned}$$

すなわち、以下の式を解けばよい。

$$Ax_i = e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ここで、拡大係数行列を考える。

$$(A|e_i) \rightarrow (E|C_i)$$

上記のように掃出法から連立方程式を解くと、

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (C_1, C_2, \dots, C_n)$$

が求める A^{-1} となる。

2.4 基底

W を部分空間とすると、 W 内のベクトルの系 (v_1, v_2, \dots, v_n) に対して、以下の 2 つの条件が成立するとき (v_1, v_2, \dots, v_n) を W の**基底**であるという。

- (1) W の任意のベクトルが、 (v_1, v_2, \dots, v_n) の一次結合で表される
- (2) (v_1, v_2, \dots, v_n) は一次独立である

条件より、 W の任意のベクトル \vec{v} は

$$\vec{v} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

とただ一通りに表すことができる。

2.5 行列式

2.5.1 行列式の性質

※ 同じ行 (列) を含む行列式の値 0 になる。(行列式の交代性より)

2.5.2 余因子行列とクラメールの公式

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列 (小行列) を A_{ij} とする。

余因子行列

n 次正方行列 $[a_{ij}]$ に対し、以下の式から得られる値 \tilde{a}_{ij} を**余因子**という。

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

さらに、以下のように余因子をおいた行列 \tilde{A} を、 A の**余因子行列**という。(転置があることに注意!!)

$$\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]^t$$

※ 「転置をとる」とは、「添え字の順番が逆になる」ということ!!

余因子展開

- (1) 第 i 行に関する余因子展開

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}| = a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + \dots + a_{in} \tilde{a}_{in}$$

- (2) 第 j 列に関する余因子展開

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}| = a_{1j} \tilde{a}_{1j} + a_{2j} \tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj} \tilde{a}_{nj}$$

定理

正方行列 A の余因子行列を \tilde{A} とすると、以下の関係が成立する。

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = dE \quad (d = \det(A))$$

クラメールの公式

2.6 固有値と固有ベクトルの計算

2.6.1 固有値と固有ベクトル固有値・固有ベクトルの物理的な意味

あるベクトル X があるとき, それにある行列 A をかけると, そのベクトル X の方向は変わらず倍率のみ変化する. そのベクトルを固有ベクトル, 倍率を固有値という.

2.6.2 固有値と固有ベクトルの定義

定義

n 次正方行列 A とスカラー λ に対し,

$$Ax = \lambda x$$

となる零ベクトル o ではないベクトル x が存在するとき, λ を A の固有値といい, λ に対し上の条件を満たす o ではないベクトル x を A の固有ベクトルという.

また, λ に対する固有ベクトル全体と零ベクトルを合わせてできた部分空間 (実際に固有値を代入して整理した行列) を λ に対する A の固有空間という. ※ 固有値を求める際には, $|\lambda E - A| = 0$ を解けば良い.

2.6.3 行列の対角化

正方行列 A が与えられたとき, $B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と対角行列 B を求めることを行列 A の対角化という.

特に P, B が実数 (複素数) を成分とする行列でとれるとき, A は実数体上 (複素数体上) 対角化されるという.

定義

n 次正方行列に対し, 適当な正則行列 P が存在して,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

のような対角行列にできるとき, 行列 A は対角化可能であるといい, このときの行列 P を変換行列という.

定理

n 次正方行列 A の一次独立な固有ベクトルを x_1, x_2, \dots, x_n とする.

それらを並べた行列 (x_1, x_2, \dots, x_n) を P とすると, 行列 A は次のように対角化できる.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

※ λ_n は行列 A の固有値※対角化行列は 1 つだけではない!! → 固有ベクトルを並べる順番によって変化する

2.6.4 対角化可能性

正方行列 A は常に対角化されるとは限らない.

定理

n 次正方行列 A の異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ に対する固有ベクトル x_1, x_2, \dots, x_k は一次独立である. ($1 \leq k \leq n$)

対角化の条件

A が N 次の正方行列のとき, A が対角化可能 とは A が N 個の独立な固有ベクトルを持つことと同値である.

※ 重要なことは, n 本の一次独立な固有ベクトルがとれるかどうか!!

※ 重解がある場合も、その数の固有ベクトルを得ることができる可能性がある!!

2.6.5 対角化の手順

対角化の作業は以下の手順で行われる.

- (1) 固有値の計算
- (2) 各固有値に対する固有ベクトルの計算
- (3) 上の手順で得られた (一次独立な) 固有ベクトルの組を並べてできた行列を P としたとき, この P は正則行列であり, $P^{-1}AP$ は対角行列となる.

