Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе № 14
"Решение краевой задачи для ОДУ 2-ого порядка"
дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр. 5030102/20003 Буслама А.
Преподаватель Козлов К.Н.

23 сентября 2024 г.

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

1.1 Формализация задачи:

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [a, b]$$

$$y(a) = y_0$$

$$y(b) = y_b$$

Требуется найти функцию $y(x)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $y(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x), x \in [a, b]$$

2. $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям $y(a) = y_0$, $y(b) = y_b$

1.2 Постановка задачи:

Требуется краевую задачу для следующего уравнения:

$$xy'' + y' + 2y = 2ln(x), (1, 2)$$

Точное решение задачи:

$$y(x) = ln(x)$$

И выполнить следующее:

1. Построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке
2. Построить график ошибки на отрезке для этих решений.
3. Построить график изменения шага по отрезку.
4. Построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.

2 Алгоритмы методов и условия их применимости

2.1 Метод пристрелки

Алгоритм метода:

1. Запишем $z = y'(x)$ и сведём уравнение $y^{(2)} = f(x, y, y')$ на отрезке $a < x < b$ к $z' = f(x, y, z)$
   с граничными условиями
   $$y(a) = 0$$
   $$y(b) = ln(2)$$
   $z(a) = \gamma$ где γ - произвольное число.
   Для нашей краевой задачи, получается два ОДУ 1-го порядка:
   $$f_1(x, y, z) = z, z(a) = \gamma$$
   $$f_2(x, y, z) = \frac{(2 * ln(x) - 2 * y - z)}{x}, y(a) = 0$$

2. Далее, в цикле с помощью метода Эйлера ищем $y(b)$:
   $$y_{k+1} = y_k + f_1(x_k, y_k, z_k) * h$$
   $$z_{k+1} = z_k + f_2(x_k, y_k, z_k) * h$$

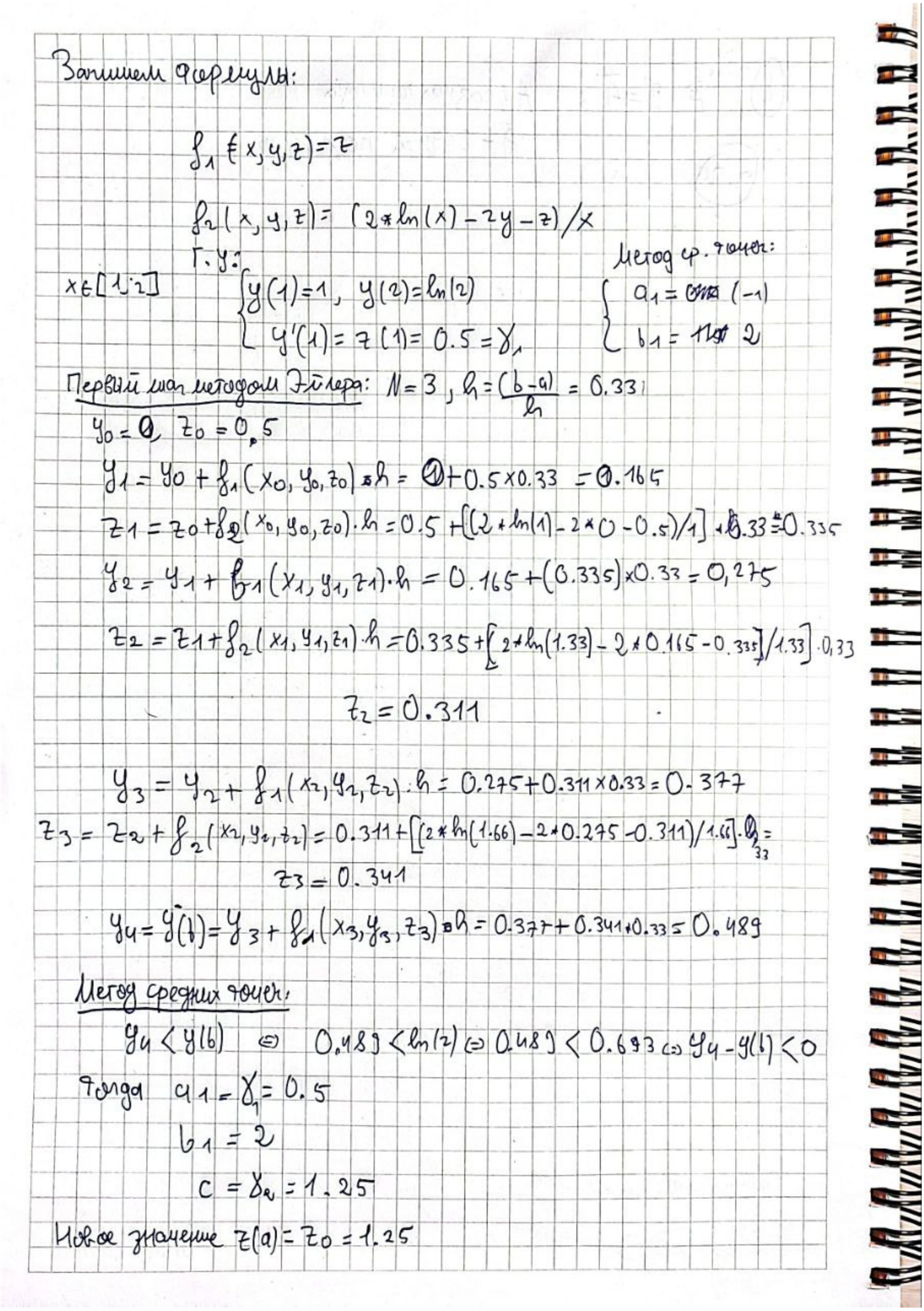
3. Если найденное $y(b)$ не совпадает с заданным в условии, то с помощью метода средних точек выбираем новое значение $z(a)$ и используем его в качестве нового условия при использовании метода Эйлера.

