习题10

t13. $R(0) = \{1.2.3.4\}$

$R(1) = \{2.3.4\}$

t14. 解：R是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to xRx)$

R是对称的且R是传递的

$\Rightarrow (\forall x)((\exists y)(xRy \vee yRx) \to xRx)$

可知 只需令 $(\forall x)(\forall y)\neg(xRy \vee yRx)$ 即可.

构造 $\{1.2.3\}$ 上的空关系 ϕ

则 ϕ 是对称、传递的 且 ϕ 不是自反的

t15. 解：R_1：无比较性质

R_2：反对称、传递

R_3：自反、对称、传递

R_4：自反，传递

R_5：无比较性质

R_6：非自反，对称

R_7：非自反，反对称.

R_8：自反，对称

t17. 解：(1) R是自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to xRx)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to \langle x.x\rangle \in R)$

$\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

(2) R是非自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to \neg xRx)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \to \langle x,x\rangle \notin R)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\langle x,x\rangle \in I_A \to \langle x,x\rangle \notin R)$

$\Leftrightarrow I_A \cap R = \phi$

(3) R是传递的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRz \wedge zRy \to xRy)$

$\Rightarrow (\forall x)(\forall y)((\exists z)(xRz \wedge zRy) \to xRy)$

$\Rightarrow R\circ R \subseteq R$.

$R\circ R \subseteq R \Leftrightarrow \langle x.y\rangle \in R\circ R \to \langle x.y\rangle \in R$

$\Rightarrow (\forall z)(xRz \wedge zRy \Rightarrow xRy)$

$\Rightarrow$ R是传递的

18. 解：

(1) 真 R_1, R_2 是自反的

$\Rightarrow \langle x,x\rangle \in R_1 \wedge \langle x.x\rangle \in R_2$,

$\Rightarrow (\exists y)(\langle x.y\rangle \in R_2 \wedge \langle y.x\rangle \in R_1)$

$\Rightarrow \langle x.x\rangle \in R_1\circ R_2 \Leftrightarrow R_1\circ R_2$ 是自反的

(2) 假. 考虑 $A=\{1.2.3\}$

$R_1 = \{\langle 1.1\rangle\}$. $R_2 = \{\langle 2.2\rangle, \langle 3.3\rangle\}$

(3) ~~真 $\langle x.y\rangle \in R_1\circ R_2$~~

~~$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle y.z\rangle \in R_2 \wedge \langle z.x\rangle \in R_1)$~~

~~$\Rightarrow (\exists z)(\langle z.y\rangle \in R_2 \wedge \langle x.z\rangle \in R_1)$~~

~~$\Rightarrow$~~

假. 考虑 $A=\{1.2.3\}$

$R_1 = \{\langle 3.1\rangle \langle 1.3\rangle\}$ $R_2 = \{\langle 2.3\rangle \langle 3.2\rangle\}$

则 $R_1\circ R_2 = \{\langle 2.1\rangle\}$

(4) 假. 考虑 $A=\{1.2.3\}$

$R_1 = \{\langle 1.2\rangle, \langle 2.3\rangle \langle 1.3\rangle\}$

$R_2 = \{\langle 3.1\rangle \langle 1.2\rangle \langle 3.2\rangle\}$

$R_1\circ R_2 = \{\langle 3.3\rangle, \langle 3.2\rangle, \langle 1.3\rangle, \langle 2.3\rangle\}$.

则 $\langle 2.2\rangle \notin R_1\circ R_2$. 但 $\langle 2.2\rangle$ 应 $\in R_1\circ R_2$

19. 解：(1) $\emptyset$

(2) $\{\langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

20. 解：$\langle 3,1\rangle \in R$, $\langle 1,2\rangle \in R$

且 $\langle 3,2\rangle \notin R$.

故 $R_1 = E_A$ 即可

22. 解：$R_1 \circ R_2 = \{\langle c, d\rangle\}$

$R_2 \circ R_1 = \{\langle a, d\rangle, \langle a, c\rangle\}$

27. 解：(1) 关系矩阵

$$M(R) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$r(R) = M(R) + I_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$s(R) = M(R) + M(R)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由Warshall算法：

$$t(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \end{bmatrix}$$

作图：

$r(R)$: $a \rightleftarrows b \to c \to d$

$s(R)$: $a \rightleftarrows b \rightleftarrows c \rightleftarrows d$

$t(R)$: $a \rightleftarrows b \to c \to d$