Simboli

mercoledì 6 dicembre 2023 14:00

$\in$: Appartiene

$\notin$: Non Appartiene

$\exists$: Esiste almeno uno

$\nexists$: Non esiste

$\exists!$: Esiste unico

$\forall$: Per ogni

$|$: Tale che

$:$ Tale che

$\vee$: Oppure

$\wedge$: E anche

$\Rightarrow$ Implica

$\Leftrightarrow$ See solo se (Doppia implicazione)

$\cup$: Unione 1

$\cap$: Intersezione 2

$\varnothing$: Insieme Vuoto

$\subseteq$: Sottoinsieme 3

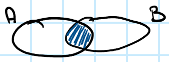
$\setminus$: Complemento 4

1 Unione:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

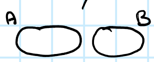
2 Intersezione

$$A \cap B : \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



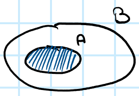
Caso particolare:

$$A \cap B = \varnothing$$



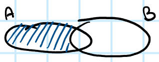
3 Sottoinsieme

$$A \subseteq B \qquad \{x : \forall x \in A \Rightarrow x \in B\}$$



4 Complemento

$$A \setminus B \qquad \{x : \forall x \in A : x \notin B\}$$



Caso particolare:

Se $B \subseteq A \rightarrow A \setminus B = B^c$ (complementare di B)

Numeri naturali/intero/razionali

mercoledì 6 dicembre 2023 14:45

Numeri Naturali

Definizione Assiomatica:

Assiomi di Peano:

① $\exists$ un numero naturale 1

② $\forall x_i \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x_j . x_i + 1$

③ $\forall x_i \neq x_j : x_i, x_j \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x_y \neq x_z : x_y = x_i + 1 ; x_z$

④ 1 non è il successore di nessun numero

⑤ $\forall A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A$ e ha il successore $\forall x : x \in A \Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ numero naturali $m \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Numeri Interi

$\mathbb{Z} \quad \{\pm m ; m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Operazioni Elementari in $\mathbb{N}$

Dato $\mathbb{N} \cup \{0\}$ introduco le operazioni: "$+$ e $\times$"
(Rispetto a "$\times$ e $+$" $\mathbb{N} \cup \{0\}$ è chiuso)

$\Downarrow$

$(a + b ; a \cdot b \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

Proprietà:

È un gruppo

Somma

- P1) Commutativa: $a + b = b + a$
- P2) Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- P3) $\exists$ elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$

Prodotto

- P4) Prodotto commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
- P5) Associativa prodotto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- P6) $\exists$ elemento neutro prodotto: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- P7) Distributiva somma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Operazioni elementare in $\mathbb{Z}$

Dato $\mathbb{Z}$ introduco operazioni (somma e prodotto)
(Rispetto a "× e +" $\mathbb{Z}$ è chiusa)

P_1-P_7 (Vedi $\mathbb{N}$)

P_8) $\exists$ elemento opposto alla somma: $\forall a \in \mathbb{Z}\ \exists b \in \mathbb{Z}: a+b = b+a = 0$ (unico) $(b = -a)$

Da queste si derivano

- $-(-a) = a$
- $a+c = b+c \Rightarrow a = b$ (vale anche in $\mathbb{N}$)
- $(-a)\cdot b = -a\cdot b$
- $(-a)\cdot(-b) = ab$

$\mathbb{Z}$ chiuso per la differenza: $a-b = a+(-b)$ e $a-b \in \mathbb{Z}\ \forall a,b \in \mathbb{Z}$

Numeri Razionali $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}: \left\{ \frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}; n \neq 0 \right\}$

$m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0$

Relazione di equivalenza: $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}\ \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Relazioni di equivalenza in A:

simbolo congruenza

$a \simeq a \quad \forall a \in A$
$a \simeq b \Rightarrow b \simeq a \quad \forall a,b \in A$
$a \simeq b; b \simeq c \Rightarrow a \simeq c \quad \forall a,b,c \in A$

Divido A in classi di equivalenza distinte

stessa classe di equivalenza $\frac{m}{n} \simeq \frac{km}{kn}$

Prendo $\forall$ classe di equivalenza in $\mathbb{Q}$ un rappresentante.
Frazione ridotta ai minimi termini

$q \in \mathbb{Q}; q = \pm\frac{m}{n}; m \in \mathbb{N} \cup \{0\}; n \in \mathbb{N};$ m e n sono coprimi ($MCD(m,n) = 1$)

Caso speciale: $q = 0$ rappresenta $\pm\frac{0}{n}, n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ è chiuso per $+; -; \times; \div$

Dimostrazione $\mathbb{Q}$ chiuso in "$\div$" $\quad \frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np} \in \mathbb{Q} \quad m,n,p,q \in \mathbb{Z}; n,m,p \neq 0$

P1-P8

P9) $\exists$ reciproco $\forall \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$: $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$
$\exists$ reciproco $\forall \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\quad \beta = \alpha^{-1}; \beta = \frac{1}{\alpha}$

Rappresentazione decimale:

- Algoritmo euclideo della divisione tra numeri $\mathbb{N}$

- Dati $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}; n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (unici): $m = nq + r$ (dividendo, divisore, quoziente, resto)

UNICI DIVISORE RESTO

OGNI ELEMENTO DI $\mathbb{Q}$ AMMETTE RAPPRESENTAZIONE DECIMALE — FINITA $\frac{3}{2} = 1.5$ — INFINITA PERIODICA $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8\overline{3}$

RELAZIONE DI ORDINE $\mathbb{Q}$

- $p, q \in \mathbb{Q}$ $\qquad p \leq q$ [p PRECEDE q $\vee$ $p = q$]

$\Downarrow$

- $p \leq q$
- $p \leq q \wedge q \leq p \Rightarrow p \leq q$
- $p \leq q \wedge q \leq r \Rightarrow p \leq r$

} RELAZIONI DI ORDINE $\leq$ (SPECCHIATE PER $\geq$)

$\mathbb{Q}$ È DENSO: $\forall p, q \in \mathbb{Q}$; $p \leq q \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : p \leq r \leq q$

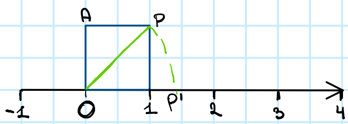
NUMERI IRRAZIONALI E REALI:

SE $\forall q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists$ PUNTO RETTA ORIENTATA

$\Downarrow$? NO

$\forall$ PUNTO SULLA RETTA ORIENTATA $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$

ESEMPIO:



$\overline{OA} = 1$
$\overline{OP} = \overline{OP'}$ $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : q > 0 ; q = \overline{OP'}$

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

- PER ASSURDO $\exists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2 \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ $n \neq 0 : \frac{m}{n} = q$
- $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow$ m È PARI!
- PONGO $m = 2k \Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow \cancel{4}2k^2 = \cancel{2}n^2 \Rightarrow n^2$ È PARI $\Rightarrow$ n È PARI

$\Downarrow$

$\frac{m}{n}$ NON È RIDOTTA IN MINIMI TERMINI

ASSURDO!!

NUMERI IRRAZIONALI: SONO I NUMERI CHE NON POSSO ESSERE ESPRESSI COME FRAZIONI DI NUMERI NATURALI

$\mathbb{R}$: INSIEME DI NUMERI RAZIONALI E IRRAZIONALI

NUMERI IRRAZIONALI: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}$:

- OPERAZIONI: " $+ \times - \div$ "
- RELAZIONI $\leq ; \geq$
- È UN CAMPO ($P_1 - P_9$)
- $\mathbb{R}$ È DENSO : $\forall a, b \in \mathbb{R}$ CON $a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$

Insiemi di numeri reali

venerdì 8 dicembre 2023 16:01

INSIEMI DI $\mathbb{R}$ LIMITATI/ILLIMITATI:

DEFINIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$

① M È MINORANTE / MAGGIORANTE DI $A \Leftrightarrow x \gtrless M \ \forall x \in A$
② M È MINIMO / MASSIMO DI $A \Leftrightarrow M = \underset{\text{MAX}}{\text{MIN}}(A)$ [SE M MINORANTE / MAGGIORANTE DI $A \wedge M \in A$]
③ A È INFERIORMENTE / SUPERIORMENTE LIMITATO $\Leftrightarrow \exists$ MINORANTE / MAGGIORANTE
④ A È INFERIORMENTE / SUPERIORMENTE ILLIMITATO $\Leftrightarrow \nexists$ MINORANTE / MAGGIORANTE

⑤ A È LIMITATO SE E SUP. LIM e INF. LIM.

OSSERVAZIONI:

- SE $\exists$ UN MINORANTE / MAGGIORANTE DI $A \Rightarrow$ NE ESISTONO INFINITI
- $\exists !$ MASSIMO/MINIMO DI A

TEOREMA DI COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}$

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$

- SE A È INF / SUP. LIM. $\Rightarrow \exists$ IL PIÙ GRANDE / PICCOLO DEI MINORANTI / MAGGIORANTI [ESTREMO INFERIORE / SUPERIORE DI A] INF / $\text{Sup}(A)$

N.B. $\max(A) \neq \text{Sup}(A)$ $\min(A) \neq \text{Inf}(A)$

TEOREMA:

SIA $A \subseteq \mathbb{R}$

- SE A INF / SUP. LIM e INF / $\text{SUP}(A) \in A \Rightarrow$ INF / $\text{SUP}(A) = $ MIN / $\text{MAX}(A)$
- SE A INF / SUP. ILLIM $\Rightarrow$ $\text{SUP}(A) = +\infty$ / $\text{INF}(A) = -\infty$

OSSERVAZIONE [DIFFERENZE $\mathbb{Q}$ VS $\mathbb{R}$]

LE PROPRIETÀ DI SUP e INF NON VALGONO IN $\mathbb{Q}$

ESEMPIO: $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 \leq 2\}$ A SUP. LIM.

ASSURDO: $\exists p \in \mathbb{Q} : p = \text{Sup}(A)$ IN $\mathbb{Q}$

$\Downarrow$

p $< \sqrt{2}$ / $> \sqrt{2}$ $(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$

SE $p > \sqrt{2} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : p > q > \sqrt{2}$

MAGGIORANTE DI $A \Rightarrow p$ NON È IL PIÙ PICCOLO

SE $p < \sqrt{2} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : p < q < \sqrt{2}$ $q \in A \Rightarrow p$ NON È MAGGIORANTE

ASSURDO!

INTERVALLI $\mathbb{R}$

① (a,b) INTERVALLO LIMITATO APERTO

② $[a,b]$ " " Chiuso

③ $(a,b]$ ④ $[a,b)$ ⑤ $(a,+\infty)$ ⑥ $[a,+\infty)$

⑦ $(-\infty,b)$ ⑧ $(-\infty,b]$ ⑨ $(-\infty,\infty)$

Valore Assoluto di un Numero Reale

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$

$|\alpha| = \overline{0\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0 & |\alpha| = \alpha \\ \alpha < 0 & |\alpha| = -\alpha \end{cases}$

Proprietà

① $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

② $|a| = 0 \iff a = 0$

③ $|ab| = |a||b| \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

④
$c > 0: |a| \leq c \iff -c \leq a \leq c$
$c = 0: |a| \leq 0 \iff a = 0$
$c < 0: |a| \leq c$ Impossibile !!!
$c > 0: |a| \geq c \iff a \leq -c, a \geq c$
$c = 0: |a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
$c < 0: |a| \geq c \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Osservazione

Quanti sono elementi di $\mathbb{Q}$? " " " " $\mathbb{R}$? $\Big] \infty$, ma sono differenti

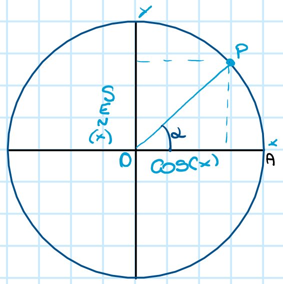
Definizione: Un insieme A, si dice innumerabile sono in numero finito $\vee$ $\exists$ corrispondenza A e $\mathbb{N}$

Teorema:

$\mathbb{Q}$ è numerabile
$\mathbb{R}$ non è numerabile

Funzioni trigonometriche

sabato 9 dicembre 2023 22:43



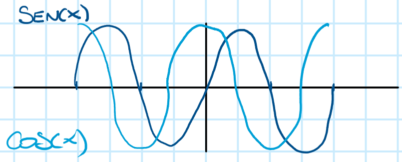
DATA UNA CIRCONFERENZA CON ORIGINE IN (0,0) E RAGGIO = 1. SIA P UN PUNTO DELLA CIRCONFERENZA

α = ANGOLO $A\hat{O}P$

↳ MISURA IN RADIANTI — SE α ↺ $+\overset{\frown}{AP}$
— SE α ↻ $-\overset{\frown}{AP}$

$P = (\cos(x), \operatorname{sen}(x))$

FUNZIONI SEN(x) E COS(x)



SONO PERIODICHE E PERIODO = 2π

$\sin(-x) = -\sin(x)$ DISPARI

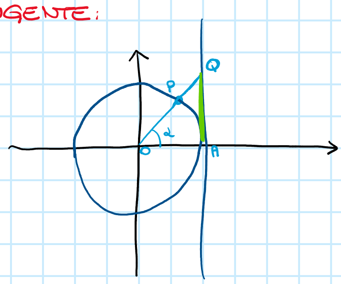
$\cos(-x) = \cos(x)$ PARI

DATO P ∈ CIRCONFERENZA → $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

↓

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

TANGENTE:



$f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

TANGENTE DI x: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{R} \right\}$

Numeri complessi

lunedì 11 dicembre 2023 10:51

NUMERI COMPLESSI:

DATO $x^2+1=0$ IN $\mathbb{R}$ $\nexists$ SOLUZIONI!!!

$\downarrow$

COSTRUISCO UN INSIEME CHE CONTIENE $\mathbb{R}$: SOMMA e PRODOTTO LO RENDONO UN CAMPO.

$\downarrow$

$\mathbb{C} = \{a+ib : a,b \in \mathbb{R}\}$ $i \in$ IMMAGINARIA

$\Downarrow$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ è UN CAMPO! (P1-P9)

FORMA ALGEBRICA:

$\underbrace{a}_{\text{PARTE REALE}} + i\underbrace{b}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$

OSSERVAZIONE: $a+i0 \in \mathbb{R}$ $\wedge$ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

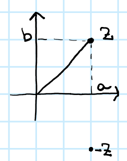
DEFINIZIONI:

$z = a+ib \in \mathbb{C}$

1. $\overline{z} = a-ib$ [CONIUGATO DI z]
2. $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ [MODULO DI z]

OSSERVO:

SE $z = a+i0$ $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} = |a|$



DATO $z = a+ib \to$ PUNTO (a,b)

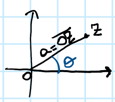
$|z| = \overline{OZ}$

PROPRIETÀ:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. SIA $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|}$
3. $z\overline{z} = |z|^2$
4. $|z| \geq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

IN $\mathbb{C}$ NON C'È RELAZIONE D'ORDINE

FORMA TRIGONOMETRICA DI N° COMPLESSI



SIA $z = a+ib$: $a,b \neq 0$

$\theta = \mathrm{Arg}(z)$

SE $z = 0 \to \mathrm{Arg}(z) =$ INDEFINITO

$\Downarrow$

- z FORMATO DA: $\rho = |z| > 0$
- θ

$\Rightarrow$ $a = \overset{|z|}{\overset{\uparrow}{\rho}} \cos\theta$, $b = \rho \sin\theta$ $\to z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \to z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

PRODOTTI FRA DISEGNI:

SIANO $z_1, z_2 \neq \emptyset$

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\Downarrow$

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos\theta_2\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)] =$
$\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$\Downarrow$

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

Potenze:

$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) : n \in \mathbb{N}$

Radice n-esima

Sia $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

Numero complesso $\alpha = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \alpha^n = a$

$a = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$

$\hookrightarrow \alpha^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = a$

$\Downarrow r^n = \rho$, $r = \sqrt[n]{\rho}$

$\Downarrow n\varphi = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$\exists$ ∞ radici, ma solo n sono distinte

$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}$; $\varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$; ... $\varphi_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$

$\varphi_0 = \varphi_n$

Dato le radici sono distanti $\frac{2\pi}{n}$ se collego le n radici ottengo un poligono di n lati.

