UNIVERZITET U SARAJEVU
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

DOMAĆA ZADAĆA 2

OPERACIONA ISTRAŽIVANJA

Student: Mašović Haris

Indeks: 1689/17993

Odsjek: Računarstvo i Informatika

Datum: 10.06.2020

Potpis: ______________

Zadatak 1 [1 poen]

U nekoj totalno antagonističkoj matričnoj igri (igri sa sumom 0) igraču A su na raspolaganju 5 strategija A_1, A_2, A_3, A_4, i A_5, dok su igraču B na raspolaganju 4 strategije B_1, B_2, B_3, i B_4. Matrica plaćanja koja prikazuje dobitak igrača A ukoliko se on odluči za strategiju A_i a njegov protivnik za strategiju B_j prikazana je u sljedećoj tabeli (dobitak za igrača B pri istim pretpostavkama je suprotan dobitku igrača A, jer je igra sa sumom 0):

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	0	-9	5
A_2	-1	7	2	9
A_3	-3	8	1	-9
A_4	9	8	10	0
A_5	6	4	7	-8

Svođenjem ove matrične igre na dva problema linearnog programiranja, odredite sa kojom vjerovatnoćom pri dugoročnom igranju igrači A i B trebaju birati svoje strategije da bi se postigla ravnoteža u igri. Odredite koliko pri tome iznosi minimalni očekivani dobitak za igrača A. Dobijene probleme linearnog programiranja rješavajte Simplex metodom (kako su dobijeni problemi linearnog programiranja međusobno dualni, dovoljno je da rješavate samo onaj koji je lakši za rješavanje, nakon čega je iz krajnje Simplex tabele lako očitati i rješenje onog drugog).

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u .pdf formatu.

Mašović Haris
1689/17993

1

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	0	-9	5
A_2	-1	7	2	9
A_3	-3	8	1	-9
A_4	9	8	10	0
A_5	6	4	7	-8

Pošto postavljena matrica ima elemenata koji su < 0 treba uvećati matricu za $+9$. tj. maše Δ

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	11	9	0	14
A_2	8	16	11	18
A_3	6	17	10	0
A_4	18	17	19	9
A_5	15	13	16	1

Prvo treba provjeriti sedlastu tačku:

$$A = \max \alpha_i$$

$$\alpha_i = \min_{j=1..4} a_{ij} \Rightarrow A = \max\{0, 8, 0, 9, 1\} = \boxed{9 = A}$$

$$B = \min \beta_i$$

$$\beta_i = \max_{i=1..5} a_{ij} \Rightarrow B = \min\{18, 17, 19, 18\} = \boxed{17 = B}$$

$A \neq B$ (ujedno kolone) shodno tome nema sedlaste tačke i igra je igra sa mješovitim strategijama.

Sada treba formirati optimizacione probleme za igrača A i igrača B koje ćemo riješiti pomoću simpleks metoda:

$$x_i = \frac{p_i}{V} \Rightarrow p_i = x_i \cdot V \, , \quad \sum p_i = 1.$$

Shodno tome:

Za igrača A:

$$11x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 18x_4 + 15x_5 \geq 1$$
$$9x_1 + 16x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 13x_5 \geq 1$$
$$0x_1 + 11x_2 + 10x_3 + 19x_4 + 16x_5 \geq 1$$
$$14x_1 + 18x_2 + 0x_3 + 9x_4 + x_5 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Za igrača B:

$$\left.\begin{aligned}
11y_1 + 9y_2 + 0y_3 + 14y_4 &\leq 1\\
8y_1 + 16y_2 + 11y_3 + 18y_4 &\leq 1\\
6y_1 + 17y_2 + 10y_3 + 0y_4 &\leq 1\\
18y_1 + 17y_2 + 19y_3 + 9y_4 &\leq 1\\
15y_1 + 13y_2 + 16y_3 + y_4 &\leq 1
\end{aligned}\right\}$$

Rijesiti deuo problem igrača B

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

$$\arg\max\ z = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

$$11y_1 + 9y_2 + 14y_4 + y_5 = 1.$$
$$8y_1 + 16y_2 + 11y_3 + 18y_4 + y_6 = 1.$$
$$6y_1 + 17y_2 + 10y_3 + y_7 = 1.$$
$$18y_1 + 17y_2 + 19y_3 + 9y_4 + y_8 = 1.$$
$$15y_1 + 13y_2 + 16y_3 + y_4 + y_9 = 1.$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
y_5	1	11	9	0	14	1	0	0	0	0	1/11
y_6	1	8	16	11	18	0	1	0	0	0	1/8
y_7	1	6	17	10	0	0	0	1	0	0	1/6
y_8	1	18	17	19	9	0	0	0	1	0	1/18 ←
y_9	1	15	13	16	1	0	0	0	0	1	1/15
z	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	

	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
y_5	0.3889	0	-1.3889	-11.61	8.5	1	0	0	-0.611	0	0.0458
y_6	0.5556	0	8.444	2.5556	14	0	1	0	-0.44	0	$\frac{0.5556}{14} = 0.0397$ ←
y_7	0.667	0	11.33	3.667	-3	0	0	1	-0.33	0	-
y_1	0.0556	1	0.944	1.0556	0.5	0	0	0	0.0556	0	0.1111
y_9	0.1667	0	-1.667	0.1667	-6.5	0	0	0	-0.833	1	-
Z	-0.0556	0	0.0556	-0.0556	0.5	0	0	0	-0.0556	0	

	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_5
y_5	0.0516	0	-6.5159	-13.1627	0	1	-0.607	0	-0.3413	0
y_4	0.0397	0	0.6032	0.1825	1	0	0.0714	0	-0.0317	0
y_7	0.7857	0	13.1429	4.2143	0	0	0.2143	1	-0.478	0
y_1	0.0357	1	0.6429	0.9643	0	0	-0.0357	0	0.0714	0
y_9	0.426	0	2.754	1.3532	0	0	0.4643	0	-1.039	1
z	-0.0179	0	-0.216	-0.148	0	0	-0.0357	0	-0.0397	0

Postupak je gotov, stoga imamo:

3

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0.0357 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0.0397 \end{array}\right\} \xrightarrow{q} \left\{\begin{array}{l} q_1 = y_1 \cdot \bar{v} = 0.473 \\ q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \\ q_4 = y_4 \cdot \bar{v} = 0.5263 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0.0357 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0.0397 \\ x_5 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{p} \left\{\begin{array}{l} p_1 = 0 \\ p_2 = x_2 \cdot \bar{v} = 0.473 \\ p_3 = 0 \\ p_4 = x_4 \cdot \bar{v} = 0.5263 \\ p_5 = 0 \end{array}\right.$$

$$\bar{v} = \frac{1}{0.0357 + 0.0397} = \frac{1}{0.0754} = \boxed{13.2625 = \bar{v}}$$

$$v = \bar{v} - \Delta = 13.2625 - 9 = \boxed{4.2625 = v}$$

Igra je naklonjena prvom igraču.

$$\boxed{\begin{array}{l} p = (0, 0.473, 0, 0.5263, 0)^T \\ q = (0.473, 0, 0, 0.5263)^T \end{array}}$$

Zadatak 2 [1 poen]

Data je matrična igra sa sumom 0 predstavljena sljedećom matricom plaćanja:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	6	-1	2	8	-3	0	-1	-4
A_2	-3	0	-7	-2	-3	-6	1	2
A_3	-3	1	-6	-1	-1	-2	2	3
A_4	-1	-3	-2	5	-7	-1	-3	-5

Pokažite da se ova matrična igra eliminacijom inferiornih (nedominantnih) strategija može svesti na igru u kojem jedan od igrača sigurno ima samo dvije smislene strategije na raspolaganju, a zatim riješite tako reduciranu matričnu igru grafičkom metodom.

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u .pdf formatu.

(2)

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	6	-1	2	8	-3	0	-1	-4
A_2	-3	0	-7	-2	-3	-6	1	2
A_3	-3	1	-6	-1	-1	-2	2	3
A_4	-1	-3	-2	5	-7	-1	-3	-5

Pošto su svi elementi u redu 1 veći od reda 4, možemo red 4 izbaciti. odnosno na taj način imamo sljedeće promjene:

RED 1 ≥ RED 4 => RED 4 SE IZBACUJE

RED 3 ≥ RED 2 => RED 2 SE IZBACUJE.

Sa ovim imamo:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8
A_1	6	-1	2	8	-3	0	-1	4.
A_2	-3	1	-6	-1	-1	-2	2	3

Vidimo da kolona 7 ima sve elemente veće od 5 kolone, na taj način imamo sljedeće promjene:

KOLONA 7 ≥ KOLONA 5 => KOLONA 7 SE IZBACUJE

KOLONA 4 ≥ KOLONA 6 => KOLONA 4 SE IZBACUJE

KOLONA 2 ≥ KOLONA 5 => KOLONA 2 SE IZBACUJE

KOLONA 1 ≥ KOLONA 3 => KOLONA 1 SE IZBACUJE

Finalna matrica:

	B_3	B_5	B_6	B_8
A_1	2	-3	0	-4
A.	-6	-1	-2	3

Finalne strategije

Dobivena matrica 2x4, očekivani rezultati igre u slučaju strategije drugog igrača:

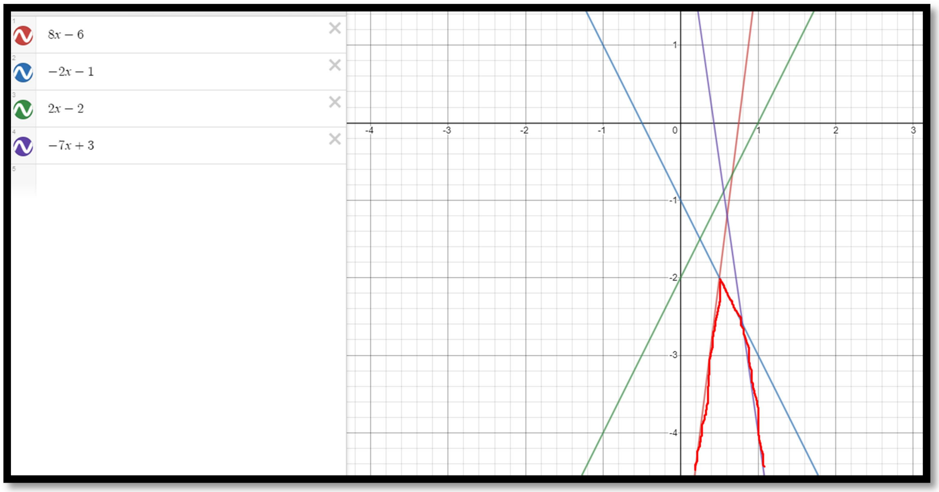
$$E_1(p) = 2p - 6(1-p) = 2p - 6 + 6p = 8p - 6$$

$$E_2(p) = -3p - (1-p) = -3p - 1 + p = -2p - 1$$

$$E_3(p) = -2(1-p) = -2 + 2p = 2p - 2$$

$$E_4(p) = -4p + 3(1-p) = -4p + 3 - 3p = -7p + 3$$

Grafici funkcija su dati na sljedećem grafu:



Najviša tačka krive je u preseku E_1 i E_2:

$E_1(p) = E_2(p)$

$8p - 6 = -2p - 1$

$10p = 5$

$\boxed{p = 0.5}$

$\boxed{1 - p = 0.5}$

$\boxed{p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T}$

za $p = \frac{1}{2}$

$E_1(p) = 8p - 6 = \boxed{-2 = v}$

optimalna strategija tj q možemo pronaći izjednačavanjem $E_1(p)$ i $E_2(p)$ po redovima.

$2q - 3(1 - q) = -6q - (1 - q)$

$5q - 3 = -5q - 1$

$10q = 2$

$\boxed{q = \frac{1}{5}}$ $\boxed{1 - q = 0.8}$

$v = 2q - 3(1 - q) = 2 \cdot 0.2 - 3 \cdot 0.8 = 0.4 - 2.4$

$\boxed{= -2 = v}$

Finalno:

$p = (0.5, 0.5)^T$

$q = (0.2, 0.8, 0, 0)^T$

$v = -2$ tj. vrijednost igre.

Zadatak 3 [1 poen]

Analitičkim metodom Kuhn-Tackera riješite sljedeći problem nelinearnog programiranja:

min $2 X_1^2 + 10 X_2^2 + 4 X_3^2 - 8 X_1 X_2 - 4 X_1 X_3 + 8 X_2 X_3 - 16 X_1 + 20 X_2 + 12 X_3 - 3$

$5 X_1 + 7 X_2 + 4 X_3 = 44$
$7 X_1 + 5 X_2 + 5 X_3 >= -119$
$X_2 >= 0$

Za rješavanje sistema (linearnih) jednačina koje ćete dobijati u toku postupka dozvoljeno je koristiti pomoćni softver, recimo MATLAB.

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u .pdf formatu.

③ Zadatak

$\min\ 2x_1^2 + 10x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3 - 16x_1 + 20x_2 + 12x_3 - 3$

p.o.:

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 44$
$7x_1 + 5x_2 + 5x_3 \geq -119$
$x_2 \geq 0$

$\Rightarrow$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 44 = 0$
$-7x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 119 \leq 0$
$-x_2 \leq 0$

Provjera konveksnosti:

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 20x_2 - 8x_1 + 8x_3 + 20$

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 8x_3 - 4x_1 + 8x_2 + 12$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_2^2} = 20 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3^2} = 8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} = -4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} = 8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} = -8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} = -4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} = 8$

$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 4 & -8 & -4 \\ -8 & 20 & 8 \\ -4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = a_{11} = 4 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 4 \cdot 20 - (-8)(-8) = 80 - 64 = 16$

$\Delta_2 = 16 > 0$

$\Delta_3 = 4 \cdot \begin{vmatrix} 20 & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -8 & 20 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} =$

$= \overset{4 \cdot 96}{\cancel{\ \ }} + 8 \cdot (-32) - \overset{4 \cdot 16}{\cancel{\ \ }} = 384 + (-256) - 64 = 64 > 0$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$
Matrica je pozitivno definitna, postoji tačka koja je apsolutni minimum.

①

$L = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T \cdot h(x)$

$$L = f(x) + \lambda(5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 44) + \mu_1(-7x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 119) + \mu_2(-x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16 + 5\lambda - 7\mu_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 20x_2 - 8x_1 + 8x_3 + 20 + 7\lambda - 5\mu_1 - \mu_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 8x_3 - 4x_1 + 8x_2 + 12 - 5\mu_1 + 4\lambda$$

KKT uslovi:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16 + 5\lambda - 7\mu_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 20x_2 - 8x_1 + 8x_3 + 20 + 7\lambda - 5\mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 8x_3 - 4x_1 + 8x_2 + 12 + 4\lambda - 5\mu_1 = 0$$

uslovi spregnutosti:

$$\mu_1 \cdot (-7x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 119) = 0$$

$$\mu_2 \cdot (-x_2) = 0$$

Postoje 2 ograničenja nejednakosti i treba provjeriti $2^2 = 4$ grupe uslova. Postoje 3 promjenljive i 1 ograničenje tipa jednakosti što znači da najviše $3 - 1 = 2$ množioca mogu imati nenultu vrijednost

1° $\mu_1 \neq 0 \wedge \mu_2 \neq 0$

2° $\mu_1 = 0 \wedge \mu_2 \neq 0$

3° $\mu_1 \neq 0 \wedge \mu_2 = 0$

4° $\mu_1 = 0 \wedge \mu_2 = 0$

① $\mu_1 \neq 0 \quad \mu_2 \neq 0$

$4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16 + 5\lambda - 7\mu_1 = 0.$

$-8x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 20 + 7\lambda - 5\mu_1 - \mu_2 = 0$

$-4x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 12 + 4\lambda - 5\mu_1 = 0.$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 44 = 0$

$7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 119 = 0 \qquad \mu_1, \mu_2 \geq 0$

$-x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$

Rj. pomoću linsolve imamo:

$x_1 = -232 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 301 \quad \lambda = -11392 \quad \mu_1 = -8444 \quad \mu_2 = -33240$

Nije pronađena KKT tačka jer nisu zadovoljeni uslovi za μ_1 i μ_2.

② $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 \neq 0.$

$4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16 + 5\lambda = 0$

$-8x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 20 + 7\lambda - \mu_2 = 0$

$-4x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 12 + 4\lambda = 0.$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 44 = 0$

$x_2 = 0. \qquad \mu_1, \mu_2 \geq 0$

$-7x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 119 \leq 0 \quad (*)$

Rj. pomoću linsolve imamo:

$x_1 = \frac{370}{53} \quad x_2 = 0 \quad x_3 = \frac{241}{106} \quad \lambda = \frac{-30}{53} \quad \mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \frac{-1146}{53}$

Provjera uslova se vrši manuelno (prikazano nakon slika u rezultatima matlaba. Vidimo nije zadovoljen uslov za μ_2 shodno tome nije pronađena KKT tačka.

③ $\mu_1 \neq 0 \quad \mu_2 = 0$

$4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16 + 5\lambda - 7\mu_1 = 0$

$-8x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 20 + 7\lambda - 5\mu_1 = 0$

$-4x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 12 + 4\lambda - 5\mu_1 = 0.$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 44 = 0.$

$7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 119 = 0.$

$-x_2 \leq 0 \Rightarrow x_2 \geq 0$

Rj. pomoću linsolve:

$x_1 = -\frac{267}{31} \quad x_2 = \frac{1385}{31}.$

$x_3 = -\frac{1749}{31}$

$\lambda = \frac{-17936}{93} \quad \mu_1 = \frac{-15232}{93}$

$\mu_2 = 0.$

Vidimo da uslov za μ_1 nije zadovoljen shodno ③ ovo nije KKT tačka.

(4) $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = 0$

$4x_1 - 8x_2 - 4x_3 - 16 + 5\lambda = 0.$

$-8x_1 + 20x_2 + 8x_3 + 20 + 7\lambda = 0$

$-4x_1 + 8x_2 + 8x_3 + 12 + 4\lambda = 0$

$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 44 = 0.$

$-7x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 119 \leq 0$

$x_2 \geq 0$

Rj. pomoću linsolve:

$x_1 = 6.6253 \qquad x_2 = 1.4506 \qquad x_3 = 0.1797.$

$\lambda_1 = \frac{144}{395} \qquad \mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 0.$

Još, pored utvrđene KKT tačke, treba provjeriti definitnost A matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -7 & -5 & -5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 5 > 0$

$\Delta_2 = -25 + 49 = 24 > 0$

$$\Delta_3 = 5 \cancel{\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} - 7 \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 15 > 0.$$

Kako je matrica A pozitivno definitna, rješenje postoji i jedinstveno je, te je pronađena KKT tačka i ujedno jedinstveno rješenje.

$x_1 = 6.6253 \qquad x_2 = 1.4506 \qquad x_3 = 0.1797.$

$z = -48.43$ tj. minimalna vrijednost!