3 微積分

3.1 基本的な微分

基本的な関数の導関数

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}a^x &= (\log a) a^x \\ \frac{dy}{dx}\text{Sin}^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{dy}{dx}\text{Cos}^{-1}(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{dy}{dx}\text{Tan}^{-1}(x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

3.2 関数のべき級数展開

関数のべき級数展開とは、関数を多項式で近似していくことを指す。工学分野では、必要不可欠なツールであり、出題内容として (1) 関数を展開する問題 (2) 近似・誤差の評価という 2 種類が主なものである。※ 複雑な関数を**多項式**で表すことができる!!

3.2.1 Taylor 展開

点 a 周りの Taylor 展開は以下のように書き表せる。

taylor 展開

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=a}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots\end{aligned}$$

3.2.2 Maclaurin 展開

特に、 $a=0$ (原点周り) における Taylor 展開のことを Maclaurin 展開という。

Maclaurin 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

3.3 1 変数の積分

3.3.1 広義積分

何らかの定積分の積分区間を動かし、極限をとったものを**広義積分**という。

考え方：めんどくさい処理 (極限をとる) を後回しにする

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$$

を解くことを考える。はじめに、絶対値の区間について積分を分ける。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

このままだと、0で発散してしまう。

ここで、 $x = 0$ の近傍 $(-\varepsilon, \varepsilon')$ を除いた区間の積分を求め、後に近傍の幅を狭めていき近傍 $(-\varepsilon, \varepsilon')$ を除いた区間の積分を求める。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{-x}} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{\varepsilon'}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-2\sqrt{-x}]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon'}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{1}) + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} (2\sqrt{1} - 1\sqrt{\varepsilon'}) \\ &= 2\sqrt{1} + 2\sqrt{1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

3.3.2 偶関数と奇関数

3.4 多変数関数

3.4.1 偏微分

多変数関数の微分 → 偏微分

3.4.2 多変数関数の極値

定理 極値を持つ必要条件

$f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるならば、 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ である。

定理 極値の判定

$f(x, y)$ は C^2 の関数であり、点 (a, b) において $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ であるとする。

判別式を、 $D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$ と定義する。

(1) $D > 0$ とする。

$f_{xx}(a, b) > 0$ ならば、 f は点 (a, b) で極小値をとる。

$f_{xx}(a, b) < 0$ ならば、 f は点 (a, b) で極大値をとる。

(2) $D < 0$ ならば、 f は点 (a, b) で極値をとらない。

3.4.3 接平面の方程式・法線の方程式

関数のグラフ $z = f(x, y)$ は空間内の局面を定める。この曲面上の $p(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式は、以下のように求めることができる。

接平面の方程式

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

また、法線ベクトル、法線の方程式は、以下のように求めることができる。

法線ベクトル

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \\ -1 \end{bmatrix}$$

法線の方程式

$$\frac{x-a}{f_x(a, b)} = \frac{y-b}{f_y(a, b)} = \frac{z-f(a, b)}{-1}$$

3.4.4 陰関数の定理

陰関数の定理

$f(x, y)$ が C^1 級の関数で, $f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ ならば,
 a を含む開区間で定義された $f(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \phi(x)$ で, $\phi(a) = b$ となるものが存在する.
このとき, $y = \phi(x)$ は微分可能で, 次の式が成り立つ.

$$\phi'(x) = \frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))}, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

3.5 重積分

3.5.1 主な解法スキーム

(1) 基本形

(重積分) → 計算用の式変換 → (累次積分) → 計算の実行 → (値)

(2) 積分の順序変更

(重積分) → 計算用の式変換・問題の差し戻し → (累次積分) → 計算の実行 → (値)

(3) 変数変換

(重積分 1) → 変数の変更 → (重積分 2) → 計算用の式変換 → (累次積分) → 計算の実行 → (値)

3.5.2 累次積分

3.5.3 具体的な手順

(1) 積分領域 (範囲) を求める

3.5.4 積分区間の変換

積分区分を変換する際は, 固定されていない変数を固定して区間を考える.

※ 区間に x が含まれる場合は, 「 x を固定した」ということ → 変数を変換する場合は, 「 y を固定」して考える

代表的な変数変換

(1) 円 ($x^2 + y^2 = a^2$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \text{ とおく}$$

(2) 楕円 ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)

$$x = ar \cos \theta, \quad y = br \sin \theta \text{ とおく}$$

(3) x 軸方向に b だけ中心がズレた円 ($(x-b)^2 + y^2 = a^2$)

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \text{ とおく}$$

範囲は原点を基準に考えること!!

3.5.5 変数変換公式

ヤコビ行列

st 平面の有界な領域 E で定義された C^1 級関数 $x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$ に対して

(1) E の各点で Jacobi 行列

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}$$

の行列式 $J = x_s y_t - x_t y_s$ は 0 ではない.

(2) 写像 $F(s, t) = (\varphi(s, t), \psi(s, t))$ は E から E の像 $D = F(E)$ への 1 対 1 の写像であるという上記の 2 つの条件が成立するとき, 連続関数 $f(x, y)$ に対して以下の式が成立する.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(\varphi(s, t), \psi(s, t)) |J| ds dt$$

ヤコビアンは絶対値をかける!!

