1. Vrai ou faux ?
   (a) Une fonction est en escalier sur un segment si et seulement si ce segment est une réunion d'intervalles sur chacun desquels la fonction est constante.
   (b) Une fonction qui n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.
   (c) Toute fonction continue par morceaux sur un segment peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier.
   (d) Toute fonction en escalier sur un segment est continue par morceaux sur ce segment.
   (e) Toute fonction continue par morceaux sur un segment possède des primitives sur ce segment.

2. On considère la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$ et la subdivision régulière $\sigma = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.
   On choisit $\Phi_\varepsilon = \frac{(i-1)^2}{n^2}$ et $\Psi_\varepsilon = \frac{i^2}{n^2}$ deux fonctions en escalier sur $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   Montrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

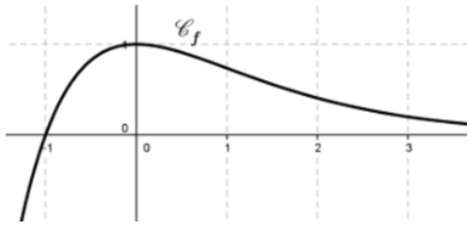
3. Déterminer, dans chaque cas, une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I :
   (a) $f(x) = \frac{2x^4}{3},\ I = \mathbb{R}$
   (b) $f(x) = \frac{5}{2x^3},\ I = \mathbb{R}_+^*$
   (c) $f(x) = \frac{5}{7x},\ I = \mathbb{R}_+^*$
   (d) $f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{5x} + 3x - 2,\ I = \mathbb{R}_+^*$
   (e) $f(x) = e^{2x},\ I = \mathbb{R}$
   (f) $f(x) = \frac{5}{2x-1},\ I =]\frac{1}{2}, +\infty[$
   (g) $f(x) = \frac{x+2}{(x^2+4x)^3},\ I = \mathbb{R}_+^*$
   (h) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x},\ I = \mathbb{R}_+^*$
   (i) $f(x) = \sin(x) + \cos(2x),\ I = \mathbb{R}$
   (j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ I = \mathbb{R}_+^*$

4. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   (b) $\int_e^3 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$
   (c) $\int_0^2 |x^2 - 3x + 2|\,\mathrm{d}x$
   (d) $\int_0^2 x^4 e^{-x^5}\,\mathrm{d}x$
   (e) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\,\mathrm{d}q$
   (f) $\int_0^2 t^2(t^3+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t$

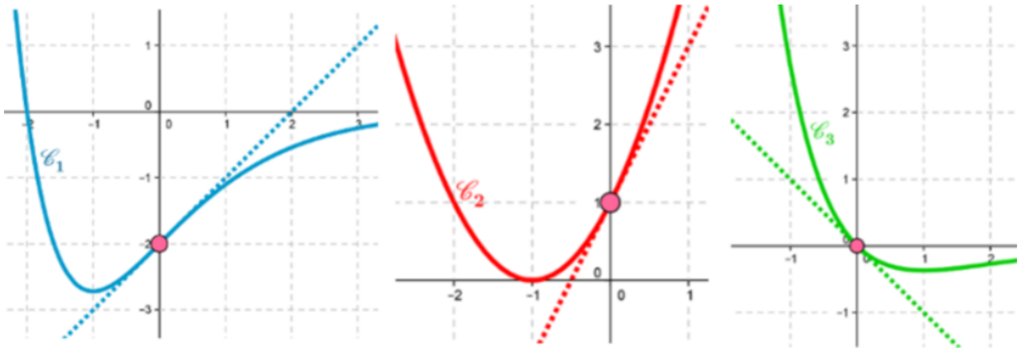
5. Évaluer au coup d'œil
$$(a)\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x, \quad (b)\ \int \cos u \sin(\sin u)\,\mathrm{d}u, \quad (c)\ \int \frac{e^{\tan v}}{\cos^2 v}\,\mathrm{d}v.$$

6. Faites apparaître la forme $\frac{u'(t)}{u(t)}$ pour pouvoir calculer
$$(a)\ \int \tan t\,\mathrm{d}t, \qquad (b)\ \int \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{kt} + e^{-kt}}\,\mathrm{d}t, \qquad (c)\ \int \frac{t^3 + 4t^2 + 3t + 2}{t^3 + t^2 + t + 1}\,\mathrm{d}t, \qquad (d)\ \int \frac{\mathrm{d}t}{1 + e^{3t}}$$

7. Le graphe ci-dessous représente la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



Les trois graphes suivants représentent trois courbes et la tangente ne pointillé à chacune de ces courbes au point d'abscisse 0.



Une des ces courbes représente une primitive de f. Laquelle ? Justifier.

8. Après avoir démontré la formule de l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{3x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{e} x^2(\ln x)^3\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_{1}^{2} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{3x}\ln x\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} (2x^3+1)\ln x\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_{1}^{2} (1+2x)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

9. Calculer les intégrales et primitives suivantes grâce au changement de variable proposé :

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2}{x^3+8}\,\mathrm{d}x$ (poser $t=x^3+8$) (d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (poser $t=\sqrt{x}$)

(b) $\displaystyle\int_{1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$ (poser $t=\dfrac{x}{x+1}$) (e) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ (poser $t=\sin x$)

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ (poser $t=\sqrt{e^x-1}$) (f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ (poser $t=e^x$)

10. Calculer :

$$a)\ \int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x,\quad b)\ \int \frac{\cos(x)-2}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x,\quad c)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}\,\mathrm{d}t.$$

11. On cherche à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, on cherchera deux réels a et b vérifiant, pour tout x dans $[0,1]$,

$$\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

Même question avec $\displaystyle\int_{3}^{9} \frac{2x+1}{x(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$.

12. Déterminer l'aire de la région du plan délimité par les deux droites d'équations $x=1$, $x=3$ et par les deux courbes d'équations $y=x^2$, $y=6-\frac{1}{2}x^2$.

13. (DS 2019-2020)
On pose $I = \int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{4-(t-2)^2}\,\mathrm{d}t}$

(a) Utiliser le changement de variable $t-2 = 2\cos u$ pour montrer que $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin u}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u$

(b) Montrer qu'avec $v = \tan(u/2)$ et $\mathrm{d}u = \frac{2}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$, on obtient $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)}\,\mathrm{d}v$

(c) Déterminer I en sachant que $\frac{4v}{(1+v)^2(1+v^2)} = \frac{-2}{(1+v)^2} + \frac{2}{1+v^2}$.

14. (DS 2017-2018)
Soit la fonction

$$f(x) = x\sin x + \cos^2 x$$

(a) Trouver toutes les primitives de $f(x)$.

(b) Trouver la primitive de $f(x)$ qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{2}$.

15. (DS 2016-2017)
On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

(a) Calculer $I - J$.

(b) Calculer $I + J$ en posant $x = \tan(t)$.

(c) En déduire I et J.

16. (DS 2015-2016)
On souhaite calculer

$$A = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } B = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Calculez A et B :

   i. par intégration par parties ;

   ii. en utilisant $A + \mathrm{i}B$.

(b) En utilisant la primitive de B, en déduire la solution générale de

$$y'(x) = -y(x) + \sin(x).$$

Suggestion : en multipliant l'équation par e^x*, avec* x *une primitive quelconque de* 1*, on obtient une équation équivalente.*