Zadaća 4

iz predmeta Matematikčka logika i teorija izračunljivosti

Prezime i ime: Dizdarević Adi

Br. indexa: 18392

Zadatak	Bodovi
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Dokažite da su sljedeći izrazi predikatske logike valjani ili pronađite interpretaciju u kojoj oni nisu valjani:
(a) $(\forall x \exists y(P(x) \Rightarrow Q(y))) \Rightarrow (\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)))$
(b) $(\forall x \exists y(S(x,y) \wedge ((S(x,y) \wedge S(y,x)) \Rightarrow (x = y)))) \Rightarrow (\neg \exists z \forall w(S(z,w)))$

Rješenje:
a) Opovrgnimo izraz pomoću negiranog zaključka:

$$\neg \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(Q(y)))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \neq \exists y(Q(y)))$$

$$\forall y \exists x(P(x) \wedge \neg Q(y))$$

1)	$\forall x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y))$	**(premisa)**
2)	$\forall y \exists x(P(x) \wedge \neg Q(y))$	**(zaključak)**
3)	$\forall x(\neg P(x) \vee Q(b))$	**(EI iz (1) uz y->b)**
4)	$\forall y(P(a) \wedge \neg Q(y))$	**(EI iz (2) uz x->a)**
5)	$\neg P(a) \vee Q(b)$	**(UI iz (3) uz x->a)**
6)	$P(a) \wedge \neg Q(y)$	**(UI iz (4) uz y->b)**
7)	$P(a)$	**(simplifikacija iz (6))**
8)	$\neg Q(b)$	**(simplifikacija iz (6))**
9)	$Q(b)$	**(rezolucija iz (5) i (7))**
10)	NIL	**(kontradikcija iz (8) i (9))**

b) Izraz $(\forall x \exists y(S(x,y) \wedge ((S(x,y) \wedge S(y,x)) \Rightarrow (x = y)))) \Rightarrow (\neg \exists z \forall w(S(z,w)))$ neće biti valjan ukoliko imamo situaciju da je $\forall x \exists y(S(x,y) \wedge ((S(x,y) \wedge S(y,x)) \Rightarrow (x = y))) = T$ i ukoliko je $\neg \exists z \forall w(S(z,w)) = \perp$.

Uvedimo domen skup $\{a, b\}$ te definišimo predikate $S(x,y)$ i $S(y,x)$: $S(a,b) = T$,$S(b,a) = \perp$,$S(a,a) = T$,$S(b,b) = T$, naravno uz $a \neq b$!

Neka je $y \to b$ tako da je $\forall x(S(x,b) \wedge ((S(x,b) \wedge S(b,x)) \Rightarrow (x = b)))$, ukoliko je $x \to a$ tada $S(a,b) \wedge ((S(a,b) \wedge S(b,a)) \Rightarrow (a = b))$ iz čega slijedi da je:

$$T \wedge ((T \wedge \perp) \Rightarrow \perp)$$

$$T \wedge (\perp \Rightarrow \perp)$$

$$T \wedge T = T$$

Što sasvim zadovoljava naše potrebe zadatka. Dalje imamo $\neg \exists z \forall w(S(z,w))$ te ukoliko zapišemo kao $\neg \forall w \exists z(S(z,w))$ te za $z \to a$ slijedi $\neg \forall w((S(a,w)) = \perp$ iz naše potrebe da dokažemo da izraz nije valjan. To se dalje može zapisati kao $(\neq (S(a,w)))$ te ukoliko je $w \to b$ tada imamo $\neg S(a,b) = \neg T = \perp$ što dovodi do zaključka da početni izraz nije valjan!

2. Poznato je da je svaki student, koji ima dobre ocjene, genijalac ili radi redovno. Također je poznato da svaki student, koji nije iz Sarajeva, ima nekoga za cimera. A svaki student, koji ima cimera koji voli spavai, ne uključuje se na online predavanja. Svako ko ne prati online predavanja ne radi redovno. Pokažite da iz navedenih činjenica slijedi da ako svaki cimer svakoga ko nije iz Sarajeva voli spavati, tada je svaki student koji nije iz Sarajeva, a koji ima dobre ocjene, genijalac.

