1. Étudier la réflexivité, la symétrie et la transitivité des relations définies sur $\mathbb{Z}$ par :
   (a) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x R_1 y \Leftrightarrow (x-y)$ est un multiple de 2 et de 3.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x R_2 y \Leftrightarrow (x-y)$ est un multiple de 2 ou de 3.
   La relation R_1 est-elle d'équivalence ? Et la relation R_2 ?

2. Dans l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on considère les relations suivantes :
   (a) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x,y) R_1 (x',y') \Leftrightarrow ((x \leqslant x')$ et $(y \leqslant y'))$
   (b) $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x,y) R_2 (x',y') \Leftrightarrow ((x < x')$ ou $((y \leqslant y')$ et $(x = x')))$
   Montrer que R_1 et R_2 sont des relations antisymétriques.
   R_1 est-elle une relation d'ordre total ? Et R_2 ?

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On pose $a = 2n-1$ et $b = 9n+4$.
   En déduire le pgcd de a et b suivant les valeurs de n.

4. Déterminer les nombres entiers naturels a et b tels que $a+b = 182$ et $a \wedge b = 13$.

5. Calculer le plus grand commun diviseur des nombres 9100 et 1848.

6. Le nombre n est un entier relatif non nul et différent de 1. Calculer les nombres suivants :
   a) pgcd$(n, n+1)$ b) pgcd$(n, 2n+1)$ c) pgcd$(n-1, n, n+1)$

7. Montrer que les entiers suivantes sont premiers entre eux :
   (a) 3465 et 884
   (b) 145 et 57

8. Soient n et m deux entiers naturels. Démontrer que si n et m sont premiers entre eux, alors n^2 et m^2 sont premiers entre eux.

9. (a) Calculer le pgcd(637,595)
   (b) Existe-t-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$? Si oui, trouver tous les entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$.
   (c) Existe-t-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$? Si oui, trouver tous les entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$.

10. La fraction $\dfrac{8191}{12187}$ est-elle simplifiable ? Idem avec $\dfrac{2339}{9332}$, $\dfrac{772}{2895}$ et $\dfrac{768}{1792}$.

11. Déterminer l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant le équations suivantes :
    (a) $x + 5y = 1$
    (b) $2x - 5y = 10$
    (c) $6x + y = 21$
    (d) $-2x + 3y = 9$
    (e) $25x + 31y = 2$
    (f) $27x - 39y = 3$

12. Montrer qu'un entier est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.

13. Montrer que $N = 19^{52} \cdot 23^{41} - 1$ est divisible par 7.

14. Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{4n} - 1$ est divisible par 5.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $p = n^4 + 4$. Trouver n entier pour que p soit premier.

16. (a) Déterminer tous les couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = 1$.
    (b) p étant un entier premier, déterminer tous les couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x^2 - y^2 = p$.

17. Trouver les entiers n entre 1 et 100, sachant que les restes des divisions euclidiennes de n par 3,5,7 sont resp. 1,2,3.

18. Prouver que, pour tout entier naturel n, on a $3^{2n+1} + 2^{n+2} \underset{7}{\equiv} 0$.

19. Montrer que, pour tout entier naturel n, 9 divise $7^{3n} - 1$.

20. Trouver tous les nombres entiers x tel que $123x$ soit congru à 15 modulo 168.

21. Calculer
    (a) $(3^{123} - 5) \wedge 25$
    (b) le pgcd de $2^{443} + 7$ et 15.

22. (a) Déterminer un entier relatif x tel que $159x \underset{223}{\equiv} 1$.
    (b) En déduire l'ensemble des solutions entières de $159y \underset{223}{\equiv} 21$.

23. Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

24. Nous sommes le mercredi 19 janvier 2022 ; il est 15h30.
    (a) Quelle heure sera-t-il dans 11 561 646 862 321 h ?
    (b) Quel jour de la semaine serons-nous dans 100 250 ! jours ?
    (c) Quel mois serons-nous dans 10^{10} mois ?

    ... en supposant que notre calendrier et notre univers existent encore dans 100 250 ! jours.

25. On se place dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$.
    (a) Calculer le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 101.
    (b) Quel est l'inverse de 3^{1999} dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$?
    (c) Quel est le reste de la division euclidienne de 2009^{2009} par 101.

26. Résoudre les équations suivantes :
    (a) $x^2 + x + \overline{7} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
    (b) $x^2 - 4x + \overline{3} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

27. Alice et Bob communiquent en utilisant le protocole RSA.
    La clé publique de Bob est $n = 209$ et $e = 7$.
    (a) Alice veut transmettre le message $M = 5$ à Bob. Quel message M' va-t-il recevoir ?
    (b) Quelle est la clé secrète de Bob ?
    (c) Bob reçoit $M' = 2$. Quel est le message M qu'Alice lui a envoyé ?

28. (DS 2019-2020)
    (a) Énoncer le Petit théorème de Fermat.
    (b) Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7.
    (c) Énoncer le Théorème de Gauss.
    (d) Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. S'il les répartit dans des cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres.
    Sachant que Toto a plus de 10 livres, quel est le nombre minimal de livres dans sa bibliothèque ?
    (e) Soit a un entier tel que $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ avec $2^{n+1} - 1$ premier. Montrer qu'alors la somme des diviseurs positifs de a vaut $2a$.