

# Chapitre 3 Régime sinusoïdal

Justine Philippe

JUNIA ISEN

#### Sommaire

- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques





#### Sommaire

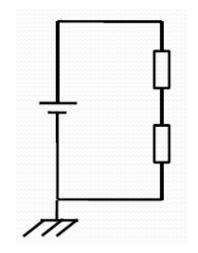
- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques

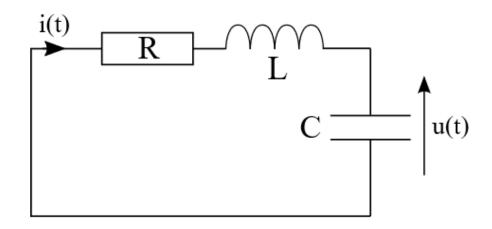




#### Introduction

Régime continu	Régime transitoire	Régime sinusoïdal
Résistances	R, L, C	R, L, C
Générateurs U, I continus	Générateurs U, I continus	Générateurs u, i sinusoïdaux







#### Introduction

 Les mêmes circuits RLC, mais étudiés dans le cas d'un régime variable (les tensions et intensités varient au cours du temps) permanent (ces variations sont périodiques).

#### Plan:

- Définition d'une grandeur sinusoïdale
- Notation complexe
  - On traduit tout dans cette notation bien plus pratique!

Objectif : décrire les résonances d'un circuit RLC, les filtres électriques...



#### Introduction

#### Remarque : l'étude du régime sinusoïdal va au-delà de l'électrocinétique

D'après la transformée de Fourier, tout signal peut se décomposer en somme de signaux sinusoïdaux.

- > Acoustique
- Optique ondulatoire
- > Astronomie
- Physique des solides
- > ..





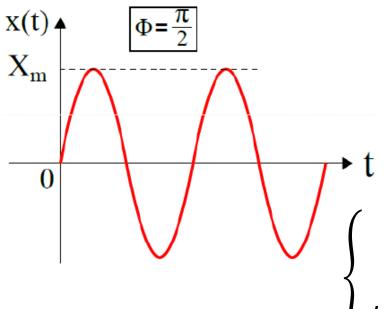
#### Sommaire

- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques





#### Grandeur sinusoïdale : graphe et équation type



$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

 $X_m$ : amplitude du signal  $\omega$ : pulsation en rad. s<sup>-1</sup>  $\phi$ : phase à l'origine des dates en rad

En effet, sur la figure, le signal vérifie x(t = 0) = 0 et on a nécessairement  $\phi = \frac{\pi}{2}$ .



## Grandeur sinusoïdale : graphe et équation type

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

Remarque:

En fonction des livres (ou des besoins), on peut aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \phi)$$

La différence entre les deux écritures ne relève que d'un décalage (de  $\frac{\pi}{2}$ ) sur l'axe temporel de la fonction.



# Grandeur sinusoïdale : graphe et équation type

#### Définition de la période T (en secondes [s]) :

La période est l'intervalle de temps compris entre deux instants consécutifs où le signal se reproduit à lui-même. C'est la durée d'un motif élémentaire.

#### Définition de la fréquence f (en Hertz [Hz]) :

La fréquence d'une grandeur périodique est le nombre de cycles (motifs) que la grandeur décrit en une seconde.

Relation entre période et fréquence : f = 1/T

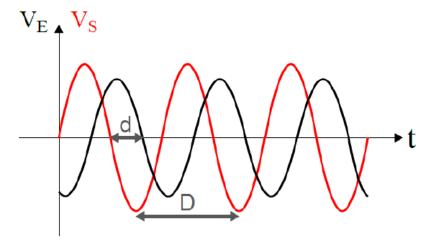
Pulsation  $\omega$  (en radian/seconde [rad/s]) :  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ 



# Déphasage

Le déphasage est la différence de phase à l'origine des signaux étudiés. Ce déphasage peut être déterminé sur le graphe (au signe près) et est généralement compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Exemple : la tension  $V_S$  est **en avance** sur la tension  $V_E$ , le déphasage  $\Delta \phi$  de  $V_S$  sur  $V_E$  est donc **positif.** On mesure :