【代表的なヤコビ行列】

・デカルト座標から極座標への変換

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ すると,

$$|J| = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{bmatrix} = r$$

4 微分方程式

4.1 微分方程式とは

微分方程式の目的

普通の方程式は... 数を探すことが目的

微分方程式は... 関数を探すことが目的

任意定数を含む解を**一般解**という。また一般解に対して、初期条件を与えて求まる解を**特殊解**という。

例) $y' = 2x + 3, y(0) = 0$ を解く

一般解 (任意定数: C を含む関数) は、両辺を x で積分して

$$y = x^2 + 3x + C$$

初期条件 $y(0) = 0$ を与えると、 $C = 0$ が定まるので、**特殊解**が以下のように求まる。

$$y = x^2 + 3x$$

※ 一般解の中に、任意定数が無限大の場合も含めて良い!! (慣習)

4.1.1 微分方程式の解の一意性

4.2 1 階常微分方程式

4.2.1 直接微分形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

の形を**直接微分形**という。

解法

- (1) 方程式を標準形に直す
- (2) 両辺を積分して一般解を求める
- (3) 特殊解を求める際は、初期条件を代入して積分定数を求める

4.2.2 変数分離形

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$$

の形を**変数分離形**という。

解法

- (1) 方程式を標準形に直す
- (2) 両辺を x で積分する
- (3) 変形しきれいな形に直して一般解とする
- (4) 特殊解を求める際は、初期条件を代入して積分定数を求める

4.2.3 同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形の微分方程式を**同次形**という。

解法

- (1) 方程式を標準形に直す
- (2) $\frac{y}{x} = u$ において標準形に代入し, u と x の方程式に直す. (変数分離形に帰着される)
- (3) 両辺を x で積分して関数 u を求める
- (4) $u = \frac{y}{x}$ をもとに戻し, 一般解 y を求める
- (5) $f(u) - u = 0$ をみたく $u = a$ (定数) があるとき, これから得られる $y = ax$ も解となる.
また, これが一般解に含まれるかどうか調べる.
- (6) 特殊解を求める際は, 初期条件を代入して積分定数を求める

※ 変数部分が $\frac{y}{x}$ のみで表せる関数に変形する

4.2.4 $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$ の形

$y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$ の $\alpha x + \beta y + \gamma$ がひとかたまりになっている場合は, $u = \alpha x + \beta y + \gamma$ とおくことで, 変数分離形に帰着される.

解法

- (1) $u = \alpha x + \beta y + \gamma$ において, x で微分し y' を求める $u' = \alpha + \beta y' \Leftrightarrow y' = \frac{u' - \alpha}{\beta}$
- (2) 元の方程式に代入して整理し, 変数微分形の形にする
- (3) 変数分離形の一般解を求める
- (4) u を元の式に代入して一般解を求める
- (5) 特殊解を求める際は, 初期条件を代入して積分定数を求める

4.3 線形微分方程式

$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), Q(x)$ を x の関数とするとき
 $y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x)$ を n 階微分方程式という.
また, $Q(x) = 0$ のとき同次方程式 (斉次方程式), $Q(x) \neq 0$ のとき非同次方程式 (非斉次方程式) という.

4.3.1 1 階線形微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の形の非同次方程式を解くことを考える。

※ 同次方程式の場合は変数分離形で考えれば解ける!!

解法 (i) 特殊解 $y = \alpha(x)$ がわかっている場合

- (1) $y' + p(x)y = q(x)$ に, $\alpha(x)$ を代入して $(\alpha' + p(x)\alpha = q(x))$ もとの式から引く
- (2) $Y = y - \alpha$ とおくと, $Y' + p(x)Y = 0$ の同次方程式に変形できる
- (3) 変数分離形として一般解を求め, $Y = y - \alpha$ を代入して変数をもとに戻す

$$(\text{非同次方程式の解}) = (\text{同次方程式の一般解}) + (\text{特殊解})$$

解法 (ii) 定数変化法

考え方：特殊解は一般解に似てるかも...

- (1) 同次方程式 $y' + p(x)y = 0$ を解く
- (2) 定数 C を関数 $C(x)$ に変化させ、非同次方程式に代入する
同次方程式の一般解： $y = C \exp(-\int p(x) dx)$ より、
 $(C(x) \exp(-\int p(x) dx))' + p(x) C(x) \exp(-\int p(x) dx) = q(x)$ を得る
- (3) $(C(x) \exp(-\int p(x) dx))'$ を 2 つの関数の微分だと考え式を整理すると、
 $C'(x) \exp(-\int p(x) dx) = q(x)$ を得ることができる
- (4) 式を整理し両辺を x で積分すると、 $C(x) = \int q(x) \exp(\int p(x) dx) dx$ が求まる
※ 特殊解が 1 つでも求まればいいので積分定数はつけなくて良い!!
- (5) $C(x)$ をもとの式に戻すと、 $y = [\int q(x) \exp(\int p(x) dx) dx] \exp(-\int p(x) dx)$ という特殊解が求まる
- (6) 同次解の一般解と特殊解の和をとると以下のように一般解を求めることができる
 $y = \exp(-\int p(x) dx) [\int q(x) \exp(\int p(x) dx) dx + C]$

※ 特殊解は「 $y = \dots$ 」の形で出てくる ($C(x)$ は特殊解でない!!)

