1. Établir pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un développement limité en 0 à l'ordre donné.

   (a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ à l'ordre 6
   (b) $g(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ à l'ordre 7
   (c) $h(x) = e^{3x} \sin(2x)$ à l'ordre 4
   (d) $i(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x}$ à l'ordre 3
   (e) $j(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{e^x \sin(x)}$ à l'ordre 3

2. Déterminer le développement limité en $x = a$ à l'ordre n des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = x^2 \ln(x), \quad a = 1, \quad n = 5$
   (b) $g(x) = \sqrt{x + 2}, \quad a = 0, \quad n = 3$
   (c) $h(x) = x^3+4x^2+x-1$, $a = 0$ et $a = 1$, $n = 5$
   (d) $i(x) = \ln(\sin(x)), \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad n = 3$
   (e) $j(x) = e^{\cos(x)}, \quad a = \frac{\pi}{2}, \quad n = 2$
   (f) $l(x) = \dfrac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}, \quad a = 1, \quad n = 2$

3. A partir d'une primitive, déterminer un développement limité à l'ordre 5 au point 0 de

   $$a) \quad \ln(1 + x) \quad \text{et} \quad b) \quad \arcsin x$$

4. Déterminer :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

5. Pour chacune des fonctions suivantes, proposer un équivalent simple.
   (a) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x qui tend vers 0
   (b) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x qui tend vers $+\infty$
   (c) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x qui tend vers 2
   (d) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand x qui tend vers 1
   (e) $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln(x))^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 10^{x+1}$ quand x qui tend vers $+\infty$

6. On désigne par f et g les applications de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$ respectivement définies pour $-1 < x < 1$ par

   $$f(x) = \sin(\ln(1 + x)) \qquad \text{et } g(x) = \ln(1 + \sin(x))$$

   Établir les développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions f et g ; en déduire l'existence d'une constante réelle k (que l'on explicitera) telle que

   $$f(x) - g(x) \sim kx^4$$

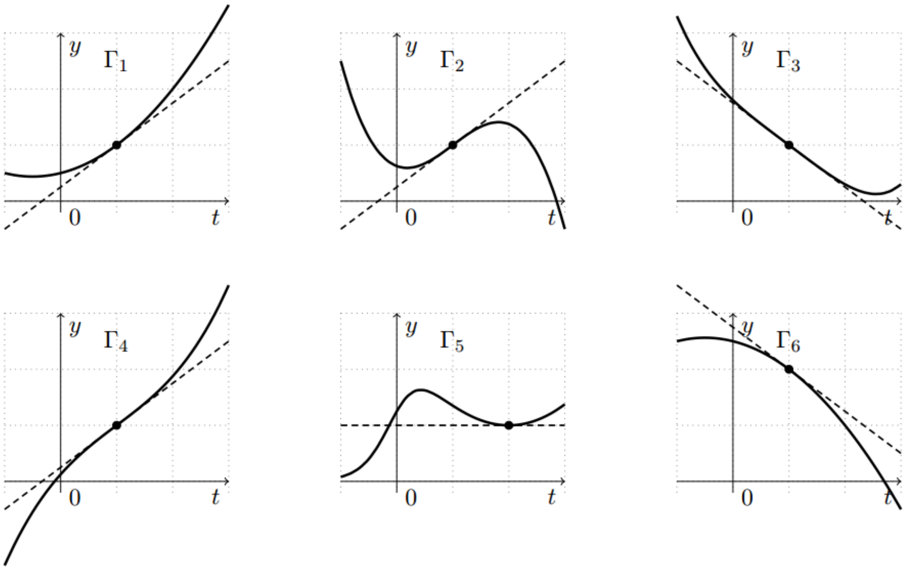
7. On considère $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x^2}}$. Donner un développement limité :

   $a)$ à l'ordre 2 en 0 $\quad b)$ à l'ordre 2 en $+\infty$ $\quad c)$ à l'ordre 1 en $-\infty$

8. Étudier la position du graphe de l'application $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en $x = 0$ et $x = 1$.

9. Donner une approximation de $\sin(0.01)$.

10. Retrouvez les graphes locaux (en **gras** ; les tangentes sont en pointillés) :



... des fonctions dont voici les DL :

$$\begin{array}{lcccccccccc}
f(t) & = & 1 & - & \frac{3}{4}(t-1) & & & & & + & \mathrm{o}\left((t-1)^3\right) \\
g(t) & = & 1 & & & + & \frac{1}{4}(t-2)^2 & & & + & \mathrm{o}\left((t-2)^3\right) \\
h(t) & = & 1 & + & \frac{3}{4}(t-1) & & & - & \frac{3}{8}(t-1)^3 & + & \mathrm{o}\left((t-1)^3\right) \\
k(t) & = & 1 & + & \frac{3}{4}(t-1) & + & \frac{1}{4}(t-1)^2 & & & + & \mathrm{o}\left((t-1)^3\right) \\
u(t) & = & 1 & + & \frac{3}{4}(t-1) & & & + & \frac{1}{8}(t-1)^3 & + & \mathrm{o}\left((t-1)^3\right) \\
v(t) & = & 2 & - & \frac{3}{4}(t-1) & - & \frac{1}{4}(t-1)^2 & & & + & \mathrm{o}\left((t-1)^3\right)
\end{array}$$

11. Déterminer :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x(1+x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x^2-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2}-x$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{\sin^2(x)}$

12. Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée

(a) $\sqrt{x+1}$ à la précision $1/x^{3/2}$

(b) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ à la précision $1/x^2$

(c) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $1/x^2$

13. (DS 2015-2016)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)}{3x}$.

(a) Donner l'ensemble de définition de f.

(b) Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
Calculer le développement limité de la fonction f à l'ordre 3 en 0.

(c) Donner l'équation de la tangente ainsi que la position de la courbe représentative de f au voisinage du point 0.
Représenter sommairement la courbe de f au voisinage du point 0.

14. (DS 2016-2017)

   (a) Énoncer la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.
   (b) Écrire le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
   (c) En déduire le développement limité de $\dfrac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
   (d) En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote au graphe de f pour $x \to +\infty$, où

$$f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

15. (DS 2019-2020)
   Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Calculer la dérivée de f et en déduire son(ses) sens de variation.
   (c) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (d) En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
   (e) Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.
   (f) Tracer une allure de la courbe sur son domaine de définition.