In $\mathbb{C}$ $z^n - a = 0$ ha sempre soluzione

$\Downarrow z^n - a = 0 \in \mathbb{C}$

Definizione:

Sia $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 : a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$

$\alpha \in \mathbb{C}$ è radice zero di $P(z)$

- $P(\alpha) = 0$
- $P(z) = (z-\alpha)^\mu Q(z)$ con $Q(z)$ polinomio grado $n-\mu$
- $Q(\alpha) = 0$

Osservazioni:

α non è radice $Q(z)$ μ + grande $\mathbb{N}$: $P(z)$ divisibile per $(z-\alpha)^\mu$

Teorema Fondamentale Algebra

Dato $\mathbb{C}$ $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \Rightarrow a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0 \Rightarrow$ ha n radici in $\mathbb{C}$ pur di contarla con la molteplicità

$P(z)$ fattorizza: $P(z) = a_n(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2} \dots (z-\alpha_k)^{\mu_k}$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, $P(\alpha_i) = 0$, $\mu_1 + \dots + \mu_k = n$

La ricerca n-esima $a \in \mathbb{C} \equiv$ ricerca degli zeri

Il teorema f dell'algebra ha un corollario nel caso i coefficienti siano reali

Teorema:

Dato $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ $a_i \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$

$\hookrightarrow$ Ammette radici in $\mathbb{C}$ pur centrale con la loro multiplicità

Se $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una radice del polinomio con molteplicità $\mu \Rightarrow \bar{\alpha}$ è radice con molteplicità di M

OSSERVAZIONE

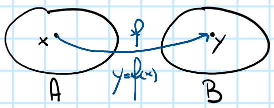
POLINOMIO CHE A COEFFICENTI REALI AMMETTE ALMENO UNA RADICE REALE. RADICI COMPLESSE E NON REALI SI ACCOPPIANO DUE A DUE. ESSENDO DI GRADO DISPARI INCESSANTEMENTE ALMENO UNA RADICE REALE

Funzioni e proprietà

lunedì 11 dicembre 2023 17:32

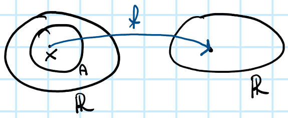
Funzioni e loro proprietà

Dati due insiemi A e B ⇒ La funzione è la legge che associa ad ogni elemento di A ad un elemento B



Funzioni reali da variabili reali:

$A \subseteq \mathbb{R}$ $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$\forall x \in A : A \subseteq \mathbb{R} \to \exists f(x) \in \mathbb{R}$

Dominio — Legge f

Variabile indipendente

Se A non è definito ⇒ $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x)\}$

Definiamo: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Data $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ⇒
- $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A : f(x) = y\}$ Immagine di A
- $G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y = f(x)\}$ Grafico f

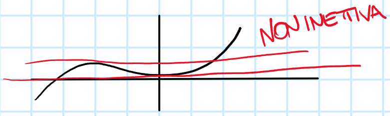
Funzioni iniettive

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva ⇔
- $\forall x,z \in A : x \neq z \Rightarrow f(x) \neq f(z)$

$\vee$

- $\forall x,z \in A : x = z = f(x) = f(y)$

Osservazione: Vedendo il grafico si capisce se è iniettiva



Funzioni monotone:

Definizioni:

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

① f è monotona strettamente crescente (decrescente) su A

Se $\forall x,z \in A$ con $x < z \Rightarrow f(x) < f(z)$ $(f(x) > f(z))$

② f si dice monotona crescente (decrescente) su A

Se $\forall x,z \in A$ con $x > z \Rightarrow f(x) \leq f(z)$ $(f(x) \geq f(z))$

Relazione tra iniettività e monotonia:

Teorema: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se f è strettamente monotona su A ⇒ f è iniettiva su A

Dimostrazione: Sia f monotoma strettamente crescente (decrescente) su A

Dati $x, z \in A$: $x = z$ e supponiamo $x < z$

DIMOSTRAZIONE: Sia f monotona strettamente crescente (decrescente) su A
Dati $x, z \in A$: $x \neq z$ e supponiamo $x < z$

$\Downarrow$

$f(x) < f(z)$ perché monotona str. crescente $\Rightarrow f(x) \neq f(z)$

Quindi f è iniettiva

f LIMITATE/ILLIMITATE

DEFINIZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(A)$ [A immagine di f]

① f limitata superiormente/inferiormente se $f(A)$ è sup/inf limitati

② " illimitata " " se " è " " illimitati

③ f si dice limitata su A se f è limitata sup $\wedge$ inf

DEFINIZIONE:

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $f(A)$ immagine attraverso f

① f ammette massimo (minimo) assoluti in A se $\exists\, z \in A$: $f(x) \leq f(z)$ ($\geq$) $\forall x \in A$

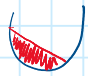
z = punto massimo (minimo) assoluto | $f(z)$ = massimo (minimo) assoluto

OSSERVAZIONE: Data $f: A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ammette sempre $\sup_A f$ e $\inf_A f$ MA non per forza $\exists\, \max_A f$ e $\min_A f$

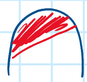
FUNZIONI CONVESSE/CONCAVE

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [I intervallo in $\mathbb{R}$]

CONVESSA: f convessa in I se $\forall x, z \in I$ con $x < z$ se: il segmento $(x, f(x)); (z, f(z))$ si trova ↑ il grafico



CONCAVA: f concava in I se $\forall x, z \in I$ con $x < z$ se: il segmento $(x, f(x)); (z, f(z))$ si trova ↓ il grafico



SEGNI e ZERI DI f

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

① f si dice positiva su A se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in A$

② f si dice negativa su A se $f(x) \leq 0$ $\forall x \in A$

③ $\forall x \in A$: $f(x) = 0 \Rightarrow$ "zero" di A

OSSERVAZIONI

① Se f è un polinomio gli zeri sono le radici del polinomio
② x si chiama "zero" di f poiché $f(x) = 0$

Operazioni sulle funzioni

lunedì 11 dicembre 2023 23:23

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in A$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in A$
- $(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad \forall x \in A : g(x) \neq 0$

Definizione

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : f(A) \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \Rightarrow g$ composta $f\ [g \circ f]$ la funzione: $\forall x \in A$ associa il valore $g(f(x))$

$$x \to f(x) \to g(f(x))$$

$$g \circ f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

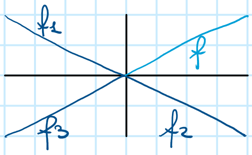
Osservazioni:

1. Considero la funzione $I : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $I(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \circ I = I \circ f = f(x) \quad \forall x \in A$
2. Quando si definiscono 2 funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
   $g \circ f$ definito su $E = \{x \in A : f(x) \in B\}$
3. $g \circ f \neq f \circ g$ la composizione non è commutativa

Simmetrie

$g(x) = -x \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(-x)$ 1
$\qquad\qquad\quad (g \circ f)(x) = -f(x)$ 2
$\qquad\qquad\quad (g \circ f \circ g)(x) = -f(-x)$ 3

1. Simmetrico per y
2. Simmetrico per x
3. " per l'origine



Definizione [Pari/Dispari]

- Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ si dice pari $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$ (asse y)
- Una " $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ " " dispari $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A$ (asse x)

Data $g(x) = |x| \quad f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(|x|) =$ 1
$(g \circ f)(x) = |f(x)| =$ 2

1 $\begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ 2 $f(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ -f(x) & x < 0 \end{cases}$

Funzione Inversa

$f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, f iniettiva in A

$\Downarrow$

$\forall y \in f(A)\ \exists!\, x \in A : y = f(x)$

$$\Downarrow$$

$\forall y \in f(A)\ \exists!\, x \in A : y = f(x)$

$g : f(A) \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \quad g(y) = x : y = f(x) \Rightarrow g(f(x)) = x \ \rightarrow g = f^{-1},\ f^{-1} : f(A) \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

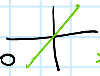
OSSERVAZIONE

1. SE f NON È INIETTIVA NON HA INVERSA
2. SIA $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ SE FACCO $(f^{-1} \circ f) = I$ in A $\quad f \circ f^{-1} = I$ in $f(A)$
3. SE f AMMETTE INVERSA IN $A \Rightarrow$ L'INVERSA È TIPO IL RECIPROCO IN $\mathbb{R}$

RELAZIONE GRAFICA f e f^{-1}

- $f : A \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, f INIETTIVA SU A
- $g(f)$ GRAF F
- $g(f^{-1})$ " F^{-1}

$\Rightarrow g(f^{-1})$ SI OTTIENE FACENDO LA SIMMETRIA RISPETTO



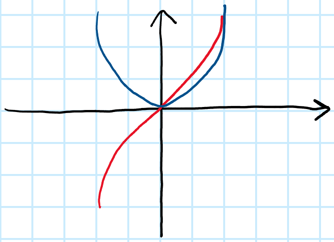
$x = y$

Funzioni elementari

martedì 12 dicembre 2023 11:17

① $f(x)=x^m$; $m\in\mathbb{N}$

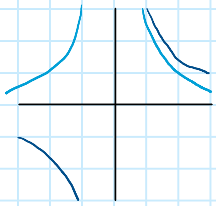
- m DISPARI $\Rightarrow$ FUNZIONI DISPARI MON. STR. CRE. INIETTIVA SU $\mathbb{R}$
- m PARI $\Rightarrow$ " PARI MOTONE STR. CRE. INIETTIVA SU $[0;\infty)$
  " DECRE. " SU $(-\infty;0]$



$f=x^5$ $f=x^2$

② $f(x)=x^{-m}$ $m\in\mathbb{N}$

- m DISPARI $\Rightarrow$ FUNZIONE DIS. INIETTIVE INVERTIBILI SU $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- m PARI $\Rightarrow$ " PARI INVERTIBILI SU $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

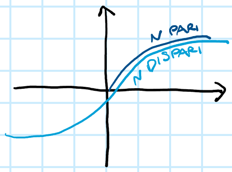


$f(x)=\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^3}$

③ $f(x)=x^{\frac{1}{m}}$ $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$x^{\frac{1}{m}}$ — DISPARI: INVERSA x^m SU $\mathbb{R}$
— PARI: INVERSA x^m SU $[0,\infty]$ PARI

- $f(x)=x^{\frac{1}{2k+1}}$ $k\in\mathbb{N}$ f È DISPARI STRET. CRE. MONO. INVERTIBILE SU $\mathbb{R}$
- $f(x)=x^{\frac{1}{2k}}$ $k\in\mathbb{N}$ f È MONOTONA STRE. CRE. SU $A=[0,+\infty]$ È INIETTIVA



④ $f(x)=x^{-\frac{1}{m}}$ $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$x^{-\frac{1}{m}}$ — PARI — f INVERSA x^{-m} SU $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ m DISPARI
— DISPARI — " " x^{-m} SU $(0;\infty)$ m PARI

- m DISPARI, f è DISPARI e INIETTIVE SU $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- m PARI, f è PARI INIETTIVA, MONOTONA, STRETTAMENTE DECRESCENTE SU A

⑤

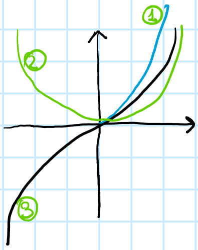
$f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ $\quad m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}-\{0\}$

$g(x)=x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m}$

A = DIPENDE DA n, PARI O DISPARI $\wedge$ SEGNO $\frac{m}{n}$

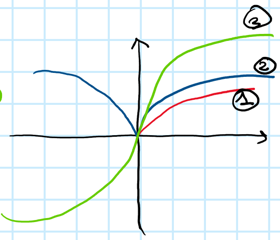
A) $\frac{m}{n}>1$

- m DISPARI, n PARI $\quad A=[0,+\infty)$ ①
- m PARI, n DISPARI $\quad A=\mathbb{R}$ ②
- m DISPARI, n DISPARI $\quad A=\mathbb{R}$ ③



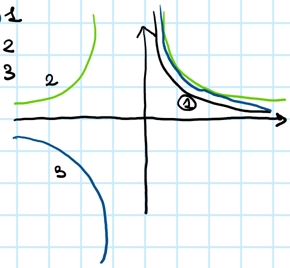
B) $0<\frac{m}{n}<1$

- m DISPARI, n PARI $\quad A=[0,\infty)$ ①
- m PARI, n DISPARI $\quad A=\mathbb{R}$ ②
- m DISPARI, n DISPARI $\quad A=\mathbb{R}$ ③



C) $\frac{m}{n}<0$

- m DISPARI, n PARI $\quad A=[0,+\infty)$ 1
- m PARI, n DISPARI $\quad A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 2
- m DISPARI, n DISPARI $\quad A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 3



⑥

$f(x)=x^{\alpha},\ \alpha\in\underset{\text{IRRAZIONALE}}{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$

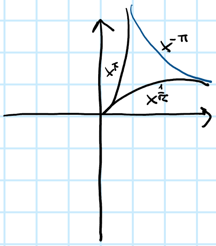
SE APPROSSIMO PER ECCESSO (DIFETTO) I NUMERI RAZIONALI p,q $\Rightarrow$ ESCLUDO $x<0$

$f(x)=x^{\alpha}$

① $\alpha>1$ $\quad A=[0,+\infty)$

② $0<\alpha<1$ $\quad A=[0,+\infty)$

③ $\alpha<0$ $\quad A=(0,+\infty)$



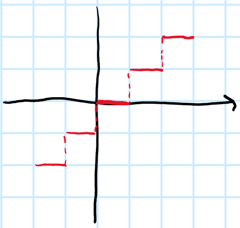
OSSERVAZIONE:

$\forall$ LE POTENZE VALGONO, m RISPETTI C.E.

ALTRE f ELEMENTARI

$f(x)=[x]$ PARTE INTERA x $\quad x\in\mathbb{R}$

↑ BIGGER INTERO MINORE O UGUALE x



$f(x)=[x]$

Limiti

martedì 12 dicembre 2023 13:11

Introduzione ai Limiti

Intorno

Definiamo intorno (aperto) $x_0 \in \mathbb{R}$ raggio $\rho > 0$

$$U_{\rho}(x_0) = (x_0 - \rho, x_0 + \rho) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \rho < x < x_0 + \rho\}$$

Intorno destro/sinistro

Definiamo intorno destro/sinistro $x_0 \in \mathbb{R}$ $\forall \rho > 0$

- $U_{\rho+}(x_0)$ = intorno destro = $[x_0, x_0 + \rho)$
- $U_{\rho-}(x_0)$ = " sinistro = $(x_0 - \rho, x_0]$

Osservazione:

① $U_+(x_0) \cup U_-(x_0) = U(x_0)$
② Tutti intorni x_0 sono intervalli

Definizione

① $x_0 \in A$ punto interno A se $\exists\, U(x_0) \subseteq A$

② $x_0 \in A$ punto isolato A se $\exists\, U(x_0) : U(x_0) \cap A = \{x_0\}$

③ x_0 punto accumulazioni di A ogni x_0 continui alcuni un punto A diverso x_0

$A = (1, 2] \cup \{3\}$

Punti interni = $x \in (1, 2)$
Punti isolati = $x = 3$
Punti accumulo = $x \in [1, 2]$

Definizione:

Intorno $\pm\infty$ di estrema l'intervallo $(a, \infty)(-\infty, a)$

$$U(+\infty) = (a, +\infty) \quad U(-\infty) = (-\infty, a)$$

Definizione:

$\pm\infty$ punto di accumulazione $A \subseteq \mathbb{R}$ ogni intorno $\pm\infty$ contiene un punto A

In generale I tutti i punti estremi di I punti di accumulo

Studio in punti accumulo A

Successioni Numeriche

Successione numerica a_n f su $\mathbb{N}$

$$a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$$

Definizione

Una successione a_n si dice limitata $\exists$ un numero reale $M \geq 0$:

Definizione

Una successione a_n si dice limitata $\exists$ un numero reale $M \geq 0$:
$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad -M \leq a_n \leq M$

Definizione

Successione Monotona Strettamente crescente/Decrescente
$a_n < a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$
$a_n > a_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

Osservazione:

Nel procedimento esaustivo per il calcolo della lunghezza della circonferenza successione dei parametri di poligoni $a_1, \dots, a_n$ è monotona strettamente crescente

Definizione [Limiti di Successione]

Numero $a \in \mathbb{R}$ limite di successi $a \in \mathbb{R}$ limite di successione a_n (che tende ad ∞)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \; |a_n - a| < \varepsilon$

Definizione:

La successione a_n ammette limite $a \in \mathbb{R}$, a_n si dice convergente

Osservazione:

Nella definizione considerare $n > n_0 \vee n > n_0$
Se $n \geq n_0 \Rightarrow n > n_0 - 1$
Se $n > n_0 \Rightarrow n \geq n_0 + 1$

Definizione

① La successione a_n ha limite $+\infty$: $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Se $\forall M > 0 \; \exists \; n_0 = n_0(M) : \forall n > n_0 \to a_n > M$

② La successione a_n ha limite $-\infty$: $\lim a_n = -\infty$

Se $\forall M > 0 \; \exists \; n_0 = n_0(M) : \forall n > n_0 \quad a_n < -M$

Osservazione

$n > n_0$ che $n \geq n_0$

Divergenza

① Successione si dice regolare se è convergente $\vee$ divergente

② " " " Irregolare/oscillante se non è convergente $\vee$ divergente, ovvero non ha limite

Successioni parte 1

mercoledì 13 dicembre 2023 10:53

TEOREMA 1: a_n SUCCESSIONE $\Rightarrow$ AMMETTE LIMITE IN $\mathbb{R}$

DIMOSTRAZIONE:

PER ASSURDO $a_n \to a \wedge a_n \to b$: $a \neq b$, $a < b$

$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

I DUE INTORNI $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \wedge (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

POICHÉ $a_n \to a \Rightarrow \varepsilon = \frac{b-a}{2}\ \exists\, m_1 : \forall m > m_1 \Rightarrow a-\varepsilon < a_m < a+\varepsilon$
POICHÉ $a_n \to b \Rightarrow \varepsilon = \frac{b-a}{2}\ \exists\, m_2 : \forall m > m_2 \Rightarrow b-\varepsilon < a_m < b+\varepsilon$

$m_0 = MAX(m_1, m_2)$ PER $m > m_0 \Rightarrow \begin{matrix} a-\varepsilon < a_m < a+\varepsilon \\ b-\varepsilon < a_m < b+\varepsilon \end{matrix}$

ASSURDO!!! $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset$

TEOREMA 2:

① SE LA SUCCESSIONE È CONVERGENTE NON PUÒ DIVERGERE A $\pm\infty$

② " " " " DIVERGENTE A $\pm\infty$ NON PUÒ CONVERGERE

③ " " " " " A $\pm\infty$ " " DIVERGERE $\mp\infty$

DIMOSTRAZIONE!!

① $a_n \to a \in \mathbb{R}$

$\varepsilon = 1\ \exists\, m_1 : \forall m_k > m_1 [\forall k \in \mathbb{N}]\ a-1 < a_m < a+1$

SE $a_n \to +\infty \Rightarrow M > 0 : M > a+1 \to \exists\, m_2 : \forall m_k [\forall k \in \mathbb{N}]$

CONSIDERO $m_0 = MAX(m_1, m_2)$ $\forall m > m_0 \Rightarrow \underline{a-1 < a_m < a+1} < \underline{M < a_m}$

ASSURDO

UNICITÀ LIMITE SUCCESSIONE

SE LA SUCCESSIONE È REGOLARE [CONVERGENTE] $\vee \pm\infty \Rightarrow$ LIMITE UNICO

TEOREMA 3:

SE a_n CONVERGE AD $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ È LIMITATA

DIMOSTRAZIONE

POICHÈ $a_n \to a \Rightarrow$ FINO A $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists\, m_0 : \forall m > m_0$ $a-1 < a_m < a+1$

QUINDI $\to \forall m \in \mathbb{N}$ $MIN(a_1, a_2, \dots, a-1) \leq a_m \leq MAX(a_1, a_2, \dots, a+1)$

a_n È LIMITATA

OSSERVAZIONE

DATA UNA SUCCESSIONE LIMITATA CONVERGENTE
$a_n = (-1)^n$

TEOREMA

Se $a_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ a_n illimitata superiormente
$-\infty$ inferiore

Dimostrazione

① Per assurdo a_n ammette maggiorante $M: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n < M$
$a_n \to \infty: M\ \exists n_0: \forall n > n_0\ \ a_n > M$ Assurdo

② Per assurdo a_n ammetta minorante $m: \forall n \in \mathbb{N}\ a_n > m$
$a_n \to -\infty: m\ \exists n_0, \forall n > n_0\ \ a_n < m$ Assurdo!

Definizione

① $a_n \to 0$ infinitesimi
② $a_n \to \pm\infty$ infiniti

Teorema 5:
$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$

Dimostrazione:

$\Rightarrow$ Se $a_n \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0: \forall n > n_0 \Rightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ quindi $-\varepsilon < |a_n| < \varepsilon$ si deduce $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

$\Leftarrow$ Se $|a_n| \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0: \forall n > n_0\ -\varepsilon < |a_n| < \varepsilon$

Teorema 6

① Sia a_n successione monotona crescente $\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} a_n = \sup a_n = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

② Sia a_n " " decrescente

Dimostrazione

2 casi: a_n limitata superiormente ①
a_n illimitata " ②

① $\sup a_n = a \in \mathbb{R}$ cioè $\lim_{n \to +\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ trovo $n_0: \forall n > n_0\ \ \underbrace{a - \varepsilon <}_{1} a_n \underbrace{< a + \varepsilon}_{2}$

① $a = \sup a_n \Rightarrow a$ più piccolo dei maggioranti di a_n $[a + \varepsilon > a] \Rightarrow a + \varepsilon$ è maggiorante di a_n e dunque scrivo $a_n \leq a < a + \varepsilon\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

② $a - \varepsilon$ non può essere un maggiorante a_n $\ \ a - \varepsilon < a$ e $a = \sup a_n \to a - \varepsilon < a_n$

Conclusione $n \geq n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

② a_n non ammette maggioranti $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$
Dato $M > 0$, M non è maggiorante $\exists n_0: a_{n_0} > M$

Monotonia a_n crescente $\Rightarrow \dots \geq a_{n_0+1} > a_{n_0} > M$
quindi $a_n > M\ \forall n \geq n_0$ ovvero $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

Dimostrazione:

① $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \forall M > 0\ \exists n_0: \forall n > n_0\ \ a_n > M$
$\Rightarrow$ ipotesi $b_n \geq a_n > M$ $\lim_{n \to \infty} b_n = +\infty$

② $\lim c_n = -\infty \Rightarrow \forall M < 0\ \exists n_0: \forall n > n_0\ \ c_n < M$
$\hookrightarrow$ $b_n \leq c_n < M$ so $\lim_{n \to +\infty} b_n = -\infty$

③ $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim c_n = b$

③ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim c_n = b$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_1, n_2 : \forall n>n_1 \quad b-\varepsilon<a_n<b+\varepsilon$
$\qquad \forall n>n_2 \quad b-\varepsilon<c_n<b+\varepsilon$

$n_0 = \max(n_1,n_2) \Rightarrow \forall n>n_0 \quad b-\varepsilon<a_n<b+\varepsilon$ e $b-\varepsilon<c_n<b+\varepsilon$

$a_n \le b_n \le c_n$

$\hookrightarrow b-\varepsilon<a_n\le b_n \le c_n<b+\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = b$

Teorema

Sia $a_n \to 0$ e b_n limitata $\Rightarrow a_n b_n \to 0$

Dimostrazione:

Poiché $a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0$

b_n limitata $\Rightarrow \exists M\ge 0 : |b_n| \le M$

$\hookrightarrow 0 \le |a_n b_n| \le |a_n||b_n| \le |a_n| M$

$a_n \to 0 \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n>n_0 \quad |a_n|<\varepsilon \Rightarrow |a_n|M<\varepsilon M$

se $\varepsilon = \varepsilon M \Rightarrow |a_n|M \to 0$

con il teorema confronto $\Rightarrow |a_n b_n| \to 0 \Rightarrow a_n b_n \to 0$

Teorema Permanenza del segno I

a_n successione convergente a $\in \mathbb{R}$

① $a_n \to a>0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n>n_0 \ a_n>0$

② $a_n \to a<0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n>n_0 \ a_n<0$

Dimostrazione

① Poiché $a>0$ considero $\varepsilon = \frac{a}{2}$

$\hookrightarrow$ A proposito di questo $\varepsilon \ \exists n_0 . \forall n>n_0 \quad a-\frac{a}{2}<a_n<a+\frac{a}{2} \Rightarrow a_n > a-\frac{a}{2}>0$

② Poiché $a<0$ considero $\varepsilon = -\frac{a}{2}$

$\hookrightarrow$ Corrispondenza di questo $\varepsilon \ \exists n_0 : \forall n>n_0 \quad a+\frac{a}{2}<a_n<a-\frac{a}{2}$

Teorema Permanenza del Segno parte II

① Se $a_n \to \infty \Rightarrow \exists n_0 . \forall n>n_0 \quad a_n>0$

② Se $a_n \to -\infty \Rightarrow \exists n_0 : \forall n>n_0 \quad a_n<0$

Osservazione I:

Se $a_n \to a>0$ questi non vuol dire che tutti i termini a_n siano positivi ma solo da un punto in poi

Conseguenze teorema permanenza del segno

Corollario I

① $a_n \ge 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a \ge 0$

② $a_n \le 0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow a \le 0$

Corollario II

Se $a_n \ge b_n$ e $a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a \ge b$

Dimostrazione

Assurdo $a<b;\ \varepsilon>0 \Rightarrow$ ① $\exists n_1 : \forall n>n_1 \quad a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$

Dimostrazione

Assurdo $a<b$; $\varepsilon>0 \Rightarrow$ ① $\exists n_1: \forall n>n_1 \quad a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$
② $\exists n_2: \forall n>n_2 \quad b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$

$- n_0 = MAX(n_1, n_2) \Rightarrow \forall n>n_0 \quad b-\varepsilon<b_n\leq a_n<a+\varepsilon \Rightarrow b-\varepsilon<a+\varepsilon \Rightarrow b-a<a-b$ ASSURDO!!!

$\Downarrow$

$b-a<2\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{b-a}{2}$

Per la permanenza del segno:

Se $a_n \to a>0 \Rightarrow \exists n_0: \forall n>n_0 \quad a_n>0$
(se $a_n \to a>0 \Rightarrow a_n>0$ definitivamente)

Proposizioni Definitivamente Vere

$P(n)$ [che dipende da n: $n\in\mathbb{N}$] è definitivamente vera se:

$\boxed{\exists n_0: \forall n>n_0 \Rightarrow P(n) \text{ è vera}}$

Proprietà:

① Se $P(n)$ definitivamente vera, $Q(n)$ definitivamente vera $\Rightarrow P(n)\wedge Q(n)$ definitivamente vera
② Se $Q(n)$ " $Q(n)$ " " $\Rightarrow P(n)$ definitivamente vera
③ $A\subseteq\mathbb{N}$ e $B\subseteq\mathbb{N}$: $A\cap B=\emptyset$ e $A\cup B=\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Def. vera su A e su B $\Rightarrow P(n)$ definitivamente vera

Operazioni con i limiti

Premessa: a_n converge ad $a\in\mathbb{R}$ eccesso/difetto scrive:

$\lim_{n\to\infty} a_n = a^{+/-}$

$\Downarrow$ se

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n>n_0 \quad a\leq a_n<a+\varepsilon$ / $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n>n_0 \quad a-\varepsilon<a_n\leq a$

Osservazione I:

a^+ e a^- NON SONO NUMERI indicano il limite eccesso/difetto

Osservazione II:

Se $\lim a_n = 0^+/0^- \Rightarrow a\geq 0 / a\leq 0$ definitivamente.

Operazioni con i Limiti

Considero a_n e b_n regolari

① $a_n\to a\in\mathbb{R}$ $b_n\to b\in\mathbb{R} \Rightarrow$
I $a_n+b_n = a+b$
II $a_n-b_n = a-b$
III $a_nb_n = ab$
IV $a_n/b_n = a/b$

② Se $a_n\to a\in\mathbb{R} \wedge b_n\to+\infty(-\infty) \Rightarrow a_n+b_n = \infty(-\infty)$

③ Se $a_n\to+\infty(-\infty) \wedge b_n\to\infty(-\infty) \Rightarrow a_n+b_n = +\infty(-\infty)$

④ Se $a_n\to a>0 \wedge b_n\to\infty(-\infty) \Rightarrow a_nb_n = +\infty(-\infty)$
" " $\to a<0 \wedge$ " " " " $\Rightarrow a_nb_n = -\infty(+\infty)$

⑤

⑥ $a_n\to a\in\mathbb{R} \wedge b_n\to\infty(-\infty) = \frac{a_n}{b_n}\to 0$

⑦ $a_n\to\infty(-\infty) \wedge b_n\to a>0/0^+ \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}\to\infty(-\infty)$
$a_n\to\infty(-\infty) \wedge b_n\to a<0/0^- \Rightarrow a_n/b_n\to-\infty(+\infty)$

⑧ $a_n\to a>0 \wedge b_n\to 0^+/0^- \Rightarrow \frac{a_n}{b_n}\to\infty(-\infty)$

$a_n \to \infty \, (-\infty) \wedge b_n \to a < 0 / 0^- \Rightarrow a_n/b_n \to -\infty \, (+\infty)$

8 $a_n \to a > 0 \wedge b_n \to 0^+ / 0^- \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty \, (-\infty)$

$a_n \to a < 0 \wedge$ " " " " $\Rightarrow a_n/b_n \to -\infty \, (\infty)$

Successioni parte 2

venerdì 15 dicembre 2023 09:19

Forme indeterminazione / indecisione

① $[+\infty; \pm\infty)]$ $a_n \to \infty$; $b_n \to \pm\infty$ $a_n + b_n \to ?$

Es $a_n = n$ $b_n = -n$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n = n - n = 0$ $a_n + b_n \to 0$

② $[0 \cdot \infty]$ $a_n \to 0$ $b_n \to \pm\infty$ $a_n b_n \to ?$

Es: $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = n$ $\Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \to 1$

③ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $a_n, b_n \to \pm\infty$ $\frac{a_n}{b_n} \to ?$

Es: $a_n = n$ $b_n = n$ $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n} = 1 \to 1$

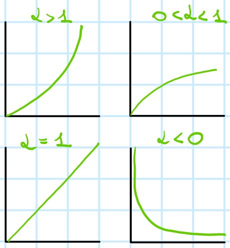
④ $\left[\frac{0}{0}\right]$ $a_n, b_n \to 0$ $\frac{a_n}{b_n} \to ?$

Es: $a_n = \frac{1}{n}$ $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $a_n / b_n = \frac{\frac{1}{\cancel{n}}}{\frac{(-1)^n}{\cancel{n}}} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$ $\nexists$ limite

Proprietà limiti

① $a_n \to a > 0 \wedge \alpha > 0$ $\alpha \neq 1 \Rightarrow a_n^\alpha \to a^\alpha$

Limiti di successioni fondamentali



① Calcolo il variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} n^\alpha$

Prendo $\alpha > 0$; $M > 0$
Provo $\exists\, n_0 : \forall n > n_0$ $n^\alpha > M$
x^α e l'inversa $x^{\frac{1}{\alpha}}$ (monotone; crescenti)
$(0; +\infty) \Rightarrow n^\alpha > M \Leftrightarrow n > \sqrt[\alpha]{M}$

$\Rightarrow n_0 = [\sqrt[\alpha]{M}] + 1$ $n^\alpha > M$ $\forall n > n_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^\alpha = +\infty$ $\forall \alpha > 0$

- $\alpha = 0$
  $n^\alpha = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^\alpha = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

- $\alpha < 0$
  $n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}}$ $-\alpha > 0$ $n^{-\alpha} \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n^{-\alpha}} \to 0^+ \Rightarrow n^\alpha \to 0^+$

Considero: $\lim_{n \to \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0^+ & \alpha < 0 \end{cases}$

② Calcolare il variare $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} a^n$

$a > 1$

Disuguaglinza di Bernulli $(1+x)^n \geq 1 + nx$ $\forall x \geq -1$ $n \in \mathbb{N}$

Pongo $1 + x = a \Rightarrow a^n \geq 1 + n(a-1)$ $\forall a > 1$

$a - 1 > 0$ proprietà di limiti ricavo $1 + n(a-1) \to \infty$

Confronto $a^n \to \infty$

- $a = 1$ $a^n = 1^n = 1$ $a_n \to 1$
- $-1 < a < 1$ $|a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|a|} = b > 1$ $|a^n| = |a|^n = \left|\frac{1}{b}\right|^n = \left|\frac{1}{b^n}\right| \to 0$
  $\Rightarrow a \to 0$
- $a < -1 \to |a| > 1$ poiché $a^n = (-1)^n |a^n|$ e $|a^n| \to \infty$ $\nexists$ limite $\Rightarrow$ a_n non ammette limite

- $a = 0$
  $a^n \to 0$

Conclusione: $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & |a|<1 \\ \nexists & a<-1 \end{cases}$

(3) $a>0$ $a\in\mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$

Criterio rapporto successioni

- a_n successioni a termini positivi
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ regolare

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ con $0\leq \ell<1 \Rightarrow a_n \to 0^+$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ $\ell>1 \Rightarrow a_n \to \infty$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \Rightarrow a_n \to \infty$

Dimostrazione

Poiché $a_n > 0 \Rightarrow a_n$ è regolare corollario permanenza del segno

$a_n \to \begin{cases} 0^+ \\ \ell>0 \\ +\infty \end{cases}$

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$: $0\leq \ell<1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1-\ell}{2} \Rightarrow \exists\, n_0 : \forall n : n_0$ $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = M < 1$

$\forall n > n_0$ $0 < a_{n+1} < M a_n < a_n$

a_n monotona strettamente decrescente

$\lim a_n = \alpha \geq 0 \Rightarrow$ inf limitata

$\forall n > n_0 : a_n < M a_{n-1}$ $0 < a_{n+1} < M a_n < M^2 a_{n-1} < \ldots < M^{n+1} a_0$

$0 < M < 1 \Rightarrow M^{n+1} \to 0^+$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ con $\ell > 1$ $b_n = \frac{1}{a_n} > 0$

calcolo $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_n}{} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$ $\to \frac{b_{n+1}}{b_n} \to \frac{1}{\ell} = m < 1$

$b_n \to 0^+$ Quindi $a_n = \frac{1}{b_n}$

(3) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \to 0$

$b_n = \frac{1}{a_n} = 0 \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} - \frac{n}{a_{n+1}} \to 0^+$

$\hookrightarrow b_n \to 0^+ \Rightarrow a_n = \frac{1}{b_n} \to \infty$

Criterio radice n-esima per successione

$a_n \geq 0$

Sia $\sqrt[n]{a_n}$ successione regolare, seguenti proposizioni

(1) $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$ $0\leq \ell<1 \Rightarrow a_n \to 0^+$

② $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$ con $l > 1 \Rightarrow a_n \to \infty$

③ " $\sqrt[n]{a_n} = \infty \Rightarrow a_n \to \infty$

SUCCESSIONI RICORSIVE

SUCCESSIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE TRAMITE f: a_1 ASSEGNATO $a_{n+1} = f(a_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Numero di nepero

lunedì 18 dicembre 2023 10:50

NUMERO DI NEPERO:

DATA LA SUCCESSIONE $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ AMMETTE LIMITE!

NOTIAMO: $1+\frac{1}{n} \to 1$ SE $n \to \infty$ QUINDI: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1^\infty$

CONSIDERO ORA $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

1. $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\substack{>1 \\ \forall n}} = b_n \Rightarrow a_n < b_n$$

2. $a_{n-1} \leq b_n < b_n \leq b_n < b_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PROVIAMO $a_{n-1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad \left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \quad 1-\frac{1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNULLI: $(1+x)^n \geq 1+nx \; : \; x = \frac{1}{n^2}$

$\Downarrow$

a_n MONOTONA CRESCENTE

b_n " DECRESCENTE

3. a_n SUP. LIM. $\quad b_n$ INF. LIM.

$a_1 \quad a_2 \quad a_n \quad b_n \quad b_2 \quad b_1$

DATO CHE $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b_1 MAGGIORANTE DI $a_n \; \forall n$

a_1 MINORANTE DI $b_n \; \forall n$

4. $\sup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

POICHÉ a_n È MONOTONA CRESCENTE e SUP LIMITATA $\Rightarrow \sup a_n = \lim a_n = a \;\wedge\; \inf b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b$

PROVA $a=b$

$a_n < b_n \Rightarrow \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = b$

ASSURDO: $a < b \Rightarrow b-a > 0$; CALCOLO $b_n - a_n$

$$b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}-1\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{a} \to 0 \quad \Rightarrow \text{ASSURDO!!!}$$

IL LIMITE È IL LIMITE e; ED È DIMOSTRABILE CHE SIA IRRAZIONALE

IL NUMERO e COME LIMITE

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underset{x=-t}{=} \lim_{t\to\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t = \lim \underbrace{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}}_{e} \underbrace{\left(1+\boxed{\frac{1}{t-1}}\right)}_{1} = e$$

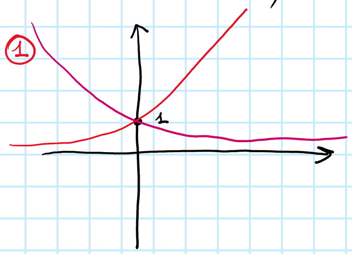
$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b \qquad \lim_{x\to 0} (1+bx)^{\frac{1}{x}} = e^b$$

Logaritmi

martedì 19 dicembre 2023 15:41

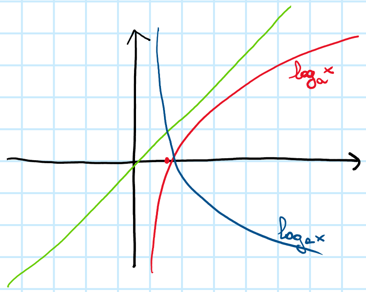
$f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$



$A = \mathbb{R}$ MONOTONA STRETT CRESCENTE INIETTIVA, INVERTIBILE SU $\mathbb{R}$
POSITIVA, ILLIM. SUP.

