清华大学 Tsinghua University **数学作业纸**

班级 姓名 编号 科目 第 页

hw6.

七1. 已知 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(w)$，证明：

$$T\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(nw_0)$$

其中 $w_0=\frac{2\pi}{T}$

解：$F_s(w)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(w-nw_0)$

同时 $F_s(w)=DTFT[f(t)]$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT)\,e^{-jnTw}$$

令 $w=0$，则 $\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(nw_0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT)$

即 $T\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(nw_0)$

七2. 已知 $DTFT[x(n)]=X(w)$，求以下序列的 DTFT：

(a) $x(n)*x^*(-n)$

$DTFT[x(n)*x^*(-n)]=DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x^*(n)]$

$=X(w)\cdot(-(-X(-w)))=X^2(w)$

(b) $x(2n+1)$

$DTFT[X(2n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(2n+1)\,e^{-jnw}$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[x(n)-(-1)^n x(n)]\,e^{-j\frac{n-1}{2}w}$

$=\frac{1}{2}e^{\frac{jw}{2}}\left[X(\frac{w}{2})-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\,e^{-j\cdot n(\frac{w}{2}+\pi)}\right]$

$=\frac{e^{\frac{jw}{2}}}{2}\left[X(\frac{w}{2})-X(\frac{w}{2}+\pi)\right]$

(c) $x(n)-x(n-2)$

$DTFT[x(n)-x(n-2)]=X(w)-X(w)\cdot e^{-2jw}$

(d) $x(n)*x(n-1)$

$DTFT[x(n)*x(n-1)]=X(w)\cdot X(w)\,e^{-jw}$

$=X^2(w)\,e^{-jw}$

七3. 证明：若 $X(w)$ 是 $x(n)$ 的 DTFT，则

$$y(n)=\begin{cases}x(n/L), & n=kL,\ k\in Z\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

的 DTFT 为 $Y(w)=X(Lw)$

解：$Y(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)\,e^{-jwn}$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(k)\,e^{-jwkL}$

$=X(Lw)$