#### Déphasage en radian

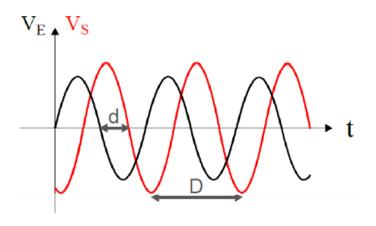
$$\Delta \phi = \frac{d \times 2\pi}{D}$$

 $d = distance V_s à V_F en ms$ 

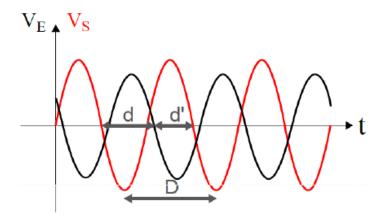
D = période



#### Déphasage



La tension  $V_S$  est **en retard** sur la tension  $V_E$ , le déphasage est **négatif.** 



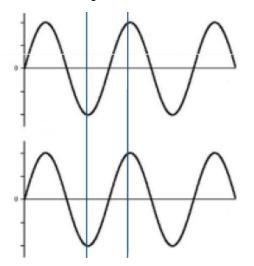
Si la tension  $V_S$  est **en avance de plus d'une demi-période** sur la tension  $V_E$ , le déphasage  $\Delta \phi$  est théoriquement supérieur à  $\pi$ . On préfère alors dire que  $V_E$  est en avance sur  $V_S$  d'un déphasage  $\Delta \phi' = 2\pi - \Delta \phi$ 



# Déphasage

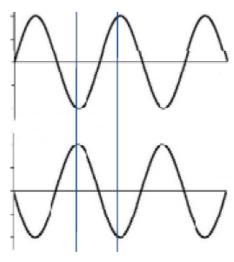
Signaux en phase

$$\Delta \phi = 0$$



#### Signaux en opposition de phase

$$\Delta \phi = \pi$$



#### Sommaire

- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques





## Rappels mathématiques

Un nombre complexe écrit dans sa forme cartésienne a pour expression : z = a + jb a : partie réelle, b : partie imaginaire,
 j : nombre complexe (j² = -1)

Module : 
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argument: 
$$\theta$$
 tel que  $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$  et  $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$ 

Nombre complexe écrit en coordonnées polaires :

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}$$

Avec r le module et θ l'argument



# Rappels mathématiques

Soit un signal sinusoïdal x

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

On lui associe une grandeur complexe x

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = X_m e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

On définit également une amplitude complexe X

$$\underline{X} = X_m e^{j\phi} \ donc \ \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$$



# Rappels mathématiques

On travaillera donc en notation complexe, mais il sera facile de revenir au signal réel :

- Retour au signal réel complet :  $x(t) = Re(\underline{x}(t))$
- Retour à l'amplitude du signal réel :  $X_m = |\underline{X}| = |\underline{x}(t)|$
- Retour à la phase initiale :  $\phi = Arg(\underline{X})$

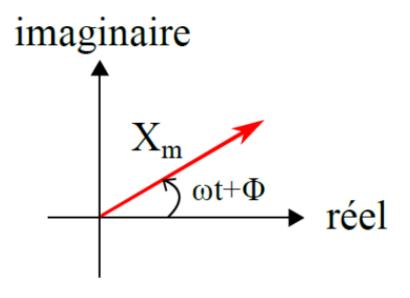
Toutes les informations dont nous avons besoin pour reconstituer le signal réel sont contenues dans l'amplitude complexe <u>X</u>



## Représentation de Fresnel

A la grandeur 
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$$

On associe dans le plan complexe un vecteur de longueur  $X_m$  et dont l'angle avec l'axe horizontal est  $\omega t + \phi$ 





# Dérivation des signaux complexes

La présence d'une exponentielle en notation complexe facilite la dérivation du signal :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \left(X_m e^{j(\omega t + \phi)}\right)' = j\omega X_m e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \underline{x}(t)$$

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega\underline{x}(t)$$

- Pour dériver, multiplier le signal complexe par jω
- Dérivée seconde : multiplication par (jω)², etc...



## Dérivation des signaux complexes

Vérifions qu'en prenant la partie réelle de  $j\omega \underline{x}(t)$ , on obtient la dérivée du signal réel x(t):

$$j\omega \underline{x}(t) = j\omega X_m e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega X_m \cos(\omega t + \phi) + jj\omega X_m \sin(\omega t + \phi)$$
$$= -\omega X_m \sin(\omega t + \phi) + j\omega X_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$Re\left(j\omega\underline{x}(t)\right) = -\omega X_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = -\omega X_m \sin(\omega t + \phi)$$



# Intégration des signaux complexes

Sur le même principe :

$$\int \underline{x}(t) = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)$$

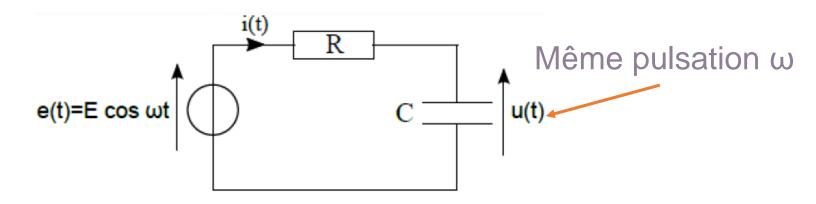
La primitive d'un signal complexe est obtenue en multipliant par 1/jω



#### Régime forcé :

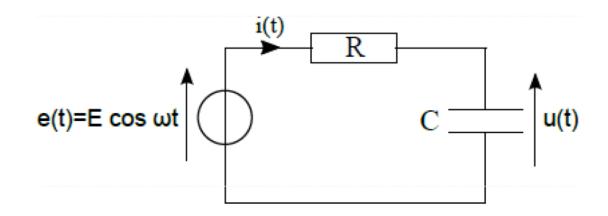
On parle de **régime forcé** lorsque l'on impose à un circuit une **tension sinusoïdale délivrée par un générateur.** 

Après un régime transitoire, le circuit évolue de la même manière que le générateur à une fréquence identique de celui-ci.







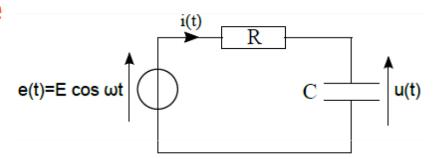


- 1. Ecrire la loi des mailles
- 2. La réécrire en notation complexe
- 3. Remplacer le courant avec l'équation caractéristique du condensateur
- 4. Déterminer l'expression de <u>u</u>(t)



Loi des mailles :

$$u(t) + Ri(t) = e(t)$$



En notation complexe:

$$\underline{u}(t) + R\underline{i}(t) = \underline{e}(t) \iff \underline{u}(t) + R\underline{i}(t) = Ee^{j\omega t}$$

Equation caractéristique du condensateur :  $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ 

$$donc \, \underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt} = jC\omega\underline{u}(t)$$

24

On obtient : 
$$\underline{u}(t) + jRC\omega\underline{u}(t) = Ee^{j\omega t} \iff \underline{u}(t) = \frac{Ee^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$$

Il n'y a plus d'équation différentielle à résoudre!



Solution:

$$\underline{u}(t) = Ue^{j\phi}e^{j\omega t} = \frac{Ee^{j\omega t}}{1+j\tau\omega} \ avec \ \tau = RC$$

Amplitude de la solution réelle u(t) : Module

$$U = |\underline{U}| = \frac{|Ee^{j\omega t}|}{|1 + j\tau\omega|} = \frac{E}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Phase de la solution réelle u(t) : **Argument** 

$$\phi = Arg(\underline{U}) = Arg(E) - Arg(1 + j\tau\omega) = 0 - Arg(1 + j\tau\omega)$$

Donc 
$$\tan \phi = -\frac{Im(1+j\tau\omega)}{Re(1+j\tau\omega)} = -\tau\omega$$

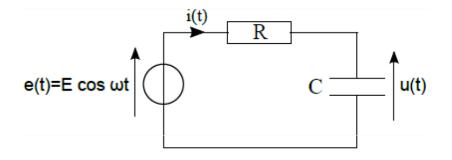


La solution complexe est :

$$\underline{u}(t) = \frac{Ee^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$$

Et la solution réelle est :

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctan(\tau \omega))$$



La recherche de cette solution sans passer par la notation complexe aurait fait apparaître des calculs trigonométriques compliqués et nous aurions dû résoudre une eq. diff. à second membre dépendant du temps.

Même si la notation complexe demande une certaine gymnastique, les calculs, surtout pour des circuits élaborés, seront plus aisés.



Soit une portion de circuit orienté en convention récepteur. En régime sinusoïdal forcé, on utilise une grandeur homogène à une résistance (exprimée donc en Ohm,  $\Omega$ ) qui est le rapport de la tension complexe par l'intensité complexe :

L'impédance complexe : 
$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

On définit aussi la grandeur inverse (en Siemens, S) :

L'admittance complexe : 
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$



Impédance d'un conducteur ohmique :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{R\underline{i}}{\underline{i}} = \boxed{R}$$

Facile



Impédance pour un condensateur :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}}{C\frac{d\underline{u}}{dt}} = \frac{\underline{u}}{jC\omega\underline{u}} = \boxed{\frac{1}{jC\omega}}$$

Cela nous permet de définir le comportement en fréquence :

- Basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), Z tend vers l'infini puisque Z est homogène à une résistance, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Hautes fréquences ( $\omega \to \infty$ ), Z tend vers zéro, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé.



Impédance pour une bobine :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{L\frac{d\underline{i}}{d\underline{t}}}{\underline{i}} = \frac{jL\omega\underline{i}}{\underline{i}} = [jL\omega]$$

Cela nous permet de définir le comportement en fréquence :

- Basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), Z tend vers zéro, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé.
- Hautes fréquences ( $\omega \to \infty$ ), Z tend vers l'infini, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

30



L'intérêt de cette impédance complexe réside dans l'écriture d'une loi d'Ohm valable pour les composants classiques (R, L, C) en régime sinusoïdal forcé.

Pour simplifier les calculs on peut donc écrire, pour chaque composant d'un circuit :

$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$$



Le **module de <u>Z</u>** donne le rapport de l'amplitude de la tension par l'amplitude de l'intensité :

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|} = \frac{U_m}{I_m}$$

L'argument de <u>Z</u> donne le déphasage (avance de phase) entre la tension u(t) et l'intensité i(t) :

$$Arg(\underline{Z}) = Arg(\underline{u}) - Arg(\underline{i}) = \phi - \phi' = \Delta\phi$$



#### Déphasage d'une bobine :

Sachant que  $\underline{Z} = jL\omega$ , calculons le cosinus et le sinus de son argument :

$$\cos \Delta \phi = \frac{0}{|\underline{Z}|} = 0$$
  $\sin \Delta \phi = \frac{L\omega}{L\omega} = 1$   $donc$   $\Delta \phi = \frac{\pi}{2}$ 

 $\rightarrow$  La tension est donc en avance de phase de  $\pi/2$  sur l'intensité



#### Déphasage d'un condensateur :

Sachant que  $\underline{Z} = 1/jC\omega$ , calculons le cosinus et le sinus de son argument :

$$\cos \Delta \phi = \frac{0}{|\underline{Z}|} = 0$$
  $\sin \Delta \phi = \frac{-C\omega}{C\omega} = -1$   $donc$   $\Delta \phi = -\frac{\pi}{2}$ 

 $\rightarrow$  La tension est donc en retard de phase de  $\pi/2$  sur l'intensité



# Lois de l'électrocinétique en notation complexe

Les lois du chapitre 1 sont valables en notation complexe

Impédances en série 
$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

Impédances en parallèle 
$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

Loi des nœuds, loi des mailles, diviseurs de tension et courant, Millman, superposition, Thévenin, Norton



#### Sommaire

- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques





### Valeur efficace

Quand on **mesure** une tension sinusoïdale avec un voltmètre **en position DC** (Direct Composant), celui-ci nous donne sa **valeur efficace**.

La formule qui permet de calculer la grandeur efficace pour n'importe quel signal périodique est la suivante :

$$X_{eff}^2 = \langle x(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt$$

Où  $\langle x(t)^2 \rangle$  est la valeur moyenne de  $x(t)^2$  sur une période.