解法 (iii) 積分因子

- (1) 両辺に $\exp(\int p(x) dx)$ (積分因子) をかけると (ここでは積分因子は必要ない)
 $\exp(\int p(x) dx) y' + \exp(\int p(x) dx) p(x) y = \exp(\int p(x) dx) q(x)$
上式を変形すると、以下のように変形できる
 $[\exp(\int p(x) dx) y]' = \exp(\int p(x) dx) q(x)$
- (2) 両辺を x で積分
 $\exp(\int p(x) dx) y = \int q(x) \exp(\int p(x) dx) dx + C$
整理すると、
 $y = \exp(-\int p(x) dx) [\int q(x) \exp(\int p(x) dx) dx + C]$
- (3) 定数変化法と同じ一般解が得られる

4.3.2 ベルヌーイの微分方程式

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

非線形微分方程式とは、 y, y' に対して一次ではないもののこと

非線形微分方程式には、一般的な解法はない!!

解法

考え方： y^α がなければいいな...

- (1) $y^\alpha \neq 0$ のとき、両辺を y^α で割る
 $y^{-\alpha} y' + p(x) y^{1-\alpha} = q(x)$
- (2) $u = y^{1-\alpha}$ とおく、このとき $u' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$ となるので、
 $\frac{1}{1-\alpha} u' + p(x) u = q(x)$ と変形できる
- (3) 両辺に $(1-\alpha)$ をかけると
 $u' + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)$
- (4) 線形の微分方程式に帰着できる

4.4 完全微分方程式

$$F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy = 0 \quad (\text{関数 } F(x, y) \text{ の全微分})$$

の形の微分方程式を**完全微分方程式**という。

解法

考え方: $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ の完全微分形であれば解ける!!

※ 完全微分形 $\rightarrow P(x) = F_x(x, y), Q(x, y) = F_y(x, y)$

(1) $dF = F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy = 0$ より、一般解は $F(x, y) = C$

その完全微分形になる $F(x, y)$ が存在するかどうかをどう判定するのか??

定理

$P(x, y), Q(x, y)$ がある領域内で x, y に関する偏導関数が連続であるとき、

$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ の完全微分形である必要十分条件は、領域 D 内で

$$P_y(x, y) + Q_x(x, y) = 0$$

が成り立つことである。

4.4.1 具体的な $F(x, y)$ の探し方

$F_x(x, y) = P(x, y)$ より、

$$F(x, y) = \int P(x, y) dx + G(y)$$

これを、 $F_x(x, y) = Q(x, y)$ に代入して

$$\frac{dG(y)}{dy} = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$$

上式が $G(x)$ が満たさなければならない条件である。ここで、 y で両辺を積分すると、

$$G(y) = \int \left[Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx \right]$$

※ 積分の中身は、 x を含まない式になっている!!

上式の形より、 $Q(x)$ のうち、 x を含む項は $\frac{\partial}{\partial y} \int P(x, y) dx$ から現れる項と相殺する。

したがって、 $G(y) = \int Q(x, y) dy$ のうち y のみを含む項であるといえる。

まとめ

(1) $I = \int P(x, y) dx, J = \int Q(x, y) dy$ とする (積分定数は不要)

(2) J の項のうち y のみを含む項を I に加えたものを $F(x, y)$ とする (この逆も可能)

(3) $F(x, y) = C$ が一般解となる

5 材料力学

5.1 引張・圧縮

5.1.1 重要公式

重要公式

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{A} \\ \varepsilon &= \frac{\lambda}{L} \\ \sigma &= E\varepsilon \\ P &= \frac{AE}{l}\lambda = AE\varepsilon \\ AE &: \text{引張剛性}\end{aligned}$$

5.2 ねじり・せん断応力

5.2.1 重要公式

重要公式

$$\begin{aligned}\tau(r) &= \frac{T}{I_p}r \\ \gamma(r) &= \frac{\lambda(r)}{L} = \frac{\varphi}{L}r = \theta r \\ \tau(r) &= G\gamma(r) = G\theta r \\ T &= \frac{I_p G}{L}\varphi \\ I_p &: \text{断面二次極モーメント} \\ \theta &= \frac{\varphi}{L}: \text{比ねじれ角} \\ I_p G &: \text{ねじれ剛性}\end{aligned}$$

