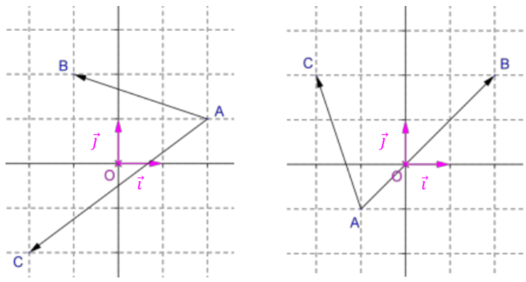
1. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels :

$$z = -\frac{2}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}, \quad u = \frac{3-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}, \quad v = \frac{5+\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}, \quad w = \left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2.$$

2. Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Dans chacun des deux cas suivants,
   (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
   (b) Calculer $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{AC}||$ et $||\overrightarrow{OA}||$.
   (c) En déduire si les points O, A et B sont alignés. Même question pour A, B et C.



3. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{i}^2 = 2$, $||\vec{j}|| = 3$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = -4$.
   Calculer $(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})$, $(\vec{i} - 3\vec{j})^2$ et $||2\vec{i} + 3\vec{j}||$.

4. Écrire sous les trois formes (algébrique, trigonométrique et exponentielle) les nombres complexes suivants :
   (a) Nombre de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{3}$
   (b) Nombre de module 3 et d'argument $-\dfrac{\pi}{8}$

5. Effectuer les calculs suivants :
   (a) $(3 + 2\mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i})$
   (b) Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
   (c) Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

6. Calculer le module et un argument de

$$u = \frac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \text{ et } v = 1 - \mathrm{i}$$

   En déduire le module et un argument de $\dfrac{u}{v}$.

7. Simplifier les nombres complexes suivants :

$$z = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20} \quad \text{et} \quad u = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$$

8. Du calcul de $(\sqrt{3} - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i})$, déduire $\cos \dfrac{\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

9. Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ on a :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

   Donner une interprétation géométrique.

10. (a) Développer $(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^5$ avec la formule du binôme de Newton.
    (b) En déduire une expression de $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
    (c) Exprimer alors $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
    (d) Exprimer aussi $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

11. Linéariser $\cos^5(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$ et $S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$.

13. Déterminer les racines
    (a) 5ème de $1 + \mathrm{i}$
    (b) 5ème de $32\mathrm{i}$
    (c) 4ème de $8(1 + \sqrt{3})$
    (d) 4ème de 81 et -81

14. Résoudre les équations suivantes :
    (a) $z^2 + 2z + 5 = 0$
    (b) $2z^2 - (1 + 5\mathrm{i})z - 2(1 - \mathrm{i}) = 0$
    (c) $z^2 - (5 - 14\mathrm{i})z - 2(5\mathrm{i} + 12) = 0$
    (d) $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$

15. (a) Donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique de :
$$u^4 = -4$$
    (b) Donner les solutions sous forme algébrique de :
$$(z + 1)^4 + 4(z - 1)^4 = 0$$

16. Posons $E = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$. Soit $f : E \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'application définie pour tout $z \in E$ par :
$$f(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$
    (a) Montrer que l'application est injective.
    (b) Montrer que pour tout $z \in E$ on a $f(z) \neq 1$
    (c) Démontrer l'égalité
$$f(E) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$
    Que peut-on déduire sur f ?

17. (DS 2019-2020)
    On appelle $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
    (a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = 1$. Donnez les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.
    (b) Montrez que $\overline{j} = j^2$ et que $j^{-1} = j^2$.
    (c) Combien vaut $1 + j + j^2$? Quelle propriété exprime ce résultat ? *Suggestion : qui sont* 1, j *et* j^2 *?*
    (d) Résolvez l'équation $z^2 + z + 1 = 0$
    (e) Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de la transformation géométrique : $z \mapsto jz$
    (f) (BONUS) Si A et B sont les deux points d'affixe les racines du polynôme calculées en d), calculer c l'affixe du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral et $Re(c) > 0$.