Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра автоматизованих систем управління

Звіт

до лабораторної роботи № 3

з дисципліни

“**Моделювання процесів та смарт систем**”

Виконав: студент групи ОІ-35

Маселко Володимир

Прийняв : асистент каф. АСУ

Мельник Р. В.

Львів – 2025

Лабораторна робота № 3

Моделювання просторово-розподілених процесів.

Мета: Засвоїти основні поняття про моделі просторово-розподілених процесів та про їхні властивості, навчитися будувати і досліджувати такі моделі за допомогою чисельних методів. Оволодіння навичками моделювання систем, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Варіант: 15

Короткі теоретичні відомості

Більшість відомих у природі явищ і процесів поширюються в часі та просторі. Фізичні закони, що визначають їхню поведінку, мають безупинний характер та описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних. Це електричні і магнітні поля, поширення тепла і дифузійні процеси, теорія пружності й ін.

Формулюємо задачу таким чином. Необхідно знайти в якійсь області (ділянці) на площині xy безперервну функцію V(x, y), яка задовольняє рівнянню (4) та приймає на межі Г області задані значення VГ = (x, y). Така задача відома під назвою задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Ця задача є класичною та часто використовується для демонстрації переваг її розв’язування паралельними методами, наприклад, в дисципліні “Паралельні та розподілені обчислення”. В загальному випадку межа Г може бути довільною, однак будемо розглядати задачу Діріхле на прямокутній ділянці , сторони якої дорівнюють a і b. Для розв’язування диференціальних рівнянь у частинних похідних частіше використовують кінцево-різницеві методи, в яких частинні похідні апроксимуються різницевими операторами.

У практичних додатках важливу роль відіграє моделювання розповсюдження тепла в деякому середовищі в часі. Швидкість зміни температури в точках середовища описується за допомогою рівняння теплопровідності, яке для одновимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \tag{10}$$

де $a = \lambda c/\rho$ ($м^2/с$) – коефіцієнт температуропровідності матеріалу середовища, який характеризує швидкість зміни у ньому температури;

λ (Вт/(м·град)) – коефіцієнт теплопровідності речовини;

c (Дж /(кг·°С)) – питома теплоємність; (для довідки: Дж = Вт·с);

ρ ($кг/м^3$) – щільність речовини.

Розроблено безліч методів розв'язування рівняння теплопровідності, таких як метод Фур'є, метод розділення змінних, метод кінцевих різниць, метод скінченних елементів та ін. У випадку методу кінцевих різниць, одновимірна задача розв'язується на двовимірній сітці, один вимір якої являє товщину простору поширення тепла, а інший – час. У даній лабораторній роботі використовується метод, в якому зміна температури в часі обчислюється за допомогою чисельного інтегрування.

Розглянемо стінку, що складається з однорідної речовини, яка розділяє два середовища з різними температурами. Стінка має товщину L (рис. 2). Припустимо, що ширина і висота стінки нескінченні. Температура середовища зліва від стінки може змінюватися в часі за деяким законом 1(t), а справа – за законом 2(t). Функції 1(t) та 2(t) назвемо граничними умовами. Початкове розподілення температури в точках стінки задається функцією (у), яку будемо називати початковими умовами.

Будемо позначати температуру в точках стінки через u(t, y). Припускаємо, що площа стінки нескінченна, а речовина стінки однорідна, отже точки стінки, що знаходяться на одній вертикалі, мають однакову температуру

Для отримання системи звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимують рівняння теплопровідності, розділимо стінку вертикальними лініями на N шарів однакової товщини . На перетині цих прямих з віссю у утвориться ряд точок, які пронумеруємо від i = 1 до N + 1. Тепер для кожної з позначених точок можна записати рівняння теплопровідності

$$\mu = a/\delta^2$$

$$
\begin{aligned}
u_1'(t) &= \mu\left(u_2(t) - 2u_1(t) + \varphi_1(t)\right),\\
u_2'(t) &= \mu\left(u_3(t) - 2u_2(t) + u_1(t)\right),\\
u_3'(t) &= \mu\left(u_4(t) - 2u_3(t) + u_2(t)\right),\\
u_4'(t) &= \mu\left(\varphi_2(t) - 2u_4(t) + u_3(t)\right)
\end{aligned}
$$

