Zadaća 3

iz predmeta Matematikčka logika i teorija izračunljivosti

Prezime i ime: Dizdarević Adi

Br. indexa: 18392

Zadatak	Bodovi
1	
2	
3	
4	
5	

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Pokažite da, ako je moguće izvršiti označavanje svih elemenata beskonačnog skupa S sa konačnim stringovima sastavljenih od ASCII znakova tako da nikoja dva elementa skupa S nemaju istu oznaku, je takav skup S prebrojivo beskonačan.

   Rješenje:
   Ukoliko uzmemo da ASCII znakova ima 128 (0-127) iako dopunski ASCII znakovi čine da ih ima 256 (0-255) ne čini razliku koji od ova dva skupa znakova uzmemo jer su oba konačna. Radi lakšeg proračuna uzmimo za činjenicu da je kardinalni broj skupa ASCII znakova $\#A = 128$. Obzirom da je skup S beskonačan skup, pokažimo da je prebrojivo beskonačan, odnosno da mu je kardinalni broj jednak $\aleph_0$. Za tu svrhu, potrebno je konstruisati neku bijekciju između skupa A (ASCII znakova) i beskonačnog skupa S. Takvu bijekciju nije teško konstruisati. Prvom broju iz skupa S pridružimo prvi karakter iz skupa A, drugom broju drugi karakter, trećem broju treći karakter itd. "Problem" se javlja kada iskoristimo sve karaktere iz skupa A. Tada jednostavno narednom broju dodijelimo string od dva karaktera. Npr: "NUL NUL", zatim "NUL SOH" itd. Demonstrirajmo dodjelu na sljedećem primjeru:

S		**ASCII**	
1	$\leftrightarrow$	0	
2	$\leftrightarrow$	1	
...	$\leftrightarrow$	...	
128	$\leftrightarrow$	127	
129	$\leftrightarrow$	0,0	("NUL NUL" počinjemo širiti broj karaktera u stringu)
130	$\leftrightarrow$	0,1	
131	$\leftrightarrow$	0,2	
...	$\leftrightarrow$	...	
256	$\leftrightarrow$	0,127	
...	$\leftrightarrow$	...	
16384	$\leftrightarrow$	127,127	
16385	$\leftrightarrow$	0,0,0	("NUL NUL NUL" nastavljamo proširivati string)
...	$\leftrightarrow$	...	
16512	$\leftrightarrow$	0,0,127	
...	$\leftrightarrow$	...	(nije teško sastaviti ni algoritam koji bi za uneseni string iz A utvrdio od kojeg je prirodnog broja on slika)

   Objasnimo zašto je ovo preslikavanje bijekcija. Vidimo da nižući karaktere u string nikada nećemo imati situaciju u kojoj dva elementa iz skupa S se neće preslikati u isti string pa je ono injektivno. Zatim, ono je sirjektivno, jer je također iz načina konstrukcije jasno da će svaki string sastavljen od ASCII znakova prije ili kasnije "doći na red", odnosno svaki string je slika nekog broja iz skupa S.Što znači da je razmatrano preslikavanje zaista bijektivno, pošto postoji bijekcija ovaj skup ima kardinalni broj isti kao i skup $\mathbb{N}$. Zašto $\mathbb{N}$? Zato što smo prilikom konstruisanja bijekcije svakom stringu, koji se sastoji iz ASCII karaktera, dodijelili jedan prirodan broj. Pošto vrijedi $S \sim \mathbb{N}$, te je $\#S = \aleph_0$ što znači da je skup prebrojivo beskonačan.

2. Dokažite sljedeće teoreme modalne logike:
(a) $p \rightarrow q \vdash_K \Box p \rightarrow \Box q$
(b) $\vdash_T \Box(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \Diamond q))$ u T logici u kojoj dodatno vrijedi i aksiom $\Box p \rightarrow p$ ili $p \rightarrow \Diamond p$.

