1. Effectuer la division euclidienne suivant les puissances décroissantes de :
   - $A = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ par $B = X^2 + X - 1$
   - $A = X^5 + X + 1$ par $B = X^3 - X^2 + 1$
   - $A = 2X^2 + 5X + 6$ par $B = X + 2$

2. Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes :
   - $P = (X-1)^2$ et $Q = X^2 + 1$
   - $R = 2X^4 + X^3 - 2X - 1$ et $S = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$

3. Déterminer le *pgcd* des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X - 2 \text{ et } B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2.$$

   En déduire les factorisations de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

4. Déterminer le *ppcm* des polynômes A et B dans chacun des cas suivants :
   (a) $A = X^2 - X + 1, \quad B = X^2 - X + 2$
   (b) $A = (X^2 + X)(5X^2 - 1), \quad B = (X-1)(3X^2 + 3)$

5. Quel est l'ordre de multiplicité de la racine -1 dans les polynômes suivants :
   - $P = X^7 + 3X^6 + 3X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$
   - $Q = X^5 + 7X^4 + 19X^3 + 25X^2 + 16X + 4$

6. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ avec la méthode de Ruffini les polynômes suivants :
   - $P = 3X^3 + 2X^2 - 3X - 2$
   - $Q = X^4 + 5X^3 + 5X^2 - 5X - 6$

7. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :
   - $P = X^3 - X^2 - 14X + 24$
   - $Q = X^4 - 5X^2 + 6$
   - $R = X^4 + X^2 + 1$

8. Soit le polynôme $P = 3X^6 - X^5 - X^4 - 4X^3 + X^2 + X + 1$.
   - Montrer que P est divisible par $X^2 + X + 1$.
   - Montrer que 1 est racine double de P.
   - Résoudre l'équation $P(X) = 0$.

9. Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1.$$

   En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

10. Trouver les racines du polynôme $X^5 - 1$.

11. Décomposer en éléments simples les nombres rationnels suivants :

$$a)\frac{1}{230} \qquad b)\frac{1}{232} \qquad c)\frac{499}{1001}$$

12. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

(a) $F = \dfrac{X}{X^2-4}$

(b) $G = \dfrac{X^2}{X^4-16}$

(c) $H = \dfrac{1}{X^3-X}$

(d) $I = \dfrac{X^2+1}{(X-2)(X+1)^4}$

(e) $J = \dfrac{X^2+1}{X^5-X^3}$

(f) $K = \dfrac{X^2+X-3}{X^2-3X+2}$

(g) $L = \dfrac{2X-1}{(X-1)(X-2)}$

(h) $M = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4}$

13. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{4}{(X^2-1)^2}, \qquad G = \frac{X^4}{X^4-1}, \qquad H = \frac{X^3+1}{(X-2)^4}$$

14. (DS 2019-2020)
Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
   (a) Combien de racines P aura dans $\mathbb{C}[X]$? Pourquoi ?
   (b) Montrer que $1 + j = -j^2$
   (c) Calculer j^3
   (d) Montrer que j est une racine double de P.
   Qu'est-ce que l'on peut dire de $\overline{j}$?
   (e) Trouver deux racines réelles évidentes de P.
   (f) Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

15. (DS 2020-2021)
On considère le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$ et la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{P}$.
   (a) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Écrire les décompositions en éléments simples **théoriques** dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de F.
   (c) (BONUS) Calculer les coefficients des décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de F.