hw 1

t1. 解: 由于 $e^{ix} \in C$, 总能把它表示成

幅角形式: $e^{ix} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

只需证明 $r=1$, $\theta = x$ 即可.

两边求导: $ie^{ix} = (\cos\theta + i\sin\theta)\frac{dr}{dx} + r(-\sin\theta + i\cos\theta)\frac{d\theta}{dx}$

代入 $e^{ix} = r(\cos\theta + i\sin(\theta))$:

$r(i\cos\theta - \sin\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)\frac{dr}{dx} + r(-\sin\theta + i\cos\theta)\frac{d\theta}{dx}$

比较系数得: $\frac{dr}{dx} = 0$, $\frac{d\theta}{dx} = 1 \Rightarrow r = C_1$, $\theta = x + C_2$

代入 $e^{i\cdot 0} = 1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)$

$\Rightarrow r = 1$, $\theta = x$

$\therefore e^{ix} = \cos x + i\sin x$

t2. 解, 考虑 $\int_{-\frac{\pi}{w_0}}^{\frac{\pi}{w_0}} e^{jnw_0t} e^{-jmw_0t} dt$

① $n=m$ 时, 上式 $= \int_{-\frac{\pi}{w_0}}^{\frac{\pi}{w_0}} 1\, dt = \frac{2\pi}{w_0}$

② $n \neq m$ 时, 上式 $= \int_{-\frac{\pi}{w_0}}^{\frac{\pi}{w_0}} e^{j(n-m)w_0t} dt$

$\xlongequal[-\pi \le u \le \pi]{u = w_0t} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-m)u} \frac{du}{w_0} = \frac{1}{w_0}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)u + i\sin(n-m)u\, du$

其中 $[-\pi, \pi]$ 内包含了整数个 $\cos(n-m)u$ 和 $\sin(n-m)u$ 的周期

$\therefore$ 上式 $= 0$