

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра автоматизованих систем управління



Звіт

до лабораторної роботи № 2

з дисципліни

“Моделювання процесів та смарт систем”

Виконав: студент групи ОІ-35

Маселко Володимир

Прийняв : асистент каф. АСУ

Мельник Р. В.

Львів – 2024

Лабораторна робота № 2

Моделювання динамічних систем.

Мета: Оволодіння методами комп'ютерного моделювання динамічних систем, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Набути навички застосування чисельних методів Рунге-Кутта для розв'язування систем ЗДР.

Варіант: 15

Короткі теоретичні відомості

Моделювання – це заміщення одного об'єкту (оригіналу) іншим (моделлю) та фіксація або вивчення властивостей оригіналу шляхом дослідження властивостей моделі з метою спрощення, здешевлення, прискорення фіксації або вивчення властивостей оригіналу.

Модель – це система, що заміщує оригінал. Оригінал та модель схожі за деякими одними властивостями і параметрами та відрізняються за іншими. Одна з класифікацій моделей технічних систем:

- за призначенням: імітаційні, оптимізаційні, прогнозуючі;
- за ступенем збігу фізичних властивостей: фізичні (натурні), математичні, напівнатурні;
- за принципом побудови: стохастичні, детерміновані;
- за способом подання інформації: дискретні, безперервні, дискретнобезперервні;
- за темпом часу: реального часу, прискорені та уповільнені;
- за пристосуванням: адаптивні, неадаптивні.

Система – це сукупність взаємопов'язаних об'єктів, що має чотири наступні властивості.

Цілісність та частковість.

Система – це цілісна сукупність окремих елементів. Зібрані разом елементи можуть створювати систему, а можуть й не створювати. Крім того, система може зруйнуватися без якогось елемента; Наявність зв'язків. Системі притаманна наявність суттєвих стійких зв'язків (відношень) між елементами або властивостями, які перевищують за потужністю (силою) зв'язки цих

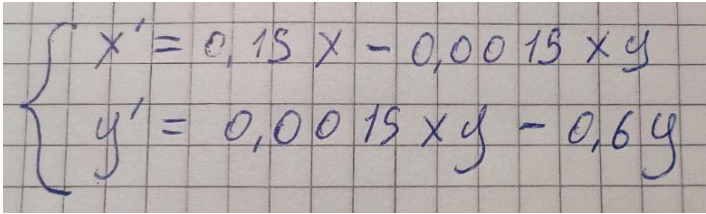
елементів з елементами, що не входять в дану систему. За фізичним наповненням зв'язки можна розділити на дійсні, енергетичні, інформаційні, змішані. За напрямком розрізняють зв'язки прямі, зворотні, нейтральні; наявність визначеної організації. Це формування зв'язків елементів, упорядковане розподілення зв'язків та елементів в часі та просторі. При цьому складається визначена структура системи, а властивості елементів трансформуються в функції (дії, поведінку). Організація проявляється у зменшенні ентропії, у порівнянні з ентропією, системоформуючих факторів (елементів та зв'язків), які визначають можливість створення системи; наявність інтегративних якостей. Це якості, які притаманні системі в цілому, але не властиві жодному з її елементів окремо. Отже, властивості системи хоча й залежать від властивостей елементів системи, але не визначаються ними повністю.

Завдання 1. Моделювання екологічної системи.

$$a_{11} = 0.15 \quad a_{12} = 0.0015 \quad a_{21} = 0.0015 \quad a_{22} = 0.6$$

$$x_0 = 850 \quad y_0 = 550 \quad t_0 = 0 \quad h = 0.1 \quad T = 150$$

а) Змодельовав екосистему в якій територіальні ресурси розподілені між жертвами та хижаками за допомогою система рівнянь Лотки-Вольтери



$$\begin{cases} x' = 0.15x - 0.0015xy \\ y' = 0.0015xy - 0.6y \end{cases}$$

Рис 1. Модель екологічної системи

б) Розв'язав отриману у попередньому пункті (а) систему рівнянь методом чисельного інтегрування Рунге-Кутта четвертого порядку та побудував графіки залежностей $x(t)$, $y(t)$ та $y(x)$

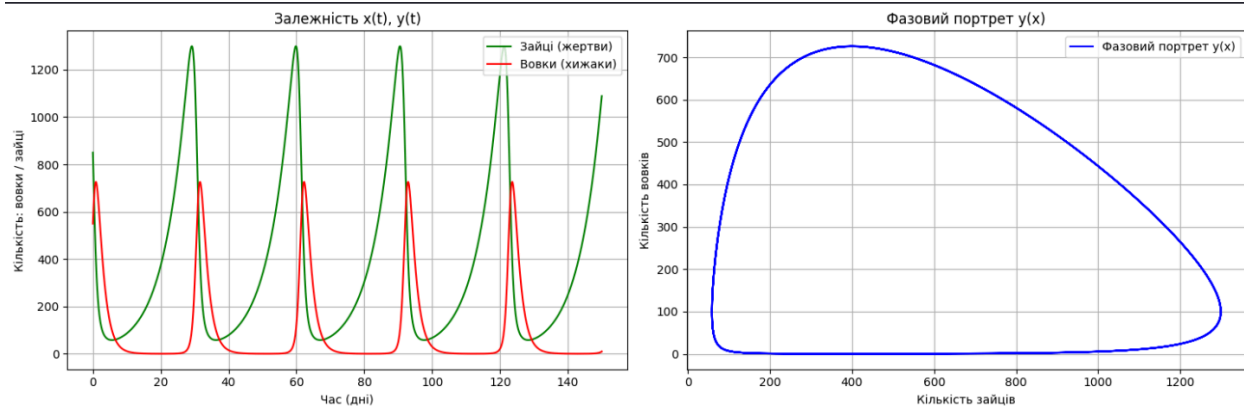


Рис. 2. Результат виконання першого завдання.

Завдання 2. Моделювання процесу розповсюдження епідемії.

$$H = 985 \quad \beta = 10 \quad \gamma = 15 \quad a_{21} = 0.6$$

$$x_0 = 885 \quad y_0 = 75 \quad z_0 = 25 \quad t_0 = 0 \quad h = 0.1 \quad T = 40$$

а) Змодельював процес розповсюдження епідемії

$$\begin{cases} x' = -\frac{10}{985} \cdot x y \\ y' = \frac{10}{985} \cdot x y - \frac{1}{15} \cdot y \\ z' = \frac{1}{15} \cdot y \end{cases}$$

Рис 3. Модель розповсюдження епідемії

б) Розв'язав отриману у попередньому пункті (а) систему рівнянь методом чисельного інтегрування Рунге-Кутта четвертого порядку та побудував графіки залежностей $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$

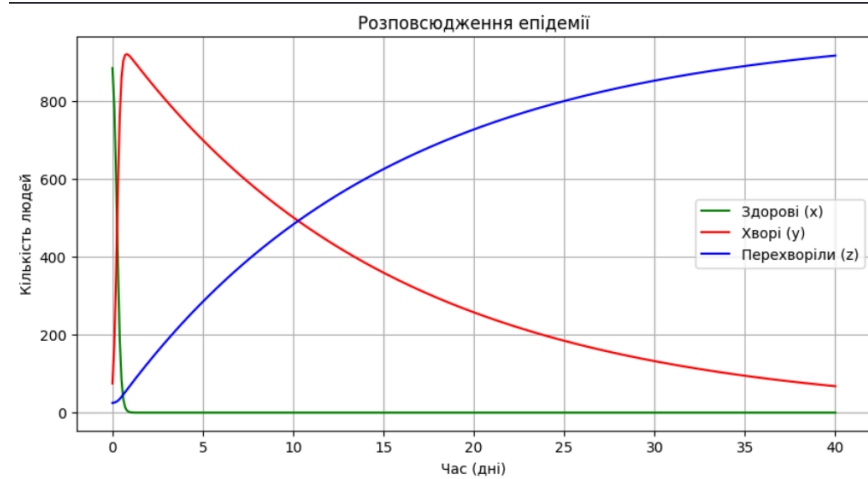


Рис. 4. Результат виконання другого завдання.

Додатки

Код до завдання 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def lotka_volterra(t, x, y, a11, a12, a21, a22):
    dx_dt = a11 * x - a12 * x * y
    dy_dt = a21 * x * y - a22 * y
    return dx_dt, dy_dt

def runge_kutta(t0, x0, y0, h, T, a11, a12, a21, a22):
    steps = int(T / h)
    t_values = np.linspace(t0, T, steps + 1)
    x_values = np.zeros(steps + 1)
    y_values = np.zeros(steps + 1)

    x_values[0] = x0
    y_values[0] = y0

    for i in range(steps):
        t = t_values[i]
        x, y = x_values[i], y_values[i]

        k1x, k1y = lotka_volterra(t, x, y, a11, a12, a21, a22)
        k2x, k2y = lotka_volterra(t + h/2, x + h/2 * k1x, y + h/2 * k1y, a11, a12, a21, a22)
        k3x, k3y = lotka_volterra(t + h/2, x + h/2 * k2x, y + h/2 * k2y, a11, a12, a21, a22)
        k4x, k4y = lotka_volterra(t + h, x + h * k3x, y + h * k3y, a11, a12, a21, a22)

        x_values[i + 1] = x + h * (k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x) / 6
        y_values[i + 1] = y + h * (k1y + 2 * k2y + 2 * k3y + k4y) / 6

    return t_values, x_values, y_values

# Параметри
a11 = 0.15
a12 = 0.0015
a21 = 0.0015
a22 = 0.6
x0 = 850
y0 = 550
t0 = 0
h = 0.1
T = 150

# Запуск методу Рунге-Кутты
t_values, x_values, y_values = runge_kutta(t0, x0, y0, h, T, a11, a12, a21, a22)
```

```

# Побудова графіків
plt.figure(figsize=(15, 5))

# Графік x(t)
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(t_values, x_values, label='Зайці (жертви)', color='green')
plt.plot(t_values, y_values, label='Вовки (хижаки)', color='red')
plt.xlabel('Час (дні)')
plt.ylabel('Кількість: вовки / зайці')
plt.title('Залежність x(t), y(t)')
plt.legend()
plt.grid()

# Фазовий портрет y(x)
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(x_values, y_values, label='Фазовий портрет y(x)', color='blue')
plt.xlabel('Кількість зайців')
plt.ylabel('Кількість вовків')
plt.title('Фазовий портрет y(x)')
plt.legend()
plt.grid()

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Код до завдання 2

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def epidemic_model(t, x, y, z, H, beta, gamma):
    dxdt = -(beta / H) * x * y
    dydt = (beta / H) * x * y - (1 / gamma) * y
    dzdt = (1 / gamma) * y
    return dxdt, dydt, dzdt

def runge_kutta_4th_order(H, beta, gamma, x0, y0, z0, t0, h, T):
    n = int(T / h) + 1
    t_values = np.linspace(t0, T, n)
    x_values = np.zeros(n)
    y_values = np.zeros(n)
    z_values = np.zeros(n)

    x_values[0], y_values[0], z_values[0] = x0, y0, z0

    for i in range(1, n):
        t = t_values[i - 1]
        x, y, z = x_values[i - 1], y_values[i - 1], z_values[i - 1]

        k1x, k1y, k1z = epidemic_model(t, x, y, z, H, beta, gamma)
        k2x, k2y, k2z = epidemic_model(t + h / 2, x + h * k1x / 2, y + h * k1y / 2, z + h * k1z / 2, H, beta, gamma)
        k3x, k3y, k3z = epidemic_model(t + h / 2, x + h * k2x / 2, y + h * k2y / 2, z + h * k2z / 2, H, beta, gamma)
        k4x, k4y, k4z = epidemic_model(t + h, x + h * k3x, y + h * k3y, z + h * k3z, H, beta, gamma)

        x_values[i] = x + (h / 6) * (k1x + 2 * k2x + 2 * k3x + k4x)
        y_values[i] = y + (h / 6) * (k1y + 2 * k2y + 2 * k3y + k4y)
        z_values[i] = z + (h / 6) * (k1z + 2 * k2z + 2 * k3z + k4z)

    return t_values, x_values, y_values, z_values

# Вхідні дані
H = 985
beta = 10
gamma = 15
x0 = 885
y0 = 75
z0 = 25
t0 = 0
h = 0.1
T = 40

# Розв'язок системи рівнянь
t_values, x_values, y_values, z_values = runge_kutta_4th_order(H, beta, gamma, x0, y0, z0, t0, h, T)

```

```
# Побудова графіків
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t_values, x_values, label='Здорові (x)', color='green')
plt.plot(t_values, y_values, label='Хворі (y)', color='red')
plt.plot(t_values, z_values, label='Перехворіли (z)', color='blue')
plt.xlabel('Час (дні)')
plt.ylabel('Кількість людей')
plt.title('Розповсюдження епідемії')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

Висновок

У ході виконання даної лабораторної роботи я оволодів методами комп'ютерного моделювання динамічних систем, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Набув навички застосування чисельних методів Рунге-Кутта для розв'язування систем ЗДР.