1. Exprimez les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs ($f$ étant une fonction réelle)
   (a) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   (b) La fonction $f$ est constante.
   (c) Tout réel a (au moins) un antécédent par $f$.
   (d) La fonction $f$ ne prend pas de valeur négative.
   (e) La fonction $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur.

2. Complétez, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.
   (a) $\ldots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
   (b) $\ldots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
   (c) $\ldots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
   (d) $\ldots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$

3. Niez les assertions suivantes :
   (a) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
   (b) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
   (c) Pour tout entier relatif $x$, il existe un entier relatif $y$ tel que, pour tout entier relatif $z$, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$
   (d) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \quad (|x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$.

4. Déterminez pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et énoncez leur négation.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leqslant x$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 3n$
   (e) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, e^y = xz^2$

5. Examinez la véracité de la proposition suivante, ainsi que celle de tous les prédicats que l'on peut obtenir en permutant l'ordre des quantificateurs :

$$\exists x \in \mathbb{R}^* \ \forall y \in \mathbb{R}^* \ \forall z \in \mathbb{R}^* \ z = xy$$

6. En utilisant les tableaux de vérité, prouvez que les équivalences suivantes sont toujours vraies :
   (a) $(\overline{A \text{ou} B}) \Leftrightarrow (\overline{A} \text{ et } \overline{B})$
   (b) $(A \text{ ou } (B \text{ et } C)) \Leftrightarrow ((A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C))$

7. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n$, on a :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

8. On suppose que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont irrationnels. Montrez que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

9. Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{N}$. Écrivez en utilisant $\forall$, $\exists$ les assertions :

$$A = \varnothing, \quad A \cap B \neq \varnothing, \quad A \subset B, \quad A \not\subset B$$

10. Soient $A$, $B$ deux ensembles. Montrez que :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ et } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

11. Montrez par raisonnement direct et par contraposition l'assertion suivante, $E$ étant un ensemble :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \ \ (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$$

12. Déterminez les ensembles suivants, mettez ces ensembles sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}, x^2 < 1\} \qquad A_2 = \{x \in \mathbb{R}, -1 < \frac{2x}{x^2+1} < 1\} \qquad A_3 = \{x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{|x|} > 1\}$$

13. Déterminez l'ensemble de définition des fonctions $f, g, g \circ f, f \circ g$ :
    (a) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x}$ $\qquad g : x \mapsto x^2$
    (b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ $\qquad g : x \mapsto x^2 - 3$
    (c) $f : x \mapsto x^2 + 3x - 5$ $\qquad g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$
    (d) $f : x \mapsto \sin(x^{2019})$ $\qquad g : x \mapsto 1 - x^{2019}$

14. Dites, en justifiant, pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :
    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^2$
    (b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $\quad x \mapsto x^2$
    (c) $f : [0,1] \to [0,2]$ $\quad x \mapsto x^2$
    (d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x + x^3$
    (e) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^2 + x^3$
    (f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x + x^4$

15. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrez que :
    (a) si $g \circ f$ injective alors $f$ injective ;
    (b) si $g \circ f$ surjective alors $g$ surjective .

16. (a) Soit $f$ l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par :

$$f(1) = 4, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2.$$

    Déterminez $f^{-1}$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.
    (b) Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
    Déterminez $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1, 2]$.

17. Dites si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.
    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ est ...
    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x^2$ est ...
    (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(x) = x$ est ...
    (d) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$ est ...
    (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 8x + 354$ est ...
    (f) $f : \mathbb{R} \to \{14\}$ telle que $f(x) = 14$ est ...
    (g) $f : \{17\} \to \{12, 17\}$ telle que $f(x) = 17$ est ...
    (h) $f : \{0\} \to \{0\}$ telle que $f(x) = 0$ est ...
    (i) $f : \{1\} \to \{\frac{1}{2}\}$ telle que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est ...