1. Caractérisez les équations différentielles suivantes :

   (a) $3y' + 5y = \cos(x)$
   (b) $y' + 5xy = e^x$
   (c) $y' + 5xy = 0$
   (d) $2y'' - 3y' + 5y = 0$
   (e) ${y'}^2 - y = x$
   (f) $y'' \cdot \ y' - y = 0$

2. De tête, trouvez au moins une fonction, solution des équations différentielles suivantes :

   (a) $y' = \sin x$
   (b) $y' = 1 + e^x$
   (c) $y' = y$
   (d) $y' = 3y$
   (e) $y'' = \cos x$
   (f) $y'' = y$

3. Soit l'équation différentielle $x^2y'' - 2y + 2x = 0$. Vérifiez que $y(x) = kx^2 + x$ est une solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

4. Résolvez les équations du premier ordre suivantes :

   (a) $y' + 2y = 0$
   (b) $y' - 6y = xe^{2x}$
   (c) $y' + 2y = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x$
   (d) $y' + 2y = 3e^{-2x}$
   (e) $y' - 2y = 3e^{-2x}$
   (f) $y' - y = \cos(3x)$

5. Résolvez les équations du premier ordre avec conditions initiales suivantes :

   (a) $y' - 3y = 1 - 3x$ avec $y(0) = 1$
   (b) $3y' + 4y = x^2 - x + 3$ avec $y(-1) = 4$
   (c) $y' - 3y = \cos(x) - \sin(x)$ avec $y(0) = 0$
   (d) $y' + y = (3x + 1)e^{-x}$ avec $y(0) = 1$

6. ($\star$) Résoudre avec la méthode de la variation de la constante les équations du premier ordre suivantes et définir l'intervalle des solutions :

   (a) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
   (b) $(1 - x)y' + y = \dfrac{x - 1}{x}$
   (d) $(x \ln x)y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$
   (e) $xy' - y = x^2e^x$

7. (DS 2019-2020)
   On considère l'équation différentielle suivante :

   $$y' + 2y = (x + 2)e^{-2x} \quad (E)$$

   (a) Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Définissez son type.
   (b) Résolvez l'équation différentielle homogène associée à (E).
   (c) Trouvez une solution particulière de (E) en justifiant votre démarche.
   (d) Donnez l'ensemble de toutes les solutions de (E).
   (e) Vérifiez que votre résultat est solution de (E).
   (f) (BONUS) Résolvez l'équation différentielle : $y' + 2y = (x + 2)e^{-2x} + \cos(3x) \quad (E_2)$

8. Intégrer les équations différentielles linéaires homogènes suivantes :

   (a) $y'' - 6y' + 8y = 0$
   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$
   (c) $y'' - 6y' + 10y = 0$
   (d) $y'' + 4y = 0$
   (e) $y'' - 4y = 0$
   (f) $y'' - 4y' = 0$

   puis les équations suivantes :

   (a) $y'' - 6y' + 8y = xe^{4x}$
   (b) $y'' - 6y' + 9y = (3x + 2) + 7e^{3x}$
   (c) $y'' + 4y = x^2 + x\cos(2x)$
   (d) $y'' - 4y' = 3x^2(1 + e^{4x})$

9. Résoudre les équations différentielles suivantes avec conditions initiales :

   (a) $3y'' - 2y' = 2x + 1$ avec $y'(0) = -1$ et $y(0) = 1$
   (b) $y'' + 4y = \sin(2x) + x^2$ avec $y'(0) = 0$ et $y(0) = 1$
   (c) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$ avec $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$

10. (DS 2018-2019)
    Soit l'équation différentielle (E) :
    $$y'' + 9y = 2\cos(\omega x)$$
    où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ω un paramètre réel positif ou nul.
    (a) Pourquoi (E) est une équation différentielle ? Combien de solutions peut avoir (E) ?
    (b) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
    (c) Résoudre l'équation différentielle (E) dans le cas où $\omega \neq 3$.
    (d) Résoudre l'équation différentielle (E) dans le cas où $\omega = 3$.

11. On considère l'équation différentielle $y'' - 6y' + 8y = 0$.
    Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative passe par le point $A(0, k)$ et admet en ce point une tangente d'équation $y = mx + q$.

12. On étudie la progression de la covid 19 dans une population donnée.
    On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t et $y(t)$ celle des personnes non atteintes.
    On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \geqslant 0$.
    On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie se propage par contact).
    Si on note $I(t)$ le nombre d'individus infectés à l'instant t et I_T le nombre d'individus total, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $I'(t) = kI(t)(I_T - I(t))$.
    Si la ville est isolée et compte 5000 individus dont 160 sont malades et 1200 le sont 7 jours après, à partir de quel jour l'infection touchera 80% de la population ? Et 100% ?

13. Le corps de la victime a été trouvé sur le lieu du crime à 2h20 de nuit. Après une demi-heure la température du corps est de 15°. Quand a eu lieu l'homicide si à l'heure de la découverte la température du corps est de 20° et si la température externe est de $-5°C$?
    On suppose que la température du corps suit la loi de Newton, c'est-à-dire que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures.