Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 13 "Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Адамса" дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20001 Ситникова М.П.
Преподаватель Козлов К.Н.

7 октября 2024 г

Содержание

1. Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи

Будем рассматривать задачу Коши для ОДУ 1-го порядка. $y' = f(x, y), x \in [a, b], y(a) = y_0.$

Пусть $D = \{(x, y) \mid a \le x \le b, -\infty < y < +\infty\}$ и функция $f(x, y)$ непрерывна на D. Если f удовлетворяет условию Липшица на D по y, т. е. Для любых $(x, y_1), (x, y_2) \in D, \exists L > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2|$.

1.2 Постановка задачи

Требуется решить задачу Коши для ОДУ 1-го порядка:

$$xy' + (x+1) y = 3 x^2 e^{-x}$$

$$(a, b) = (1,5), y(a) = \frac{1}{e}$$

Точное решение задачи:

$$y = x^2 e^{-x}$$

Далее необходимо:

1. Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке
2. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
3. Построить график изменения шага по отрезку.
4. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.

2. Алгоритмы методов и условия их применимости

2.1 Метод (экстраполяционный) Адамса-Башфорта 4 порядка

Алгоритм метода:

Поскольку метод Адамса-Башфорта является многошаговым (для 4-го порядка нужно 4 точки), необходимо иметь несколько точек до того, как алгоритм сможет быть применен. Для этого используется метод Эйлера 2-го порядка, который обеспечивает несколько начальных точек, выполняя интегрирование от начального значения с использованием фиксированного шага.

Формула метода Эйлера второго порядка выглядит так:

$$y_{mid} = y_n \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

$$f_{mid} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_{mid}\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f_{mid}$$

Основная идея метода Адамса-Башфорта заключается в том, что вместо использования только текущего значения функции $f(x, y)$, используются предыдущие вычисленные значения функции на нескольких шагах назад. Это позволяет достичь высокой точности при сохранении эффективности.

Формула 4-го порядка метода Адамса-Башфорта:

$$y_{n+1} = y_n + 24h\left(55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})\right)$$

Для достижения заданной точности используется правило Рунге:

$$error = \frac{|y_{2h} - y_h|}{15}$$

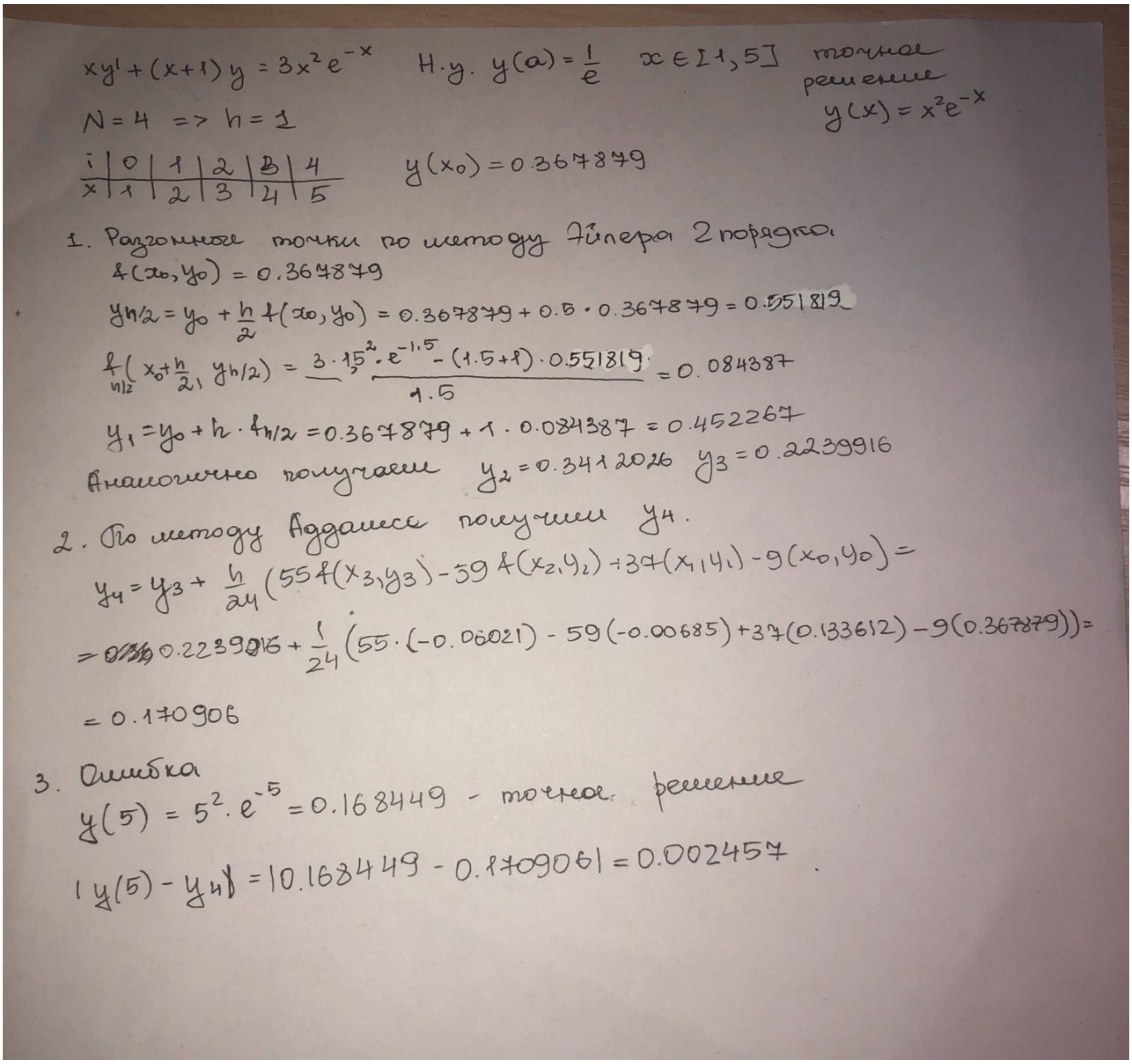
Условия применимости метода:

1. Функция удовлетворяет условию Липшица.

3. Анализ задачи

Необходимо выбрать интервал нахождения функции. Для нашей задачи подойдёт интервал [1, 5]. После выбора нужных параметров, будем применять модифицированный метода Эйлера для нахождения разгонных точек. Затем для решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка применим метод Аддамса 4 порядка.

4. Тестовый пример для задачи малой размерности (N = 4)



$xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$ Н.у. $y(a) = \frac{1}{e}$ $x \in [1, 5]$ точное решение $y(x) = x^2 e^{-x}$

$N = 4 \Rightarrow h = 1$

i	0	1	2	3	4
x	1	2	3	4	5

$y(x_0) = 0.367879$

1. Разгонные точки по методу Эйлера 2 порядка

$f(x_0, y_0) = 0.367879$

$y_{h/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 0.367879 + 0.5 \cdot 0.367879 = 0.551819$

$f_{h/2}(x_0 + \frac{h}{2}, y_{h/2}) = \frac{3 \cdot 1.5^2 \cdot e^{-1.5} - (1.5+1) \cdot 0.551819}{1.5} = 0.084387$

$y_1 = y_0 + h \cdot f_{h/2} = 0.367879 + 1 \cdot 0.084387 = 0.452267$

Аналогично получаем $y_2 = 0.3412026$ $y_3 = 0.2239916$

2. По методу Адамса получим y_4.

$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55 f(x_3, y_3) - 59 f(x_2, y_2) + 37 f(x_1, y_1) - 9 f(x_0, y_0)) =$

$= 0.2239916 + \frac{1}{24}(55 \cdot (-0.06021) - 59(-0.00685) + 37(0.133612) - 9(0.367879)) =$

$= 0.170906$

3. Ошибка

$y(5) = 5^2 \cdot e^{-5} = 0.168449$ - точное решение

$|y(5) - y_4| = |0.168449 - 0.170906| = 0.002457$

Рис. 1: Ручной расчет

5. Модульная структура программы

5.1 Модульная структура программы

f(double x, double y) - Вычисляет значение функции f(x,y) согласно заданной формуле

std::vector<std::pair<double, double>> euler_method(double x0, double y0, double h, int steps) - Метод Эйлера 2-го порядка для получения начальных точек, которые необходимы для запуска многошагового метода Адамса-Бэшфорта.