$A = \mathbb{R}$: MONOTONA. STRETT. CRES. INIETTIVA, INVERTIBILE SU $\mathbb{R}$
POSITIVA, ILLIM. SUP

$f(x) = \log_a(x)$ $\quad y = \log$



$a > 1$
$A = (0, +\infty)$

POSITIVA $x > 1$
NEGATIVA $0 < x < 1$

$0 < a < 1$
$A = (0, +\infty)$

POSITIVA $0 < x < 1$
NEGATIVA $x > 1$

PROPIETÀ LOGORITMI

1. $a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad \log_a a^x = x \quad \forall a \in \mathbb{R}$
2. $\log(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad x_1 > 0, x_2 > 0$
3. $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad x_1 > 0, x_2 > 0$
4. $\log_a (x_1)^\alpha = \alpha \log_a x_1 \qquad x_1 > 0$
5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad x_1 > 0 \quad b > 0 \quad b \neq 1$

CONFRONTRO SUCCESSIONI INFINITE

$\log n, \; n^b \; b > 0, \; a^n, \; n!, \; n^n$

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{\log n}{n^b} = 0 \qquad \forall b > 0$
2. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \qquad \forall b > 0, \forall a > 1$
3. $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \forall a > 1$
4. $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

DIMOSTRAZIONE

1. $\lim \frac{\log n}{n^b} = 0 \quad \forall b > 0$

$$\frac{\log n}{n} = \frac{1}{n} \log = \log n^{\frac{1}{n}} = \log \sqrt[n]{n} \to 0$$

2. $c_n = \frac{n^b}{a^n}$ APPLICO CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)^b}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^b} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a}$$

$a>1 \Rightarrow \frac{1}{a}<1 \Rightarrow c_n \to 0$

3 $d_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = a \cdot \frac{1}{n+1} \to 0\ (<1) \Rightarrow d_n \to 0$$

4 $t_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\ \ n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}<1 \Rightarrow t_n \to 0$$

Confronto tra infiniti

martedì 19 dicembre 2023 16:16

SIAMO a_n e b_n $\Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n}$ $\begin{cases} \pm\infty & a_n \text{ è INFINITO SUPERIORE } b_n \\ 0 & b_n \text{ " " } a_n \\ \ell \neq 0 & a_n \text{ e } b_n \\ \nexists & a_n \text{ e } b_n \text{ SONO INFINITI NON CONFRONTABILI} \end{cases}$

DIGRESSIONE

SI PUÒ DIMOSTRARE $\sin(n)$ NON AMMETTE LIMITE

IN GENERALI:

SE $a>1$ $b>1$ (a^n, b^n INFINITI)

$$\lim \frac{a^n}{b^n} = \lim \left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} 0 & 1<a<b \\ \infty & a>b>1 \\ 1 & \text{SE } a=b \end{cases}$$

SE $a>0$ $b>0$

$$\lim \frac{n^a}{n^b} = \lim n^{a-b} = \begin{cases} 0 & 0<a<b \\ \infty & a>b>0 \\ 1 & a=b \end{cases}$$

SE $a>1$ e $b>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{\frac{\log_a n}{\log_a b}} = \lim \log_a b$$

CONFRONTO TRA INFINITESIMI

a_n b_n

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & a_n \text{ INFINITESIMO ORDINE SUP RISPETTO } b_n \\ \infty & a_n \text{ INFINITESIMO ORDINE RISPETTO } b_n \\ \ell \neq 0 & a_n \text{ e } b_n \text{ INFINITESIMI STESSO ORDINE} \\ \nexists & a_n \text{ e } b_n \text{ INFINITESIMI NON CONFRONTABILI} \end{cases}$$

IN GENERALE

$a>0$ e $b>0$

$$\lim \frac{\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^b}} = \lim \frac{n^b}{n^a} = \lim n^{b-a} = \begin{cases} \infty & b>a>0 \\ 1 & b=a \\ 0 & 0<b<a \end{cases}$$

QUINDI $\frac{1}{n^a}$ e $\frac{1}{n^b}$ $a,b>0$ INFINITESIMI SUPERIORE

INTRODUCIAMO STRUMENTO RACCOGLIE INFINITI INFERIORI INFINITO ASSEGNATO TUTTI GLI

LIMITI NOTEVOLI e SVILUPPI

SE $a_n \to 0$ ALLORA

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ $\qquad \sin(a_n) = a_n + o(a_n)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\tan a_n}{a_n} = 1$ $\qquad \tan(a_n) = a_n + o(a_n)$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(a_n)-1}{a_n} = 1$ $\qquad \cos(a_n) = 1 - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n)$
- $\lim \frac{\arctan(a_n)}{a_n} = 1$ $\qquad \arctan(a_n) = a_n + o(a_n)$

SE $b_n \to b \in \mathbb{R} \Rightarrow$ • $\log_a b_n \to \log_a b$

• $b_n^{\alpha} \to b^{\alpha}$

• $a^{b_n} \to a^{b}$

SE $a_n \to 0$ • $\log_a(1+a_n) \to \log_a(1) = 0$

• $a^{a_n} - 1 \to a^{0} - 1 = 0$

• $(1+a_n)^{\alpha} - 1 \to 0$

$\Downarrow$

QUINDI:

- $\lim \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$ $\qquad \log(1+a_n) = a_n + o(a_n)$
- $\lim \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$ $\qquad e^{a_n} = 1 + a_n + o(a_n)$
- $\lim \frac{a^{a_n}-1}{a_n} = \log_e a$ $\qquad a^{a_n} = 1 + a_n \log a + o(a_n)$
- $\lim \frac{(1+a_n)^{\alpha}-1}{a_n} = \alpha$ $\qquad (1+a_n)^{\alpha} = 1 + \alpha a_n + o(a_n)$

Simboli di Landau

mercoledì 27 dicembre 2023 16:25

o O-PICCOLO

SUCCESSIONI a_n b_n CON b_n NON NULLA

$a_n = o(b_n)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

NON È IMPORTANTE CHE SIA INFINITE O INFINITESIMA

$a_n = o(b_n) \Rightarrow a_n$ TRASCURABILE

PROPIETÀ:

① $\frac{o(a_n)}{a_n} \to 0$

② $a_n = o(1) \Leftrightarrow a_n = \frac{a_n}{1} \to 0$

③ a_n b_n SUCCESSIONI INFINITE (INFINITESIMI)

④ $\lim (a_n + o(a_n)) = \lim a_n \left(1 + \frac{(o(a_n))}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\Rightarrow$ $\lim a_n + o(a_n) \cdot \lim b_n + o(b_n) = \lim a_n b_n$

ISTESSO PER $\div$

⑤ SIA $c \neq 0 \Rightarrow c \cdot o(a_n) = o(a_n)$

$o(a_n \cdot c) = o(a_n)$

⑥ $o(a_n)\, o(b_n) = o(a_n b_n)$ INFATTI $\frac{o(a_n)\, o(b_n)}{a_n b_n} = 0$

⑦ $\lim a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow = l + o(1)$

⑧ SE $a_n = o(b_n) \to o(a_n) + o(b_n) = o(b_n)$

SECONDO SIMBOLO DI LANDAU

$\sim$ ASINTOTICO

DEFINIZIONE: a_n, b_n DEFINITIVAMENTE NON NULLE a_n ASINTOTICA b_n $a_n \sim b_n$ SE: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

OSSERVAZIONE:
- $a_n \sim b_n \Leftrightarrow b_n \sim a_n$
- $a_n \sim a_n$ $\left(\frac{a_n}{a_n} = 1\right)$
- $a_n \sim b_n,\ b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

OSSERVAZIONE $a_n \sim b_n \Rightarrow \exists$ STESSO LIMITE

SE $a_n \sim b_n$ a_n È REGOLARE $\Rightarrow b_n$ REGOLARE STESSO LIMITI a_n

$$a_n \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\boxed{\frac{b_n}{a_n}}}_{1} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

LEGAME TRA $\sim, o$

a_n, b_n DEFINITIVAMENTE NON NULLA

$a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n)$

$\Rightarrow$ $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1 \Leftrightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = 1 + o(1) \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n)$

PROPRIETÀ: SE $a_n \sim b_n$ e $\alpha_n \sim \beta_n$ • $a_n \alpha_n \sim b_n \beta_n$

Proprietà: se $a_n \sim b_n$ e $\alpha_n \sim \beta_n$

- $a_n \alpha_n \sim b_n \beta_n$
- $\frac{a_n}{\alpha_n} \sim \frac{b_n}{\beta_n}$

Altri Simboli di Landau

1. O (superiore)
2. Ω (inferiore)
3. Θ (Superiore & Inferiore)

① a_n, b_n definitivamente non negativo
$\Downarrow$
$a_n = O(b_n)$ se $\exists C > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad 0 \leq a_n \leq C b_n$

② a_n, b_n definitivamente non negativo
$\Downarrow$
$a_n = \Omega(b_n)$ se $\exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad 0 \leq C b_n \leq a_n$

③ a_n, b_n definitivamente non negativo
$\Downarrow$
$a_n = \Theta(b_n)$ se $\exists C, c > 0, \ n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad 0 \leq c b_n \leq a_n \leq C b_n$

Osservazione

$a_n \sim b_n$ definitivamente non negative

$\frac{a_n}{b_n} \to \ell \neq 0 \Rightarrow a_n = \Theta(b_n)$

Riassunto

Siano a_n, b_n def. non neg.

$$a_n = b_n + \Theta(b_n) \longleftrightarrow a_n \sim b_n$$

$$\searrow \quad \swarrow$$

$$a_n = \Theta(b_n)$$

$$a_n = \Omega(b_n) \quad + \quad a_n = O(b_n)$$

Limiti di funzione

- $\lim a_n = a$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$
$\Downarrow$
$\forall U_\varepsilon(a) \ \exists U_{n_0}(+\infty) : \forall n \in U_{n_0}(+\infty) \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$

- $\lim a_n = \infty$ se $\forall M > 0 \ \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow a_n > M$
$\Downarrow$
$\forall U(+\infty) \ \exists U_{n_0}(+\infty) : \forall n \in U_{n_0}(+\infty) \Rightarrow a_n \in U_{n_0}$

- x_0 punto di Accumulazione per A se $\forall U_\varepsilon(x_0) \ \exists \ z \neq x_0$ con $z \in A \cap U(x_0)$

- $+\infty (-\infty)$ accumulazioni per A se $\forall U_a(+\infty) \ (U_a(-\infty)) \ \exists \ z \in A \cap U_a(+\infty)(-\infty)$

Definizione:

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 sia punto di Accumulazione per A

↳ Diciamo il limite $f(x)$ per x tende $x_0 = \ell \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 sia punto di accumulazione per A

$\hookrightarrow$ Diciamo il limite $f(x)$ per x tende $x_0 = \ell \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Intorni: $\forall U_\varepsilon(\ell)$ $\exists U_\delta(x_0)$: $\forall x \in (U_\delta(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$

Definizioni

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto accumulazione A

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ se $\forall M > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > M$

in intorni: $\forall U_M(+\infty)$ $\exists U_\delta(x_0)$: $\forall x \in (U_\delta(x_0) \cap A) \Rightarrow f(x) \in U_M(+\infty)$

Definizione:

$f(x): A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $+\infty$ punto di accumulazione in A

$\lim f(x) = \ell$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ $\forall x > M$, $x \in A$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

in intorni $\forall U_\varepsilon(\ell)$ $\exists U_M(+\infty)$: $\forall x \in U_M(+\infty) \cap A \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$

Definizioni ulteriori

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$ se $\forall U_M(\pm\infty)$ $\exists U_M(+\infty)$: $\forall x \in U_M(\pm\infty) \cap A \Rightarrow f(x) \in U_M(\pm\infty)$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ • $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Limite destro/sinistro

- $\lim f(x) = \ell$ se $\forall U_\varepsilon(\ell)$ $\exists U_\delta(x_0)$: $\forall x \in (U_\delta^\pm(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$ (∞)

Limite eccesso/difetto

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$ se $\forall U_\varepsilon^+(\ell)$ $\exists U_\delta(x_0)$: $\forall x \in (U_\delta(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$ (∞)

Limiti f(x) e limiti a_n

venerdì 29 dicembre 2023 10:04

Legame tra $\lim f(x)$ e $\lim a_n$

Teorema $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, P: $x_0 \in \mathbb{R}$, $+\infty$, $-\infty$ punto di accumulazione A

$\Downarrow$

$\lim_{x \to P} f(x) = \ell$: $\in \mathbb{R}$, $+\infty$, $-\infty$ se e solo se $\forall x_n : x_n \in A,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) = a_n$ è una successione

Allora...

1. Unicità del limite
2. Monotonia, esistenza del limite
3. Teorema permanenza del segno
4. Teorema del confronto
5. Operazioni con i limiti, forme di indecisione
6. Confronto tra infiniti e limiti notevoli

Definizione

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\to x_0^+, x_0^-$) $\Rightarrow$ retta $x = x_0$ **Asintoto verticale**

2. Sia $\pm\infty$ punto di accumulo per A

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$ retta $y = \ell$ **Asintoto orizzontale**

Osservazioni

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulo

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim f(x) = \lim f(x) = \ell$

Limiti funzioni composte

Teorema

Sia $f(x): (a,b) \setminus \{x_0\} = A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ punto di accumulo

Sia $g(x): (a,b) \to \mathbb{R}$

Sia

$\lim f(x) = y_0$ P. di A.

$f(x) \neq y_0$ in $U_\delta(x_0) \cap A$

$\lim g(y) = \ell$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$

Osservazioni

Nel teorema

(a,b) con $(a,+\infty)$ e x_0 con $+\infty$

(a,b) con $(-\infty,b)$ e x_0 con $-\infty$

Nel teorema
(a,b) con $(a,+\infty)$ e x_0 con $+\infty$
(a,b) con $(-\infty,b)$ e x_0 con $-\infty$
y_0 con $\pm\infty$ punto di accumulo per $f(A)$

Funzioni Continue

Definizione: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ P. di A. per A

f si dice continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Osservazione: La continuità in x_0 è squalificata $\Leftrightarrow$ $x_0 \notin$ P. di A.

Definizione: $f(x): A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; f continua in $A \Leftrightarrow$ continua $\forall x : x \in A$

Se $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f è continua in $[a,b]$ se f continua $\forall x : x \in A$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Teorema 1: Siano $f,g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano f,g continue in $x_0 \in A$

$\Rightarrow$ $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g $(g(x) \neq 0)$ sono continue in A

Teorema 2: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in x_0 P. di A. per A
Sia $g: f(A) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in x_0 P. di A. per $f(A)$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ continua in A vale: $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0))$

Teorema 3: Le $f(x)$: x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $|x|$ continue

Definizione limiti di funzione

venerdì 29 dicembre 2023 11:30

Definizione

① f infinita per $x \to p \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ se $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$

② f infinitesima per $x \to p \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ se $\lim_{x\to p} f(x) = 0$

Definizione:

① Siano f e g infinite per $x \to p \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$, f ∞ di grado sup di $g(x) \iff \lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

② Siano f e g infinitesimi per $x \to \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$, f è un infinitesimo di grado sup. e $g \iff \lim_{x\to p} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Simboli di Landau per le funzioni

Definizioni

① $f(x) = o(f(x))$ per $x \to p \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ se $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

② $f(x) \sim g(x)$ per $x \to p \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$ se $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Limiti Notevoli

Sia $\varepsilon(x)$ infinitesima $x \to p \in \mathbb{R}$, $\pm\infty$

- $\lim_{x\to p} \frac{\sin \varepsilon(x)}{\varepsilon(x)} = 1$ $\qquad \sin \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x))$
- $\lim \frac{\tan \varepsilon(x)}{\varepsilon(x)} = 1$ $\qquad \tan \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x))$
- $\lim \frac{\arctan(\varepsilon(x))}{\varepsilon(x)} = 1$ $\qquad \arctan \varepsilon(x) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x))$
- $\lim \frac{\cos(\varepsilon(x)) - 1}{\varepsilon(x)^2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad \cos \varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon(x)^2 + o(\varepsilon(x)^2))$
- $\lim \frac{e^{\varepsilon(x)} - 1}{\varepsilon(x)} = 1$ $\qquad e^{\varepsilon(x)} = \varepsilon(x) + 1 + o(\varepsilon(x))$
- $\lim \frac{\log(1+\varepsilon(x))}{\varepsilon(x)} = 1$ $\qquad \log(1+\varepsilon(x)) = \varepsilon(x) + o(\varepsilon(x))$
- $\lim \frac{(1+\varepsilon(x))^{\alpha} - 1}{\varepsilon(x)} = \alpha$ $\qquad (1+\varepsilon(x))^{\alpha} = 1 + \alpha\,\varepsilon(x) + o(\varepsilon(x))$
- $\lim (1+\varepsilon(x))^{\frac{1}{\varepsilon(x)}} = e$

Osservazione: $e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$

$x \to \infty$ $\quad \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1$

Asintoti Obliqui

se $\lim f(x) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow y = a$ orizzontale

In gerale: $f(x) - mx + q \to 0$ $\quad x \to \infty$

$f(x) - (mx + q) = o(1)$ $\quad x \to p$

$f(x) = mx + q + o(1)$ $\quad x \to \infty$

Definizione

Sia f definita in $U_{(+\infty)}/_{(-\infty)}$ $y=mx+q$ Asintoto obliquo di $f(x)_{x\to\pm\infty}$ se $f(x)=mx+q+\Theta(1)$ $x\to\pm\infty$

Osservazione

Sia $f(x)=mx+q+\Theta(1)$ $x\to\pm\infty$

$$\left.\begin{aligned} \hookrightarrow \frac{f(x)}{x} = mx+q+\Theta(1) &\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ f(x)-mx=q+\Theta(1) &\Rightarrow \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx)=q \end{aligned}\right\}$$

Teorema

Sia f definita in $U_{\pm\infty}$ se $\exists$

$$\left.\begin{aligned} &① \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ &② \quad \lim_{x\to\infty} (f(x)-mx)=q \end{aligned}\right] \Rightarrow y=mx+q \text{ Asintoto Obliquo}$$

Disconinuità

martedì 2 gennaio 2024 16:59

SIA x_0 UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A IN f NON CONTINUA

① DISCONTINUITÀ ELIMINABILE:

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$; $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

ELIMINAZIONE: SE RIDUCIAMO f A $\bar{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases} \Rightarrow \bar{f}$ È CONTINUA

② DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$; $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$ MA $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-}$

③ DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

UNO O PIÙ TRA: $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$; $\nexists$ $\qquad f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

DEFINIZIONE: SIA $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SIA x_0 PUNTO DI ACCUMULO PER A SE $\lim_{x \to x_0^{+/-}} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ CONTINUA IN x_0 DA DX/SX

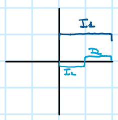
OSSERVAZIONE: $f(x)$ È CONTINUA IN $x_0 \Leftrightarrow$ CONTINUA DA DX/SX

