hw3

t1. 解:

$$\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}\|f(t)\|^2dt \xlongequal{\text{Parseval定理}} \frac{1}{T_1}\left(\|a_0\|^2T_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\|a_n\|^2\cdot\frac{1}{2}T_1+\|b_n\|^2\cdot\frac{1}{2}T_1\right)\right)$$

$$=\|a_0\|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\|a_n\|^2+\|b_n\|^2\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\|F_n\|^2=\|a_0\|^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left\|\frac{a_n+jb_n}{2}\right\|^2+\left\|\frac{a_n-jb_n}{2}\right\|^2$$

$$=\|a_0\|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\|a_n\|^2+\|b_n\|^2\right)$$

t2. 解: $f(t)=\sin t\cos 2t+5\cos 3t\sin 4t$

$$=\frac{\sin 3t+\sin(-t)}{2}+5\cdot\frac{\sin 7t+\sin t}{2}$$

$$=2\sin t+\frac{\sin 3t}{2}+\frac{5}{2}\sin 7t$$

$\therefore T_1=2\pi$

$$\int_0^{T_1}f(t)\,dt=0$$

$$\int_0^{T_1}f(t)\sin nt\,dt=\int_0^{T_1}2\sin t\sin nt+\frac{\sin 3t\sin nt}{2}+\frac{5}{2}\sin 7t\sin nt\,dt$$

$$=\begin{cases}T_1, & n=1\\ \frac{T_1}{4}, & n=3\\ \frac{5}{4}T_1, & n=7\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$\int_0^{T_1}f(t)\cos nt=0.$$

$$\Rightarrow f(t)=2\sin t+\frac{\sin 3t}{2}+\frac{5}{2}\sin 7t$$

即 $a_n=0.\ \forall n\in N$

$$b_n=\begin{cases}2 & n=1\\ \frac{1}{2} & n=3\\ \frac{5}{2} & n=7\\ 0. & \text{else}\end{cases}$$