Rješenje:
a) $p \rightarrow \vdash_k \Box p \rightarrow \Box q$

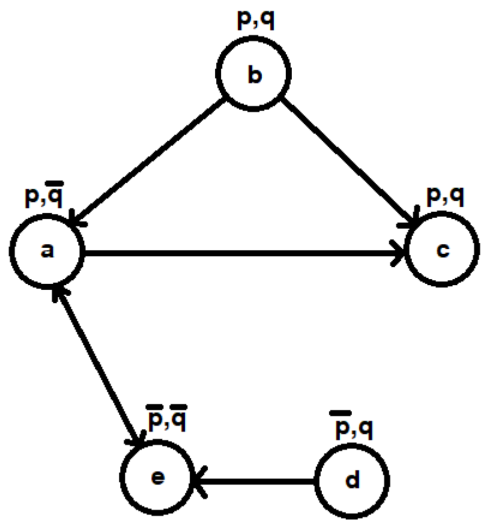
1)	$p \rightarrow q$	[premisa]
2)	$\Box(p \rightarrow q)$	[ax. N]
3)	$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	[ax. K]
4)	$\Box p \rightarrow \Box q$	[MP (2) i (3)]

Prilikom rješavanja zadatka koristili smo pravilo necesitacije - ako je X tautologija, tautologija je i $\Box X$ (ax. N), i aksiom distribucije (modalni modus ponens) - $\Box(x \rightarrow y) \rightarrow (\Box x \rightarrow \Box y)$ (ax. K).

b) $\vdash_T \Box(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \Diamond q))$
Umjesto dokazivanja tačnosti, opovrgnimo negaciju teoreme.
1)$\neg\Box(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \Diamond q))$
$\overline{A \rightarrow B} = A\overline{B} : \Box(p \rightarrow q) = A, (p \rightarrow \Diamond q) = B$
2)$\Box(p \rightarrow q)$
3)$\neg(p \rightarrow \Diamond q)$
4)$p \rightarrow q$ (refleksivnost 2))
5)p (pretpostavka)
6)q (MP 4) i 5))
$\overline{A \rightarrow B} = A\overline{B} : p = A, (\Diamond q) = B$
7)p
8)$\neg\Diamond q$
9)$\neg q$ (refleksivnost 8))
10)NIL (kontradikcija 10) i 6))
q.e.d.

3. Zadan je Kripkeov model $\mathcal{M} = (W, R, L)$, gdje su W $= \{a, b, c, d, e\}$ skup svjetova kontekstualne univerze, $R = \{(a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (d, e), (e, a)\}$ relacija dostižnosti, a $L : w_i \rightarrow P(p, q)$ koja govori koje varijable su tačne u svakom od svjetova. Vrijedi $L(a) = \{p\}, L(b) = \{p, q\}, L(c) = \{p, q\}, L(d) = \{q\}$ i $L(e) = \varnothing$. (a) Nacrtajte graf ovog Kripkeovog modela; (b) Odredite valjanost formule $I = \Box\Diamond(p \vee q) \Rightarrow \Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$ u ovom Kripkeovom modelu.

Rješenje:
a)



b) Prema definiciji operatora $\Box$, formula $\Box f$ je tačna ako je formula f tačna u svim svjetovima dostižnim iz razmatranog svijeta. Formula $\Diamond f$ je tačna ako je formula f tačna u barem jednom svijetu dostižnom iz razmatranog svijeta.
U zadanom primjeru, svjetovi w_c i w_e su dostižni iz w_a, w_a i w_c su dostižni iz w_b, w_c nema dostižnih svjetova,w_a je dostižan iz w_e, w_e je dostižan iz w_d.
Ova formula je tačna u svim slučajevima osim kada je lijeva strana tačna i desna netačna. Tačnost formule se promatra kroz svaki od svjetova:

w_a: U ovom svijetu $\Box\Diamond(p \lor q) = T$ ukoliko je $\Diamond(p \lor q)$ tačan u svim dostižnim svjetovima iz w_a. Takva su dva: w_c i w_e.
U w_c je $\Diamond(p \lor q)$ tačan ukoliko u barem jednom od dostižnih iz w_c vrijedi $p \lor q$, pošto takvih svjetova u zadanom kontekstualnom modelu nema, te je formula $\Diamond(p \lor q)$ trivijalno tačna.
U w_e je $\Diamond(p \lor q)$ tačan ukoliko u barem jednom od dostižnih iz w_e vrijdi $p \lor q$, takav je w_a, gdje je $p \lor q = T$ stoga $\Diamond(p \lor q)$ vrijedi.
Obzirom da $\Diamond(p \lor q)$ vrijedi u oba dostižna svijeta iz w_a vrijedi i formula $\Box\Diamond(p \lor q)$. Da bi izraz I bio tačan, $\Diamond(p \land \Diamond\Box q)$ mora biti tačno, a da bi bilo tačno, $\land\Diamond\Box q$ mora biti tačno u barem jednom od dostižnih svjetova iz w_a, a ti su (w_c i w_e).
U w_e p je $\perp$ pa ovaj svijet otpada, u w_c p je T stoga preostaje $\Diamond\Box$ da bude T, a pošto w_c nema dostižnih svjetova ovo je trivijalno tačno pa je i izraz $\Diamond(p \land \Diamond\Box q)$ tačan. Konačno:

$$w_a : \Box\Diamond(p \lor q) \to \Diamond(p \land \Diamond\Box q) = T \to T = T.$$

w_b: U ovom svijetu $\Box\Diamond(p \lor q) = T$ ukoliko je $\Diamond(p \lor q)$ tačan u svim dostižnim svjetovima iz w_b. Takva su dva: w_a i w_c.
U w_a je $\Diamond(p \lor q)$ tačan ukoliko u barem jednom od dostižnih iz w_a vrijedi $p \lor q$, pošto je w_c dostižan iz w_a, a u w_c vrijedi $p \lor q$ stoga vrijedi i $\Diamond(p \lor q)$. U w_c je $\Diamond(p \lor q)$ tačan ukoliko u barem jednom od dostižnih iz w_c vrijedi $p \lor q$, pošto takvih svjetova nema ovo je trivijalno tačno pa je i izraz $\Diamond(p \lor q)$ tačan.

Stoga vrijedi $\Box\Diamond(p \vee q)$.
Da bi izraz I bio tačan mora da vrijedi i $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$, a da bi vrijedilo treba da barem u jednom od dostižnih iz w_b vrijedi $p \wedge \Diamond\Box q$.
Pa tako u w_c p je T stoga preostaje $\Diamond\Box q$, pošto w_c nema dostižnih svjetova ovo je trivijalno tačno pa tako vrijedi i $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$.
Konačno:

$$w_b : \Box\Diamond(p \vee q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond\Box q) = T \to T = T.$$

w_c: U ovom svijetu $\Box\Diamond(p \vee q) = T$ ukoliko je $\Diamond(p \vee q)$ tačan u svim dostižnim svjetovima iz w_c. Pošto takvih svjetova u zadanom kontekstualnom modelu nema, te je formula $\Box\Diamond(p \vee q)$ trivijalno tačna.
Da bi izraz I bio tačan potrebno je da $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$ bude tačan, a da bi bio tačan potrebno je da $p \wedge \Diamond\Box q$ bude tačan u barem jednom od dostižnih svjetova iz w_c, pošto takvih svjetova u zadanom kontekstualnom modelu nema, te je formula $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$ trivijalno tačna.
Konačno:

$$w_c : \Box\Diamond(p \vee q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond\Box q) = T \to T = T.$$

w_d: U ovom svijetu $\Box\Diamond(p \vee q) = T$ ukoliko je $\Diamond(p \vee q)$ tačan u svim dostižnim svjetovima iz w_d. Takav je jedan i to w_e.
U w_e $\Diamond(p \vee q)$ vrijedi ukoliko $p \vee q$ vrijedi u w_a jer je to jedini dostižan svijet iz w_e. Pošto je u w_a $p \vee q = T$ vrijedi i $\Diamond(p \vee q)$ dakle vrijedi i $\Box\Diamond(p \vee q)$.
Da bi izraz I bio tačan potrebno je da $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$ bude tačan, a da bi bio tačan potrebno je da $p \wedge \Diamond\Box q$ bude tačan u w_e kao jedinom dostižnom iz w_d. Pošto je u w_e $p = \perp$ formula $p \wedge \Diamond\Box q$ ne vrijedi, pa ne vrijedi ni formula $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$.
Konačno:

$$w_d : \Box\Diamond(p \vee q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond\Box q) = T \to \perp = \perp.$$

w_e: U ovom svijetu $\Box\Diamond(p \vee q) = T$ ukoliko je $\Diamond(p \vee q)$ tačan u svim dostižnim svjetovima iz w_e. Takav je jedan i to w_a.
U w_a je $\Diamond(p \vee q)$ tačan ukoliko u barem jednom od dostižnih iz w_a vrijedi $p \vee q$, pošto u w_b vrijedi $p \vee q$ vrijedi i $\Diamond(p \vee q)$ stoga vrijedi i $\Box\Diamond(p \vee q)$.
Da bi izraz I bio tačan potrebno je da $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$ bude tačan, a da bi bio tačan potrebno je da $p \wedge \Diamond\Box q$ bude tačan u w_a kao jedinom dostižnom iz w_e. Pošto je u w_a $p = T$ potrebno je još da vrijedi $\Diamond\Box q$, a da bi vrijedilo potrebno je da bar u jednom od dostižnih iz w_a, a to su w_b i w_c, da vrijedi $\Box q$. Pošto u w_c nema dostižnih svjetova, te je ovo trivijalno tačno pa kako vrijedi $\Box q$ vrijedi i $\Diamond\Box q$, dakle formula $p \wedge \Diamond\Box q$ je tačna pa samim tim i formula $\Diamond(p \wedge \Diamond\Box q)$ tačna.
Konačno:

$$w_e : \Box\Diamond(p \vee q) \to \Diamond(p \wedge \Diamond\Box q) = T \to T = T.$$

4. Poznato je da je LA1: $X \to (Y \to X)$ aksiom propozicijske logike, ali nije aksiom BL fuzzy logike. Dokažite da je LA1 teorem BL fuzzy logike.

   Rješenje:

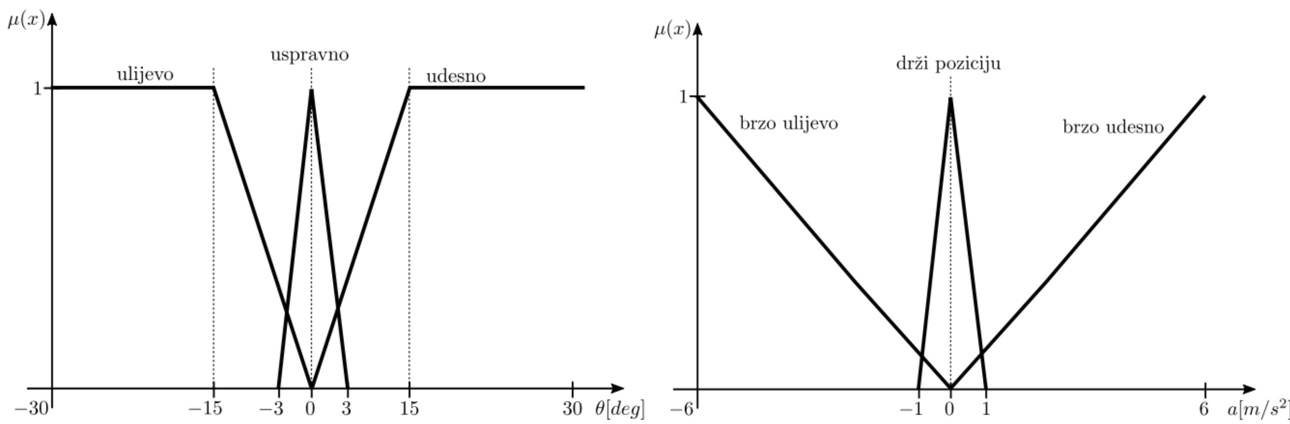
1)	$(X\&Y) \to X$	$[A_2\colon \phi = X, \psi = Y]$
2)	$((X\&Y) \to X) \to (X \to (Y \to X))$	$[A5_b\colon \phi = X, \psi = Y, \chi = X]$
3)	$X \to (Y \to X)$	[MP (1) i (2)]

Prilikom dokazivanja da je LA1 teorem BL fuzzy logike koristili smo se sljedećim aksiomima:

$$[A2](\phi\&\psi) \to \phi$$

$$[A5b]((\phi\&\psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi))$$

5. Princip balansiranja štapa na prstu se može opisati na sljedeći način: ako štap pada na jednu stranu, onda pomjeraj prst u tu stranu. Neko je kretanje štapa predstavio lingističkim varijablama $Ulijevo$ (L),$Uspravno$ (U) i $Udesno$ (D) čije su funkcije pripadnosti prikazane na slici (lijevi grafik). Ove varijable se odnose na kretanje štapa i u smjeru x i y ose.