DEFINIZIONE: $f(x): A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A CON $x_0 \notin A$
SE $\exists$ FINITO $\lim f(x) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ PROLUNGATA PER CONTINUITÀ

TEOREMA DI BOLZANO (DEGLI ZERI)

- SIA $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- SIA f CONTINUA IN $[a,b]$ $\quad \Rightarrow \exists$ ALMENO UN $x_0 : f(x) = 0$
- SIA $f(a) f(b) < 0$

DIMOSTRAZIONE: SUPPONGO $f(a) < 0$; $f(b) > 0$; $I_1 = [a,b] \Rightarrow |I_1| = b-a$; $c_1 = \frac{b+a}{2}$



$f(c_1) = \begin{cases} = 0 & \text{ABBIAMO TROVATO } x_0 \\ > 0 & I_2 = [a_2, b_2] = [a, c_1] \ (f(a_2) f(b_2) < 0) \\ < 0 & I_2 = [a_2, b_2] = [c_1, b] \ (f(a_2) f(b_2) < 0) \end{cases}$

$I_2 = \frac{b-a}{2}$ SUPPONGO $f(c_1) > 0 \Rightarrow I_2 = [a_2, b_2] = [a, c_1]$

CONSIDERO $C_2 = \frac{a+c_1}{2} \Rightarrow f(c_2) \begin{cases} = 0 & \text{TROVATO } x_0 \\ > 0 & I_3 = [a_3, b_3] = [a, c_2] \\ < 0 & I_3 = [a_3, b_3] = [c_2, c_1] \end{cases}$

SE LA PROCEDURA SI ARRESTA IN $m_0 \Rightarrow m_0 = x_0$
ELSE c_n, a_n, b_n:

- $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_n| = \frac{b-a}{2^{n-1}}$
- $a \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq b$
- a_n; b_n MONOTONA CRESCENTE $\quad \Rightarrow \exists \lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}$; $\lim b_n = \beta \in \mathbb{R}$ $\quad [a_n < b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta$
- $f(a_n) < 0$; $f(b_n) > 0 \quad \forall n$

INFATTI:

$\beta - \alpha = \lim_{n \to \infty} b_n - \lim_{n \to \infty} a_n = \lim (b_n - a_n) = \lim I_n = \lim \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$

$x_0 = \beta - \alpha \qquad x_0 \in [a,b] \quad f$ CONTINUA $[a,b] \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(x_0) = \lim f(a_n)$

SE $f(a_n) < 0 \Rightarrow \lim f(a_n) = f(x_0) \leq 0$
SE $f(b_n) > 0 \Rightarrow \lim f(b_n) = f(x_0) \geq 0$ $\quad \Rightarrow \begin{matrix} f(x_0) \leq 0 \\ f(x_0) \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow f(x_0) = 0$

OSSERVAZIONE: SE $f(a_n) > 0$ E $f(b_n) < 0 \Rightarrow$ DIMOSTRAZIONE ANALOGA MA CON $-f$

TEOREMI DI DARBOUX: SIA $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
SIA f CONTINUA IN $[a,b]$
$\hookrightarrow f$ ASSUME OGNI VALORE TRA $f(a)$ E $f(b)$

Teoremi di Darboux:
Sia $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Sia f continua in $[a,b]$
$\Rightarrow f$ assume ogni valore tra $f(a)$ e $f(b)$

Dimostrazioni

Caso 1: $f(a) = f(b) \Rightarrow$ l'unico valore $f(a)$
Caso 2: $f(a) \neq f(b) \Rightarrow$ $f(a) < f(b)$; $f(a) > f(b)$

- $f(a) < f(b)$; $y_0 : f(a) < y_0 < f(b)$
- $g(b) = f(b) - y_0 > 0$ e $g(a) = f(a) - y_0 < 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$

Corollario:

Sia f continua su $[a,b]$ siano $x_1, x_2 \in [a,b]$ con $x_1 \neq x_2$ f tutti i val $f(x_1)$ e $f(x_2)$

Digressioni sulle successioni

Se a_n è strettamente crescente $a_k \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$

Teorema:

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ ($\in \mathbb{R}$; $\pm\infty$) $\Rightarrow$ sotto successioni a_{n_k} vale $\lim a_{n_k} = l$

Dimostrazione:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall n > k_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$
$\Rightarrow k > k_0 \Rightarrow n_k \geq k > k_0 \Rightarrow |a_{n_k} - l| < \varepsilon \ \forall k > k_0$
$\Rightarrow a_{n_k} \to l$ per $k \to \infty$

Teorema Bolzano-Weiestrass

Sia a_n successione limitata $\Rightarrow$ sottosuccessione convergente

$a_n = (-1)^n \begin{cases} a_{2n} = 1 \to 1 \\ a_{2n+1} = -1 \to -1 \end{cases}$

Teorema di Weistrass

Sia $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Sia f continua in $[a,b]$
$\Rightarrow f$ ha max e min assoluti in $[a,b]$

$\exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = \min f(x)$, $f(x_2) = \max f(x)$

Posto $m = f(x_1)$ $M = f(x_2)$ $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione

$\sup f(x) = M$ ($+\infty$ 1 ; $\in \mathbb{R}$ 2)

1. Se $M = +\infty \Rightarrow A = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ illimitato sup
quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $A > n$ ovvero $\exists x_n \in [a,b] : f(x_n) > n$; $\to \lim_{x\to\infty} f(x_n) = +\infty$

2. Se $M \in \mathbb{R} \Rightarrow M$ smallest of maggioranti di A. $\forall n \in \mathbb{N}$ se considero $M - \frac{1}{n} < M \Rightarrow \exists$ in A $M - \frac{1}{n} < x < M$
$\exists x_n \in A : M - \frac{1}{n} < f(x_n) < M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x_n) = M$

Consideriamo x_n
Visto che $x_n \in [a,b] \Rightarrow x_n$ è limitata
Bolzano-Weistress $\Rightarrow \exists$ sottosuccessione convergente $x_n : \lim_{x\to\infty} f(x_n) = x_0$

$a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow a \leq x_0 \leq b$
Data f continua in $[a,b] \Rightarrow x_0 \in [a,b]$

$M = \sup f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim f(x_{n_k}) = f(x_0) \Rightarrow M \in \mathbb{R}$
$M = \sup f(x) = \max f(x) = f(x_0)$

$M = \sup f(x) = \lim_{m\to\infty} f(x) = \lim f(x_{mk}) = f(x_0) \Rightarrow M \in \mathbb{R}$

$M = \sup f(x) = \text{MAX} f(x) = f(x_0)$

Corollario Teorema Weiestrass

Se f è continua $[a,b] \Rightarrow f([a,b]) = [m,M] = [\min f(x), \text{MAX} f(x)]$

Dimostrazione:

Teorema Weistress $\Rightarrow \min f(x) \leq f(x) \leq \max f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$\forall y \in [\min f(x), \max f(x)] \ \exists x : f(x) = y$

Teoremi di Continuità / Iniettività / Monotonia / Invertibilità

① Se $f(x)$ è monotona in $[a,b]$, non costante $\Rightarrow f(x)$ continua in $[a,b] \Leftrightarrow f([a,b]) < \begin{matrix} f(a); f(b) \\ f(b); f(a) \end{matrix}$

Dimostrazione

- Se $f(x)$ continua in $[a,b]$ Weistress $\Rightarrow f[a,b] = f = [\min f(x), \max f(x)] \Rightarrow \min f(x) = f(a)$; $\max f(x) = f(b)$
- Sia f monotona $\nearrow$ in $[a,b]$; $x_0 \in (a,b)$ risultati dei lim di f monotone e limitate $\Rightarrow \exists \lim f(x) = l_1$; $\lim f(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ & $l_1 \leq x_0 \leq l_2$

$l_1 = l_2 \Rightarrow f$ è continua

$l_1 < l_2 \Rightarrow f$ non assume val $\in (l_1, l_2)$: val $\neq f(x)$

Assurdo $f([a,b]) = [f(a); f(b)] \supseteq [l_1; l_2] \Rightarrow l_1 = l_2 \Rightarrow f(x)$ continua $\forall x_0 \in (a,b)$

② Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$

f è iniettiva in $[a,b] \Leftrightarrow f$ strettamente monotona in $[a,b]$

Dimostrazione

$\Leftarrow$ Vedi ①

$\Rightarrow$ Dati $f(a); f(b)$. f iniettiva in $[a,b] \Rightarrow f(a) \neq f(b) \Rightarrow < \begin{matrix} f(a) < f(b) \\ f(a) > f(b) \end{matrix}$

$f(a) < f(b)$: prendo $x_1 \in [a,b]$: $a < x_1 < b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \neq f(x_1)$ Iniettiva

- Per assurdo $f(a) < f(b) < f(x_1)$
- Poiché f continua $[a, x_1] \subset [a,b] \Rightarrow \exists \bar{x} \in [a, x_1]$: $f(\bar{x}) = f(b)$

ma $\bar{x} = b$ Assurdo per iniettività

$\Downarrow$

non vale $f(x_1) < f(a) < f(b) \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)$

Fisso $x_2 \in [a,b]$: $x_1 < x_2 < b$

Analogo $f(x_1) < f(x_2) < b$

Concludo: $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$: $x_1 < x_2$ (Sia f mono. stre. cre & continua) $f(x_1) < f(x_2)$

③
- Sia f mono. stret. cre. in $[a,b]$
- Sia f continua in $[a,b]$

$\Downarrow$

$f^{-1}[a,b]$ è continua

Dimostrazione

Poiché f è mono. stret. crescente $\Rightarrow$ Invertibile

Quindi $f^{-1}: f[f(a); f(b)] = [a,b]$

Quindi f^{-1} assume tutti i valori in $[a,b]$ $\quad f^{-1}(f(a)) = a \quad f^{-1}(f(b)) = b$

visto ① $\Rightarrow f^{-1}$ è continua

QUINDI f^{-1} ASSUME TUTTI I VALORI IN $[a,b]$ $f^{-1}(f(a))=a$ $f^{-1}(f(b))=b$

VISTO ① $\Rightarrow f^{-1}$ È CONTINUA

Derivate

giovedì 4 gennaio 2024 19:46

Osservazione Teorema di Weiestress:

Se f è continua in $[a,b] \Rightarrow f$ ammette max/min

Se f è continua su I (aperto) $\Rightarrow f$ ammette max/min? NO!

Introduzione derivate

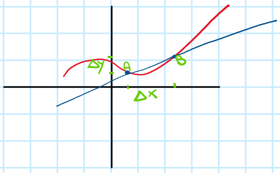
Rapporto incrementale

Sia $f:(a,b)\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; sia $x_0\in(a,b)$
Sia $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sufficente piccolo: $x_0+h\in(a,b)$

Rapporto incrementale in x_0 con incremento $h\neq 0$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=m$$

$A=(x_0,f(x_0))$
$B=(x_0+h,f(x_0+h))$



Cosa succede $h\to 0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\begin{cases}\exists \text{ finito} \Rightarrow \text{coefficente tan } f(x_0)\\ \nexists\\ \exists \text{ infinito}\end{cases}$$

Derivata in un punto: Definizione

Sia $f:(a,b)\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; sia $x_0\in(a,b)$

f derivabile x_0 se esiste

$$\left.\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}\right]$$ derivata di $f(x)$

$f'(x_0)$ $\quad \frac{df(x)}{dx}$ $\quad Df(x_0)$

Significato geometro

Se f è derivabile in x_0 $\exists f'(x_0)\in\mathbb{R} \Rightarrow$ il grafico f ammette in $(x_0,f(x_0))$ retta tangente di equazione $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Continuità e derivabilità

Teorema:

Sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$
Se f è derivabile $x_0 \Rightarrow f$ continua x_0

Dimostrazione:

Prova: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ $\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim[f(x)-f(x_0)+f(x_0)]=\lim\Big[\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\underbrace{(x-x_0)}_{0}+f(x_0)\Big]=f(x_0)$

Definizione

Sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in(a,b)$
si dice ammette dx/sx se $\exists$ finito: $\lim_{x\to x_0^{\pm}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Osservazione: f derivabile $x_0\in(a,b) \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$ e $f'(x_0)$ e sono uguali

Definizione:

① Sia $f:[a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f è derivabile in a se $\exists f'(a)$

② Sia $f:(a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f è derivabile in b se $f'_-(b)$

③

① Sia $f:[a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f è derivabile in a se $\exists\, f'_+(a)$

② Sia $f:(a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f è derivabile in b se $f'_-(b)$

③ Sia $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f è derivabile $\forall x\in I$

Definizione:

Sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $I=(a,b)$
Sia $x_0\in I$; x_0 punto a tangente se $\lim \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$

Definizione:

Sia $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x_0\in A$

① se $\exists\, f'_{+}(x_0)$ e $f'_{-}(x_0)$ con $1\neq 2$ $\Rightarrow$ Punto Angoloso

② Se $\exists\, f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ e $\lim_{h\to 0^{\pm}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty \Rightarrow x_0$ punto Cuspidale

Definizione [f derivata]

Sia $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, A unione di intervalli

$f': A'\subseteq A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad A'=\{x_0\in A: f(x_0) \text{ derivabile } x_0\}$

$f': x\to f'(x)$ $\quad\forall x\in A'$

$f(x)$	A	$f'(x)$	A'
c	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^a	dipende	ax^{a-1}	dipende
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$	$a^x\log a$	$\mathbb{R}$
$\log x$	$(0,\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\log_a x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$
$\arcsin(x)$	$[-1;1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;1)$
$\arccos(x)$	$[-1;1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;1)$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Operazioni con le derivate

① $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
② $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$
③ $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

④ $(f/g)'(x)=\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Derivate Funzioni Composte

Sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$

Sia f derivabile x_0, sia f non costante in $U(x_0)$

Sia $g: f((a,b))\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g derivabile x_0 vale: $(g\circ f)'(x)=g'(f(x_0))\,f'(x_0)$

Proprietà legate alla derivabilità

Teorema: [I formula incremento finito]

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sia $x_0\in(a,b)$

Se f derivabile in $x_0 \Rightarrow$ vale $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\Theta(x-x_0)$ $\quad x\to x_0$

Dimostrazione

f è derivabile in $x_0 \Rightarrow \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\Theta(1)\quad x\to x_0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)=f'(x_0)+\Theta(x-x_0)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=f'(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\Theta(x-x_0)$

Teorema:

Sia f continua in $[a,b]$

f è iniettiva su $[a,b]\Leftrightarrow f$ strettamente monotona su $[a,b]$

Teorema derivabile di f^{-1}

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Sia f continua e invertibile su $[a,b]$

Sia g continua, invertibile su $[a,b]$

Sia g derivabile in $x_0\in[a,b]$ con $f(x_0)\neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ derivabile in $y_0=f(x_0)$ e vale

$$f^{-1}(y_0)=\frac{1}{f(x_0)}=\frac{1}{f(f^{-1}(y_0))}\qquad y_0=f(x_0)\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(y_0)$$

Dimostrazione:

f è invertibile su $[a,b]\Rightarrow f$ è iniettiva su $[a,b]$. f è strettamente monotona

visto che f è continua su $[a,b]$ anche f^{-1} è continua su $[f(a),f(b)]$

considero x_0 $\quad k=f(x_0+h)-f(x_0)\Rightarrow$ x_0 $\quad f(x_0)=y_0$ $\qquad f^{-1}(y_0)=x_0$

x_0+h $\quad f(x_0+h)=f(x_0)+f(x_0+h)-f(x_0)=y_0+k$ $\qquad f^{-1}(y_0+k)=x_0+h$

si osserva che $h\neq 0\Leftrightarrow f(x_0+h)-f(x_0)=k\neq 0$ $\quad f$ mon. str. cre.

$k\to 0\Rightarrow h=x_0+h-x_0=f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)\to 0$

$$\lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+k)-f^{-1}(y_0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)-x_0}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0)+h-f(x_0)}{h}}=\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}\quad \exists (f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Osservazione

Data f continua, invertibile in $[a,b]$ f^{-1} definita su $[f(a),f(b)]$
$f(b),f(a)$

f derivabile $f'(x)\neq 0\Rightarrow f^{-1}$ è derivabile $y=f(x)$

$(f^{-1}\circ f)(x)=x\Rightarrow (f^{-1}\circ f)'(x)=1$

Funzione composte $(f^{-1})'\,f(x)\,f'(x)=1\Rightarrow (f^{-1})'_y\,f'(x)=1\Rightarrow f^{-1\prime}(y)=\frac{1}{f'(x)}$

Teorema:

Sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$

Sia f continua x_0, f derivabile in $(a,b)\setminus\{x_0\}$

Se $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x)\Rightarrow\exists\lim\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quindi $\lim_{x\to x_0} f'(x_0)=l\Rightarrow\exists f'(x_0)=l\in\mathbb{R}$

Osservazione

Se f continua in x_0 Se $\exists$ l $f'(x)$ $l\in\mathbb{R}$

OSSERVAZIONE

SE f CONTINUA IN x_0, SE $\exists \lim f'(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f DERIVABILE x_0 MA $f'(x_0)$ NON CONTINUA x_0

DERIVATE SUCCESSIVE

SIA $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ A UNIONE DI INTERVALLO, CONSIDERIAMO $f': A' \subset A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f'': A'' \subseteq A' \subseteq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f''(x): A'' = \{x \in A' : \exists f''(x)\}$ DERIVATA 2° DI x

f^{k} = DERIVATA K-ESIMA DI $f(x)$: $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Teoremi derivate

venerdì 5 gennaio 2024 15:16

Teorema degli zeri [Corollario 1]

Sia $f:(-\infty;+\infty)\to\mathbb{R}$ sia f continua in $(-\infty;+\infty)$

Se $\exists \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ e hanno discorde $(\ell \gtrless 0, \pm\infty, 0^{\pm}) \Rightarrow \exists\, x_0 \in (-\infty,+\infty): f(x_0)=0$

uno sopra l'altro sotto

Dimostrazione

- Se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M_1>0: \forall x>M_1 \Rightarrow \alpha-\varepsilon<f(x)<\alpha+\varepsilon$

  Scelgo $\varepsilon=\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}<f(x)<\frac{3\alpha}{2}\ \forall x>M_1$ in particolare $f(M_1)>\frac{\alpha}{2}>0$

- Se $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\beta \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M_2>0: \forall x<-M_2 \Rightarrow \beta-\varepsilon<f(x)<\beta+\varepsilon$

  Scelgo $\varepsilon=-\frac{\beta}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\beta<f(x)<\frac{\beta}{2}\quad \forall x<-M_2$

  Ergo su $[-M_2;M_1]\subseteq\mathbb{R}$ f è continua con $f(-M_2)<0 \wedge f(M_1)>0$

  $\Downarrow$ $\exists x_0: -M_2<x<M_1 : f(x)=0$

Teorema degli zeri [Corollario 2]

Sia $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad \exists \lim_{x\to a} f(x) \wedge \lim_{x\to b} f(x)$ e siano di segno discorde

$\Downarrow$

$\exists\, x_0 \in (a,b): f(x_0)=0$

Conclusione

Sia $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. I (α,β), f continua su I

Se $\exists U(\alpha)$ e $U(\beta)$: $f(x)>0\ \forall x\in U(\alpha)\cap I$ $f(x)<0\ \forall x\in U(\beta)\cap I$

$\Downarrow$ $\exists x_0\in I: f(x_0)=0$

Definizione Punti Massimo/Minimo

Sia $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$

x_0 si dice massimo/minimo in I se $\exists\, U_\delta(x_0)=(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

massimo

$f(x)\le f(x_0)\ \forall x\in U_\delta(x_0)\cap I$

$f(x)\ge f(x_0)\ \forall x\in U_\delta(x_0)\cap I$

Teorema di Fermat

Sia $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$ punto max/min per f in I; sia f derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

Dimostrazione

Sia $x_0\in I$ e minimo per $f \Rightarrow \exists\delta>0: (x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq I$ vale $f(x)\ge f(x_0)\ \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Downarrow$

$f(x)-f(x_0)\ge 0\ \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

Considero

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \ge 0 & x>x_0 \quad \forall x\in(x_0, x_0+\delta) \\ \le 0 & x<x_0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0) \end{cases}$$

Considero

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \geq 0 & x>x_0 \quad \forall x\in(x_0, x+\delta) \\ \leq 0 & x<x_0 \quad \forall x\in(x_0-\delta; x_0) \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\geq 0 \quad \Big| \quad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x)\leq 0$$

Ma poiché f derivabile in x_0 $f'(x_0)_+ = f'_-(x_0) = 0$

Osservazione

- Se in x_0 non è interno no more valid
- Se f è derivabile in x_0 $f'(x_0)=0$ non è detto che x_0 sia Max/Min

Teorema di Rolle

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ derivabile in (a,b) sia $f(a)=f(b)$

$\hookrightarrow \exists\, x_0\in(a,b): f'(x_0)=0$

Dimostrazione:

1. f sia costante $\Rightarrow f(x)=c \quad \forall x\in[a,b]$
$\Downarrow$
$f'(x)=0 \quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow$ Check out

2. f non costante: Per Weierstress $\exists\, x_0, x_1 \in[a,b]: f(x_0)=M \quad f(x_1)=m \wedge$ non sono $(a \vee b)$
Supponiamo $x_0\in(a,b)$
Ma x_0 max e anche relativo | inoltre f derivabile $\forall x\in(a,b) \Rightarrow \exists\, x_0 : f'(x_0)=0$

Teorema di Lagrange

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$ f derivabile su $(a,b) \Longrightarrow \exists\, x_0\in(a,b): f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ovvero $f(b-a)=f'(x)(b-a)$

Osservazione:

Retta che passa $(a, f(a))$ e $(b, f(b)) \Rightarrow m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dimostrazione

- $g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$
- $g(x)$ continua in $[a,b]$
- $g(x)$ derivabile in (a,b)

$$\left.\begin{aligned} g(a)&=f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)\right] \\ g(b)&=f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(a)=g(b)$$

g teorema di Rolle $\Rightarrow \exists\, x_0\in(a,b): g'(x)=0$

$$g'(x)=f'(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Seconda formula incremento finito

Data f derivabile $U(x_0)=(x_0-\delta; x_0+\delta)$ $\delta>0$

$\Downarrow$

$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow \exists\, z : f'(z)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x)-f(x_0)=f'(z)(x-x_0) \quad z\in \begin{cases} x_0, x & x>x_0 \\ x_0, x & x<x_0 \end{cases}$

$$\Downarrow$$
$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow \exists z: f'(z)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x)-f(x_0)=f'(z)(x-x_0)$ $\quad z\in \begin{cases} x_0,x & x>x_0 \\ x_0,x & x<x_0\end{cases}$

$f(x)=f(x_0)+f'(z)(x-x_0)$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\theta(x-x_0)$

GENERALIZZAZIONE TEOREMA

TEOREMA DI CAUCHY

SIAMO $f,g:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f,g IN $[a,b]$ DERIVABILI (a,b) SIA $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b): \frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

OSSERVAZIONE: $g(x)=x$ TEOREMA LAGRANGE

DIMOSTRAZIONE: $h(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g(x)-g(a)]$

PER TEOREMA DI ROLLE $\exists x_0\in(a,b): g'(x_0)=0$

CONTRO IPOTESI $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$

$\Downarrow$

$g(b)-g(a)\neq 0$ $\quad h$ CONTINUA IN $[a,b]$ h DERIVABILE (a,b)

$h(b)=f(b)-[f(a)+f(b)-f(a)]=0$

$h(a)=f(a)-[f(a)+0]=0$ $\quad \Rightarrow h(b)=h(a)$

APPLICANDO ROLLE $h \Rightarrow \exists x_0\in(a,b): h'(x_0)=0$

$h'(x)=f'(x)-[0+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)]$ $\quad h'(x_0)=0$

x_0: $\quad f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0) \Rightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Teoremi parte 2

venerdì 5 gennaio 2024 18:31

Conseguenze di Lagrange

Teorema ①

f continua $[a,b]$; f derivabile (a,b), $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b) \Rightarrow f(x)=c,\ \forall x\in[a,b]$

Osservazione: $f(x)=c\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow f'(x)=0\ \forall x\in[a,b]$

Teorema ②

Sia f e g continua $[a,b]$ / derivabile su (a,b)
Sia $f'(x)=g'(x)\ \forall x\in(a,b)$

$\hookrightarrow f(x)=g(x)+c\ \forall x\in[a,b]$

Dimostrazione

Consideriamo $h(x)=f(x)-g(x)$

$\hookrightarrow h(x)$ continuo per $[a,b]$; $h(x)$ derivabile (a,b)

Inoltra $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$

Dal teorema ① $\Rightarrow h(x)=c\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow f(x)-g(x)=c\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow f(x)=g(x)+c\ \forall x\in[a,b]$

Teorema ③

Sia f continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b)

① $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$ mon. cres. (a,b)
② $f'(x)\leq 0\ \forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$ " decre
③ $f'(x)>0\ \forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$ " cres stret
④ $f'(x)<0\ \forall x\in(a,b) \Leftrightarrow f(x)$ " decres "

Dimostrazione

① • Sia $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b)$
Considero $x_1; x_2\in[a,b]$. $x_1<x_2$
Lagrange: $[x_1,x_2] \Rightarrow \exists z\in(x_1,x_2):\ f'(z)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$ $\quad x_2-x_1>0 \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\geq 0 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$

• Sia f mono. cres in $[a,b]$ fisso $x_0\in(a,b)$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ < se $x>x_0 \Rightarrow f(x)\geq f(x_0)$; se $x<x_0 \Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$

Teorema ④

Sia f continua su $[a,b]$, derivabile su (a,b)
Sia g derivabile 2 volte su $[a,b]$
$\Downarrow$

① f è convessa in $[a,b] \Leftrightarrow f''(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b)$

② f è concava in $[a,b] \Leftrightarrow f''(x)\leq 0\ \forall x\in(a,b)$

Osservazione

- Se $f''(x) \gtrless 0$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x)$ mono. cre./dre. in $[a,b]$
- Sia f derivabile in $[a,b] \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a,b)$

① $f'(x) \geq 0$ in $[a, x_0)$ e $f'(x) \leq 0$ in $(x_0, b] \Rightarrow x_0$ max

② $f'(x) \leq 0$ in $[a, x_0)$ e $f'(x) > 0$ in $(x_0, b] \Rightarrow x_0$ min

Definizione

Sia f continua $\wedge$ derivabile in $[a,b]$; derivabile 2 volte in $[a,b] \setminus \{x_0\}$

Se $f''(x) \geq 0 (\leq 0)$ in $[a, x_0)$
$f''(x) \leq 0 (\geq 0)$ in $(a, x_0]$ $\Rightarrow x_0$ p. di flesso

Se $f''(x) = 0 \Rightarrow x_0$ punto di flesso
Se $f'(x) = 0 \Rightarrow x_0$ " obliquo

Osservazione

① Se f derivabile $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$ punto estremante

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & x \in [a, x_0) \\ < 0 & x \in (x_0, b] \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0$$

② Se f derivabile 2 volte in $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$ punto di flesso

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & x \in [a, x_0) \\ < 0 & x \in (x_0, b] \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0$$

De l'Hopital

venerdì 5 gennaio 2024 21:06

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

$f, g : [a,b] \setminus \{x_0\} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$, f, g DERIVABILE $[a,b] \setminus \{x_0\}$

SIANO $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

$g'(x) \neq 0$ IN $[a,b] \setminus \{x_0\}$ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

OSSERVAZIONE:

1. L'ENUNCIATO VALE ANCHE SE $x \to x_0^+ / x_0^- / \pm\infty$
2. L'ENUNCIATO VALE PER $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

DIMOSTRAZIONE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ LA CONSIDERA IL PROLUNGAMENTO f e g in x_0

ABUSO DI NOTAZIONE IN f e g IN MODO CHE $f(x_0) = 0$ e $g(x) = 0$

↳ f e g CONTINUE IN $[a, x_0)(x_0, b]$ DERIVABILE IN $(a, x_0)(x_0, b)$

$f(x)$ SI ANNULLA IN $[a,b] \setminus \{x_0\}$ INFATTI SE $\exists x_1 \in [a,b] \setminus \{x_0\} : g(x_1) = 0 \Rightarrow$ IN $[x_1, x_0]([x_0, x_1])$
$g(x_0) = g(x_1) = 0$ TEOREMA DI ROLLE $\exists z \in (x_1, x_0)(x_0, x_1)$ $g'(z) = 0$

IMPOSSIBILE: $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, x_0)$

SULL'INTERVALLO $[x, x_0]([x_0, x])$ SODDISFA CAUCHY

$\exists$ $T = t(x)$ $t \in (x, x_0)$ $(t \in (x_0, x))$: $\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ $f(x_0) = g(x_0)$

LIMITE $x \to x_0^-$ $(x \to x_0^+)$
OSSERVIAMO $x \to x_0$ $t \to x_0^-$ $(t \to x_0^+)$

$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ ANALOGAMENTE $x \to x_0^+$: $\lim_{t \to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}$

OSSERVAZIONE

SI CALCOLA IL RAPPORTO DELLE DERIVATE, NON DERIVATA RAPPORTO

N.B. NON È LA CURA A TUTTI I MALI

TEOREMA:

SIA $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, SIA $x_0 \in (a,b)$
SIA f CONTINUA IN x_0, DERIVABILE IN $(a,b) \setminus \{x_0\}$
SE $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ E SONO UGUALI

QUINDI SE $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \Rightarrow \exists f'(x_0) = \ell$

DIMOSTRAZIONE:

RAPPORTO INCREMENTALE IN x_0: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $f(x) \to f(x_0)$

f È CONTINUA IN $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \to 0$, $x \to x_0$ $f(x) - f(x_0)$ $x - x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \ell = \exists f'(x_0) = \ell$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{1} = l = \exists f'(x_0) = l$

PROBLEMA: APPROSSIMARE U_{x_0} DELLE $f(x)$: SIANO TRASCENDENTI $[e^x, \sin x, \cos x, \dots]$

INCREMENTO FINITO: ① $f(x)$ DERIVABILE $x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \theta(x-x_0)$

② $f(x)$ DERIVABILE $U(x_0) \Rightarrow \exists\, z \in (x, x_0)[x, x_0]: f(x) = f(x_0) + f'(z)(x-x_0)$

f IN $U(x_0)$ POLINOMIO I CONSIDERO IL I° CASO: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \theta(x-x_0)$

CONSIDERO: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow P_1'(x_0) = f'(x_0)$

$P_1(x_0) = f(x_0) \quad P_1'(x_0) = f'(x_0)$

INTRODUCIAMO $R_1(x) = f(x) - P_1(x) \Rightarrow R_1(x) = \theta(x-x_0)$ OVVERO $\frac{R_1(x)}{x-x_0} \to 0$ PER $x \to x_0$

PRIMA FORMULA $\to f(x) = P_1(x) + R_1(x) : R_1(x) = \theta(x-x_0)$

GENERALIZZO IN $U(x_0)$ $P_n(x)$ DI GRADO: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ SODDISFI: $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \to R_n(x) = \theta(x-x_0)^n$

INTRODUCO IPOTESI IN $f\ U(x_0)$: f DERIVABILE n VOLTE

Teorema di Taylor

sabato 6 gennaio 2024 16:27

Polinomio di Taylor

Centrato in x_0, grado m, associato a f: $P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{m}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{m}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{m}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow P_m(x_0) = f(x_0) \;\Big|\; P'_m(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow P^{s}_m(x) = \sum_{k=s}^{m} \frac{f^{k}(x_0)}{(k-s)!}(x-x_0)^{k-s} = f^{s}(x_0)$$

Quindi Taylor e $f(x_0)$ coincidono in x_0

Teorema:

- Sia f derivabile m volte in x_0 : $m \in \mathbb{N}$
- Sia P_m il polinomio f centrato in x_0 di grado m

$\Downarrow$

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) \text{ dove } P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0) \;\wedge\; R_m(x) = \theta(x-x_0)^m \quad x \to x_0$$

Ovvero

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0) + \theta(x-x_0)^k \Rightarrow x \to x_0$$

Dimostrazione

$R_m(x) = f(x) - P_m(x) \quad : m \in \mathbb{N}$

Dimostro $R_m(x) = \theta((x-x_0)^m)$ $x \to x_0$: $\lim_{x \to x_0} \frac{R_m(x)}{(x-x_0)} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_m(x)}{(x-x_0)} = \lim \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}}{m(x-x_0)} = \lim \frac{f'(x) - P'_m(x)}{m(x-x_0)^{m-1}} = \dots = \frac{1}{m!}\left(f^{m}(x_0) - f^{m}(x_0)\right) = 0$$

Osservazione:

$f(x_0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{m}(x_0)}{k!}(x-x_0)^m + \theta(x-x_0)^m$ per $x \to x_0$ — Formula di Taylor

$R(x) = f(x) - P_m(x) = \theta((x-x_0)^m)$ per $x \to x_0$ — Resto di Peano

Se $x_0 = 0 \Rightarrow$ la formula si chiama Formula di McLaurie

[Fo]rmula di Taylor di alcune funzioni elementari

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \theta(x^m) \quad x \to 0$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \theta(x^{2m+1})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \theta(2^{2m+1})$
4. $\tan x = x \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \theta(x^6)$
5. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \theta(2^{2m+2})$
6. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{m+1}\frac{x^m}{m}$

6 BIS. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^m}{m} + \theta(x^m)$

7. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{m}x^m + \theta(x^m)$

7 BIS. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \theta(x^3)$

8. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^m + \theta(x^m)$

8 BIS. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^m x^m + \theta(x^m)$

9. $Sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \theta(x^{2m+1})$
10. $Ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2m}}{2m!} + \theta(x^{2m+1})$

[O]sservazione

- Risulta chiaro funzioni pari/dispari
- In 1-10 se $x \to 0$ diventa $x \to x_0$ e x diventa $\varepsilon(x)$ infinitesimo $x \to x_0$

Applicazione di Taylor

Natura punto stazionario:

Sia f derivabile m volte in x_0 $m \geq 2$
$f(x_0)$ punto stazionario

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{m}(x_0)}{m!}(x-x_0) + o(x-x_0)$$

Si deduce $f(x) - f(x_0) = \sum_{k=2}^{m} \frac{f^{m}(x)}{k!}(x-x_0)^m + o(x-x_0)$ $x \mapsto x_0$

Se $f(x) - f(x_0)$
- $\leq 0 \Rightarrow x_0$ punto minimo
- $\geq 0 \Rightarrow x_0$ punto massimo
- Cambia segno $\Rightarrow x_0$ non max/non min

Supponiamo $f^{k}(x) = 0$ $\forall k = 1, \dots, m-1$ $f^{m}(x_0) \neq 0 <$ >0, <0

considero $f(x_0) > 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{m}(x_0)}{m!}(x-x_0) + o((x-x_0)^m)$$

divido $(x-x_0)^m$ $\forall x \neq x_0$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} = \frac{f^{m}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}$

$$\lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \left[\frac{f^{m}x_0}{m!} + \frac{o(x-x_0)^m}{x-x_0}\right] = \frac{f^{m}(x_0)}{m!} > 0 \Rightarrow \exists U_{x_0} : \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} > 0 \quad \forall x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\}$$

$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m} > 0$

m pari $\Rightarrow (x-x_0)^m > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow x_0$ punto di minimo

m dispari $\Rightarrow (x-x_0)^m \lessgtr 0$ $\begin{smallmatrix} x<x_0 \\ x>x_0 \end{smallmatrix} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \Rightarrow x_0$ no max/min

Se $f^{m}(x_0) < 0 \Rightarrow$ m pari $\Rightarrow x_0$ max

m dispari $\Rightarrow x_0$ no max/min

In definitiva

$f'(x_0) = 0$
- $f''(x_0) > 0$ x_0 punto min
- $f''(x_0) < 0$ x_0 punto max
- $f''(x_0) = 0$
  - $\Rightarrow f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ non è punto max/min
  - $\Rightarrow f'''(x_0) = 0$

Concludo:

Sia f derivabile m volte $m \geq 2$ in x_0

Siano $f^{m}(x_0) = 0$ $\forall k = 1, \dots, m-1 \Rightarrow f^{m}x_0 \neq 0$

Allora si ha:

- Se m pari $f^{m}(x_0) > 0$ x_0 massimo
- Se m " $f(x_0) < 0$ x_0 minimo
- Se m dispari x_0 non è punto di max punto di minimo

Taylor con resto di Lagrange

2° formula incremento finito, sia derivabile $U(x_0) \Rightarrow \exists z \in (x_0, x)$ (x, x_0) : $f(x) = f(x_0) + f'(z)(x-x_0)$ $\forall x \in U(x_0)$

