Zadaća 2

iz predmeta Matematikčka logika i teorija izračunljivosti

Prezime i ime: Dizdarević Adi

Br. indexa: 18392

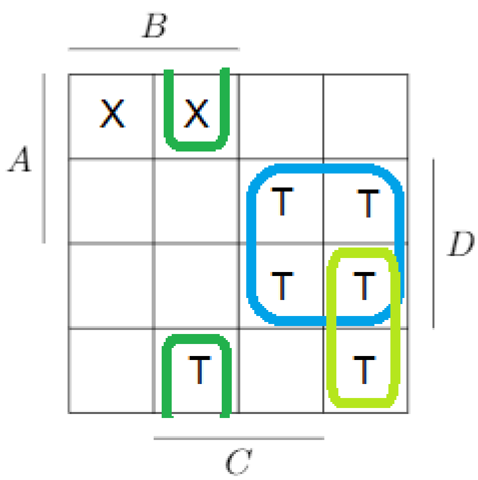
Zadatak	Bodovi
1	
2	
3	
4	
5	

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Za logički izraz $A\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}(\overline{D} \to \overline{C}) \vee B\overline{D}(A \vee C)$ odredite minimalnu formu izraza ako se zna da se ne može desiti situacija u kojoj su A i B tačni a D netačan.

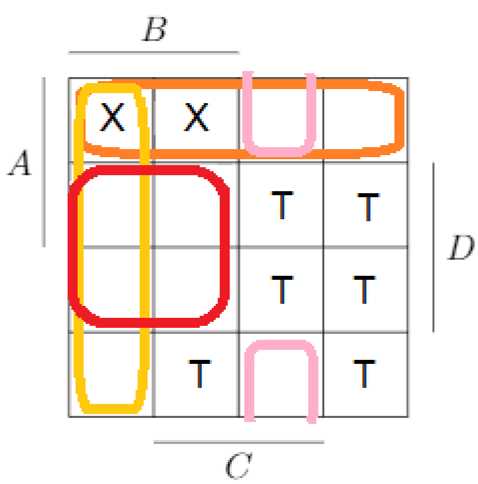
   Rješenje:
   $A\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}(\overline{D} \to \overline{C}) \vee B\overline{D}(A \vee C) = A\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}(D \vee \overline{C}) \vee AB\overline{D} \vee CB\overline{D} =$
   $A\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee AB\overline{D} \vee CB\overline{D} = \overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee AB\overline{D} \vee CB\overline{D}$
   Pri čemu je iz postavke zadatka $AB\overline{D}$ don't care kombinacija.

   MDNF:

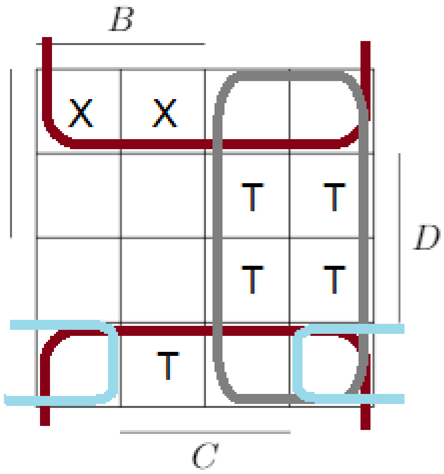
   $\overline{B}D \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee BC\overline{D}$

   MKNF:

   $\overline{B\overline{C} \vee BD \vee A\overline{D} \vee \overline{B}C\overline{D}} = (\overline{B} \vee C)(\overline{B} \vee \overline{D})(\overline{A} \vee D)(B \vee \overline{C} \vee D)$

MEXDNF:



$\overline{B} \veebar \overline{D} \veebar \overline{A}\ \overline{C}\ \overline{D}$

Zaključak: Minimalna forma zadanog izraza je MEXDNF : $\overline{B} \veebar \overline{D} \veebar \overline{A}\ \overline{C}\ \overline{D}$

2. Dokažite da za bilo koje skupove A, B i C vrijedi:
   (a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
   (b) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B$.

   Rješenje:
   Dokažimo ove jednakosti sređivajući lijevu stranu.

   (a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \cap C' = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A \setminus (B \cup C)$ q.e.d.

   (b) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = (A \cap B') \setminus (B \cap C') = (A \cap B') \cap (B \cap C')' = A \cap B' \cap (B' \cup C) =$
   $A \cap (B' \cap B' \cup B' \cap C) = A \cap (B' \cup B' \cap C) = A \cap B' \cap (\mathbb{U} \cup C) =$
   $A \cap B' \cap \mathbb{U} = A \cap B' = A \setminus B$
   q.e.d.

