Вариант 11

1. Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики данного случайного вектора.

$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(3x^2+4xy+6y^2+2x-8y+5)\right) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(3(x\ +\ 1)^2\ +4(x\ +\ 1)(y\ -\ 1)\ +6(y\ -\ 1)^2)\right)(1)$

$$f_{\xi\eta}(x,\ y) = -\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta(1-\rho^2)}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_\xi)^2}{\sigma_\xi^2}-\frac{2\rho(x-\mu_\xi)(y-\mu\eta)}{\sigma_X\sigma_\eta}+\frac{(y-\mu_\eta)^2}{\sigma_\eta^2}\right)}(2)$$

Исходя из формул (1) и (2), математические ожидания равняются:

$\mu_\xi = -1$

$\mu_\eta = 1$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_\xi^2} = -\frac{3}{2} \\ \\ \frac{2\rho}{2\sigma_\xi\sigma_\eta(1-\rho^2)} = -2 \\ \\ -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_\mu^2} = -3 \end{cases}$$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{3(1-\rho^2)}$$

$$\sigma_\eta^2 = \frac{1}{6(1-\rho^2)}$$

$$\sigma_\xi^2 = 2\sigma_\eta^2$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{2}\sigma_\eta$$

Отсюда

$\rho = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\sigma_\xi^2 = \frac{3}{7}$
$\sigma_\eta^2 = \frac{3}{14}$

Ковариационная матрица

$$cov(\xi,\eta) = \rho\ \sigma_\xi\ \sigma_\eta = -\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{3}{14}}\sqrt{\frac{3}{14}} = -\frac{1}{7}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & \operatorname{cov}(\xi,\eta) \\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{\mu} = (-1, 1) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}}$$

2. Найти аффинное преобразование, переводящее исходный случайный вектор в стандартный нормальный.

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(3x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x - 8y + 5)\right) = C \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(3(x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3})^2 + \frac{14}{3}(y-1)^2\right)\right)$$

Требуется найти случайный вектор $\vec{y} = (\xi_1, \eta_1) = A\vec{x}$

Положим

$\xi_1 = \sqrt{3}(x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3})$

$\eta_1 = \sqrt{\frac{14}{3}}(y-1)$

Матрица A:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\boxed{\vec{y} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{14}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}}$$

3. Найти ортогональное преобразование, переводящее соответствующий центрированный случайный вектор в вектор с независимыми компонентами.

$$|\Sigma| = \frac{1}{14}$$

$$\Sigma^{-1} = 14 \begin{pmatrix} \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|\Sigma^{-1} - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{9 + \sqrt{2}5}{2} = 7$$

$$\lambda_2 = \frac{9 - \sqrt{2}5}{2} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & 2 \\ 2 & 6-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda_1)v_1 + 2v_2 = 0$$

$$v_2 = \frac{-(3-\lambda_1)}{2} v_1 = \frac{-(3-7)}{2} v_1 = 2v_1$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda_2)v_1 + 2v_2 = 0$$

$$v_1 = \frac{-2}{(3-\lambda_2)} v_2 = \frac{-2}{3-2} v_1 = -2v_2$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормализация вектора:

$$||v_1|| = \sqrt{1+(2)^2} = \sqrt{5}$$

$$||v_2|| = \sqrt{1+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$v_1 = (\frac{v_1}{||v_1||} \frac{v_2}{||v_1||}) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$v_2 = (\frac{v_1}{||v_2||} \frac{v_2}{||v_2||}) = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$U = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

В этом случае $U\Sigma^{-1}U^T$ — диагональная матрица.

Тогда случайный вектор $\vec{z} = (\vec{x} - \vec{\mu})U$ имеет независимые компоненты

$$\boxed{\vec{z} = (x+1\ y-1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(x+1) + \frac{2}{\sqrt{5}}(y-1) \\ -\frac{2}{\sqrt{5}}(x+1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(y-1) \end{pmatrix}}$$

4. Вычислить характеристики совместного распределения случайного вектора $(\xi + 2\eta, -4\xi - 2\eta)$ и записать его плотность.

$$\mathbf{Z} = (Z_1\ Z_2) = \begin{pmatrix} \xi + 2\eta \\ -4\xi - 2\eta \end{pmatrix}$$

Дано:

$$\mu_\xi = -1, \quad \mu_\eta = 1, \quad \sigma_\xi^2 = \frac{3}{7}, \quad \sigma_\eta^2 = \frac{3}{14}, \quad \text{cov}(\xi, \eta) = -\frac{1}{7}$$

Матрица коэффициентов A для линейного преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Вектор математических ожиданий:

$$\mu_Z = A\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) + 2 \cdot 1 \\ -4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ковариационная матрица Z:

$$\Sigma_Z = A \Sigma_{\xi,\eta} A^\top$$

Ковариационная матрица исходного вектора:

$$\Sigma_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

Считаем Σ_Z:

$$\Sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{38}{7} \end{pmatrix}$$

Плотность многомерного нормального распределения:

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma_Z}} \exp -\frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{z} - \mu_Z)^\top \Sigma_Z^{-1} (\mathbf{z} - \mu_Z) \right\}$$