5.2.2 断面二次極モーメント

半径 r に関する (極座標に関する) 断面二次モーメントのことを断面二次極モーメントという。

断面二次極モーメント

$$I_p = \int r^2 dA$$

ここで、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすると、 $r^2 = x^2 + y^2$ と表せるので、

$$I_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

ここで、ある図形に対して直交座標系を考え、 x 軸及び y 軸における断面二次モーメントをそれぞれ I_x, I_y とすると、

$$\begin{aligned}I_x &= \int x^2 dA \\ I_y &= \int y^2 dA\end{aligned}$$

であるので、断面二次極モーメントは以下のように表すことができる。

$$I_p = I_x + I_y$$

したがって、断面二次極モーメントは直交座標系における x 軸、 y 軸の断面二次モーメントを足し合わせた値になる。

代表的な断面二次極モーメント

$$\text{円} \quad \frac{\pi D^4}{32} \quad (\text{直径} : D)$$

$$\text{円筒} \quad \frac{\pi}{32} (D_1^4 - D_2^4) \quad (\text{外径} : D_1, \text{内径} : D_2)$$

5.3 曲げ

5.3.1 重要公式

重要公式

$$\sigma_z(z) = \frac{M}{I} z$$

I : 断面二次モーメント

5.3.2 断面二次モーメント

断面二次モーメントは、部材の断面形状の特性を表した値であり、その形状が曲げに対してどのくらい硬いのかを表す。

断面二次モーメント

$$I = \int_A z^2 dA$$

代表的な断面二次モーメント

$$\text{長方形} \quad \frac{bh^3}{12} \quad (\text{高さ} : h, \text{幅} : b)$$

$$\text{円} \quad \frac{\pi D^4}{64} \quad (\text{直径} : D)$$

$$\text{三角形} \quad \frac{bh^3}{36} \quad (\text{高さ} : h, \text{幅} : b)$$

5.3.3 断面二次モーメントの求め方

断面二次モーメントを求める具体的なステップ

- (1) 計算の基準になる z 軸を決定する
- (2) 微小面積 dA を求める
- (3) 基準の z 軸に関して $I_z = \int_A z^2 dA$ を求める
- (4) 平行軸の定理を用いて解を求める

5.3.4 平行軸の定理

図心基準の断面二次モーメントから任意の軸基準の断面二次モーメントを求めるときに利用することができる。

平行軸の定理

調べる断面形状 (断面積: A) の中立軸を z 軸、それに平行に z だけ離れた位置の軸を z' 軸とする。

中立軸に対する断面二次モーメントを I_z 、 z だけ離れた位置の断面二次モーメントを $I_{z'}$ とすると、以下のよう
に表すことができる。

$$I_{z'} = I_z + Az^2$$

5.4 たわみの微分方程式

たわみの微分方程式

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$
$$\frac{dw}{dx} = \theta(x) : \text{たわみ角 (1 回積分)}$$
$$w(x) : \text{たわみ (2 回積分)}$$

5.5 線膨張係数と熱応力

熱ひずみの公式

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

5.6 BMD と SFD

5.6.1 曲げ応力線図 (BMD)

5.6.2 せん断力線図 (SFD)

5.7 材料の破断

5.7.1 最大主応力説

5.7.2 最大せん断応力説

5.7.3 せん断ひずみエネルギー説

6 機械力学

6.1 運動方程式

1 自由度並進振動系

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

剛体円盤のねじり振動系

$$I\ddot{\theta}(t) + c_{\theta}\dot{\theta}(t) + k_{\theta}\theta(t) = M(t)$$

6.2 固有振動数と減衰比

固有振動数

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(固有振動数) = (減衰のない系の自由振動の振動数)

減衰比

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

6.2.1 過減衰

$\zeta > 1$ のとき、特性根は

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n$$

の相異なる負の実数となる。したがって、応答 $x(t)$ は以下ようになる。

過減衰の応答

$$x(t) = a_1 \exp(s_1 t) + a_2 \exp(s_2 t)$$

ここで、 $t \rightarrow \infty$ で 0 に漸近する。そのため、振動は繰り返しを伴わない。(≠ 振動)

このとき、これを過減衰という。

6.2.2 臨界減衰

$\zeta = 1$ のとき、特性根は

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

したがって、応答 $x(t)$ は以下ようになる。

臨界減衰の応答

$$x(t) = a_1 \exp(-\omega_n t) + a_2 t \exp(-\omega_n t)$$

このときの応答を**臨界減衰**といい、応答の収束が最も速くなる。

6.2.3 不足減衰

$0 < \zeta < 1$ のとき、特性根は

$$s_1, s_2 = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2} \right) \omega_n$$

の共役な複素数となる。したがって、応答 $x(t)$ は以下ようになる。(導出省略)