за початкових умов ui(0) = (yi) та граничних умов u(t, 0) = 1(t), u(t, L) = 2(t). Таку систему рівнянь можна розв'язати за допомогою будь-яких методів чисельного інтегрування (наприклад, Рунге-Кутта). Для випадку, коли границях стінки підтримується стала температура, а початкова температура у стінці є нульовою, тобто 1(t) = , 2(t) = і (y) = 0, відомо аналітичний розв'язок задачі теплопровідності (11) – (12) у вигляді

$$u(t,y)=\frac{\beta-\alpha}{L}y+\alpha+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\beta(-1)^n-\alpha\right)e^{-\left(\frac{\pi n}{L}a\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n}{L}y\right).$$

Хід роботи

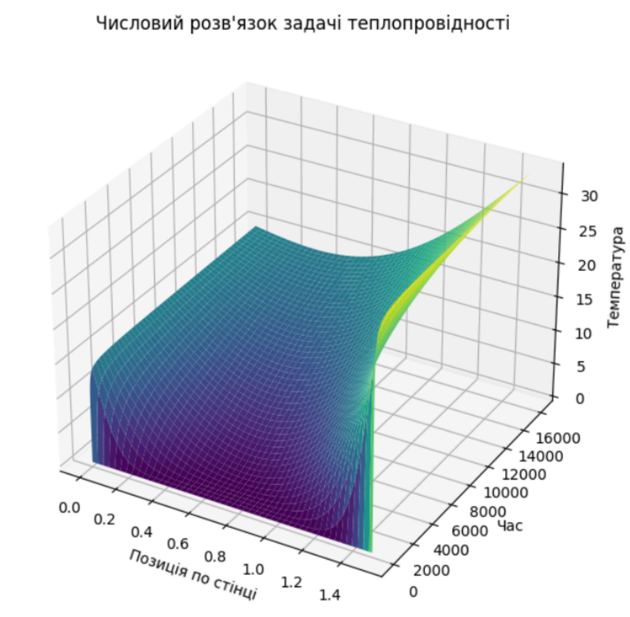
Варіант	Матеріал	*a*, 10^{-6} м^2/с	*L*, м	*T*, год.	*N*	*h*	$\varphi_1(t)=\alpha$, °C	$\varphi_2(t)=\beta$, °C	$\varphi(y)$, °C
15	Повітря	19,0	1,5	4,5	100	0,15	15	34	0

h = 5

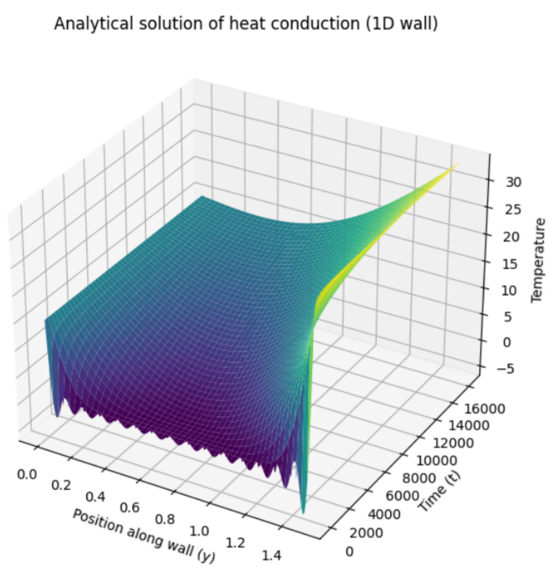
Змоделював процес зміни температури в стінці із заданого матеріалу згідно мого завдання

```
u'1(t) = 0.084 * ( u2(t) - 2*u1(t) + 15 )
u'2(t) = 0.084 * ( u3(t) - 2*u2(t) + u1(t) )
u'3(t) = 0.084 * ( u4(t) - 2*u3(t) + u2(t) )
u'4(t) = 0.084 * ( 34 - 2*u4(t) + u3(t) )
```

Написав програмну реалізацію методу Рунге-Кутта для чисельного інтегрування із кроком h та тривалістю T, отриманої в попередньому пункті системи звичайних диференціальних рівнянь. Результат виконання програми:



Написав програмну реалізацію аналітичного розв’язку задачі теплопровідності. Результат виконання програми:



Висновок

У ході виконання даної лабораторної роботи я засвоїв основні поняття про моделі просторово-розподілених процесів та про їхні властивості, навчитися будувати і досліджувати такі моделі за допомогою чисельних методів. Оволодів навичками моделювання систем, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, методом приведення до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Додатки

