# 数学

## 1　基本知識

### 1.1　平方根

$\sqrt{a^2} = |a|$

## 2　線形代数

### 2.1　行列式

#### 2.1.1　余因子行列とクラメールの公式

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の第 $i$ 行と第 $j$ 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を $A_{ij}$ と書く.

**余因子展開**

(1) 第 $j$ 列に関する余因子展開

$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$

(2) 第 $i$ 行に関する余因子展開

$|A| = (-1)^{i+1} a_{1j} |A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$

**余因子行列**

$n$ 次正方行列 $|a_{ij}|$ に対し,

$$\check{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

さらに, 以下のようにおき,$A$ の余因子行列という.

$$\tilde{A} = [\check{a}_{ij}]$$

**定理 3.4.1**

正方行列 $A$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると, 以下の関係が成立する.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = dE \, (d = \det(\mathrm{A}))$$

**クラメールの公式**

### 2.2　連立一次方程式, 基本変形

#### 2.2.1　連立一次方程式の消去法による解法

(i) 連立一次方程式より拡大係数行列を抽出（行列のデータ化）

(ii) 抽出した拡大係数行列を簡約化する（未知数の整理）

(iii) 簡約化の結果を連立一次方程式に還元し解を作成する

#### 2.2.2 解が不定の場合

「1 式に 1 未知数」という形は, 一般には成り立たない. そこで,「1 式に 1 未知数」に近い形に整理したものが**階段行列** (=**簡約行列**) である. 一般の連立 1 次方程式の場合, 未知数, 方程式の本数, 任意定数の間には以下の関係が成り立つ.

$$(\textbf{未知数の個数}) = (\textbf{有効な方程式の数}) + (\textbf{任意定数の数})$$

### 2.3 固有値と固有ベクトルの計算

#### 2.3.1 固有値と固有ベクトル

定義

$n$ 次正方行列 $A$ とスカラー $\lambda$ に対し,

$$Ax = \lambda x$$

となる**零ベクトル** $o$ **ではないベクトル** $x$ が存在するとき,$\lambda$ を $A$ の固有値といい,
$\lambda$ に対し上の条件を満たす $o$ ではないベクトル $x$ を $A$ の固有ベクトルという. また, 固有値を求める際には,$|\lambda E - A| = 0$ を解けば良い.

#### 2.3.2 行列の対角化

正方行列 $A$ が与えられたとき,$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような生息行列 $P$ と対角行列 $B$ を求めることを行列 $A$ の対角化という.

固有多項式

正方行列 $A$ に対し, 以下の多項式 $g_A(t)$ を $A$ の固有多項式という.

$$g_A(t) = |tE - A|$$

#### 2.3.3 対角化可能性

正方行列 $A$ は常に対角化されるとは限らない.

対角化の条件

$A$ が $N$ 次の正方行列のとき,「$A$ が対角化可能」とは $A$ が $N$ 個の独立な固有ベクトルを持つことと同値である.
(固有値の重複度と固有空間の次元が一致している)

#### 2.3.4 対角化の手順

対角化の作業は以下の手順で行われる.

(i) 固有値の計算
(ii) 各固有値に対する固有ベクトルの計算
(iii) 上の手順で得られた(一次独立な)固有ベクトルの組を並べてできた行列を $P$ としたとき,
　　この $P$ は正則行列であり,$P^{-1}AP$ は対角行列となる.

# 3　微積分

## 3.1　微分の公式

微分の公式

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin(x) \quad & \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \arccos(x) \quad & \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
y &= \arctan(x) \quad & \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

## 3.2　関数のべき級数展開

関数のべき級数展開とは, 関数を多項式で近似していくことを指す. 工学分野では, 必要不可欠なツールであり, 出題内容として (1) 関数を展開する問題 (2) 近似・誤差の評価という 2 種類が主なものである.

### 3.2.1　Taylor 展開

Taylor 展開

$$
f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\,x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n}x^n
$$

## 3.3　1 変数の積分

### 3.3.1　偶関数と奇関数

## 3.4　多変数関数

### 3.4.1　偏微分

多変数関数の微分　$\rightarrow$　偏微分

### 3.4.2　多変数関数の極値

定理 4.3.3 極値を持つ必要条件

$f(x,y)$ が $(a,b)$ で極値をとるならば, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ である.

定理 極値の判定

$f(x,y)$ は $C^2$ の関数であり, 点 $(a,b)$ において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ であるとする.
判別式を,$D = f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2$ と定義する.

(1) $D > 0$ とする.
　$f_{xx}(a,b) > 0$ ならば,$f$ は点 $(a,b)$ で極小値をとる.
　$f_{xx}(a,b) < 0$ ならば,$f$ は点 $(a,b)$ で極大値をとる.

(2) $D < 0$ ならば,$f$ は点 $(a,b)$ で極値をとらない.