不足減衰の応答

$$x(t) = A \exp(-\zeta \omega_n t) \cos(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t) + B \exp(-\zeta \omega_n t) \sin(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t)$$
$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n : \text{減衰固有振動数}$$

6.2.4 単振動

$\zeta = 0$ のとき、特性根は

$$s_1, s_2 = i\omega_n$$

の共役な純虚数となる。したがって、応答 $x(t)$ は以下ようになる。(導出省略)

単振動の応答

$$x(t) = A \exp(-\zeta \omega_n t) \cos \omega_n t + B \exp(-\zeta \omega_n t) \sin \omega_n t$$

このとき、減衰係数 $\zeta = 0$ より、いつまでも減衰しない**単振動**となる。

6.3 自由振動

外力がゼロのとき、自由振動という。

6.4

6.5 その他

合成ばね定数を求める...

$$(\text{質点に加わる力}) = (\text{合成ばね定数}) \times (\text{変位の合計})$$

※ 質点に加わる力は、「 f 」等で適当におくと良い。(後々消える)

7 熱力学

7.1 熱力学第一法則

熱と仕事は本質的に同種のエネルギーであり、それらは互いに**変換可能**である

7.1.1 閉じた系

物質の出入りのない系のことを**閉じた系**という。 例) ピストン-シリンダ系

閉じた系の熱力学第一法則

$$Q = \Delta U + W$$

Q : 受熱量

ΔU : 内部エネルギーの変化量

W : 絶対仕事

内部エネルギーの変化量

$$\Delta U = mC_v\Delta T$$

7.1.2 開いた系

物質の出入りがある系のことを**開いた系**という。 例) タービン

また、このとき取り出される仕事を**工業仕事**という。

開いた系の熱力学第一法則

$$Q = \Delta H + W_t$$

Q : 受熱量

ΔH : エンタルピーの変化量

W_t : 工業仕事

エンタルピーの変化量

$$\Delta H = mC_p\Delta T$$

7.2 理想気体

状態方程式

$$PV = mRT$$

$$Pv = RT \quad (\text{単位質量基準の場合})$$

※ v : 比容積

マイヤーの法則

$$C_p = C_v + R$$

C_p : 定圧比熱

C_v : 定容比熱

7.3 熱力学第二法則

熱は高いほうから低いほうへと移動するという**不可逆現象**のことを指す。

7.3.1 仕事

仕事

$$W = Q_H - Q_L$$

$$W = \int P dV \quad (\text{閉じた系の絶対仕事})$$

$$W_t = \int V dP \quad (\text{開いた系の工業仕事})$$

7.3.2 熱効率

熱効率

$$\eta_{th} = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}$$

7.4 エントロピー

2つの状態間を**不可逆的に変化**させたとき、その変化の経路に無関係に $\int \frac{dQ}{T} = \text{const}$ となる値 (**状態量**) のこと。
また、その変化の不可逆性の大きさを示す。可逆断熱過程では、エントロピーの変化は**ゼロ**になる。

7.5 サイクル

カルノーサイクル —

(1) 断熱圧縮 → (2) 等温膨張 → (3) 断熱膨張 → (4) 等温収縮

オットーサイクル —

(1) 断熱圧縮 → (2) 等容加熱 → (3) 断熱膨張 → (4) 等容放熱

ディーゼルサイクル —

(1) 断熱圧縮 → (2) 等圧加熱 → (3) 断熱膨張 → (4) 等容放熱

サバテサイクル —

(1) 断熱圧縮 → (2) 等容加熱 → (3) 等圧加熱 → (3') 断熱膨張 → (4) 等容放熱

ブレイトンサイクル —

(1) 断熱圧縮 → (2) 等圧加熱 → (3) 断熱膨張 → (4) 等圧放熱

7.6 乾き度

8 流体力学

8.1 粘性流体 of 力学

流体の運動における未知量は、**速度、圧力、密度、温度**である。
また、**時間** (t)、**空間** (x, y, z) の関数である。

(圧縮性流体) 未知量は 4 つ 速度 (u, v, w), 圧力 (p)
(非圧縮性流体) 未知量は 6 つ 速度 (u, v, w), 圧力 (p), 密度 (ρ), 温度 (T)

8.2 流体の質量保存則

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3 \text{ 次元})$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2 \text{ 次元})$$

8.3 流体のエネルギー保存則

ベルヌーイの定理

$$\frac{1}{2} \dot{m} v^2 + \dot{m} \frac{p}{\rho} + \dot{m} g z = \text{const}$$

※ ベルヌーイの定理は、**エネルギー保存則**であるのでエネルギーの損失 (圧力損失 等) がある場合は適用できない!!
→ 運動量保存則が適用される

8.4 流体の運動量の法則

運動量保存則

$$\sum m v = F t$$

両辺を時間 t で微分すると、

$$\sum \dot{m} v = F$$

8.5 流体の運動方程式

8.5.1 流体の運動を表す 2 つの運動方程式

オイラーの運動方程式 (2 次元)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x \quad (x \text{ 方向}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y \quad (y \text{ 方向})\end{aligned}$$