Код до завдання 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Вихідні дані
a = 19 * 10**(-6)  # meters
L = 1.5  # meters
T = 4.5 * 3600  # seconds
N = 100
h = 5 # seconds
alpha = 15
beta = 34

# Функція для системи рівнянь
def heat_equation_system(u, mu, alpha, beta, N):
  du_dt = np.zeros(N)
  du_dt[0] = mu * (u[1] - 2 * u[0] + alpha)
  for i in range(1, N - 1):
    du_dt[i] = mu * (u[i + 1] - 2 * u[i] + u[i - 1])
  du_dt[-1] = mu * (beta - 2 * u[-1] + u[-2])
  return du_dt

# Метод Рунге-Кутта 4-го порядку
def runge_kutta_4(f, u0, t_values, mu, alpha, beta, N):
  num_steps = len(t_values)
  u_values = np.zeros((num_steps, N))
  u_values[0] = u0

  for i in range(num_steps - 1):
    h = t_values[i + 1] - t_values[i]
    u = u_values[i]

    k1 = h * f(u, mu, alpha, beta, N)
    k2 = h * f(u + k1 / 2, mu, alpha, beta, N)
    k3 = h * f(u + k2 / 2, mu, alpha, beta, N)
    k4 = h * f(u + k3, mu, alpha, beta, N)

    u_values[i + 1] = u + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

  return t_values, u_values

delta = L / N  # крок по простору
mu = a / (delta ** 2)  # коефіцієнт теплопровідності

# Початкові умови
t_values = np.arange(0, T + h, h)
u0 = np.zeros(N)  # Початково температура в стінці всюди нульова

t_values, y_values = runge_kutta_4(heat_equation_system, u0, t_values, mu, alpha, beta, N)

print("u'1(t) =", np.round(mu * 1000) / 1000, "* ( u2(t) - 2*u1(t) +", alpha, ")", )
```

```
print("u'2(t) =", np.round(mu * 1000) / 1000, "* ( u3(t) - 2*u2(t) + u1(t) )")
print("u'3(t) =", np.round(mu * 1000) / 1000, "* ( u4(t) - 2*u3(t) + u2(t) )")
print("u'4(t) =", np.round(mu * 1000) / 1000, "* (", beta, "- 2*u4(t) + u3(t) )")

# Візуалізація числового розв'язку
X, Y = np.meshgrid(np.linspace(0, L, N), t_values)
Z = y_values

fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Площа 3D графіку
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

# Параметри графіка
ax.set_xlabel('Позиція по стінці')
ax.set_ylabel('Час')
ax.set_zlabel('Температура')
ax.set_title('Числовий розв\'язок задачі теплопровідності')


plt.show()
```

Код до завдання 2

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

a = 19.0 * 10**(-6)
L = 1.5
T = 4.5 * 3600
alpha = 15
beta = 34

h_T = 5
N_T = int(T / h_T)

N_L = 100
h_L = L / N_L

def heat_equation_analytical(t, y, alpha, beta, L, a):
  res = (beta - alpha) / L * y + alpha

  sum = 0;
  for n in range(1, 31):
    e_pow = np.e ** ((-a) * t * ((np.pi * n / L) ** 2))
    sum += 1 / n * ( beta * ((-1) ** n) - alpha ) * e_pow * np.sin(np.pi * n / L * y)
  sum *= 2 / np.pi

  res += sum
  return res

y_vals = np.linspace(0, L, N_L)
t_vals = np.linspace(0, T, N_T)

print(y_vals.shape)
print(t_vals.shape)

# Create surface data
Z = np.zeros((N_T, N_L))  # rows = time, cols = position

print(Z.shape)

for i in range (0, N_T):
          for j in range(0, N_L):
                    Z[i, j] = heat_equation_analytical(i * h_T, j * h_L, alpha, beta, L, a)


# Create meshgrid
Y, X = np.meshgrid(t_vals, y_vals, indexing='ij')  # careful with axes

# Plotting
fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
```

```
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')

ax.set_xlabel('Position along wall (y)')
ax.set_ylabel('Time (t)')
ax.set_zlabel('Temperature')
ax.set_title('Analytical solution of heat conduction (1D wall)')

plt.tight_layout()
plt.show()
```