   Rješenje:

   Posmatrajmo postavku zadatka rečenicu po rečenicu:
   "Poznato je da je svaki student, koji ima dobre ocjene, genijalac ili radi redovno."

$$\forall x(DobreOcjene(x) \Rightarrow RadiRedovno(x) \vee Genijalac(x))$$

   "Također je poznato da svaki student, koji nije iz Sarajeva, ima nekoga za cimera."

$$\forall x \exists y(\neg IzSarajeva(x) \wedge ImaCimera(x, y))$$

   "A svaki student, koji ima cimera koji voli spavai, ne uključuje se na online predavanja."

$$\forall x \exists y((ImaCimera(x, y) \wedge VoliSpavati(y)) \Rightarrow \neg OnlinePredavanja(x))$$

   "Svako ko ne prati online predavanja ne radi redovno."

$$\forall x(\neg Predavanja(x) \Rightarrow \neg RadiRedovno(x))$$

   Zatim zaključak "...ako svaki cimer svakoga ko nije iz Sarajeva voli spavati, tada je svaki student koji nije iz Sarajeva, a koji ima dobre ocjene, genijalac."

$$\forall x \forall y((ImaCimera(x, y) \wedge \neg IzSarajeva(x) \wedge VoliSpavati(y)) \Rightarrow$$

$$((\neg IzSarajeva(x) \wedge DobreOcjene(x)) \Rightarrow Genijalac(x)))$$

   Da bismo potražili odbijenicu za ovu postavku potrebno je negirati zaključak:

$$\neg(\forall x \forall y(ImaCimera(x, y) \wedge \neq IzSarajeva(x) \wedge VoliSpavati(y)) \Rightarrow$$

$$(IzSarajeva(x) \vee \neg DobreOcjene(x) \vee Genijalac(x)))$$

$$\exists x \exists y(\neg(\neg ImaCimera(x, y) \vee IzSarajeva(x) \vee \neg VoliSpavati(y) \vee$$

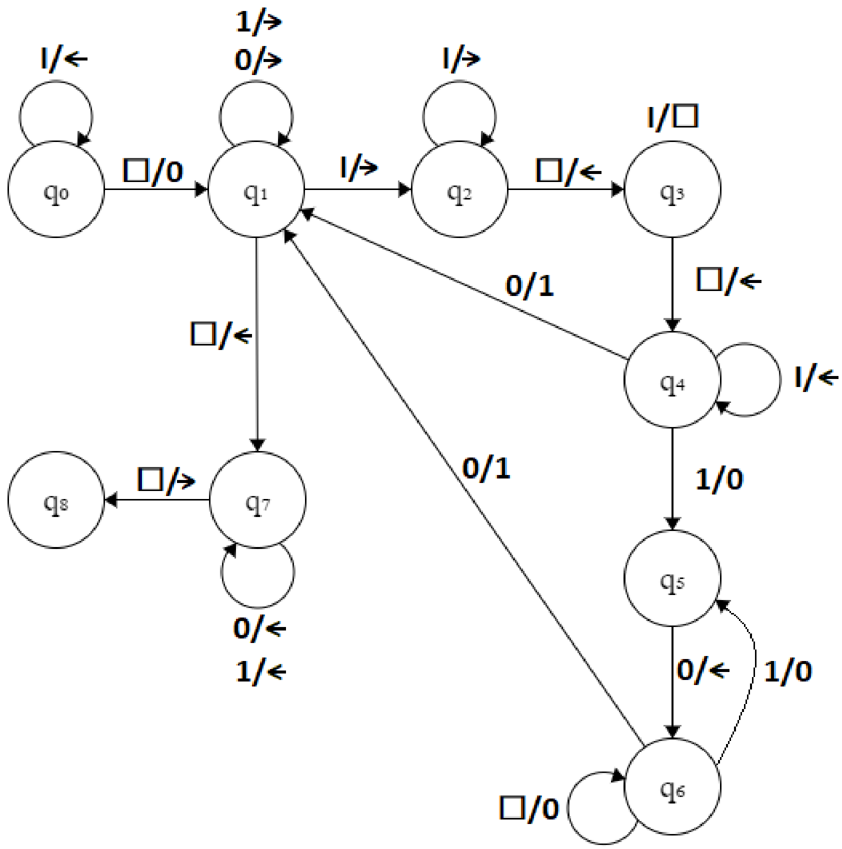
$$IzSarajeva(x) \vee \neg DobreOcjene(x) \vee Genijalac(x)))$$

$$\exists x \exists y(ImaCimera(x, y) \wedge \neg IzSarajeva(x) \wedge VoliSpavati(y) \wedge DobreOcjene(x) \wedge \neg Genijalac(x))$$