Dans le cas d'une grandeur sinusoïdale, la valeur efficace vaut :

$$X_{eff} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$



### Puissance instantanée

$$p(t) = u(t) \times i(t)$$

Si u(t) et i(t) sont sinusoïdaux :

$$p(t) = U_m \cos(\omega t + \phi) \times I_m \cos(\omega t + \phi')$$

Remarque : la puissance instantanée oscille deux fois plus vite que la tension et l'intensité (pulsation  $2\omega$ ) :

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2} (\cos(2\omega t + \phi + \phi') + \cos(\phi - \phi'))$$



## Puissance moyenne

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

On peut montrer dans le cas sinusoïdal que

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \Delta \phi = U_{eff} I_{eff} \cos \Delta \phi$$

Remarque : la présence du déphasage entre tension et intensité dans l'expression de la puissance moyenne implique que celle-ci est nulle lorsque le déphasage est égale à  $\pi/2$ 

→ Dans le cas d'un condensateur ou d'une bobine, la puissance moyenne reçue est nulle



### Sommaire

- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques



## Quelques définitions supplémentaires

#### Impédance complexe :

On appelle impédance complexe le rapport  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ 

 $\underline{Z}$  est un nombre complexe de la forme suivante :  $\underline{Z} = R + jX$  où R est la **résistance** et X la **réactance**,  $|\underline{Z}|$ , R et X s'expriment en Ohm ( $\Omega$ )

#### Admittance complexe:

On appelle admittance complexe le rapport  $\underline{Y} = \underline{\underline{I}}$ 

 $\underline{Y}$  est un nombre complexe de la forme suivante :  $\underline{Y} = G + jB$ 

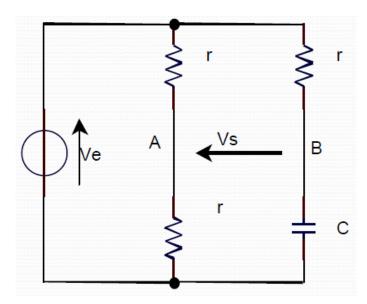
Où G est la conductance et B la susceptance.  $|\underline{Y}|$ , G et B s'expriment en  $\Omega^{-1}$ 



### Fonction de transfert

Rapport entre une tension de sortie et une tension d'entrée donnée.

#### Exemple:



La fonction de transfert en tension est le rapport :  $\underline{T} = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}}$ 



### Sommaire

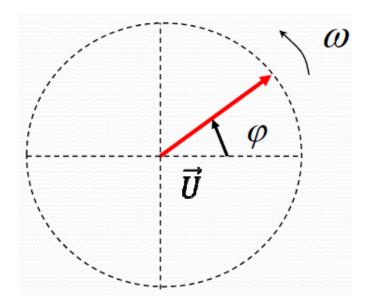
- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques





## Résolution par la représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel est une image vectorielle de l'équation mathématique u(t) faite à l'instant t=0

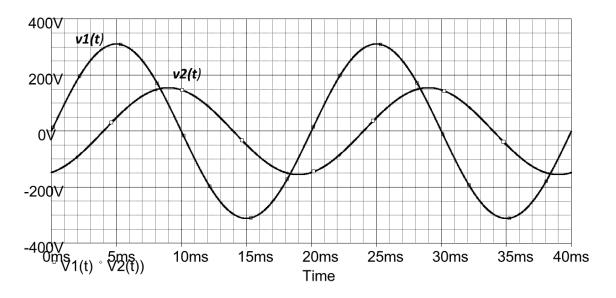


$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$
  $\|\vec{U}\| = U = U_{max}$ 



## Résolution par la représentation de Fresnel

Exemple: Représenter les vecteurs de Fresnel associés aux tensions v1(t) et v2(t) suivantes. On choisit v1 comme origine des phases



$$V_{1max} = 220 V$$
  $\phi_1 = 0^{\circ}$   $V_{2max} = 110 V$   $\phi_2 = -72^{\circ}$ 

$$V_{2max} = 110 V$$

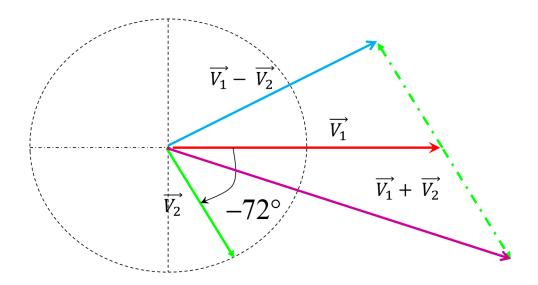
$$\phi_2 = -72^{\circ}$$



## Opérations sur les vecteurs

L'utilisation des vecteurs de Fresnel permet notamment d'effectuer graphiquement (et simplement) des additions ou des soustractions de grandeurs sinusoïdales de même fréquence (lois des mailles et des nœuds).

Ainsi, dans l'exemple précédent, on peut graphiquement réaliser v1(t) + v2(t) ou encore v1(t) - v2(t)

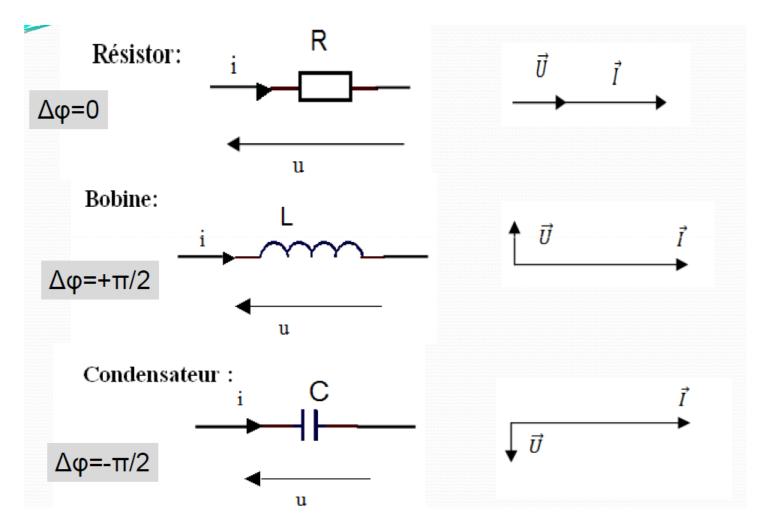


Il suffit ensuite de mesurer la norme (module) et la phase des vecteurs pour trouver facilement l'expression temporelle.





## Opérations sur les vecteurs

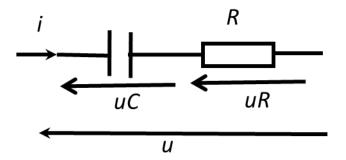




## Etude des circuits par construction de Fresnel

#### Circuit RC série:

On considère le circuit suivant :  $R = 100 \Omega$  et  $C = 31.8 \mu$ F mis en série et traversé par un courant i(t) de fréquence 50 Hz et d'amplitude 0,17 A (choisie comme référence) :

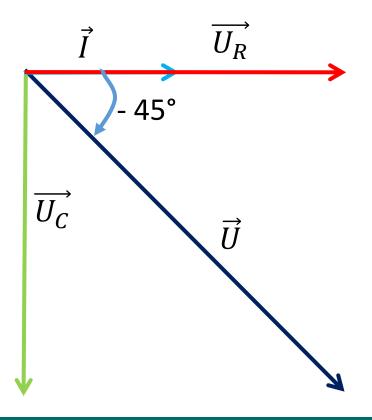


Tracer le diagramme vectoriel des tensions et courant pour déterminer l'amplitude et la phase de u.



## Etude des circuits par construction de Fresnel

Tracer le diagramme vectoriel des tensions et courant : On calcule ampl de Ur = ampl de Uc = 17V, phase R = 0 et phase C = -pi/2







## Méthode de Fresnel ou méthode des complexes

Lorsqu'on a une seule relation entre les grandeurs sinusoïdales à traduire, la méthode de Fresnel est certainement plus intuitive.

Par contre, dès que l'on a plusieurs relations à traduire, les constructions géométriques deviennent laborieuses, tandis que la méthode des complexes permet une résolution élégante et rapide.