$R(x) = f'(z)(x-x_0)$

Approssimo f con $f(x_0)$ ma deve $\exists f'(x)$ in $U(x_0)$

Sia f derivabile $m+1$ volte $U(x_0)$

$$\Downarrow$$

$\exists z \in \begin{smallmatrix}(x, x_0) \\ (x_0, x)\end{smallmatrix}$: $f(x) = P_m(x) + R_m(x)$ $\quad P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ $\quad R_m(x) = \frac{f^{m+1}(z)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$

ovvero $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{m+1}(z)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$

Osservazione ①

$m=0$ $\exists z \in \begin{smallmatrix}(x_0, x) \\ (x, x_0)\end{smallmatrix}$: $f(x) = \sum_{k=0}^{(0)} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0) + \frac{f'(z)}{1!}(x-x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(z)(x-x_0)$

OSSERVAZIONE ②

SUPPONIAMO f DERIVABILE $m+1$ VOLTE IN $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ $\delta>0$ DERIVATA $(m+1)$ESIMA CONTINUA $[x_0-\delta; x_0+\delta]$

$\Rightarrow f^{k}(x)$ CONTINUA IN $[x_0-\delta; x_0+\delta]$ $\forall k=0, \dots, m+1$

STIMO

$$|R_m(x)| \leq \mathrm{MAX}\, f^{(m+1)}(z) \cdot \frac{|x-x_0|^{m+1}}{m+1} = M_{m+1} \cdot \frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}$$

$M_{m+1} = \mathrm{MAX}\, |f^{(m+1)}(z)|$ $\exists$ GRAZIE TEO WEISTERS

Integrali

sabato 6 gennaio 2024 18:37

Indefiniti

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo

$F: I \to \mathbb{R}$ è primitiva f I se

- F derivabile in I
- $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Teorema

Sia F primitiva f su $I \Rightarrow$
- Tutte le $G(x) = F(x) + c$ primitive di f su I
- Ogni primitiva G di f in I della forma $G(x) = F(x) + c$

Dimostrazione

① Se F è primitiva di f su $I \Rightarrow F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

② Sia G primitiva di f su $I \Rightarrow G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I \to F'(x) = G'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ $\Rightarrow G(x) = F(x) + c$ $\forall x \in I$

Osservazione

Se $\exists F$ primitiva di f su $I \Rightarrow$ ne $\exists\ \infty$: $F(x) + c$; $c \in \mathbb{R}$ primitiva f su I

$\exists$ primitiva f su I? No

Proprietà di Darboux

Sia g derivabile $[a,b]$ $g'(a) \neq g'(b)$ $y_0 : g'(a) < y_0 < g'(b)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : g'(x_0) = y_0$

Non ha discontinuità

Teorema

Se f continua su $I \Rightarrow \exists F$ di f su I

Definizione [Integrale Indefinito]

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua su I

$\int f(x)\,dx$ famiglia di funzioni [tutte le primitive]

$\int f(x)\,dx = \{F: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F \text{ derivabile}, F'(x) = f(x)\ \forall x \in I\}$

Tabella Integrali Immediati

Osservazioni Utili

Sia f continua su I, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ $\forall x \in I$, $a \neq 0$

Dimostrazione

Ipotesi $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$, quindi $\frac{F(ax+b)}{a} = \frac{1}{a} F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$

Principi Integrale Indefinito

Siano f e g continua su $I \Rightarrow$

① $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$ infatti $(aF(x))' = aF'(x) = af(x)$

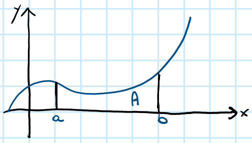
② $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int f(x)\,dx$ infatti

Osservazione:

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) \Rightarrow \int g'(f(x)) f'(x)\,dx = \int (g \circ f)'\,dx = (g \circ f)(x) + c = g(f(x)) + c$

Problema

Calcolare Area di A



Integrale di Riemann in $\mathbb{R}$ / integrale definito

Sia $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ intervallo chiuso & delimitato

Definizione

Partizione $[a,b]$ insieme finito di punti $x_i : i=0,\dots,n$: $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$, $x_i-x_n=\frac{b-a}{n}$

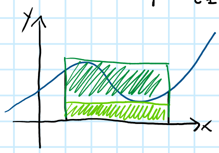
Definizione

$f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f limitata su $[a,b]$

Partizione P_n $[a,b]$: $m_i=\inf f(x)$ $\quad M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ $\quad i=1,\dots,n$

Somma integrale Inf/Sup

$$s(P_n,f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i-x_{i-1}) \qquad S(P_n,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\,[x_i-x_{i-1}]$$



$M_i=(x_i-x_{i-1})$ $\quad A_i$
$m_i=(x_i-x_{i-1})$

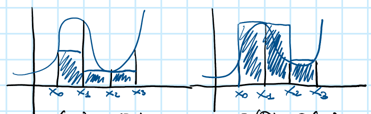
Teorema: $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f limita su $[a,b]$

① $S(P_m,f)\le S(P_n,f)$, $s(P_m,f)\ge s(P_n,f)$ $\forall m>n$

② $S(P_n,f)\ge s(P_n,f)$ $\forall n$

③ $S(P_m,f)\ge s(P_n,f)$ $\forall m,n$

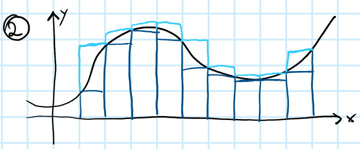
①



$s(P_2)\le s(P_1)$ $\qquad$ $S(P_2)\ge S(P_1)$

$s(P_n)$ monotonia $\qquad$ $S(P_n)$

②



③ Area $A_i\le M_i(x_i-x_{i-1})$

Area $A\le S(P_n)$

$m_i(x_i-x_{i-1})\le$ Area A_i

$s(P_n)\le$ Area A_i

$\Downarrow$

$s(P_n)\le$ Area $A_i\le S(P_n)$

Definizione [Integrale Riemann]

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f limitata su $[a,b]$

f integrale secondo Riemann su $[a,b]$

$$\sup B_1=\inf B_2\ (=\alpha\in\mathbb{R})=\int_a^b f(x)\,dx \qquad S(P_n,f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

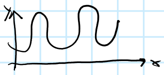
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$\int_a f(x)\,dx$

Significato Geometrico Dell'integrale Definito

① $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area } A$

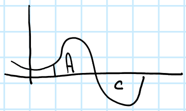


② $f(x) \leq 0 \quad \forall x\, [a,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{Area } B$

③ $f(x)$ cambia segno $[a,b]$

$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area } A - \text{Area } C$



Teorema

Se f continua su $[a,b]$ è $\mathbb{R}$ integrabile su $[a,b]$

Teorema

Se $f(x)$ continua su $[a,b]$ tranne in numeri finiti di discontinuità eliminabili o a salto è Riemann-integrabile $[a,b]$

Proprietà Integrali

① $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

② $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

③ $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

④ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

⑤ $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)$

⑥ $a < b \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

⑦ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

⑧ f pari $a > 0 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

⑨ f dispari $a > 0 \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx$

⑩ $\int_a^c f(x)\,dx = -\text{Area } C_1$ & $\int_c^b g(x)\,dx = \text{Area } C_2 \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx = \text{Area } C_1 + \text{Area } C_2$

⑪ $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \text{Area } C = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

⑫ $\text{Area } C_1 + \text{Area } C_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

⑬ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

Teorema Media Integrale

Sia f continua su $[a,b] \Rightarrow \exists z \in [a,b]: \int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a)$

Dimostrazione: f è continua su $[a,b]$ per Weistrass f ammette Max/Min assoluti $\Rightarrow \exists x_0, x_1 \in [a,b]: m = f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) = M \quad \forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a) \quad \% (b-a) > 0$$

$$f(x_0) = m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M = f(x_1)$$

Se f continua $[a,b]$ proprietà di Darboux $\Rightarrow \exists z \in [a,b]: f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Quindi: $(b-a)f(z) = \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema calcolo integrale

lunedì 8 gennaio 2024 11:12

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$

$\Downarrow$

Fisso $x\in[a,b]$ f è integrale su $[a,x]\subseteq[a,b]$

Definiamo $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ così $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $\forall x\in[a,b]$

Osservo $F(a)=0$ $F(a)=\int_a^a f(t)\,dt$ F viene detta integrale di f

Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$

$\Downarrow$

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $\forall x\in[a,b]$ derivabile $[a,b]$

F viene f integrale f

Dimostrazione

① Sia $x_0\in(a,b)$ per h piccolo: $x_0+h\in(a,b)$

Rapporto incrementale in x_0

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(t)\,dt-\int_a^{x_0}f(t)\,dt\right)=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0}f(t)\,dt+\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt-\int_a^{x}f(t)\,dt-\int_a^{x_0}f(t)\,dt\right)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt$$

$h>0$ $x_0+h>x_0$

$h<0$ $x_0+h<x_0$

Per ogni caso $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt$ media integrali f su $\overset{h>0}{[x_0,x_0+h]}\ \overset{h<0}{[x_0-h,x_0]}$

$h>0\to\frac{1}{x_0+h-x_0}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt$

$h<0$ $\frac{1}{x_0-x_0+h}\int_{x_0+h}^{x_0}f(t)\,dt=\frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0}f(t)\,dt=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt$

Poiché f continua $\Rightarrow f$ continua su estremi $x_0,x_0+h\in(a,b)$

$\Downarrow$

$\exists z\in\to[x_0,x_0+h]:\ f(z)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt$
$\searrow[x_0+h_0,x_0]$

$\lim_{h\to0}$ Rap. incr. in $x_0\to\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt=\lim_{h\to0}f(z)$. $z\in[x_0,x_0+h]$
$[x_0+h,x_0]$

se $h\to0\Rightarrow x_0+h\to x_0\Rightarrow z\to x_0$

Quindi: $\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt=\lim_{h\to0}f(z)=f(x_0)$

$\Downarrow$

$\exists$ finito $F'(x_0)=f(x_0)$

② Sia $x_0=a$ stessa roba $h>0$
se $x_0=b$ incremento $h<0$

Conclusioni: F derivabile in $[a,b]$, $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

Formula Fondamentale Integrale

- Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$
- Sia G primitiva di f su $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$

Dimostrazione

Supponiamo $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ $\forall x\in[a,b]$ primitiva f su $[a,b]$

$\Downarrow$

F e G primitive di f su $[a,b]\Rightarrow$ differiscono per una costante

$F(x)=G(x)+c$ $\forall x\in[a,b]$

Poniamo $x=a$ in $F(x)=G(x)+c \Rightarrow 0=G(a)+c \Rightarrow G(a)=-c$

Poniamo $x=b$ $F(x)=G(x)+c \Rightarrow F(b)=G(b)+c \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a)$

Notazione

$$\int_a^b f(t)\,dt = [G(x)]_a^b = G(b)+\cancel{c}-(G(a)+\cancel{c}) = G(b)-G(a)$$

Integrazione Sostituzione

Sia $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$
Sia $g:[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}\to[a,b]$, derivabile $[\alpha,\beta]$

Siano g & g' derivabile su $[\alpha,\beta]$ e $g(\alpha)=a$ e $g(\beta)=b \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$

Dimostrazione

Sia F primitiva su $[a,b]$ di f

$\Downarrow$

F derivabile su $[a,b]$ $F(x)=f'(x)$ continua su $[a,b]$ $\forall x\in[a,b]$

$\Downarrow$

$(F\circ g)(x)=F(g(x))$ continua & derivabile su $[\alpha,\beta]$

$\Downarrow$

$(F\circ g)'(x)=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$

$\Downarrow$

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (F\circ g)'(x)\,dx = (F\circ g)(\beta)-(F\circ g)(\alpha) = F(g(\beta))-F(g(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Osservazioni I

Negli esercizi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt \Rightarrow$ trovo $g:[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}\to[a,b]$: g e g' continuo $[\alpha,\beta]$ $g'>0$ $(g'<0)$

$x=g(t)$ $t=g^{-1}(x)$ g strettamente monotona

$a=g(\alpha)$ $\alpha=g^{-1}(a)$ $\Downarrow$ g è invertibile

$b=g(\beta)$ $\beta=g$ $\Downarrow$ $g'(x)$ invertibile & continua

Osservazione II

I indefiniti metodo per Sostituzione

1. f, g, g' continuo $\Rightarrow \int f(x)\,dx\Big|_{g(t)=x} = \int f(g(t))g'(t)\,dt$

2. Inoltre $g'>0$ $(g'<0) \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}$

Teoremi integrali

lunedì 8 gennaio 2024 14:02

① f CONTINUA $(a,b]$ o su $[a,b)$

② f · $[a,+\infty)$ o $(-\infty,b]$

① INTEGRALE IMPROPRIO

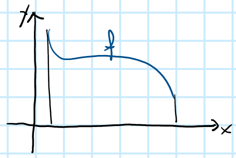
f CONTINUA SU $(a,b]$ FISSO k: $a<k<b$

$\Downarrow$

f è CONTINUA su $[k,b] \Rightarrow \exists \int_k^b f(t)\,dt$

LIMITE $k \to a^+$

$$\lim_{k\to a} \int_k^b f(t)\,dt = \begin{cases} l \in \mathbb{R}: & f \text{ INTEGRABILE IMPROPRIO, INTEGRALE IMPROPRIO } \int_a^b f(t)\,dt \\ \pm\infty: & \int_a^b f(t)\,dt \;\pm\infty \\ \nexists: & \text{INTEGRALE} \end{cases}$$



A = REGIONE COMPRESA f, $x=a$, $x=b$ e $y=0$

$\int_a^b f(x)\,dx$ è CONVERGENTE $\Rightarrow A$ è FINITA

$\int_a^b f(x)\,dx$ è DIVERGENTE $\Rightarrow A$ è INFINITA

INTEGRALE IMPROPRIO $[a,+\infty)$ V $(-\infty,b]$

SIA f CONTINUA $[a,+\infty)$ FISSO $k>a$

$\Downarrow$

f CONTINUO su $[a,k] \Rightarrow \exists \int_a^k f(t)\,dt$

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^k f(x)\,dx = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & f \text{ INTEGRABILE IMPROPRIO SU } [a,+\infty), \; \int_a^\infty f(x)\,dx \\ \pm\infty: & \exists \int_a^\infty f = \infty \\ \nexists: & \text{INTEGRALE IMPROPRIO NON ESISTE} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

$f \geq 0$ su I ($[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$) $\Rightarrow$ INTEGRALE IMPROPRIO $\int_I f(x)\,dx$ < CONVERGE / DIVERGE

INFATTI $\int_{I_k} f(x)\,dx$ MONOTONA CRESCENTE k < a,b / $\pm\infty$

$f \leq 0$ su $I \Rightarrow \int_{I_k} f(x)\,dx$ MONO. DECRES

CRITERIO DEL CONF

SIA f CONTINUA I ($[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$) $f(x) \geq 0 \;\forall x \in I$

SIA g I. $0 \leq f(x) \leq g(x) \;\forall x \in I$

$\Downarrow$

$\int_I g(x)\,dx$ è CONVERGENTE $\Rightarrow \int_I f(x)\,dx$ CONVERGE

$\int_I f(x)\,dx$ è DIVERGENTE $\Rightarrow \int_I g(x)\,dx$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE $[a,b)$

$0 \leq f(x) \leq g(x) \Rightarrow \forall k>a$

$0 = \int_a^k \emptyset\,dx \leq \int_a^k f(x) \leq \int_a^k g(x)\,dx$

$\lim_{k\to b} \int_a^k g(x)\,dx = d \Rightarrow \lim_{k\to b} \int_a^m f(x)\,dx \leq d$

$$\lim_{k\to b}\int_a^k f(x)dx = +\infty \Rightarrow \lim_{k\to b}\int_a^k g(x)dx \geq +\infty$$

Criterio Confronto Asintotico

Siano f & g continue $I = [[a,b] \vee [a,b) \vee [a,+\infty) \vee (-\infty,b]]$ con $P = [a \vee b \vee +\infty \vee -\infty]$

$f>0$ e $g>0$ su I $f(x) \sim g(x)$ per $x \to P$

$\Downarrow$

$\int_I f(x)dx$ convergente $\Leftrightarrow$ $\int_I g(x)dx$ è convergente

$\int_I f(x)dx$ divergente $\Leftrightarrow$ $\int_I g(x)dx$ divergente

Dimostrazione

Se $f(x) \sim g(x)$ $x \to P$ $f(x)$ & $g(x) > 0 \Rightarrow \lim_{x\to P}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Fisso $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists\, \mho(P) : \forall x \in \mho(P) \setminus \{P\}$ $1-\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 1+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} \Rightarrow$ $0 < \frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$

Convergenza Assoluta

Sia f continua I $\Rightarrow$ Se $\int_I |f(x)|dx$ convergente $\Rightarrow$ $\int_I f(x)dx$ convergente

Convergente Assoluta

Definizioni

- f continua (a,b) $\Rightarrow$ Integrale Improprio su (a,b) somma integrali impropri $(a,c] \vee [c,b)$: $a<c<b$
  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ $\forall c \in (a,b)$

- f continua $[a,b] \setminus \{x_0\}, x_0 \in (a,b)$ $\Rightarrow$ Integrale impropr. $[a,b] \setminus \{x_0\}$ = Somma Integrali $[a,x_0) \wedge (x_0,b]$ = $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$

- f continua $(a,+\infty)$ $\Rightarrow$ Integrale Improprio $(a,+\infty)$ somma $(a,c]$ e $[c,b)$ $\forall c>a$ $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- f continuamente $(-\infty,\infty)$ $\Rightarrow$ Integrale impropr. $(-\infty,\infty)$ | $(-\infty,c]$ e $[c,\infty)$ $\forall c \in \mathbb{R}$
  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

Serie numeriche

martedì 9 gennaio 2024 12:51

$f(x) = e^{-x^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}$ È CONVERGE, INFATTI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx + 2\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{1}^{\infty} 2e^{-x^2}dx$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{1}^{k} 2xe^{-x^2}dx = \lim -e^{-x^2}\Big|_1^k = \lim_{k\to\infty}(-e^{-k^2}+e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

$$\hookrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx + 2\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx < 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow f(x) \text{ CONVERGE } \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

SERIE NUMERICHE:

SIA a_n SUCCESSIONI REALI

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$ SOMMA n-ESIMA $\qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$