1)	$\forall x(\neg DobreOcjene(x) \lor RadiRedovno(x) \lor Genijalac(x))$	**(F1)**
2)	$\forall x \exists y(\neg IzSarajeva(x) \land ImaCimera(x,y))$	**(F2)**
3)	$\forall x \exists y(\neg ImaCimera(x,y) \lor \neg VoliSpavati(y)) \lor$ $\neg OnlinePredavanja(x))$	**(F3)**
4)	$\forall x(OnlinePredavanja(x) \lor \neg RadiRedovno(x))$	**(F4)**
5)	$\exists x \exists y(ImaCimera(x,y) \land \neg IzSarajeva(x) \land$ VoliSpavati(y)$\land DobreOcjene(x) \land \neg Genijalac(x))$	**(F5)**
6)	$\forall x(\neg IzSarajeva(x) \land ImaCimera(x,b))$	**(EI iz (2) uz y->b)**
7)	$\forall x(\neg ImaCimera(x,b) \lor \neg VoliSpavati(b)) \lor$ $\neg OnlinePredavanja(x))$	**(EI iz (3) uz y->b)**
8)	$ImaCimera(a,b) \land \neg IzSarajeva(a) \land VoliSpavati(b) \land$ DobreOcjene(a)$\land \neg Genijalac(a)$	**(EI iz (5) uz x->a y->b)**
9)	$\neg DobreOcjene(a) \lor RadiRedovno(a) \lor Genijalac(a)$	**(UI iz (1) uz x->a)**
10)	$\neg IzSarajeva(a) \land ImaCimera(a,b)$	**(UI iz (6) uz x->a)**
11)	$\neg ImaCimera(a,b) \lor \neg VoliSpavati(b)) \lor \neg OnlinePredavanja(a)$	**(UI iz (7) uz x->a)**
12)	$OnlinePredavanja(a) \lor \neg RadiRedovno(a)$	**(UI iz (4) uz x->a)**
13)	$\neg IzSarajeva(a)$	**(simplifikacija iz (10))**
14)	$ImaCimera(a,b)$	**(simplifikacija iz (10))**
15)	$\neg VoliSpavati(b)\lor \neg OnlinePredavanja(x)	**(rezolucija iz (14) i (11))**
16)	$VoliSpavati(b) \land DobreOcjene(a) \land \neg Genijalac(a)$	**(rezolucija iz (10) i (8))**
17)	$VoliSpavati(b)$	**(simplifikacija iz (16))**
18)	$DobreOcjene(a)$	**(simplifikacija iz (16))**
19)	$\neg Genijalac(a)$	**(simplifikacija iz (16))**
20)	$\neg OnlinePredavanja(a)$	**(rezolucija iz (15) i (17))**
21)	$\neg RadiRedovno(a)$	**(rezolucija iz (12) i (20))**
22)	$\neg DobreOcjene(a)$	**(rezolucija iz (9),(19) i (21))**
23)	NIL	**(kontradikcija iz (18) i (22))**

3. Konstruirajte Turingovu mašinu koja pretvara broj zapisan u unarnoj notaciji u broj zapisan u binarnoj notaciji. Naprimjer, ako je na traci stajalo |||||, onda nakon dostizanja finalnog stanja mašine na traci treba pisati 101.

Rješenje:



4. Implementirajte univerzalnu registarsku mašinu koja računa $R3 \leftarrow rem(R1, R2)$, gdje je rem funkcija ostatka pri dijeljenju brojeva zapisanih u registrima R1 i R2.

Rješenje:

$$1: CLR(3)$$
$$2: CLR(4)$$
$$3: CLR(5)$$
$$4: INC(5)$$
$$5: CLR(6)$$
$$6: INC(3)$$
$$7: INC(4)$$
$$8: JNE(1,4,10)$$
$$9: JNE(1,2,13)$$
$$10: JNE(2,3,6)$$
$$11: CLR(3)$$
$$12: JNE(1,4,6)$$

$$13 : JNE(2,3,15)$$

$$14 : CLR(3)$$

5. Pokažite da je funkcija $f(m,n) = m\ mod\ n$ primitivno rekurzivna.

   Rješenje:
   Ukoliko uočimo da vrijedi formula preko koje se izračunava m uz ostatak o poznato je $m = n \cdot p + o$. Obzirom da ukoliko pretpostavimo da je $m = m + 1$, sasvim je logično očekivati i $o = o + 1$. Međutim za rekurziju potrebno nam je da se smanji za 1, a ako je $m = m$ - 1, tada je moguće postići da ostatak bude jednak nuli. Stoga je lahko primijeniti novu funkciju koja će se pozivati za m-1 iznova:

$$f(m,n) = \begin{cases} 0, & mod(m-1,n) = n-1 \vee m = 0 \vee n = 0. \\ mod(m-1,n), & ostalo. \end{cases} \tag{1}$$

6. Pojednostavite koliko je god moguće čisti λ-izraz $(\lambda x.(\lambda y.x))(\lambda z.y(\lambda u.z(u)))$.

   Rješenje:
   Uočimo da u izrazu desni y nema nikakve veze sa lijevim y stoga primijenimo α-konverziju nad $y \rightarrow q$.

$$\alpha : ((\lambda x.(\lambda y.x))(\lambda z.([q](\lambda u.(zu))))$$

   Zatim iskoristimo β-redukciju kako bismo smanjili izraz.Dakle desnu zagradu pišemo umjesto x i brišemo λx.

$$\beta : (\lambda y.(\lambda z.(q(\lambda u.(zu)))))$$