

モンテカルロ法による面積計算

来代 勝胤

2021 年 4 月 27 日

1 理論

以下の5つの曲線と、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 、 $y = 0$ が囲む面積を求める。

$$f(x) = x \quad (1)$$

$$f(x) = x^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (3)$$

$$f(x) = \sin(\pi x) \quad (4)$$

$$f(x) = \exp(-x^2) \quad (5)$$

乱数を用いたモンテカルロ法で面積を評価する。 n 回目に発生させた乱数を r^n として、設定点座標を (r^n, r^{n+1}) で与える。

$$\begin{array}{ll} \text{設定点の } y \text{ 座標} & r^{n+1} \\ \text{設定点の } x \text{ 座標の関数値} & f(r^n) \end{array}$$

上記、2 式の大小を比較し、 $r^{n+1} > f(r^n)$ であれば、 S_1 領域、 $r^{n+1} < f(r^n)$ であれば S_2 領域に属するものと判断できる。ここで、設定点を N 点としたときに、今回の場合においては S_2 領域に属する設定点の比率から面積を求めることが可能である。

2 解析解

2.1 $f(x) = x$ について

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (6)$$

2.2 $f(x) = x^2$ について

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0.333 \dots \quad (7)$$

2.3 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ について

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} = 0.636619 \dots \quad (8)$$

2.4 $f(x) = \sin(\pi x)$ について

$$S = \int_0^1 f(x) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi} = 0.636619 \dots \quad (9)$$

2.5 $f(x) = \exp(-x^2)$ について

誤差関数 $\operatorname{erf}(t)$ の定義、

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \int_0^t (-x^2) dx \quad (10)$$

より、求める解析解は以下のように表すことができる。

$$S = \int_0^1 \exp(-x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times 0.8427 = 0.746823 \dots \quad (11)$$

3 結果

今回、パラメータとなる設定点数 N に関して、 $N = 5000$ と設定し計算を行った。

ここで、検討事項である「設定点 N と面積算出値の関係」を図 1 に、「面積算出値と解析解との誤差」を図 2 に示す。

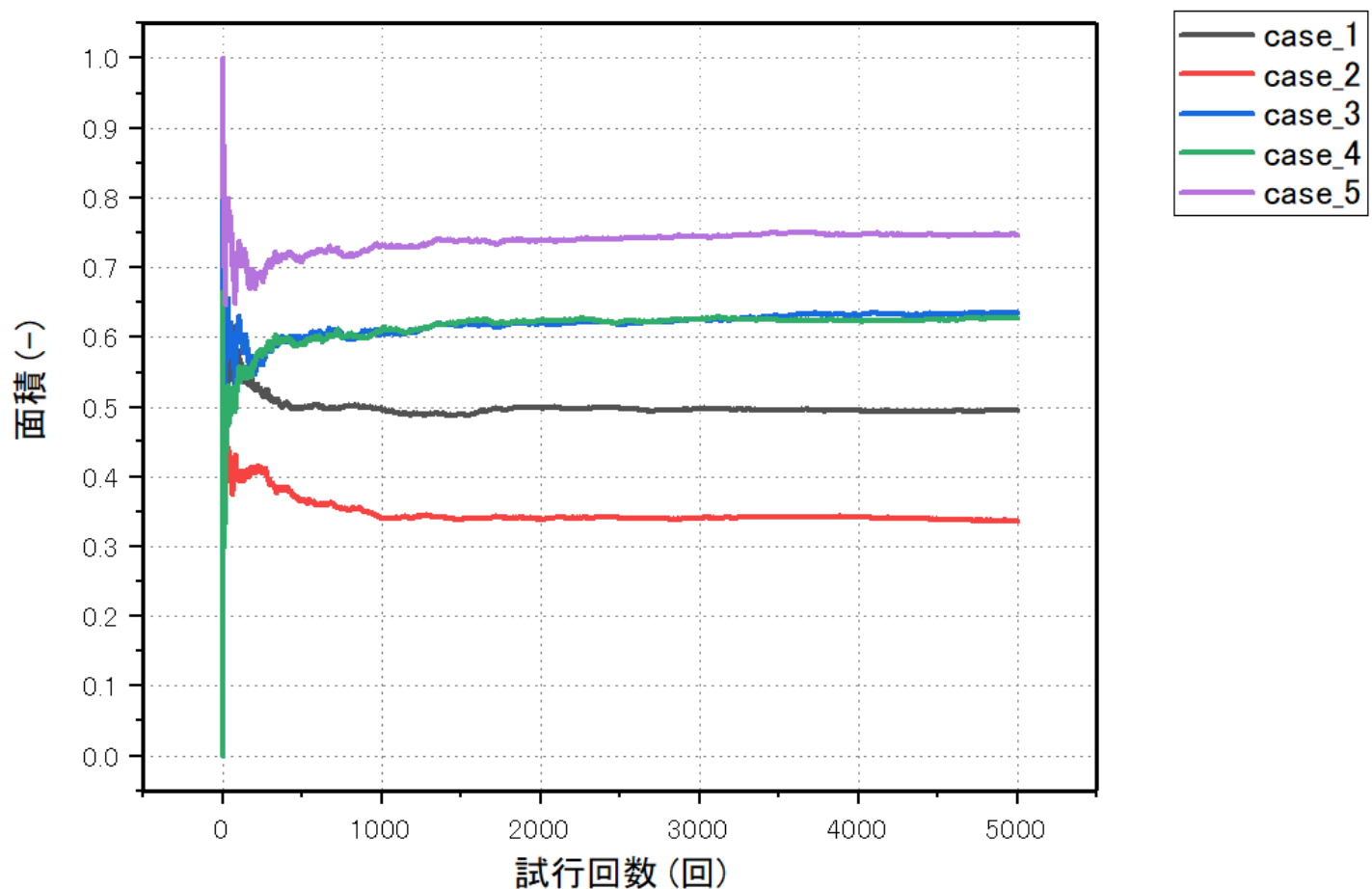


図 1 図 1 設定点 N と面積算出値の関係

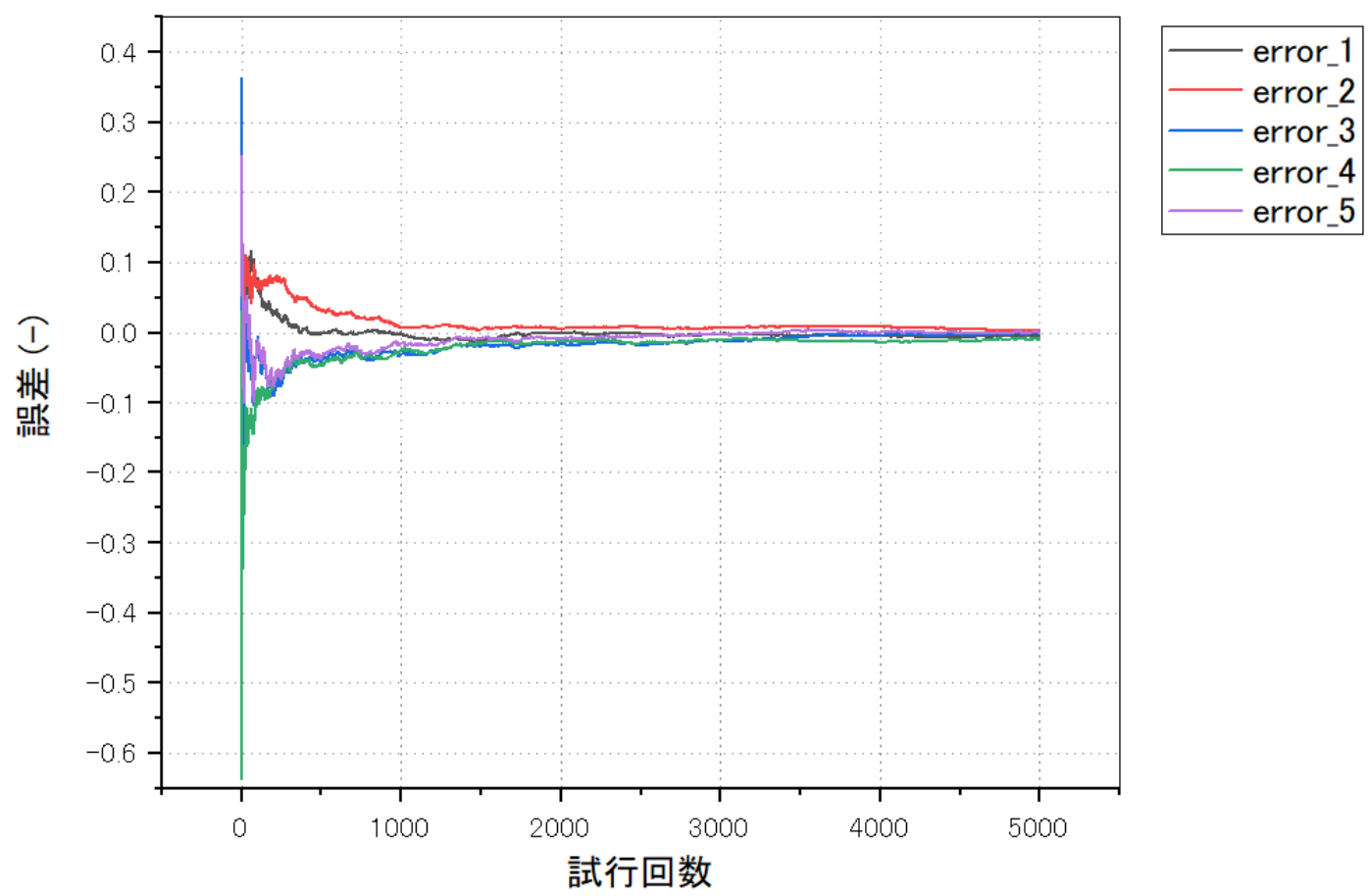


図 2 図 2 面積算出値と解析解との誤差

4 考察

5 プログラム

今回使用したプログラムを以下に示す。

```
! Program Name : report.f90

program main

  implicit none
  integer, parameter :: num = 10000
  integer, parameter :: case = 5
  integer i, j, n
  real x, y, a, b, pi, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5
  real f(case), s(case)
  real r(num + 1)
  real area(num + 1, case)
  real dif(num + 1, case)

  !** create random number *****

  integer :: seedsize
  integer, allocatable :: seed(:)

  call random_seed(size = seedsize)
  allocate(seed(seedsize))
  do j = 1, seedsize
    call system_clock(count = seed(j))
  end do
  call random_seed(put = seed(:))

  !*****

  pi = 4.0 *atan(1.0)
  ! write(6,*)'pi = ',pi

  call random_number(r)

  do 10 j = 1 ,case
    s(j) = 0
