1. En utilisant les quantificateurs exprimer les deux limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to a} f(x) = l \qquad \text{et} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2. En utilisant la définition de limite avec les quantificateurs, vérifier les deux limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \cos(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

3. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2-x}{2x^3+\sqrt{x}}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x\ln x}{\sqrt{x}+1}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{2x^2-3x+2}{x^2-9}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}$

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1)-2\ln x$

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

4. Donner la définition d'une fonction continue et étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+5x-4}{2x+1} & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 \quad \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad b)\quad g(x) = \begin{cases} x\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5. Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux bornes de leur ensemble de définition ?

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$

   (b) $g(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$

   (d) $h(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$

   (e) $k(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \qquad \text{si } x \neq 0$$

   Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

7. Calculer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2x^3-4x^2)e^{-x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2x^3-4x^2)e^{-x}$

8. Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

   (a) $n \sim_{+\infty} n+1$
   (b) $n^2 \sim_{+\infty} n^2+n$
   (c) $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(10^6 n)$
   (d) $e^n \sim_{+\infty} e^{n+10^{-6}}$
   (e) $e^n \sim_{+\infty} e^{2n}$
   (f) $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n+1)$

9. Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

   (a) $x+1+\ln(x)$ en 0 et $+\infty$
   (b) $\cos(\sin(x))$ en 0
   (c) $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$ en 0
   (d) $\ln(\cos(x))$ en 0

10. Calculer, à l'aide des équivalents, les limites suivantes :

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{x\ln(1+x)}$
    (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
    (c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
    (d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

11. Calculer les limites suivantes :

    (a) $\lim\limits_{x\to +\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$
    (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos(\pi x)}{\sqrt{x^2-2x+1}}$
    (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
    (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$

12. (DS 2018-2019)
    Soient a et b deux réels.
    Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0 \\ e^{bx}-x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

    (a) Donner la définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point a.
    (b) Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
    (c) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$$

    (d) Que signifie $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? Déterminer a et b pour que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

13. (DS 2018-2019 (2))
    (a) Donner la définition d'une limite finie l, avec $l \in \mathbb{R}$, pour x qui tend vers 0 et pour x qui tend vers $+\infty$.
    (b) Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2}-x$$

14. (DS 2019-2020)
    Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3+3x-3$.
    (a) Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
    (b) Calculer la dérivée de f et en déduire son(ses) sens de variation.
    (c) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
    (d) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.