3. Dokažite da za svako $n \geq 1$ i bilo koje skupove $A, B_1, B_2, ..., B_n$ vrijedi:
   (a) $A \cap (\cup_{i=1}^{n} B_i) = \cup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$
   (b) $\cap_{i=1}^{n} (A \times B_i) = A \times (\cap_{i=1}^{n} B_i)$.

   Rješenje:
   Ukoliko jednostavno raspišemo formule:
   (a)

$$A \cap (\cup_{i=1}^{n} B_i) =$$

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup ... \cup B_n) =$$

$$(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup ... \cup (A \cap B_n) =$$

$$\cup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

   Naravno ovo vrijedi ukoliko se pozovemo na zakon idempotentnosti koji glasi:

$$A \cup A \cup A \cup ... \cup A = A$$

Analogno, raspišimo i drugi dio zadatka:
(b)

$$\cap_{i=1}^{n}(A \times B_i) =$$
$$(A \times B_1) \cap (A \times B_2) \cap (A \times B_3) \cap ... \cap (A \times B_n) =$$
$$A \times (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap ... \cap B_n) =$$
$$A \times (\cap_{i=1}^{n} B_i)$$

Naravno ovo vrijedi ukoliko se ponovno pozovemo na zakon idempotentnosti koji glasi:

$$A \cap A \cap A \cap ... \cap A = A$$

4. U skupu $X = \{x \in |x^2 \leq 49\}$ data je relacija:

$$R = \{(1,6),(2,5),(3,5),(4,5),(5,4),(5,5)\}$$

(a) Odredite relacije R^{-1}, R^2 i R^3, kao i simetrično, tranzitivno i tranzitivno-refleksivno zatvorenje navedene relacije
(b) Odredite kompozicije relacija $R \circ R^{-1}$ i $R^2 \circ (R^{-1})^2$
(c) Primjenom relacijskih matrica odredite kompoziciju $(R \circ R^2) \circ R^3$.

Rješenje:

Kako je jedino za R^* bitno u kojem je stvarno skupu relacija definirana, privremeno ćemo smatrati da je R definirana u skupu X' , da pojednostavimo račun. Tako da ćemo reducirati skup X na $X' = \{x \in |x^2 \leq 36\}$.

(a)
Relacija $xR^{-1}y$ vrijedi akko vrijedi i relacija yRx.
Dakle $R^{-1} = \{(6,1),(5,2),(5,3),(5,4),(4,5),(5,5)\}$
Da bismo odredili R^2 i R^3 poslužit ćemo se relacionom matricom koja glasi:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sad imamo:

$$M^{<2>} = M \circ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{<3>} = M^{<2>} \circ M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Očitavanjem iz matrica slijedi da je:
$R^2 = R^3 = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$

Da bi odredili simetrično zatvorenje potrebno je odrediti $R \cup R^{-1} = \{(1,6),(2,5),(3,5),(4,5),(5,2),(5,3)$

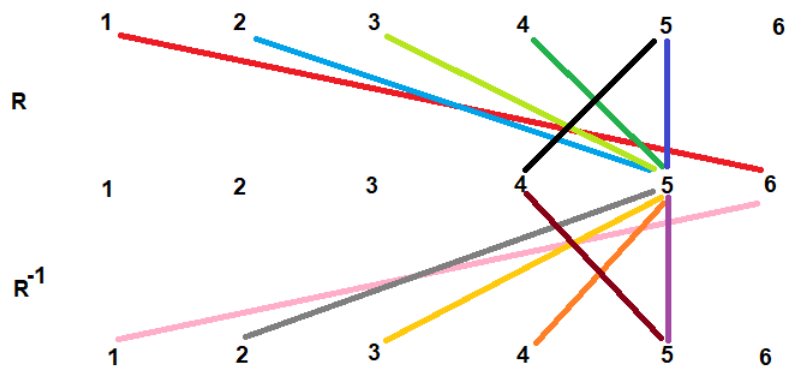
Tranzitivno zatvorenje se određuje kao $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^n$, pri čemu je n u našem slučaju $\#X' = 6$. S obzirom da možemo uočiti iz množenja matrica da su $M^{<2>} = M^{<3>} = M^{<4>} = M^{<5>} = M^{<6>}$ tako da su i $R^2 = R^3 = R^4 = R^5 = R^6 = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),$
Ovime olakšavamo određivanje $R^+ = R \cup R^2 = \{(1,6),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$
Da bi odredili tranzitivno-refleksivno zatvorenje relacije, poslužit ćemo se relacionim matricama.
$M^* = (I \vee M)^{<6>} = I \vee M \vee M^2 \vee M^3 \vee M^4 \vee M^5 \vee M^6$,s obzirom da smo utvrdili da je $M^{<2>} = M^{<3>} = M^{<4>} = M^{<5>} = M^{<6>}$ proračun možemo pojednostaviti:

$$I \vee M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^* = I \vee M \vee M^{<2>} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Iz čega slijedi da je od skupa X', $R^* = \{(1,1),(1,6),(2,2),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),$
$(3,5),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$
Konačno slijedi da R^* nije potpuna relacija skupa X', što odmah daje na znanje da nije ni potpuna relacija skupa X.
Iz čega slijedi da je od skupa X, $R^* = \{(1,1),(1,6),(2,2),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),$
$(3,5),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6),(7,7)\}$
Primijetimo da je u R^* i $(7,7)$ zbog toga što je #X'=6, a da bi pronašli R^* od X potreban je #X=7.

(b) Za određivanje $R \circ R^{-1}$ poslužit ćemo se dijagramom:



Očitavanjem slijedi da je $R \circ R^{-1} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),$ $(3,4),(3,5),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,5)\}$.

Za određivanje $R^2 \circ (R^{-1})^2$ poslužit ćemo se matricama:

$$(M^{<-1>})^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$M^{<2>} \circ (M^{<-1>})^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Odakle slijedi da je $R^2 \circ (R^{-1})^2 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),$ $(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$

(c) Za određivanje $(R \circ R^2) \circ R^3$ možemo iskoristiti činjenicu da smo prethodno utvrdili da je odredili R^2 te ustanovili da je $R^2 = R^3 = R^4 = R^5 = R^6$, pa na osnovu toga ovo možemo odrediti kao $(R \circ R^2) \circ R^3 = R^3 \circ R^3 = R^6 = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$

5. Zadane su dvije n-arne relacije R_1 i R_2:

$$R_1 = \{(8,8,3,6,8),(4,4,1,5,1),(2,7,1,2,4),(5,4,3,2,6),$$

$$(2,5,6,6,7),(4,1,1,5,7),(7,7,6,3,1),(1,1,2,2,5)\}$$

$$R_2 = \{(8,6,3,6),(7,4,4,3),(6,5,2,3),(2,6,2,8),(4,8,5,5\}$$

Odredite relaciju R koja se dobiva kao:

$$R = \underset{(\#1,\#2,\#(-1))}{\pi}\left(\underset{(\#1>\#2\wedge\#1\neq1)}{\sigma}\left(R_1 \underset{(\#1<\#1+\#2)}{\bowtie} \underset{(\#1,\#2)}{\pi}(R_2)\right)\right)$$

Napomena: Oznaka $\#(-1)$ je zadnja koordinata uređene n-torke.

Rješenje:

Do rješenja ćemo doći postupno. Kao rezultat traženog $\bowtie$ spajanja dobijaju se oni elementi iz Kartezijevog produkta $R_1 \times R_2$ kod kojih je prva koordinata iz R_1 manja od zbira prve i druge koordinate iz R_2 s tim da odmah se vrši selekcija R_2 na samo prve dvije koordinate.

S obzirom na to da bi ovaj kartezijev produkt bio ogroman, da ne bismo pisali bespotrebne n-torke odmah ćemo sebi olakšati gledajući $\underset{(\#1>\#2\wedge\#1\neq1)}{\sigma}$. Dakle prilikom vršenja spajanja gledat ćemo da li se ispunjava uslov da je prva koordinata veća od druge i da li je prva koordinata različita od 1. Naravno ovaj uslov se gleda od novodobijene spojene relacije, koja je dobijena tako što se na kraj R_1 nastavljaju dvije koordinate R_2 tako da nema potrebe da množimo sve elemente nego samo one iz R_1 koje ispunjavaju ovaj uslov. Dakle:

$$\underset{(\#1>\#2\wedge\#1\neq1)}{\sigma}\left(R_1 \underset{(\#1<\#1+\#2)}{\bowtie} \underset{(\#1,\#2)}{\pi}(R_2)\right) = \{(5,4,3,2,6,8,6),(5,4,3,2,6,7,4),(5,4,3,2,6,6,5),$$
$$(5,4,3,2,6,2,5),(5,4,3,2,6,4,8),(4,1,1,5,7,8,6),(4,1,1,5,7,7,4),$$
$$(4,1,1,5,7,6,5),(4,1,1,5,7,2,6),(4,1,1,5,7,4,8)\}$$

Na kraju imamo još i selekciju π gdje od posljednjeg izraza uzimamo prve dvije koordinate i posljednju koordinatu uređene n-torke. To bi bilo:

$$R = \{(5,4,6),(5,4,4),(5,4,5),(5,4,5),(5,4,8),(4,1,6),(4,1,4),(4,1,5),(4,1,6),(4,1,8)\}$$