Pozivanje *linsolve* pri svakom slucaju (linsolve(A,B), gdje su A i B i dodatni uslovi prikazani ispod) zajedno sa svim slucajevima tj. dinamickim uslovima:

Slučaj 1:

```
Command Window
A =

[  4, -8, -4, 5, -7,  0]
[ -8, 20,  8, 7, -5, -1]
[ -4,  8,  8, 4, -5,  0]
[  5,  7,  4, 0,  0,  0]
[  7,  5,  5, 0,  0,  0]
[  0,  1,  0, 0,  0,  0]


B =

    16
   -20
   -12
    44
  -119
     0


X =

    -232
       0
     301
  -11392
   -8444
  -33240
```

Slučaj 2:

```
A =

[  4, -8, -4, 5, -7,  0]
[ -8, 20,  8, 7, -5, -1]
[ -4,  8,  8, 4, -5,  0]
[  5,  7,  4, 0,  0,  0]
[  0,  0,  0, 0,  1,  0]
[  0,  1,  0, 0,  0,  0]


B =

  16
 -20
 -12
  44
   0
   0


X =

   370/53
        0
  241/106
   -30/53
        0
 -1146/53


ans =

-18999/106 <= 0
```

Slučaj 3:

```
A =

[  4, -8, -4, 5, -7,  0]
[ -8, 20,  8, 7, -5, -1]
[ -4,  8,  8, 4, -5,  0]
[  5,  7,  4, 0,  0,  0]
[  0,  0,  0, 0,  0,  1]
[  7,  5,  5, 0,  0,  0]


B =

   16
  -20
  -12
   44
    0
 -119


X =

   -267/31
   1385/31
  -1749/31
 -17936/93
 -15232/93
         0


ans =

0 <= 1385/31
```

Slučaj 4:

```
A =

[  4, -8, -4, 5, -7,  0]
[ -8, 20,  8, 7, -5, -1]
[ -4,  8,  8, 4, -5,  0]
[  5,  7,  4, 0,  0,  0]
[  0,  0,  0, 0,  0,  1]
[  0,  0,  0, 0,  1,  0]


B =

  16
 -20
 -12
  44
   0
   0


X =

 2617/395
  573/395
   71/395
  144/395
        0
        0


ans =

-68544/395 <= 0


ans =

0 <= 573/395
```

Zadatak 4 [1 poen]

Potrebno je izvršiti simulaciju vremenskog ponašanja električnog kola koje se sastoji od serijske veze 3 komponente:

- Istosmjernog naponskog izvora elektromotorne sile E = 14.7;
- Zavojnice induktiviteta L = 19.4;
- Paralelne veze kondenzatora kapaciteta C = 0.0136 i otpornika čiji se otpor može mijenjati u granicama od R_{min} = 9.4 do R_{max} = 52.8.

Ponašanje kola opisuje se sistemom jednačina

$E = L\, di_L(t)/dt + u_C(t)$
$i_L(t) = u_C(t)/R + C\, du_C(t)/dt$

Početne vrijednosti napona na kondenzatoru i struje kroz zavojnicu iznose $u_C(0) = 0$ i $i_L(0) = 0$.

Vaš zadatak je da napravite program u programskom paketu MATLAB koji vrši simulaciju ovog električnog kola diskretizacijom jednačina koji ga opisuju. Program treba da traži od korisnika da se zada korak simulacije Dt, krajnje vrijeme t_{max} do kojeg se simulacija vrši, kao i aktuelnu vrijednost otpora R (ostale vrijednosti trebaju biti hard-kodirane u programu). Kao rezultat, program treba da crta grafike vremenskih promjena $u_C(t)$ i $i_L(t)$. Uz pomoć napisanog programa treba da utvrdite sljedeće:

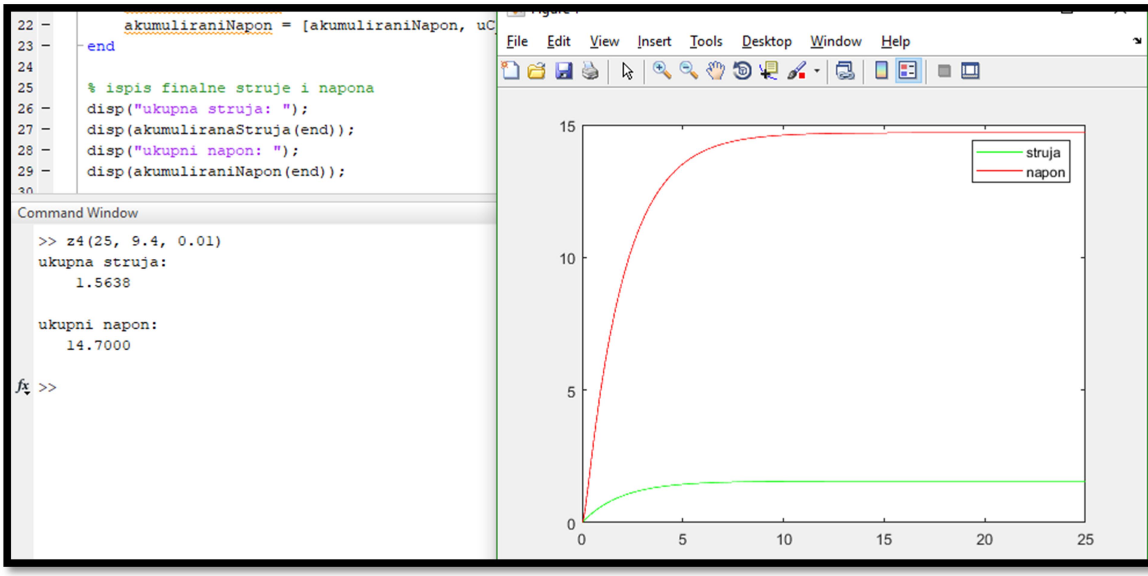
- Vremenske dijagrame $u_C(t)$ i $i_L(t)$ za R = R_{min} i R = R_{max} (snimljene dijagrame treba priložiti u izvještaju zadaće);
- Stacionarne vrijednosti $u_C(t)$ i $i_L(t)$ koje se postižu nakon što prođe dovoljno dugo vremena da ove dvije veličine postanu konstantne, tj. kada se smire prelazni procesi, također za R = R_{min} i R = R_{max} (nađene vrijednosti treba napisati u izvještaju);
- Vrijeme smirivanja, tj. vrijeme koje je potrebno da $u_C(t)$ i $i_L(t)$ postanu konstantni, također za R = R_{min} i R = R_{max} (nađene vrijednosti treba napisati u izvještaju);
- Kritičnu vrijednost otpornika R u intervalu između R = R_{min} i R = R_{max} za koju odzivi $u_C(t)$ i $i_L(t)$ mijenjaju svoju prirodu i iz monotone prelaze u oscilatornu (sa preskokom preko stacionarne vrijednosti); ovo ćete uraditi ponavljajući simulaciju za različite vrijednosti R i posmatrajući grafik (nađenu vrijednost treba napisati u izvještaju).

Potrebno je da predate listing programa, i kratak izvještaj koji sadrži postavku problema, diskretizirani model problema, te opis i rezultate simulacije (u skladu sa gore datim napomenama), u .pdf formatu.