  10 continue

  open(17, file = 'result/result.dat', status='replace')

  do 20 i = 1, num
    x = r(i)
    y = r(i + 1)

    f(1) = x !case_1
    f(2) = x*x !case_2
    f(3) = cos(pi / 2.0 * x) !case_3
    f(4) = sin(pi * x) !case_4
    f(5) = exp(-x * x) !case_5

    do 100 j = 1, 5
      if (f(j) > y) then
        s(j) = s(j) + 1
      end if
      a = (s(j)/i)
      area(i,j) = a
    100 continue
  20 continue

  do 30 i = 1, num
    write (17,*) i,area(i,1),area(i,2),area(i,3),area(i,4),area(i,5)
  30 continue
```

```

close(17)

open(18, file= 'result/difference.dat', status='replace')

f_1 = 1.0/2.0
f_2 = 1.0/3.0
f_3 = 2.0/pi
f_4 = 2.0/pi
f_5 = 2.0

do 40 i = 1, num
    dif(i,1) = area(i,1) - f_1
    dif(i,2) = area(i,2) - f_2
    dif(i,3) = area(i,3) - f_3
    dif(i,4) = area(i,4) - f_4
    dif(i,5) = area(i,5) - f_5
40 continue

do 50 i = 1, num
    write (18,*) i,dif(i,1),dif(i,2),dif(i,3),dif(i,4),dif(i,5)
50 continue

close(18)

end program

```
