1. Traduisez les sommes et produits suivants à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ ou développez-les en faisant disparaître les symboles.

   (a) $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^{12}$

   (b) $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{10}{1024}$

   (c) $P_1 = 1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times \ldots \times 13^2 \times 14^2$

   (d) $P_2 = 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times 21$

   (e) $T_1 = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k+1}$

   (f) $T_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

   (g) $T_3 = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})$

   (h) $T_4 = \prod_{k=1}^{5} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$

2. Calculez les sommes et les produits suivants :

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1)$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k + k^2 + 2$

   (d) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n}^{n} ij$

   (e) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

   (f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (6k - 3)$

3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

4. Résolvez dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.

5. Quel est le coefficient de $a^4 b^2 c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$?

6. Quel est le nombre d'anagrammes des mots ORANGE et ANANAS ?

7. Le codage RGB d'une couleur consiste à indiquer, par trois entier entre 0 et 255, la quantité des trois couleurs primaires (rouge, vert, bleu) dont elle est constituée.
   Combien peut-on coder de couleurs différents en RGB ?

8. Un groupe de $2n$ personnes comprend n hommes et n femmes.
   (a) Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives ? (deux disposition sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
   (b) Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme ?
   (c) Même question si on respecter l'alternance homme-femme et que de plus Madame X soit à coté de Monsieur Y ?

9. Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte.
   Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ?
   Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

10. On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :
    (a) Aucune condition.
    (b) Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
    (c) Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
    (d) Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
    (e) Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
    (f) Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
    (g) Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.

11. (DS 2019-2020)
    Soient les propriétés suivantes, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    1) La fonction f est injective et 2) La fonction f ne prend jamais la même valeur.

    (a) Exprimez à l'aide de quantificateurs 1) et 2).
    (b) Donnez à l'aide de quantificateurs leur négation.
    (c) Si f est définie par $f(x) = x^2 - 1$, f est elle injective ? surjective ? Pourquoi ?
    (d) Est-ce que f est bijective ? Si oui, pourquoi. Sinon, donnez une restriction bijective.

12. (DS 2019-2020)

    (a) Soit k un entier compris entre 2 et $n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.
    En utilisant les propriétés du coefficient binomial, démontrez que

    $$k(k-1)\binom{n+1}{k} = (n+1)n\binom{n-1}{k-2}$$

    (b) Soient x, y deux réels et n un entier naturel. Exprimez $(x + y)^{n-1}$ comme une somme sur $k \in \mathbb{N}$
    (c) Calculez

    $$\sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\binom{n+1}{k}$$

    Combien de termes possède cette somme ?