4. Цикл продолжается до тех пор, пока значение $y(b)$ не будет совпадать с искомым до определенной точности.

Условия применимости метода:

1. Функция удовлетворяет условию Липшица.

3 Ручной расчёт для первого цикла метода пристрелки и N=3



Запишем формулы:

$$f_1(x,y,z)=z$$

$$f_2(x,y,z)=(2*\ln(x)-2y-z)/x$$

Г.У.:

$x\in[1;2]$ $\begin{cases} y(1)=1, \quad y(2)=\ln(2) \\ y'(1)=z(1)=0.5=\gamma_1 \end{cases}$

Метод ср. точек: $\begin{cases} a_1=(-1) \\ b_1=2 \end{cases}$

Первый шаг методом Эйлера: $N=3$, $h=\frac{(b-a)}{h}=0.33$

$y_0=0$, $z_0=0.5$

$$y_1=y_0+f_1(x_0,y_0,z_0)*h=0+0.5\times0.33=0.165$$

$$z_1=z_0+f_2(x_0,y_0,z_0)\cdot h=0.5+[(2*\ln(1)-2*0-0.5)/1]*0.33=0.335$$

$$y_2=y_1+f_1(x_1,y_1,z_1)\cdot h=0.165+(0.335)\times0.33=0.275$$

$$z_2=z_1+f_2(x_1,y_1,z_1)\cdot h=0.335+[2*\ln(1.33)-2*0.165-0.335]/1.33]\cdot0.33$$

$$z_2=0.311$$

$$y_3=y_2+f_1(x_2,y_2,z_2)\cdot h=0.275+0.311\times0.33=0.377$$

$$z_3=z_2+f_2(x_2,y_2,z_2)=0.311+[(2*\ln(1.66)-2*0.275-0.311)/1.66]\cdot0.33=$$

$$z_3=0.341$$

$$y_4=y(b)=y_3+f_1(x_3,y_3,z_3)*h=0.377+0.341*0.33=0.489$$

Метод средних точек:

$y_4<y(b) \Leftrightarrow 0.489<\ln(2) \Leftrightarrow 0.489<0.693 \Leftrightarrow y_4-y(b)<0$

тогда $a_1=\gamma_1=0.5$

$b_1=2$

$c=\gamma_2=1.25$

Новое значение $z(a)=z_0=1.25$

Рис. 1 Ручной расчёт для первого цикла и N=3

4 Модульная структура программы

4.1 Модульная структура программы

```
f1(double x, double y, double z)
```

- правая часть первого ОДУ.

```
f2(double x, double y, double z)
```

- правая часть второго ОДУ.

```
double EulerMethod(double x0, double y0, double z0, double xn, double h
```