Определяем детерминант:

$$\det \Sigma_Z = \frac{5}{7} \cdot \frac{38}{7} - (-\frac{38}{7})^2 = \frac{190}{49} - \frac{64}{49} = \frac{18}{7}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + 2\eta \\ -4\xi - 2\eta \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_Z^{-1} = \frac{7}{18}\begin{pmatrix} \frac{38}{7} & \frac{8}{7} \\ \frac{8}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi \det \Sigma_Z} \exp -\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{z} - \mu_Z)^\top \Sigma_Z^{-1}(\mathbf{z} - \mu_Z)\right\}$$

Значит плотность:

$$f_{Z_1,Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}} \exp -\frac{1}{2}\left\{(\mathbf{z} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})^\top \begin{pmatrix} \frac{19}{8} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}(\mathbf{z} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})\right\}$$

$$f_{Z1,Z2}(z1, z2) = \frac{\sqrt{7}}{6\pi\sqrt{2}} exp(-\frac{1}{2}\left\{\frac{19}{9}(z_1 - 1)^2 + \frac{8}{9}(z_1 - 1)(z_2 - 2) + \frac{5}{18}(z_2 - 2)^2)\right\}$$

5. Найти условное распределение ξ при условии η.

Дано

$$(\xi, \eta) \sim \mathcal{N}\Big(\mu = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \Sigma = \begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & 3/2\end{pmatrix}\Big)$$

Формулы для условного распределения

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\Big(\begin{pmatrix}\mu_\xi\\\mu_\eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_\xi^2 & \sigma_{\xi\eta}\\\sigma_{\xi\eta} & \sigma_\eta^2\end{pmatrix}\Big)$$

$$\xi \mid \eta = y \sim \mathcal{N}\Big(\mu_\xi + \frac{\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_\eta^2}(y - \mu_\eta),\ \sigma_\xi^2 - \frac{\sigma_{\xi\eta}^2}{\sigma_\eta^2}\Big)$$

Условное математическое ожидание

$$\mu_{\xi|\eta=y} = \mu_\xi + \frac{\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_\eta^2}(y - \mu_\eta) = -1 + \frac{-2}{3/2}(y-1) = -1 - \frac{4}{3}(y-1) = -1 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}y$$

Условная дисперсия

$$\sigma^2_{\xi|\eta} = \sigma^2_\xi - \frac{\sigma^2_{\xi\eta}}{\sigma^2_\eta} = 3 - \frac{(-2)^2}{3/2} = 3 - \frac{4}{3/2} = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

Итоговое условное распределение

$$\boxed{\xi \mid \eta = y \sim \mathcal{N}\Big(\frac{1-4y}{3},\ \frac{1}{3}\Big)}$$

6. Даны квадратичные формы $Q1(\xi,\eta) = 32\xi^2 - 48\xi\eta + 18\eta^2$ и $Q2(\xi,\eta) = 48\xi^2 - 24\xi\eta + 27\eta^2$.

(a) Вычислить распределения (х.ф-ии.) распределений Q1 и Q2 , классифицировать их.

$$Q_1(\xi,\eta) = 32\xi^2 - 48\xi\eta + 18\eta^2 = 2(4\xi - 3\eta)^2$$

$$Q_2(\xi,\eta) = 48\xi^2 - 24\xi\eta + 27\eta^2 = 12(2\xi - \eta)^2 + 15\eta^2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 48 & -12 \\ -12 & 27 \end{pmatrix}$$

$$|E - 2iA_1| = \begin{vmatrix} 1-64i & 48i \\ 48i & 1-36i \end{vmatrix} = (1-64i)(1-36i) + 48^2 = 1 - 100i$$

$$|E - 2iA_2| = \begin{vmatrix} 1-96i & 24i \\ 24i & 1-54i \end{vmatrix} = (1-96i)(1-54i) + 24^2 = -4607 - 150i$$

$$\Phi_Q(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-2i\lambda}}\,\frac{1}{|I - 2iA|}$$

$$\boxed{\Phi_{Q_1} = \frac{1}{\sqrt{1-4i}}\,\frac{1}{1-100i} = \frac{-399\sqrt{1-4i} + 104i\sqrt{1-4i}}{399^2 + 10816}}$$

$$\boxed{\Phi_{Q_2} = \frac{1}{\sqrt{1-24i}\sqrt{1-30i}}\,\frac{1}{-4607-150i}}$$

Применяем критерий Сильвестра (угловые миноры)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix}$$

- $\Delta_1 = 32 > 0$
- $\Delta_2 = det A1 = 32 \cdot 18 - (-24)2 = 576 - 576 = 0$

Она вырожденная (полуопределенная)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 48 & -12 \\ -12 & 27 \end{pmatrix}$$

- $\Delta 1 = 48 > 0$
- $\Delta 2 = 48 \cdot 27 - (-12)2 = 1296 - 144 = 1152 > 0$

$\Delta 1 > 0$ $\Delta 2 > 0$. Это полностью соответствует критерию Сильвестра для **положительно определенной** матрицы.

(б) Определить, являются ли Q1 и Q2 независимыми.

Основной критерий независимости

Для гауссовского вектора $X \sim N(0, \Sigma) X \sim N(0, \Sigma)$ две квадратичные формы X^TA_1X и X^TA_2X$ будут **независимы тогда и только тогда, когда** выполняется условие:

$$A_1 \Sigma A_2 = 0$$

$$A_1 \Sigma A_2 = \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 & -12 \\ -12 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8112 & -4428 \\ -6084 & 3321 \end{pmatrix} \neq 0$$

Значит Q_1 и Q_2 зависимы