

# Домашнее задание 1

## ДЗ 1

(5,2)-код с набором кодовых слов (КС):

ИС	КС
00	00000
01	10110
10	01011
11	11101

ИС = информационные символы

1. Найти вероятность ошибки при передаче по ДСК с переходной вероятностью  $p = 10^{-3}$ .
2. Найти порождающую и проверочную матрицы

## решение ДЗ 1

### 1. Вероятность ошибки декодирования для (5,2) - кода в ДСК с $p = 10^{-3}$

Из таблицы кодовых слов находим минимальное расстояние:

**Кодовые слова:**

- $c_1 = 00000, w(c_1) = 0$
- $c_2 = 10110, w(c_2) = 3$

- $c_3 = 01011, w(c_3) = 3$
- $c_4 = 11101, w(c_4) = 4$

**Минимальное расстояние:**

$$d_{\min} = \min d(c_i, c_j) = \min 3, 3, 4 = 3$$

**Кратность исправляемых ошибок:**

$$t = \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor = \lfloor (3 - 1)/2 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$$

Код исправляет **только однократные ошибки**.

Код длины  $n = 5$ , вероятность ошибки бита  $p = 10^{-3}$

$$P_e = 1 - P_{\text{правильно}}$$

где

$$P_{\text{правильно}} = (1 - p)^5 + (5 \cdot 1)p(1 - p)^4$$

**Вычисление:**

$$(1 - p)^5 = (0.999)^5 \approx 0.99501$$

$$(5 \cdot 1)p(1 - p)^4 = 5 \times 0.001 \times (0.999)^4 \approx 5 \times 0.001 \times 0.99601 \approx 0.00498$$

$$P_{\text{правильно}} \approx 0.99501 + 0.00498 = 0.99999$$

$$P_e = 1 - 0.99999 = 10^{-5}$$

## 2. Порождающая и проверочная матрицы

**Базисные векторы:**

$$e_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0), e_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1)$$

Порождающая матрица:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверочная (ортогональна строкам G):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:  $G \cdot H^T = 0$

ДЗ 2

Показать, что расстояние Хемминга удовлетворяет аксиомам расстояния и может использоваться как метрика

## решение ДЗ 2

Аксиомы метрики:

1. **Неотрицательность:**  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$

- Число различий  $\geq 0$ , равно 0 только при полном совпадении

2. **Симметричность:**  $d(x, y) = d(y, x)$

- Различие позиций симметрично

3. **Неравенство треугольника:**  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- Если  $x_i \neq z_i$ , то либо  $x_i \neq y_i$ , либо  $y_i \neq z_i$  (или оба)

**Вывод:** Расстояние Хэмминга — корректная метрика.

ДЗ 3

Доказать теорему

Код с минимальным расстоянием  $d_{\min}$  исправляет любые комбинации ошибок кратности  $t \leq \lfloor (d - 1)/2 \rfloor$ , где  $\lfloor x \rfloor$  - наибольшее целое, не превышающее  $x$

## решение ДЗ 3

**Теорема:** Код с  $d_{\min}$  исправляет  $t \leq \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$  ошибок.

**Доказательство:**

1. Пусть  $c$  — переданное,  $c'$  — принятое,  $w(e) = t$
2. Расстояние до правильного:  $d(c, c') = t$
3. До любого другого  $c''$ :  $d(c'', c') \geq d_{\min} - t$  (из неравенства треугольника)
4. Для исправления нужно:  $t < d_{\min} - t$
5. Отсюда:  $2t < d_{\min}$  или  $t < d_{\min}/2$
6. В целых числах:  $t \leq \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$

## ДЗ 4

Найти порождающую и проверочную матрицы для кода

ИС	КС
000	000000
100	110100
010	011010
110	101110
001	101001
101	011101
011	110011

ИС	КС
111	000111

## решение ДЗ 4

Порождающая матрица:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверочная матрица:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$