1. Résoudre les équations d'inconnue X, où X est une matrice à coefficients réels, dont on précisera la taille :
   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + 3X = -\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} - 2X$
   (c) $5\left(X - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) - 2X - \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 3X$

2. Soient :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer les produits matriciels possibles.
   (b) Parmi les résultats obtenus, quelles sont les matrices carrées ?

3. Soient les matrices suivantes : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   Calculer : A^2, B^2, AB, BA, BC, CB, CA et AC.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, et $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

5. Soit $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Calculer U^2 et U^3.
   (b) Vérifer que $U - 3U^2 + U^3 = 0$

6. Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = A - I_3$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n. En déduire A^n.

7. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer A^3, puis A^n pour $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

8. Montrer que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et donner l'expression de son inverse.

9. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad et \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer AB et AC. Que constate-t-on ?
   (b) La matrice A peut-elle être inversible ? Même question pour AB.
   (c) En déduire sans calcul le déterminant de A.

10. Calculer le determinant des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

11. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer le determinant de A et établir pour quelles valeurs de k la matrice est inversible.
   (b) Calculer A^{-1} pour $k = 1$.

12. Calculer, lorsque c'est possible, les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. On considère les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

14. (DS 2020-2021)
   Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = AB = \begin{bmatrix} 12 & 5 & -6 \\ 1 & 11 & 10 \end{bmatrix}.$$

   (a) Donner les tailles des matrices A et C et les coefficients $c_{2,3}$ et $c_{1,2}$ de la matrice C.
   (b) Calculer, si c'est possible, les produits : AC et CA.
   (c) Quelle est la nature de la matrice A ? (Symétrique, anti-symétrique, triangulaire, diagonale, etc)
   (d) Déterminer B.
   (e) Calculer $A + 2I$
   (f) Donner la formule du binôme de Newton et calculer A^n.