std::vector<std::pair<double, double>> adams_bashforth_fixed(double h, double x0, double y0, double x_end, std::vector<std::pair<double, double>>& initial_points) - Четырёхшаговый метод Адамса-Бэшфорта для решения ОДУ с фиксированным шагом. Использует предыдущие четыре точки для аппроксимации нового значения решения.

std::vector<std::pair<double, double>> adams_bashforth_adaptive(double h, double x0, double y0, double x_end, std::vector<std::pair<double, double>>& initial_points, double eps, const std::string& filename) - Метод Адамса-Бэшфорта с динамическим изменением шага. Использует правило Рунге для контроля ошибки и адаптации шага интегрирования для достижения заданной точности.

6. Численный анализ решения

6.1 Иллюстрация работы метода Адамса-Бэшфорта 4 порядка

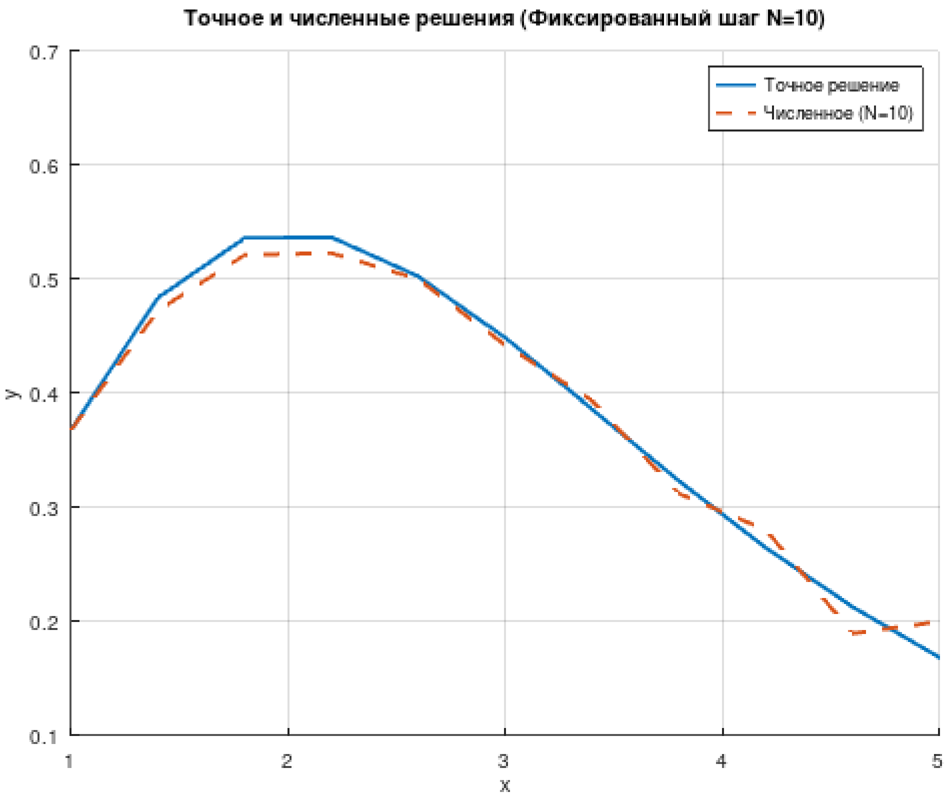


Рис. 2: Иллюстрация работы метода для N = 10

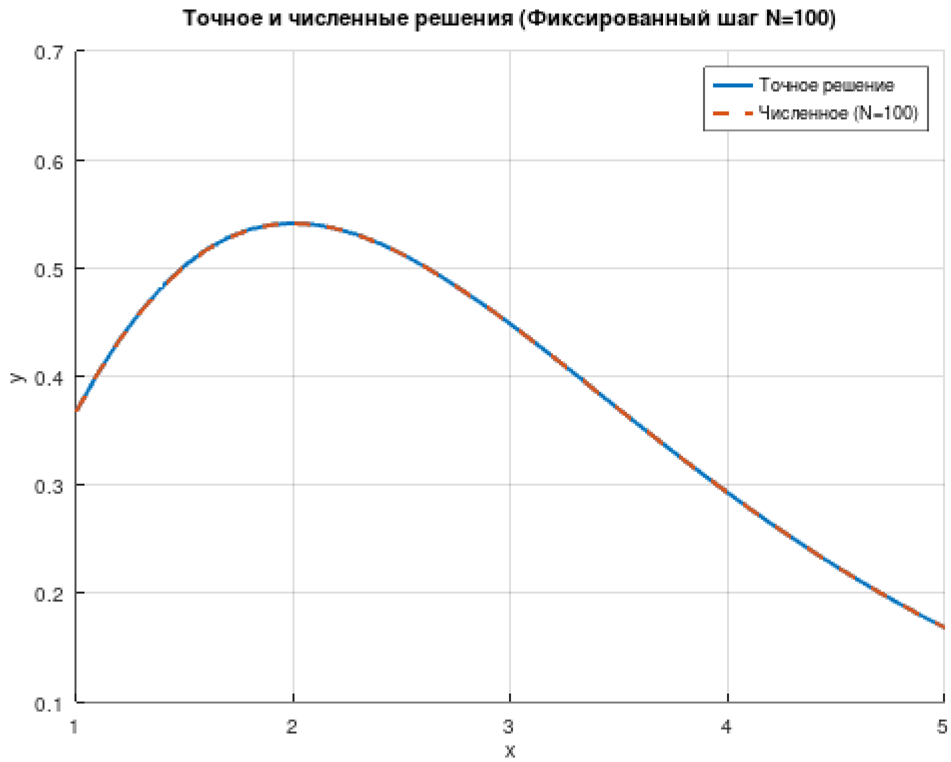


Рис. 3: Иллюстрация работы метода для N = 100

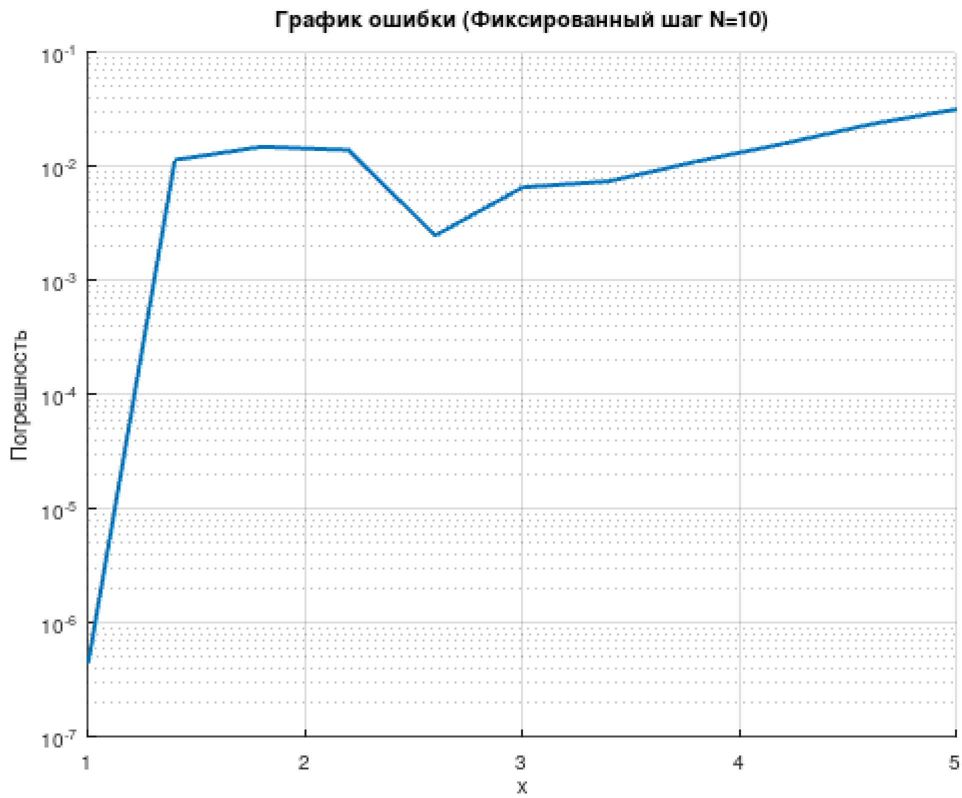