CoS
Pomjeranje prsta kao djelovanja s ciljem održavanja balansa je modelirano lingvističkim varijablama $brzo\ ulijevo$ (BL),$dri\ poziciju$ (c) i $brzo\ udesno$ (BD) sa funkcijama pripadnosti prikazanima na slici (desni grafik). Primjenjuju se sljedeća pravila:

θ_x/θ_y	**L**	**U**	**D**
L	**BL**	**BL**	**BD**
U	**C**	**C**	**C**
D	**BL**	**C**	**BD**

Odredite vrijednosti izlaza a i b (po x osi i po y osi) za slučaj $\theta_x = 4$ i $\theta_y = 2$. Koristite Mamdani fuzzy inferenciju i CoA integralni metod defuzzyfikacije.

Rješenje:

Uzimajući u obzir vrijednosti $\theta_x = 4$ i $\theta_y = 2$ vrijedi:

$$\mu_x(4) = 0.2666/udesno$$

$$\mu_y(2) = 0.1333/udesno + 0.3333/uspravno$$

Proračun za μ_x i μ_y se izvršio pomoću sljedećih pravaca:
Udesno: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ za (0,0) i (15,1)
dobijemo pravac $y = \frac{1}{15}x$ pa za $\theta_x = 4 \rightarrow y = 4/15 \approx 0.2666$, za $\theta_y = 2 \rightarrow y = 2/15 \approx 0.1333$
Uspravno: $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ za (3,0) i (0,1)
dobijemo pravac $y = \frac{-1}{3}x + 1$ pa za $\theta_y = 2 \rightarrow y = \frac{-2}{3} + 1 \approx 0.3333$.

Kako se za Mamdanijev postupak koristi min kao t-norm operator slijedi:

$$DOF_{xy} = DOF_{DD}$$

primjer -> očitavamo iz tabele za x i y kao udesno udesno.

$$DOF_{DD}(4,2) = min\{0.2666, 0.1333\} = 0.1333$$
$$DOF_{DU}(4,2) = min\{0.2666, 0.3333\} = 0.2666$$