ナビエ・ストークス方程式 (2 次元)

※ 非圧縮性流体

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (x \text{ 方向}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \quad (y \text{ 方向})\end{aligned}$$

極座標系の支配方程式

※ 非圧縮性流体

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} &= 0 \quad (\text{連続の式}) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} &= \quad (r \text{ 方向}) \\ &\quad (\theta \text{ 方向})\end{aligned}$$

8.5.2 オイラーの運動方程式とナビエ・ストークス方程式の違い

2 つの方程式を見比べてみると、オイラーの運動方程式はナビエ・ストークス方程式から**粘性項**を除いたものとなっている。したがって、オイラーの運動方程式では、流体の粘性について考慮されていないことになる。

オイラーの運動方程式に従った簡単な例を挙げると、自動車の走行中に流体から力 (空気抵抗) を受けないことになる。(実際は抵抗を受ける)

また、このパラドクスのことを**ダランベールの背理**という。そこで、このパラドクスを解くために考え出されたのが、**ナビエ・ストークス方程式**である。

※ オイラーの運動方程式に支配される流体を**完全流体**という。

※ ナビエ・ストークス方程式に支配される流体を**ニュートン流体**という。(粘性によるせん断応力と速度勾配が比例関係になるような流体)

8.5.3 運動量保存から圧力損失を導く

8.6 2次元の連続の式・オイラーの運動方程式の導出

8.6.1 2次元の連続の式の導出

Point

時刻 $t - \delta t/2 \leq t \leq t + \delta t/2$ の微小時間 δt 間の流れについて**空間・時間**の観点から保存則を立てる!!

図 1 において、連続の式を導出する。 δt 間に流入する流体の質量を M_{in} 、 δt 間に流出する流体の質量を M_{out} 、 δt 間の質量増加量を ΔM とすると、

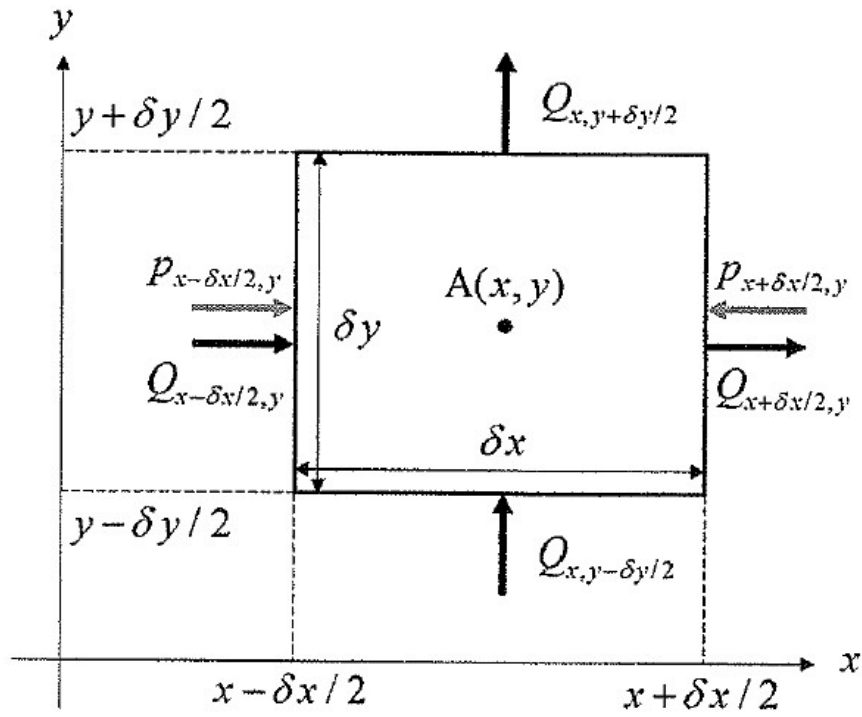


fig.1 R3 試験問題 [7]

・ 流入・流出量 (空間的観点)

$$M_{in} = (\rho u)_{x-\frac{1}{2}\Delta x} \Delta y \Delta t + (\rho v)_{y-\frac{1}{2}\Delta y} \Delta x \Delta t$$

$$M_{out} = (\rho u)_{x+\frac{1}{2}\Delta x} \Delta y \Delta t + (\rho v)_{y+\frac{1}{2}\Delta y} \Delta x \Delta t$$

・ 質量増加量 (時間的観点)

$$\Delta M = (\rho)_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \Delta x \Delta y - (\rho)_{t-\frac{1}{2}\Delta t} \Delta x \Delta y$$