LA SERIE LIMITE DI SUCCESSIONE SOMME PARZIALI

DEFINIZIONE

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n =$

- $S \in \mathbb{R}$: $\sum a_n$ CONVERGENTE SOMMA S
- $\pm\infty$: $\sum a_n$ DIVERGENTE SOMMA $\pm\infty$
- $\nexists$: $\sum a_n$ OSCILLANTE / INDETERMINATA

SERIE DI MERGALI (ESEMPIO)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \dots - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

TEOREMA

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ CONVERGE $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

DIMOSTRAZIONE

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ CONVERGENTE $\Rightarrow \exists$ FINITO $\lim S_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

CARATTERE DELLA SERIE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

DATA SERIE $\sum^{\infty} a_n$ $\quad a_k \geq 0$ ($\leq$) $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ SERIE CONVERGENTE / DIVERGENTE $\pm\infty$

DIMOSTRAZIONE

$S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_n \qquad S_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \qquad S_{n+1} - S_n - \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_{n+1} \geq 0$

SE $S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow S_n$ E MONOTONA CRESCENTE $\Rightarrow$ REGOLARE
- CONVERGE $S \in \mathbb{R}$
- DIVERGE ∞

ANALOGAMENTE $a_n \leq 0 \Rightarrow S_n$ MONOTAMENTE DECRESCENTE $\Rightarrow S_n$
- CONVERGE $S \in \mathbb{R}$
- DIVERGE $-\infty$

$a_n \geq 0$ (< 0) DEFINITIVAMENTE $\Rightarrow$ I PRIMI TERMINI NON CONTANO

LEGAME $\int_1^{\infty} f(x)$ SOMMA $\sum_{k=1}^{\infty} f(n)$ $\quad f(x) > 0 \wedge f(x)$ MONO. DREC $\wedge$ CONTINUA $[1, +\infty)$

$\sum^{\infty} f(n) = \sum^{\infty} f(n)(n+1-n) = \sum^{\infty} Area(R_n)$

LEGAME $\int_1^{\infty} f(x)$ SOMMA $\sum_{k=1}^{\infty} f(m)$ $f(x)>0 \wedge f(x)$ MONO. DREC $\wedge$ CONTINUA $[1,+\infty)$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)(m+1-m) = \sum_{m=1}^{\infty} \text{AREA}(R_m)$$

$$\text{AREA}(R_m) = f(m)(m+1-m) = f(m)$$

$$\text{AREA}(r_m) = f(m+1)(m+1-m) = f(m+1)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)(m+1-m) = \sum_{m=1}^{\infty} \text{AREA}(R_m) = \sum^{\infty} \text{AREA}(r_m) + f(1)$$

QUINDI: $\sum f(m) - f(1) = \sum_{m=1}^{\infty} \text{AREA}(r_m) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{m=1}^{\infty} \text{AREA}(R_m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)$

QUINDI: $\sum_{m=1}^{\infty} f(m)$ CONVERGE $\iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

$\sum_{m=1}^{\infty} f(m)$ DIVERGE $\iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE

SERIE NUMERICA GENERALIZZATA

① STABILIRE SERIE $\sum_{m=1}^{\infty}$ $a>0$ e $a\leq 0$

A) $a \leq 0$ $\quad \frac{1}{m^a} = m^{-a}$

B) $a>0$ $\quad \frac{1}{m^a} = m^{-a} \Rightarrow \frac{1}{x^a}$ $[1;+\infty)$ $\int \frac{1}{x^a}\,dx =$ CONVERGE $a>1$, DIVERGE $0<a\leq 1$

CONCLUSIONE

$\sum_{m=1} \frac{1}{m^a}$ CONVERGE $a>1$, DIVERGE $a \leq 1$

② SERIE $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^a \log^b m}$ CONVERGE $\iff \begin{cases} a>1 & \forall b \\ a=1 & \forall b>1 \end{cases}$

CRITERI DI CONVERGENZA SERIE TERMINI SEGNO COSTANTI

a_m b_m : $a_m>0 \wedge b_m>0 \wedge a_m \sim b_m \Rightarrow \sum a_m \wedge \sum b_m$

DIMOSTRAZIONE

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = 1 \Rightarrow$ fissato $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ $\exists m_0 : \forall m > m_0$ $1-\frac{1}{2} < \frac{a_m}{b_m} < 1+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a_m}{b_m} < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} b_m < a_m < \frac{3}{2} b_m$

CRITERI CONVERGENZA TERMINI SEGNO COSTANTE $(a_m \geq 0 \wedge a_m \leq 0)$

$a_m \geq 0$ SIA $\lim \sqrt[m]{a_m} = L \in [0,+\infty]$

SE $L \in [0,1) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ CONVERGE

$L \in (1,+\infty) \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ DIVERGE

DIMOSTRAZIONE

$\lim \sqrt[m]{a_m} = L$ con $0 \leq L < 1$

FISSO $\varepsilon > 0$: $0 < \varepsilon + L < 1 \Rightarrow \exists m_0 : \forall m > m_0 \Rightarrow L - \varepsilon < \sqrt[m]{a_m} < L+\varepsilon \Rightarrow 0 \leq \sqrt[m]{a_m} < L+\varepsilon \Rightarrow 0 \leq a_m < (L+\varepsilon)^m$

$\sum_{m=1}^{\infty} (L+\varepsilon)^m$ SERIE GEOMETRICA $L+\varepsilon$ ca $0 < L+\varepsilon < 1$

$\Downarrow$

CONVERGE $\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ CONVERGE

SIA $L>1 \Rightarrow$ fisso $\varepsilon > 0$: $1 < L-\varepsilon < L \Rightarrow \exists m_0 : \forall m > m_0$ $L-\varepsilon < \sqrt[m]{a_m} < L+\varepsilon$

$1 < L-\varepsilon < \sqrt[m]{a_m} \Rightarrow 1 < (L-\varepsilon)^m < a_m$

MA $L-\varepsilon > 1 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} (L-\varepsilon)^m = \infty \Rightarrow \lim_{m\to\infty} a_m = \infty$ $\sum a_m$ DIVERGENTE

SIA $L = +\infty \Rightarrow$ FISSO $M>1$ $\exists m_0 : \forall m > m_0$ $\sqrt[m]{a_m} > M \Rightarrow a_m > M^m > 1$ $a_m \not\to 0$ $\sum a_m$ DIVERGENTE

Criterio del Rapporto

$a_n > 0 \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty]$

$L \in [0,1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente

$L \in (1, +\infty) \Rightarrow \sum_{a_n}^{\infty} a_n$ divergente

Osservazione

Crit. radice n-esima $\wedge$ crit. rapporto non danno info $L=1$

Serie segni alterni $\quad \sum (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$

Criterio Convergenza Serie segni Alterni

$a_n > 0, \quad a_{n+1} \leq a_n, \lim a_n = 0$

$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. Vale la stima $\left|\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n\right| = |S - S_n| = |(-1)^{k+1} a_{k+1}| = a_{k+1}$

Dimostrazione

$S_0 \geq S_2 \Leftrightarrow a_0 \geq a_0 - a_1 + a_2 \Leftrightarrow a_1 \geq a_2$

$S_1 \leq S_3 \Leftrightarrow a_0 - a_1 \leq a_0 - a_1 + a_2 \leq a_2$

$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \ldots \quad S_{2k}$

$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \quad S_{2k+1}$

$\exists \lim S_{2k} = l_1 \in \mathbb{R} \quad \lim S_{2k+1} = l_2 \in \mathbb{R}$

Osserviamo:

$S_{2k} - S_{2k+1} = -[(-1)^{2k+1} a_{2k+1}] = a_{2k+1}$

$\lim_{k \to \infty} [S_{2k} - S_{2k+1}] = \lim_{k \to \infty} a_{2k+1} = 0$

$\Downarrow$

$\lim_{k \to \infty} S_{2k} - \lim_{k \to \infty} 2k+1 = 0 \Rightarrow l_1 - l_2 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = S$

$\Downarrow$

$\lim_{n \to \infty} S_n = S \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge

$\forall n : |S - S_n| \leq |(-1)^{n+1} a_{n+1}| = a_{n+1}$

Osservazione

Serie termine segno alternato confronto asintotico not valido

Convergenza Assoluta

Definizioni: $\sum a_n$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Teorema: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

Dimostrazione: Considero $\sum_{n=0}^{\infty} [a_n + |a_n|]$

$\Downarrow$

$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

$\Downarrow$

Criterio Confronto $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ converge

$\Downarrow$

$\sum a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + |a_n|) - |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|)$

Osservatore: Se $\sum a_n$ converge non detto converge assoluto

Digressione

giovedì 11 gennaio 2024 10:58

Forma di Cesario

Definizione

$\sum a_n$: a_n sia successione di somme parziali $S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$

Somma Cesario: $\lim_{n \to \infty} \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$

Osservazione:

$\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ converge media di Cesario (non viceversa)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ $\quad \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} = \begin{cases} \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} & \text{n pari} \\ \frac{\frac{n+1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2} & \text{n dispari} \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n} = \frac{1}{2}$

Serie di Potenze

Somma $\sum_{k=0}^{n} a_k$ $\qquad$ Serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$

Polinomio centrato x_0 $\qquad$ Serie pot centrato in x_0

$\sum a_n (x-x_0)^k$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n} a_n (x-x_0)^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ è una serie numerica

Osservazione:

Data la serie potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^k$ centrato $x_0 = 0$ Converge $x_0 = 0$

$\sum a_n x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + \ldots$ $\quad x_0 = 0$: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 0^k$

Definizione

Data serie potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad E = \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n x^k \text{ converge}\}$ $f(x) = \sum_{}^{\infty} a_n x^k$ $\forall x \in E$

Teorema $\quad \sum a_n x^k$ $\quad E \neq \emptyset$; $E = \begin{cases} \{0\} \\ (-R,R), [-R,R), (-R,R], [R,R] \text{ con } R>0 \\ (-\infty, \infty) \end{cases}$

Definizioni

Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^k$, E insieme convergenza

Raggio convergenza: $\sup E$

$\to R = \begin{cases} \emptyset & E = \{0\} \\ R & \text{else} \\ +\infty & E = (-\infty, +\infty) \end{cases}$

$\downarrow$

$[0, +\infty)$

Teorema

$\sum a_n x^n \Rightarrow$ ① $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty] \Rightarrow R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}$

② $a_n \neq 0$ $\exists \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in [0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} +\infty & \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \ell \in (0, +\infty) \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}$

Deviazione & Integrazione Serie di Potenze

Definizione: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^k \Rightarrow$ Derivata serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ Si deriva termine a termine

Osservazioni: Serie derivate $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum (n+1) a_n x^n$

Actung! $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum a_n x^n + a_0 \Rightarrow a_0' = 0 \Rightarrow$ Serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ $\quad n-1 \geq 0$

Teorema: ① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ stesso raggio

② $\sum a_n x^n$ $R <^{>0}_{+\infty} \Rightarrow f(x) = \sum a_n x^n$ derivabile $(-R, R)$

$f'(x) = \sum n\, a_n x^{n-1}$

inoltre $\exists f^{(k)}(x) = (-R, R)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$

INOLTRE $\exists \ f^{k}(x) = (-R, R) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$f^{k}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} [n \cdot (n+1) \dots (n-k+1) a_n] \, x^{n-k}$$

OSSERVAZIONE:

$R \begin{cases} > 0 \\ +\infty \end{cases}$ f SOMMA DERIVABILE $\quad a_n x^n \Rightarrow \int_0^x a_n t^n \, dt = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

RELAZIONE $\sum a_n x^n \wedge \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$?

TEOREMA

$\sum a_n x^n \quad R \begin{cases} > 0 \\ +\infty \end{cases} \Rightarrow$ FUNZIONE SOMMA $f = \sum a_n x^n \Rightarrow \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \sum a_n t^n \, dt = \sum^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum \int_0^x a_n t^n \, dt \quad \forall x \in (-R; R)$

Notazione

giovedì 11 gennaio 2024 12:50

NOTAZIONE

SIA f DERIVABILE K VOLTE SU $I \Rightarrow f \in C^k(I)$: $(k \in \mathbb{N}_0 \{0\})$

DATA $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x_m$ $R \underset{+\infty}{\longrightarrow} >0 \Rightarrow f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x_m$ $f \in C(-R,R)$

$f \in C^{\infty}(-R,R) \Rightarrow \exists \sum a_m x^m . f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ $R <^{>0}_{+\infty}$!

SE $\exists \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ CON $R = {>0 \atop \infty} \Rightarrow \cdot f(x) = \sum a_m x^m \Rightarrow f(0) = a_0$

- $f'(x) = \sum a_m\, m x^{m-1} \Rightarrow f'(a) = a_1$
- $f^k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot (m-1) \ldots (m-k-1)\, a_m x^{m-k} \Rightarrow f^k(0) = K!\, a_m$

SE $\exists$ $\sum a_m x^m$ LA CUI SOMMA È $= a f$ IN $(-R;R) \Rightarrow a_m = \frac{f^m(0)}{m!}$

LA SERIE CON COEFFICENTI $a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ TAYLOR IN $x_0 = 0$ $f(x) \sim \sum \frac{f^m(0)}{m!} x^m$

GENERALE : $f(x) \sim \sum \frac{f^m x_0}{m!}(x-x_0)^m$

OSSERVAZIONE:

$f \in C^{+\infty}(x_0 - R, x_0 + R)$ SCRIVO TAYLOR

SOMMA PARZIALE K-ESIMA $P_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^m(x_0)(x-x_0)^m}{m!}$ $g(x) = \sum \frac{f^m(x_0)(x-x_0)^m}{m!} + R_m(x)$

DOMANDA:

SE $f \in C^{\infty}(x_0 - R; x_0 + R)$ f SOMMA SERIE TAYLOR IN x_0

CONTROESEMPIO.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

$$f'(x) = 2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \qquad \lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f^m(0) = 0 \quad \forall k \Rightarrow f \in C^m(\mathbb{R}^0) \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \{0\}$$

DEFINIZIONE:

SIA $f \in C^{\infty}(x_0 - R, x_0 + R)$ f SVILUPPABILE IN TAYLOR x_0 SALE $f(x) = \sum \frac{f^m x_0}{m!}(x-x_0)^m$ $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

TEOREMA.

$f \in C^{\infty}(x - \delta; x + \delta)$: $\delta > 0$

$\exists$ min $M > 0$: $|f^m(x)| \leq M$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\forall m \in \mathbb{N}_0 \{0\}$

$\Downarrow$

f SVILUPPABILE CON TAYLOR CENTRO x_0 $\left[f(x) = \sum f^m \frac{x_0}{k!}(x-x_0)^k \right.$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

DIMOSTRAZIONE:

$f \in C^{\infty}(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow$ FORMULA DI TAYLOR

$f(x) = P_m(x) + R_m(x) = \sum \frac{f^m(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_m(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$\frac{f^{m+1}(z)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$ CON $z \in (x_0, x)$

$f(x) - P_m(x) = R_m(x) \Rightarrow 0 \leq |f(x) - P_m(x)| = |R_m(x)| = \left| \frac{f^{m+1}(z)}{(m+1)!}(x-x_0) \right| \leq M \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!}$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\left| \frac{}{(n+1)!} \right|$

$f(x) - P_n(x) = R_n(x) \Rightarrow 0 \leq |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0) \right| \leq M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$

$0 \leq \lim |f(x) - P_n(x)| \leq \lim_{n \to +\infty} M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$

$\Downarrow$

$\lim [P_n(x) - f(x)] = 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$

$\lim P_n(x) = f(x) \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$

$P_n(x) \Rightarrow \sum \frac{f^n(x_0)}{k!}(x-x_0)^n = f(x) \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$

Differenze Serie / Polinomio Taylor

① $f(x) = \sum^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \forall x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$

② $f(x) = \sum^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \quad x \to x_0$

1. $f(x)$ $\lim_{n \to \infty}$ successione somma parziali $P_n(x)$
2. $\lim_{x \to \infty} P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$

FINALE

giovedì 11 gennaio 2024 14:21

FENOMENI FISICI PERIODICI

LA SCOMPOSIZIONE DI $f(x)$ ARMONICHE $\to$ SOMMA TIPO: $a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)$

f PERIODICA CON $T>0$ SE $f(x+T)=f(x) \Rightarrow f(x+kT)=f(x)\ \forall k\in \mathbb{Z}$

OSSERVAZIONE

① f È T-PERIODICA E RICONDUCE : $T=2\pi$ $\quad g(x)=f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$

SE: $f(x+T)=f(x) \Rightarrow g(x+2\pi)=f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}x+T\right)=f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)=g(x)$

② $\sin x \wedge \cos x$ $\quad T=2\pi$; $\sin(mx) \wedge \cos(mx)$ $\quad T=\frac{2\pi}{m} \Rightarrow 2\pi$ PERIODICHE

$\sin\left[m\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\right]=\sin(mx+2\pi)=\sin(mx)$

DEFINIZIONE:

SERIE FOURIER: $\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos(mx)+b_m \sin(mx)\right],\ x\in\mathbb{R}$

OSSERVAZIONE

CONVERGE $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x) \Rightarrow f$ 2π-PERIODICO

INFATTI $\cos(mx) \wedge \sin(mx)$ $f(2\pi)$ $\quad \frac{a_0}{2}$

DEFINIZIONE

f 2π-PERIODICA IN SERIE FOURIER

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\left[a_m \cos(mx)+b_m \sin(mx)\right]\ \forall x\in\mathbb{R}$

DOMANDA:

f 2π PERIODICA INTEGRABILE $[-\pi,\pi]$

DEFINIZIONE:

$f, [a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SE CONTINUA SU $[a,b]$ TRANNE NUMERI FI

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$, $\lim f(x)=f(x_0^-)$ $x\in(a,b)$
- $\exists$ ESISTE $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a^+)$
- $\forall\exists$ $\lim f(x)=f(b^-)$

OSSERVAZIONE

f CONTINUA $\to$ R INTEGRABILE

ESEMPIO

$f(x) = [x]$ CONTINUA SU $[x]$ = PARTE INTERA DI x SU $[a,b]$

TEOREMA: SIA f 2π PERIODICA $[-\pi,\pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum^{\infty} [a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)] = \begin{cases} f(x) & \text{CONT} \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \end{cases}$$

OSSERVAZIONI:

SIA f 2π PERIODICA

1. f PARI $\Rightarrow$ $b_m = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}$ $\quad a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
2. f DISPARI $\Rightarrow$ $a_m = 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \ \forall m \in \mathbb{N}$

2. SOMMA PARZIALE FOURIER

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{K} [a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)$$