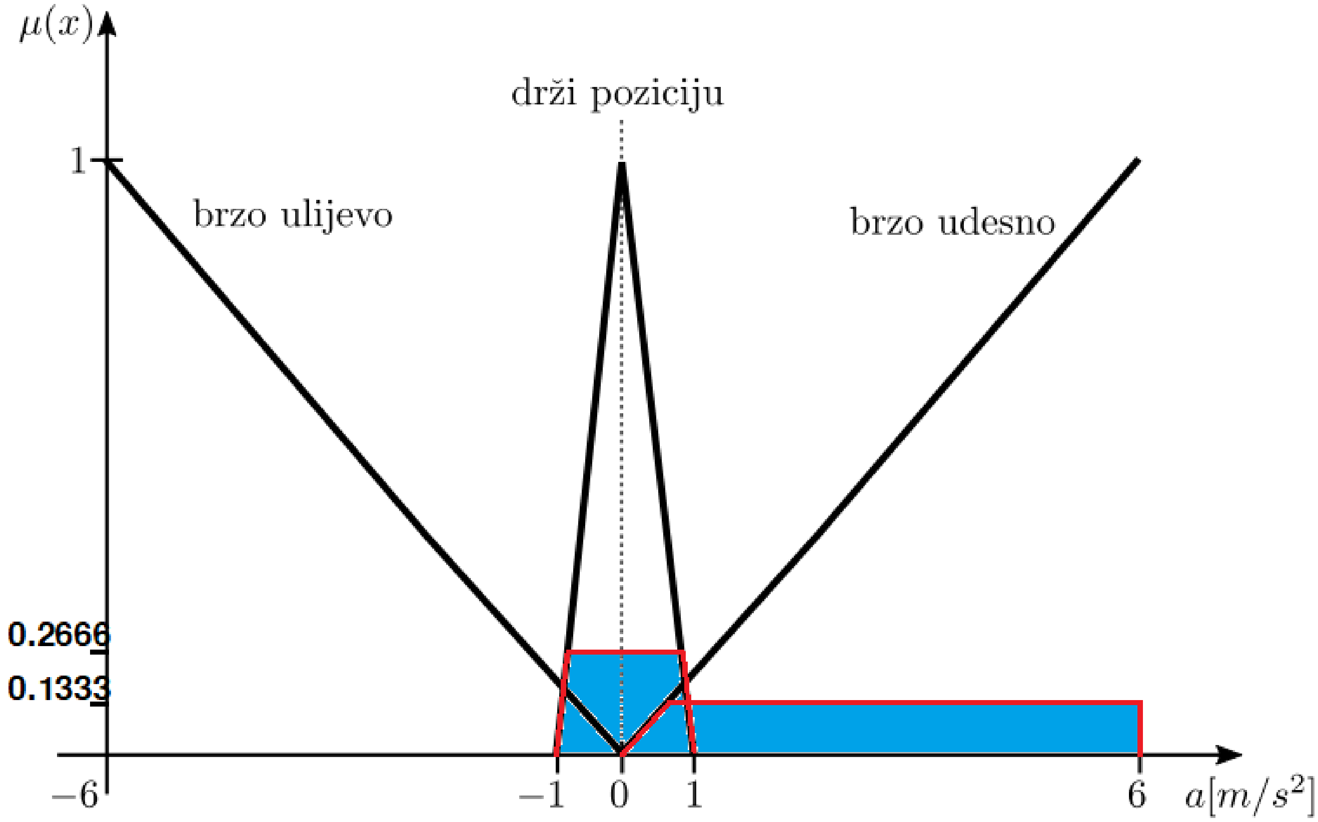
Mamdanijev postupak koristi min kao operator implikacije pa se za ova dva pravila dobivaju sljedeći parcijalni zaključci:

$$\mu_1(x) = min\{DOF_{DD}, \mu_{BD}(\theta_x)\} = min\{0.1333, \mu_{BD}(\theta_x)\}$$
$$\mu_1(x) = min\{DOF_{Du}, \mu_C(\theta_y)\} = min\{0.2666, \mu_c(\theta_y)\}$$

Nadalje, ova dva parcijalna zaključka se *agregiraju* u jedan jedinstveni primjenom max operatora kako je definiran Mamdanijevim postupkot, te vrijedi:

$$\mu(x) = max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}$$

što je označena oblast na slici:



Ulazni pravac trokuta lingvističke varijable *dri poziciju* je dat jednačinom:

$$y_1 = x + 1$$

Dok je izlazni pravac dat jednačinom:

$$y_2 = -x + 1$$

te je trapez lingvističke varijable *brzo udesno* ograničen do a=6 da integral ne bi divergirao.
Rješavanjem jednačina za $y_1 = 0.2666$ x ima vrijednost -0.7334 i 0.7334.
Dok za $y_2 = 0.1333$ x ima vrijednost 0.8667.

Konačno, defuzzyficirana vrijednost se dobije primjenom CoA metoda. Vrijedi:
$x_c = \frac{\int x\mu(x)}{\int \mu(x)} =$

$$\frac{\int_{-1}^{-0.7334}(x+1)xdx + \int_{-0.7334}^{0.7334} 0.2660xdx + \int_{0.7334}^{0.8667}(-x+1)xdx + \int_{0.8667}^{6} 0.1333xdx}{\int_{-1}^{-0.7334}(x+1)dx + \int_{-0.7334}^{0.7334} 0.2660dx + \int_{0.7334}^{0.8667}(-x+1)dx + \int_{0.8667}^{6} 0.1333xdx} =$$

$$= \frac{2.3412351}{1.1336291} \approx 2.0598$$