1. Écrire les formes échelonnées en ligne et en déduire les rangs des matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 2x-y+z &= 1 \\ 4x-y+3z &= 3 \end{cases} \quad (S_2)\begin{cases} x-y-2z &= -1 \\ -x+3y+3z &= 2 \\ 4y+2z &= 3 \end{cases} \quad (S_3)\begin{cases} x-y-2z &= -1 \\ -x+3y+3z &= 2 \\ 4y+2z &= 2 \end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} 2x+2y-2z+5t &= -6 \\ 3x-z+t &= -3 \\ 2x-y-3t &= 2 \\ 2x-y+z-t &= 1 \end{cases} \quad (S_5)\begin{cases} x-2y+z-4t &= 1 \\ x+3y+7z+2t &= 2 \\ x-12y-11z-16t &= 3 \end{cases}$$

3. Résoudre le système de Cramer suivant :

$$\begin{cases} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{cases}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$

4. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer le rang de A en fonction de k.

   (b) Existe-t-il des valeurs de k pour lesquelles la matrice A est inversible ?

5. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer le determinant de A.

   (b) La matrice A est-elle inversible ? Calculer A^{-1}.

   (c) En déduire une résolution du système :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=-2 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$$

6. (DS 2019-2020)
Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Est-ce que A est symétrique ? Même question pour anti-symétrique, diagonale, triangulaire inférieure ou supérieure.
   (b) Calculer le determinant de A et de J.
   (c) Calculer A^2.
   (d) Exprimer A et A^2 en fonction de J et I_3.
   (e) En utilisant la question précédente, écrire une égalité du type $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$.
   (f) En déduire que A est inversible et préciser son inverse A^{-1}.

Soit le système linéaire

$$(S) \begin{cases} y + z & = & 1 \\ x + z & = & 2 \\ x + y & = & 4 \end{cases}$$

   (a) Écrire le système linéaire sous forme matricielle.
   (b) Justifier de l'existence d'une ou plusieurs solution(s) au système.
   (c) Calculer la(les) solution(s) du système.
   (d) Retrouver la(les) solution(s) par une autre méthode.