質量保存則より、

$$(\text{質量増加量}) = (\text{流入量}) - (\text{流出量})$$

$$\Delta M = M_{in} - M_{out}$$

※ 「増加量」は「流入量」 \geq 「流出量」のときに増加する

ここで、 $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ のオーダーまで Taylor 級数展開すると

※ ここでは、点 (x, y) 周りの $(x, y) = \left(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y \pm \frac{\Delta y}{2}\right)$ のときについて考えている。

$$(\rho u)_{x \pm \frac{1}{2}\Delta x} = \rho u \pm \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + O(\Delta x^2)$$

$$(\rho v)_{y \pm \frac{1}{2}\Delta y} = \rho v \pm \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + O(\Delta y^2)$$

$$(\rho)_{t \pm \frac{1}{2}\Delta t} = \rho \pm \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + O(\Delta t^2)$$

したがって、上式を代入すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta t = - \left(\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta t$$

これを変形して、

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0$$

以上より、2次元空間における連続の式を導くことができた。

8.6.2 2次元のオイラーの運動方程式の導出

Point

ニュートンの第二法則 $F = ma$ を流体について立てる!!

(x 方向)

・流体の質量: m

$$m = \rho \delta x \delta y$$

・加速度: a

x 方向の速度 u の全微分 du は、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

8.7 流体のせん断応力

流体の流れに平行な軸を x 軸、垂直な軸を y とすると、せん断応力 $\tau(y)$ は以下のように表せる。

せん断応力 (2次元)

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy}$$

8.8 レイノルズ数

レイノルズ数

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

Re : レイノルズ数

U : 代表速度

L : 代表長さ

ν : 動粘性係数

8.9 流れ場の幾何学的表現

流れ場を表現する手法として流線・流跡線・流脈線という概念がある。

8.9.1 流線

流線は、時間 t をある時刻に固定し、その時刻における速度ベクトルが接線ベクトルとなる曲線のことである。つまり、 $\vec{u} \parallel d\vec{x}$ が成立する。

流線

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$
$$vdx - udy = 0 \quad (2 \text{ 次元})$$

流線が交差するとき、その交点では流体は速度ゼロもしくは無限大をとる。速度がゼロのとき、その交点を**よどみ点**といい、無限大のとき**特異点**という。また、この流線によって作られる曲面を**流管**という。

8.9.2 流跡線

流跡線は、流体粒子を時間とともにラグランジュ的に追跡したときに描かれる軌跡を示す概念であり、以下のよう

に表される。

流跡線

$$d\vec{x} = \vec{u}dt$$

8.9.3 流脈

空間のある点を通じた流体のすべての粒子が任意の瞬間に存在する点を結んだ線のこと。

例) たばこの煙をある瞬間に撮影したもの

8.10 渦度

流れ場の回転の程度を表す量を**渦度**という。 $\vec{u} = (u, v)$ のとき、以下のように表される。

渦度

$$\zeta = \text{rot } \vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

また、渦度 ζ は回転の角速度 ω の 2 倍に等しい。

$$\omega = \frac{1}{2}\zeta$$

ここで、 $\zeta = 0$ のとき、回転のない運動 (**渦なし流れ**) となる。これを**ポテンシャル流**という。

8.11 流れ関数

以下の条件を満たす関数 ψ を**流れ関数**という。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\psi = \text{const}$ のとき、全微分をとると

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

これは、流線の定義と同じになっていることがわかる。すなわち、 $\psi = \text{const}$ は流線を表す。

※ 流線と関係が深い → 流れの方向ベクトルを表すことができる。

8.12 速度ポテンシャル

以下の条件を満たす関数 ϕ を**速度ポテンシャル**という。また、このとき流れは**渦なし流れ**である必要がある。

速度ポテンシャル

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

速度ポテンシャル $\phi = \text{const}$ の曲線を**等ポテンシャル線**と呼ぶ。

※ 渦度 ζ と関係が深い → 流れに渦 (回転運動) がない状態のことを表すことができる

8.13 コーシー・リーマンの関係式

定常かつ渦なし流れのとき、以下の関係 (コーシー・リーマンの関係式) が成立する。

コーシー・リーマンの関係式

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}$$

これは、 ϕ と ψ の直交性を示す。すなわち、流線 ($\psi = \text{const}$) と等ポテンシャル線 ($\phi = \text{const}$) は直交する。

8.13.1 直交性の証明

コーシー・リーマンの関係式が成立するとき、 $\psi = \text{const}$ $\phi = \text{const}$ の法線ベクトルはそれぞれ、

$$\begin{aligned} \text{grad}\psi &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ \text{grad}\phi &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

これらの内積を計算すると、

$$\begin{aligned} \text{grad}\psi \cdot \text{grad}\phi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、2つの法線ベクトルは直行しているといえる。よって、流れ関数 ψ と速度ポテンシャル ϕ の直交性は示された。