- метод Эйлера с помощью которого ищем значение $y(b)$

```
double shoot(double x0, double y0, double z0, double xn, double fv, dou
```

- сам метод пристрелки

5 Численный анализ решения

5.1 Иллюстрация работы метода пристрелки

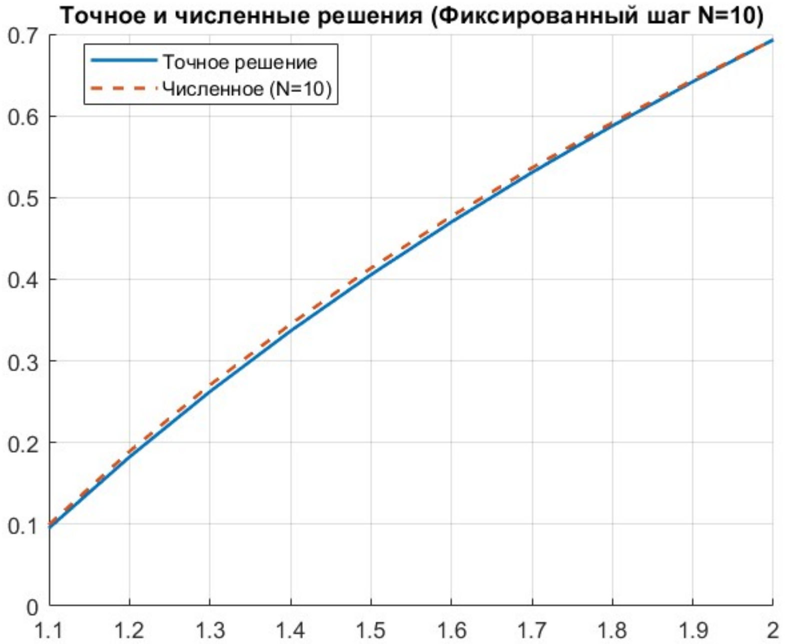


Рис. 2 Точное и численное решения КЗ для количества отрезков $N = 10$

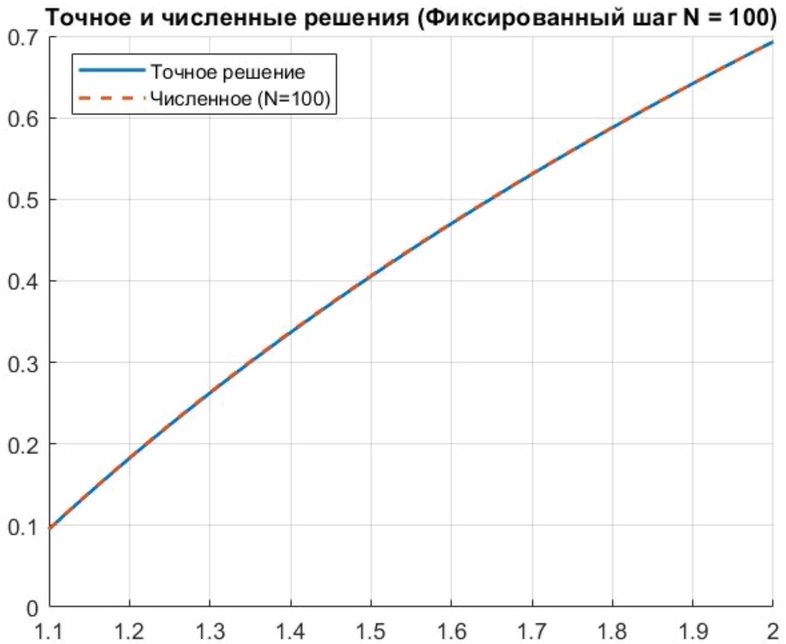


Рис. 3 Точное и численное решения КЗ для количества отрезков $N = 100$

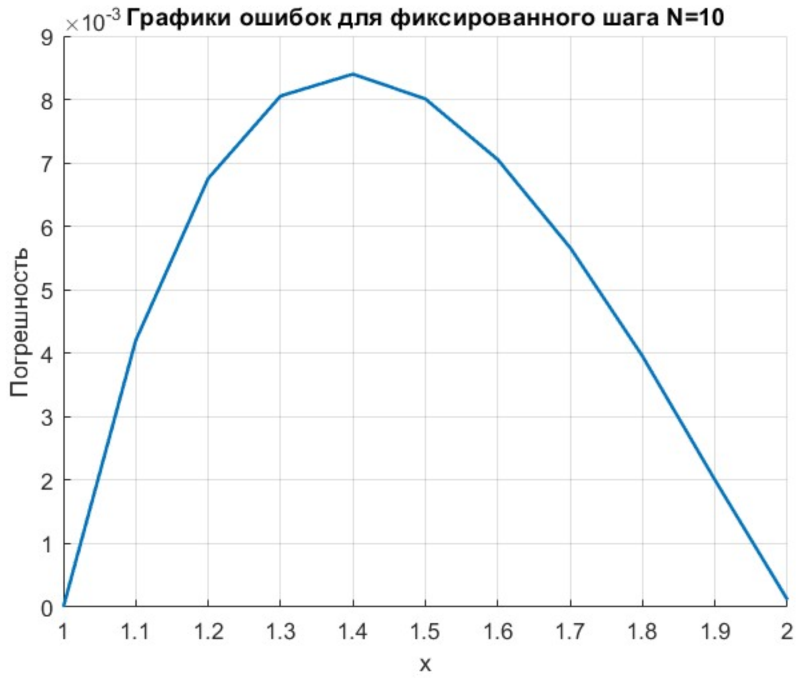


Рис. 4 График ошибки численного решения КЗ для количества отрезков $N = 10$

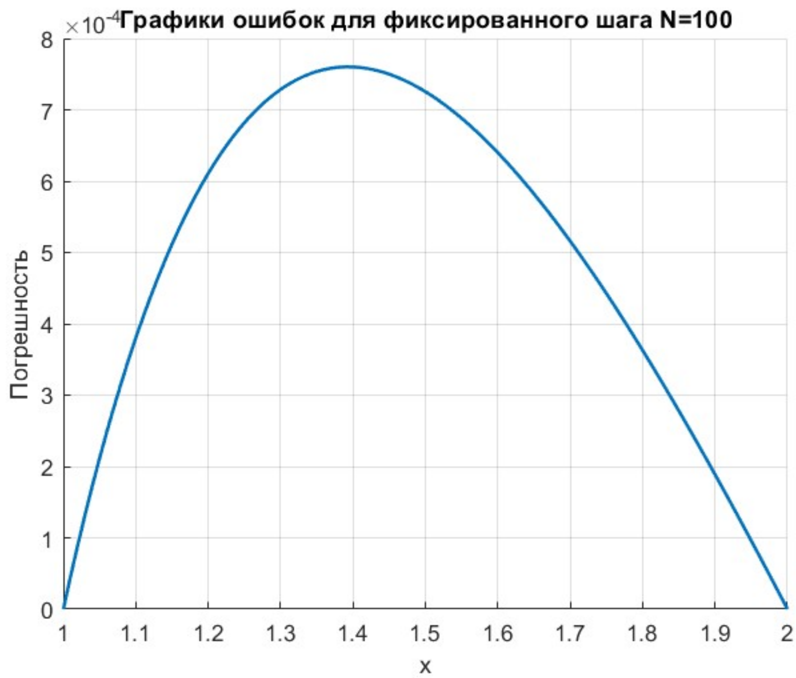


Рис. 5 График ошибки численного решения КЗ для количества отрезков $N = 100$

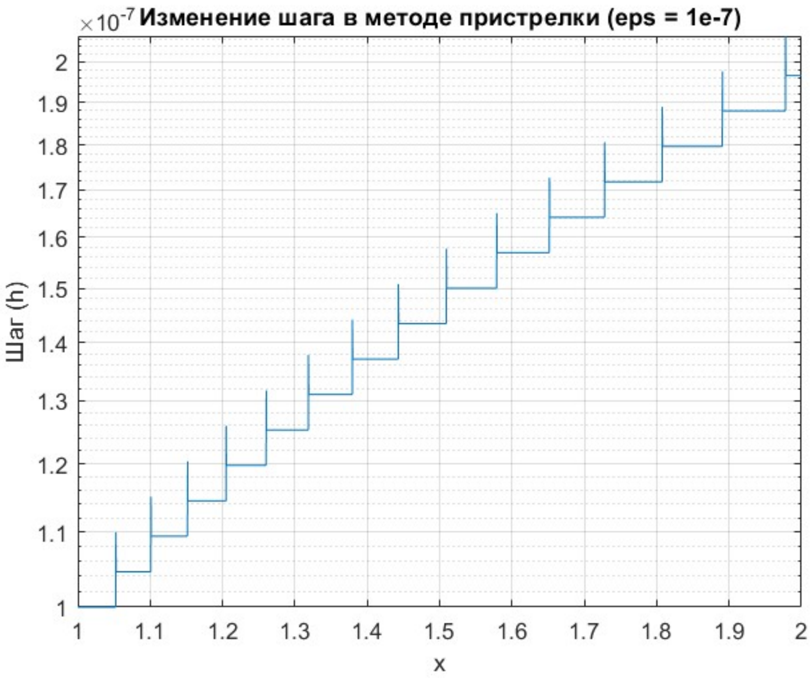


Рис. 6 График изменения шага в методе пристрелки для заданной точности $\epsilon = 10^{-7}$

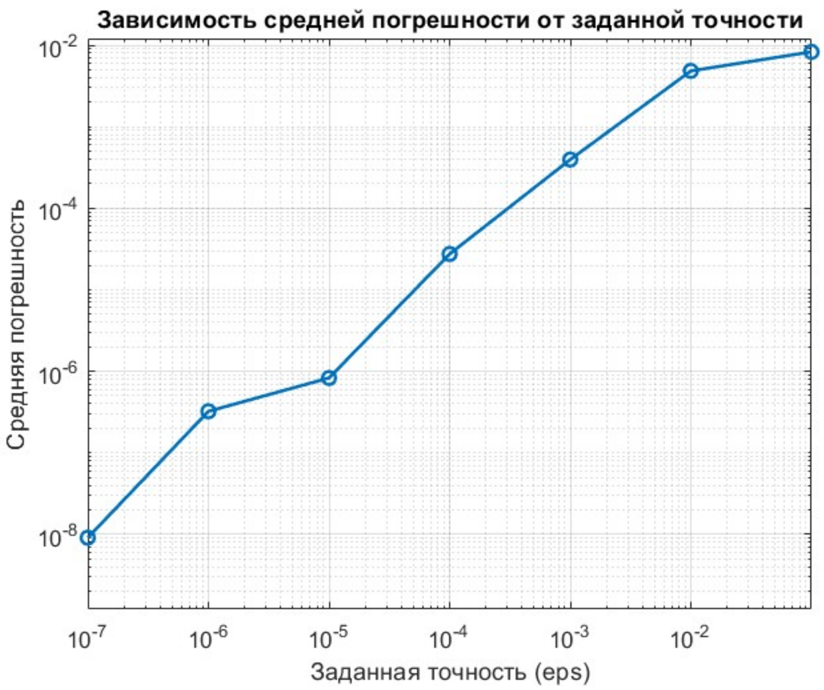


Рис. 7 График зависимости фактической ошибки от заданной точности для метода пристрелки

Можно сделать пару выводов:

1. Чем больше количество отрезков, тем меньше погрешность работы алгоритма (сравн. рис. 3 и рис. 4).

2. Для метода пристрелки для нашего случая шаг увеличивается с приближением к правому краю отрезка. С каждым вычисленным значением y, количество необходимых итераций для достижения нужной точности уменьшается.

3. Фактическая ошибка для метода пристрелки достигает нужных значений для заданной точности. (Рис 6.).

6 Общие выводы

По результатам проведенных исследований метода пристрелки, можно провести следующие выводы:

1. Для исследуемой КЗ, метод достаточно быстро достигает заданной точности.

2. Метод является непрост в реализации но имеет при этом сильную вычислительную мощность (до $\epsilon = 10^{-7}$).

3. Метод Ньютона хорошо работает в паре с методом пристрелки.