1. Montrer que le produit scalaire vérifie $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ et $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle u, u\rangle \geqslant 0$. Montrer $\langle u, u\rangle = 0$ si et seulement si u est le vecteur nul.

3. Déterminer si les applications f_i suivantes sont linéaires :
   (a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f_1([x, y]) = [x + 2y, 2x - y]$
   (b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f_2([x, y]) = [x + 2y, 2x - y + 1]$
   (c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad f_3([x, y]) = [2x - 3, 4 + y, -x + 2y]$

4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $[x, y, z]$ associe $[x + y, y + z, x - 2z]$.
   Déterminer la matrice de l'application linéaire f dans la base canonique.

5. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ déterminée par la matrice suivante :
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$
   Écrire l'application linéaire associée.

6. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $[x, y, z] \mapsto [x - y, 2x + z]$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $[x, y] \mapsto [x + y, 3x - y, -x + 2y]$. Calculer $g \circ f$ et sa matrice associée.

7. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
   Calculer l'image de $[x, y, z]$ par f.

8. Écrire la matrice de la réflexion du plan par rapport à la droite $y = -x$ et dans l'espace avec la réflexion par rapport au plan d'équation $y = -x$.

9. Soit f la projection orthogonale de l'espace sur le plan (Oxz) et soit g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'axe (Oy). Calculer la matrice de $f \circ g$. Cette matrice est inversible ? Si oui, calculer l'inverse et donner une interprétation géométrique.

10. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f([1, 0, 0]) = [1, 1]$ puis $f([0, 1, 0]) = [0, 1]$ et $f([0, 0, 1]) = [-1, 1]$. Calculer $f([3, -1, 4])$ et $f([x, y, z])$ en général.

11. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f([x, y]) = [x - y, y + x]$. f est-elle un automorphisme ?

12. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, déterminer lesquelles sont libres, et lesquelles sont génératrices :
    (a) $u = [2, 1, 3]$, $v = [0, -1, -1]$ et $w = [2, -1, 1]$;
    (b) $f = [1, 1, 1]$ et $g = [2, 0, -2]$;
    (c) $x = [1, -1, -2]$, $y = [2, 3, 1]$ et $z = [-1, -1, 2]$
    (d) $a = [1, 0, 2]$, $b = [-1, 3, -1]$, $c = [2, 1, 1]$ et $d = [3, 2, -1]$

13. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\{[1,0,t],[1,1,t],[t,0,1]\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

14. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$u_1 = [2\ 3\ \ -1]^T\ u_2 = [1\ \ -1\ \ -2]^T.$$

Construire une base de $\mathbb{R}^3$ contenant les vecteurs u_1 et u_2.

15. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants

$$t = [1\ 5\ \ -1]^T\ u = [-2\ \ -11\ 4]^T\ v = [-2\ \ -13\ 4]^T\ w = [3\ 1\ 3]^T.$$

Montrer que $\{t,u,v,w\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

16. Montrer que les vecteurs $u_1 = [0\ 1\ 1\ 1]^T$, $u_2 = [1\ 0\ 1\ 1]^T$, $u_3 = [1\ 1\ 0\ 1]^T$, $u_4 = [1\ 1\ 1\ 0]^T$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.
Calculer, suivant cette base, les coordonnées du vecteur $U = [1\ 1\ 1\ 1]^T$, puis celles du vecteur $V = [1\ 0\ 0\ 0]^T$.

17. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de deux bases : la base canonique $\{e_1,e_2\}$ et la base $\{e_1^{'},e_2^{'}\}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1^{'} & = & 2e_1 + e_2 \\ e_2^{'} & = & 3e_1 + 2e_2 \end{array}\right.$$

Soit $x = 2e_1 + 3e_2$. Calculer les composantes de x dans $\{e_1^{'},e_2^{'}\}$.

18. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = \{i,j,k\}$, on considère les vecteurs suivants : $u = 2i - j + k$, $v = i + 2j - k$ et $w = i + j - 3k$.
Montrer que la famille $\{u,v,w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $x = 2i + 3j + 4k$ dans la base $B' = \{u,v,w\}$.

19. Soient $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ munis de leurs bases canoniques $\{e_1,e_2,e_3\}$ et $\{f_1,f_2\}$ respectivement. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

On considère les vecteurs

$$e_1^{'} = e_1,\quad e_2^{'} = e_1 + e_2,\quad e_3^{'} = e_1 + e_2 + e_3,\quad f_1^{'} = f_1 + f_2,\quad f_2^{'} = f_1 - f_2.$$

Après avoir vérifié que $\{e_1^{'},e_2^{'},e_3^{'}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $\{f_1^{'},f_2^{'}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, déterminer la matrice de f par rapport aux bases $\{e_1^{'},e_2^{'},e_3^{'}\}$ et $\{f_1^{'},f_2^{'}\}$.

20. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à $[x\ y\ z]^T$ associe $[x+y\ y+z\ x-2z]^T$.
   (a) f est-elle linéaire ?
   (b) f est-elle injective, bijective ?

21. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
Calculer les coordonnées y_1,y_2,y_3 de $y = f(x)$ en fonction des coordonnées x_1,x_2,x_3 de x puis déterminer le $Ker\ f$.