1. Soient A une matrice quelconque et B une matrice symétrique. Montrer que les matrices ABA^T et A^TBA sont symétriques.

2. Montrer que les opérations inverse et transposition commutent, c'est-à-dire $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Ainsi, en particulier, A est inversible si et seulement si A^t est inversible.

3. Démontrer que pour toutes matrices $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ on a :
$$(AB)^T = B^T A^T$$

4. On suppose que $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible. Justifier que les matrices A^{-1} et B commutent.

5. Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

6. (DS 2017-2018)
Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, soient $A = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer P^TP. La matrice P est-elle inversible ? Si oui pourquoi et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$. La matrice D sera une matrice diagonale. À partir de cette relation, comment peut-on retrouver A ?
   (c) Calculer X^TAX.
   (d) On pose $X' = P^{-1}X = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$.
      i. À partir de cette relation, comment peut-on retrouver X ?
      ii. Calculer $(X')^TDX'$ et montrer que ce réel est strictement positif pour $X' \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
      iii. En déduire que pour tout $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $X \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a $X^TAX \geqslant 0$.

7. Soit
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Calculer $2A - A^2$. Sans calculs, en déduire A^{-1}.

8. On considère la matrice carrée
$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calculer K^2
   (b) En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.
   (c) Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Montrer que $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.
   (d) En déduire que si a et b ne sont pas tous les deux nuls, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI + dK$.
   (e) En déduire l'inverse de la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

9. On considère les matrices P et Q suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4}(I_3 + P)$$

(a) Calculer P^2, PQ, QP en fonction de P.

(b) Calculer les produits $(4I_3 - P)Q$ et $Q(4I_3 - P)$. Qu'en concluez-vous pour la matrice Q ?

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$Q^n = a_n I_3 + b_n P$$

Les suites (a_n) et (b_n) vérifiant les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{4} a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4} a_n + b_n \end{array} \right.$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

(d) En déduire a_n en fonction de n.

(e) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n$$

(f) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

(g) Donner l'expression sous forme matricielle de Q^n en fonction de n.

(h) On considère les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \frac{1}{4}(2x_n + y_n + z_n) \\ y_{n+1} & = & \frac{1}{4}(x_n + 2y_n + z_n) \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{4}(x_n + y_n + 2z_n) \end{array} \right.$$

avec $x_0 = 1$ et $y_0 = z_0 = 0$. On pose $U_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$.

i. Déterminer U_0, U_1.

ii. Vérifier que $\forall n,\ U_{n+1} = QU_n$

iii. Montrer que $\forall n,\ U_n = Q^n U_0$

iv. En déduire l'écriture de x_n, y_n et z_n en fonction de n, puis leur limite lorsque n tend vers l'infini.