Рис. 4: График ошибки N = 10

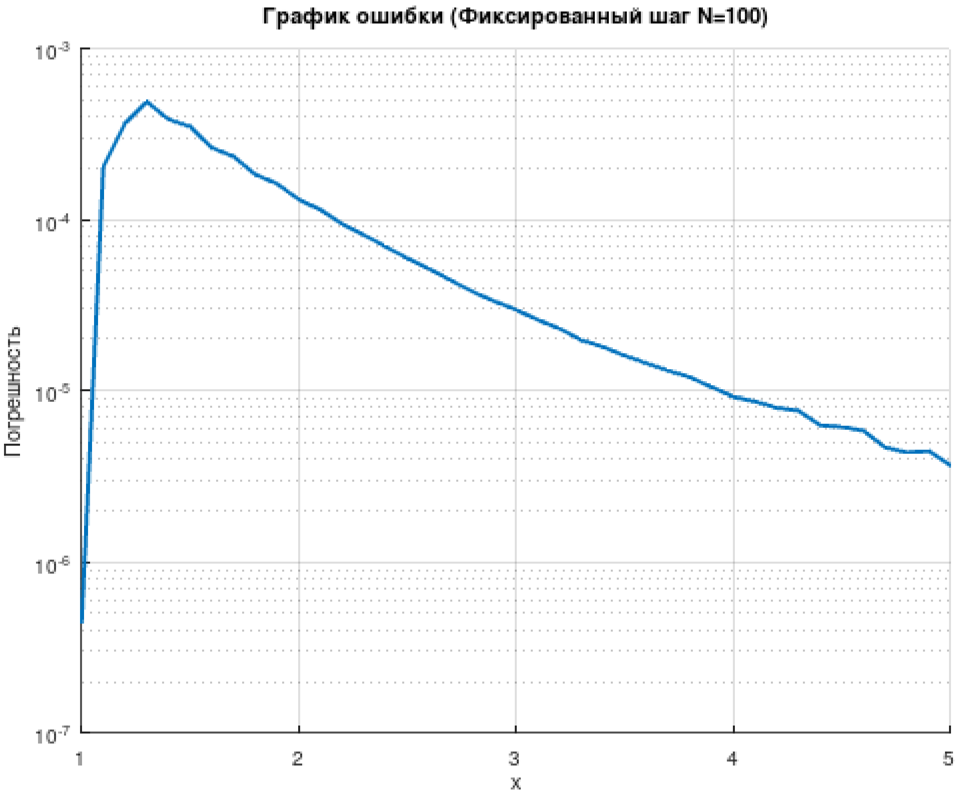


Рис. 5: График ошибки N = 100

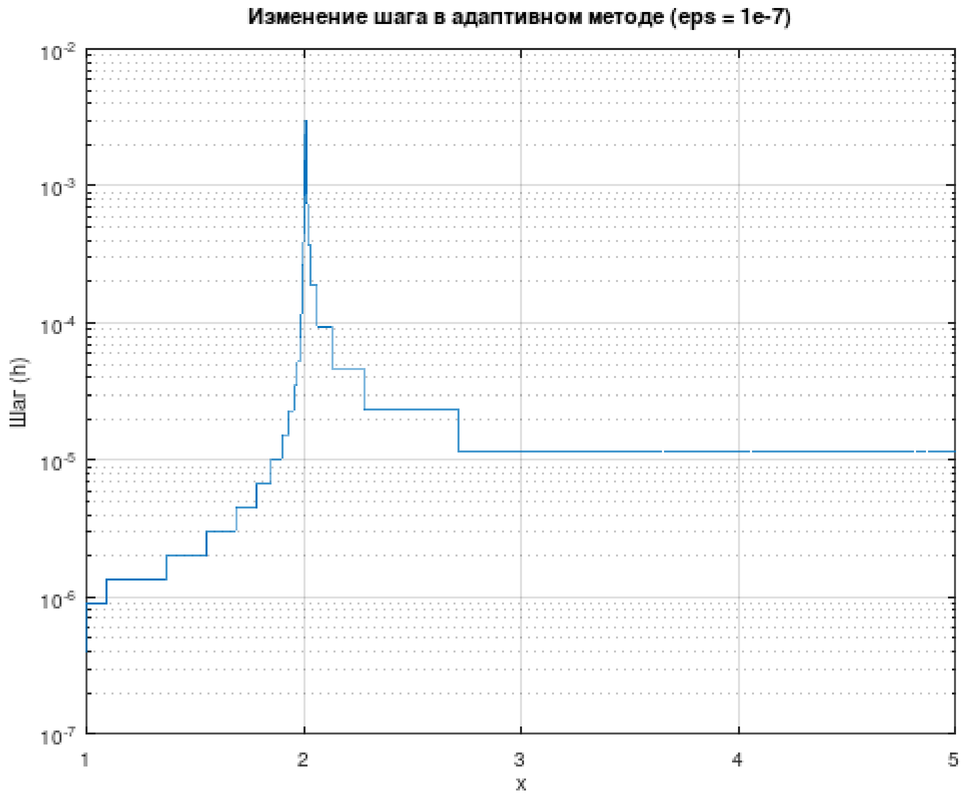


Рис. 6: Изменение шага

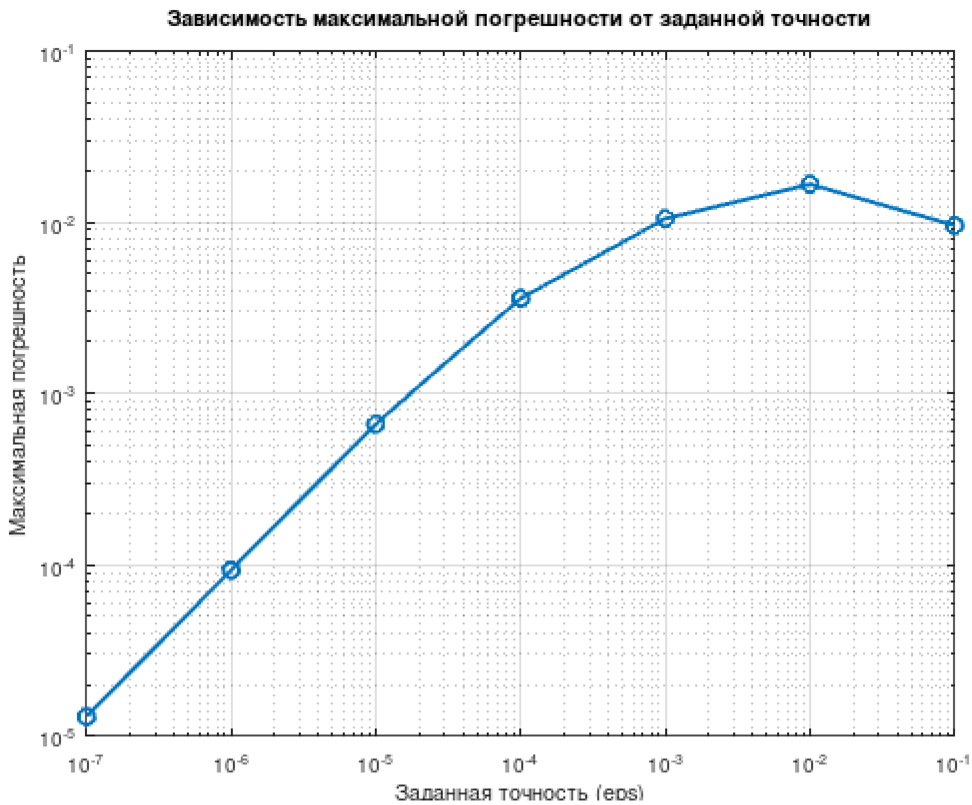


Рис. 7: Зависимость макс. погрешности от заданной точности

Промежуточные выводы:

1. Чем больше количество отрезков, тем меньше погрешность работы алгоритма (рис. 4 и рис. 5).

2. Реализованный метод Адамса 4-го порядка плохо достигает заданной точности из-за использования метода 2 порядка для разгонных точек. (Рис 6.).

7. Общие выводы

По результатам проведенных исследований для метода Адамса 4 порядка, можно провести следующие выводы:

Хотя метод Адамса-Башфорта 4-го порядка имеет высокий порядок точности, его эффективность зависит от правильного выбора начальных условий и шагов интегрирования. Метод использует значения решения на предыдущих шагах, и любые ошибки, накопленные на предыдущих этапах, могут оказывать влияние на последующие вычисления.