### 3.4.3 接平面の方程式

関数のグラフ $z = f(x, y)$ は空間内の局面を定める。この曲面上の $p(x_0, y_0, z_0)$ における接平面の方程式は、

接平面の方程式

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

により与えられる。

### 3.4.4 接線の方程式と陰関数の定理

定理 4.4.1 陰関数の定理

$f(x, y)$ が $C^1$ 級の関数で,$f_x(a, b) = 0,\ f_y(a, b) \neq 0$ ならば,
$a$ を含む開区間で定義された $f(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \phi(x)$ で,$\phi(a) = b$ となるものが存在する.
このとき,$y = \phi(x)$ は微分可能で, 次の式が成り立つ.

$$\phi'(x) = \frac{f_x(x, \phi(x))}{f_y(x, \phi(x))},\ \text{すなわち},\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

## 3.5 重積分

### 3.5.1 主な解法スキーム

(1) 基本形
(重積分) →**計算用の式変換**→ (累次積分) →**計算の実行**→ (値)

(2) 積分の順序変更
(重積分) →**計算用の式変換・問題の差し戻し**→ (累次積分) →**計算の実行**→ (値)

(3) 変数変換
(重積分 1) →**変数の変更**→ (重積分 2) →**計算用の式変換**→ (累次積分) →**計算の実行**→ (値)

### 3.5.2 具体的な手順

(1) 積分領域 (範囲) を求める

### 3.5.3 積分区間の変換

積分区分を変換する際は、固定されていない変数を固定して区間を考える。

※ 区間に $x$ が含まれる場合は、「$x$ を固定した」ということ → 変数を変換する場合は、「$y$ を固定」して考える

#### 3.5.4 変数変換公式

ヤコビ行列

$st$ 平面の有界な領域 $E$ で定義された $C^1$ 級関数 $x=\varphi(s,t)$、$y=\psi(s,t)$ に対して
(1) $E$ の各点で Jacobi 行列

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{bmatrix}x_s & x_t\\ y_s & y_t\end{bmatrix}$$

の行列式 $J=x_sy_t-x_ty_s$ は 0 ではない。

(2) 写像 $F(s,t)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ は $E$ から $E$ の像 $D=F(E)$ への 1 対 1 の写像であるという上記の 2 つの条件が成立するとき、連続関数 $s(x,y)$ に対して以下の式が成立する。

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_E f(\varphi(s,t),\psi(s,t))\,|J|dsdt$$

ヤコビヤンは**絶対値**をかける!!

【代表的なヤコビ行列】
・デカルト座標から極座標への変換
$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ すると、

$$|J|=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{bmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\theta & r\cos\theta\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{bmatrix}=r$$

# 4 微分方程式

## 4.1 1 階常微分方程式

#### 4.1.1 直接微分形

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

の形を**直接微分形**という。

解法

(1) 方程式を標準形に直す
$\frac{dy}{dx}=f(x)$
(2) 両辺を積分して一般解を求める
(3) 特殊解を求める際は、初期条件を代入して積分定数を求める

#### 4.1.2 変数分離形

$$g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)$$

の形を**変数分離形**という。

解法

(1) 方程式を標準形に直す
$g\left(y\right)\dfrac{dy}{dx}=f\left(x\right)$
(2) 両辺を $x$ で積分する
(3) 変形しきれいな形に直して一般解とする
(4) 特殊解を求める際は、初期条件を代入して積分定数を求める

#### 4.1.3 $y'=f\left(\alpha x+\beta y+\gamma\right)$ の形

$y'=f\left(\alpha x+\beta y+\gamma\right)$ の $\alpha x+\beta y+\gamma$ がひとかたまりになっている場合は、$u=\alpha x+\beta y+\gamma$ とおくことで、変数分離形に帰着される。

解法

(1) $u=\alpha x+\beta y+\gamma$ とおいて、$x$ で微分し、$y'$ を求める
$u'=\alpha+\beta y'$
(2) 元の方程式に代入して整理し、変数微分形の形にする
(3) 変数分離形の一般解を求める
(4) $u$ を元の式に代入して一般解を求める
(5) 特殊解を求める際は、初期条件を代入して積分定数を求める

#### 4.1.4 同次形

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

の形の微分方程式を**同次形**という。

解法

(1) 方程式を標準形に直す
$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$
(2) $\dfrac{y}{x}=u$ とおいて標準形に代入し、$u$ と $x$ の方程式に直す。
(3) 両辺を $x$ で積分して関数 $u$ を求める
(4) $u=\dfrac{y}{x}$ とおいて元に戻し、一般解 $y$ を求める
(5) $f\left(u\right)-u=0$ をみたす $u=a$(定数) があるとき、これから得られる $y=ax$ も解となる。
また、これが一般解に含まれるかどうか調べる。
(6) 特殊解を求める際は、初期条件を代入して積分定数を求める

### 4.2 線形微分方程式

$P_1\left(x\right),P_2\left(x\right),\ldots,P_n\left(x\right),Q\left(x\right)$ を $x$ の関数とするとき
$y^{(n)}+P_1\left(x\right)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}\left(x\right)y'+P_n\left(x\right)y=Q\left(x\right)$ を $n$ **階微分方程式**という。
また、$Q\left(x\right)=0$ のとき**同次方程式**という。

# 5　材料力学

## 5.1　重要公式

引張・圧縮

$$\sigma = \frac{P}{A}$$
$$\varepsilon = \frac{\lambda}{L}$$
$$\sigma = E\varepsilon$$
$$P = \frac{AE}{l}\lambda = AE\varepsilon$$

$AE$ : 引張剛性

ねじり

$$\tau(r) = \frac{T}{I_p} r$$
$$\gamma(r) = \frac{\lambda(r)}{L} = \frac{\varphi}{L} r = \theta r$$
$$\tau(r) = G\gamma(r) = G\theta r$$
$$T = \frac{I_p G}{L}\varphi$$

$\theta = \dfrac{\varphi}{L}$ : 比ねじれ角

$I_p G$ : ねじれ剛性