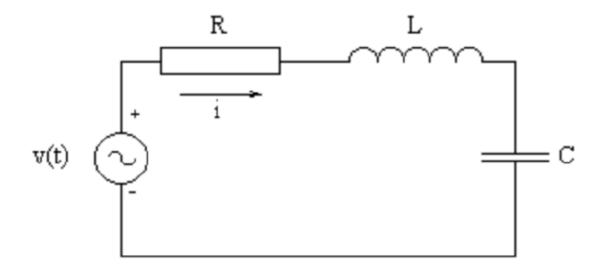
### Sommaire

- Introduction
- Grandeurs électriques d'un signal sinusoïdal
- Notation complexe en régime sinusoïdal
- Puissance en régime sinusoïdal
- Quelques définitions supplémentaires
- Résolution par construction Fresnel
- Résonance dans les circuits électriques





Illustration dans le cas d'un circuit RLC série soumis à une tension  $v(t) = U \cos(\omega t)$ 



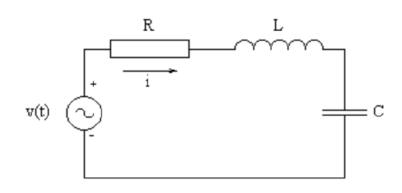


$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$$

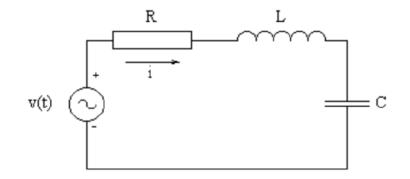
Avec: 
$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Le module Z de l'impédance est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$



$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$



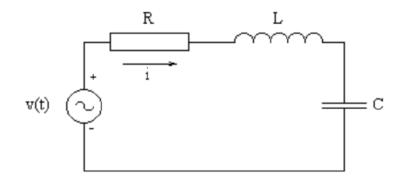
L'impédance du circuit RLC varie avec la pulsation. Elle est minimale pour la **pulsation propre**  $\omega_0$  du circuit :

$$Z_{min} = R \ pour \ L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \ soit \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

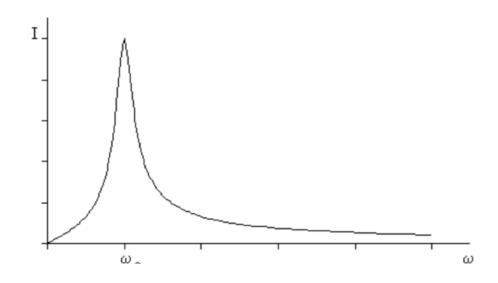


$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$





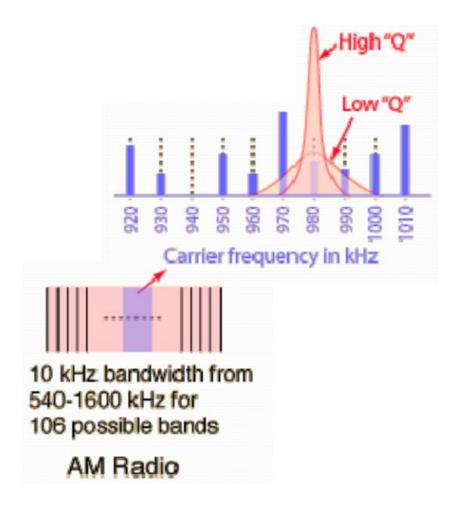
L'impédance est minimum et le courant présente un maximum





#### **Remarques:**

- On peut définir un facteur de qualité Q qui caractérise la largeur de la résonance
- On peut étudier les résonances en tension et en courant
- 3. Nombreuses applications, par exemple : RADIO





#### **Remarques:**

Balançoire, poussée régulière à la fréquence d'oscillation naturelle



1. Le phénomène de résonance peut apparaître dans tous les systèmes oscillants, lorsqu'ils sont soumis à une excitation périodique de même fréquence que leur fréquence propre



La fréquence du vent a coïncidé avec la fréquence propre du pont (oscillation du réseau d'atomes, la fréquence propre dépend des matériaux)



## Récapitulatif (à savoir)

- Impédance complexe des composants passifs (R,L,C)
- Méthode de Fresnel
- Méthode des complexes
- Puissance en régime sinusoïdal
- Résonance dans les circuits électriques





# Fin du Chapitre 3

JUNIA ISEN