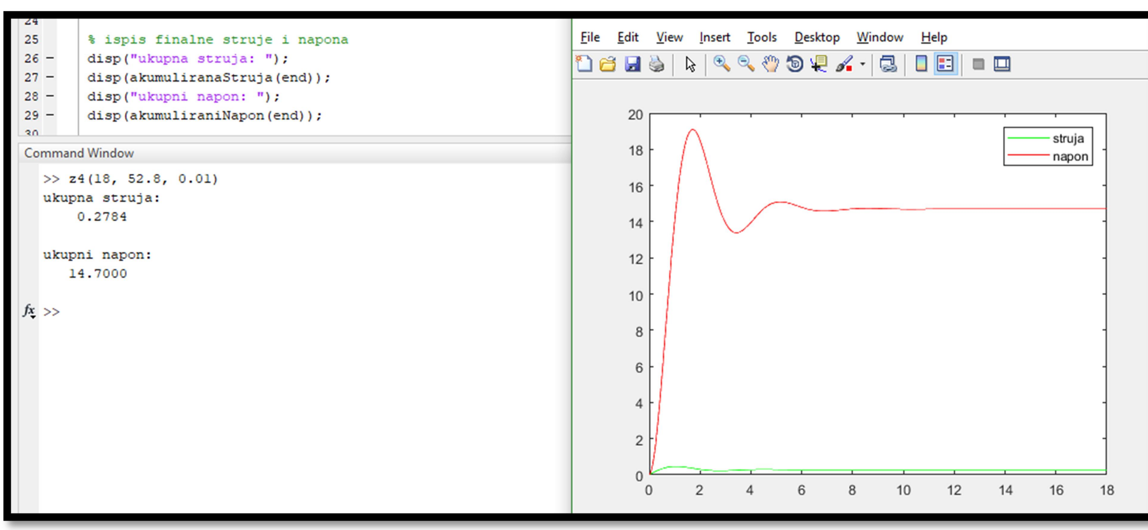
Kod za realizaciju ovog zadatka je dat:

```
function [ ] = z4(krajnjeVrijeme, R, korak)
% iznad su prikazane postavke trazene od korisnika
% krajnjeVrijeme - vrijeme do kojeg da ide
% aktuelna vrijednost otpora
% korak - korak kretanja kroz petlju, iteracija

% pocetne vrijednosti iz postavke
E = 14.7; L = 19.4; C = 0.0136;
% pocetna struja i napon, iz postavke
pocetnaStruja = 0; pocetniNapon = 0;
% vrijednosti koje ce se akumulirati
akumuliranaStruja = []; akumuliraniNapon = []; ukupniNapon = [];

% postupak akumulacije
for k = 0 : korak : krajnjeVrijeme
    iL_s = pocetnaStruja + korak * double(E-pocetniNapon)/L;
    pocetnaStruja = iL_s;
    uC_s = pocetniNapon + korak * double(pocetnaStruja -
double(pocetniNapon/R))/C;
    pocetniNapon = uC_s;
    ukupniNapon = [ukupniNapon, k];
    akumuliranaStruja = [akumuliranaStruja, iL_s];
    akumuliraniNapon = [akumuliraniNapon, uC_s];
end

% ispis finalne struje i napona
disp("ukupna struja: ");
disp(akumuliranaStruja(end));
disp("ukupni napon: ");
disp(akumuliraniNapon(end));

% plottanje grafa
hold off;
plot(ukupniNapon, akumuliranaStruja, 'g');
hold on;
plot(ukupniNapon, akumuliraniNapon, 'r');
legend('struja', 'napon');

end
```

Vremenski dijagram za $Rmin = 9.4$ je prikazan na sljedecoj slici. Koristen je korak simulacije sa vrijednoscu 0.01, oznaceno kao korak u kodu. Naredna slika pokazuje pozvanu funkciju sa krajnjim vremenom 25sec, jer za vrijednosti napona nakon 25sec nema promjena, dok struja ne mijenja svoju vrijednost nakon tog 20 sekundi. Ovo su ujedno i vrijeme smirivanja za ove vrijednosti (po grafiku djeluje da je i prije, ali po ispisanim vrijednostima to je tek >= 25sec za napon, odnosno >= 20 sec za struju).



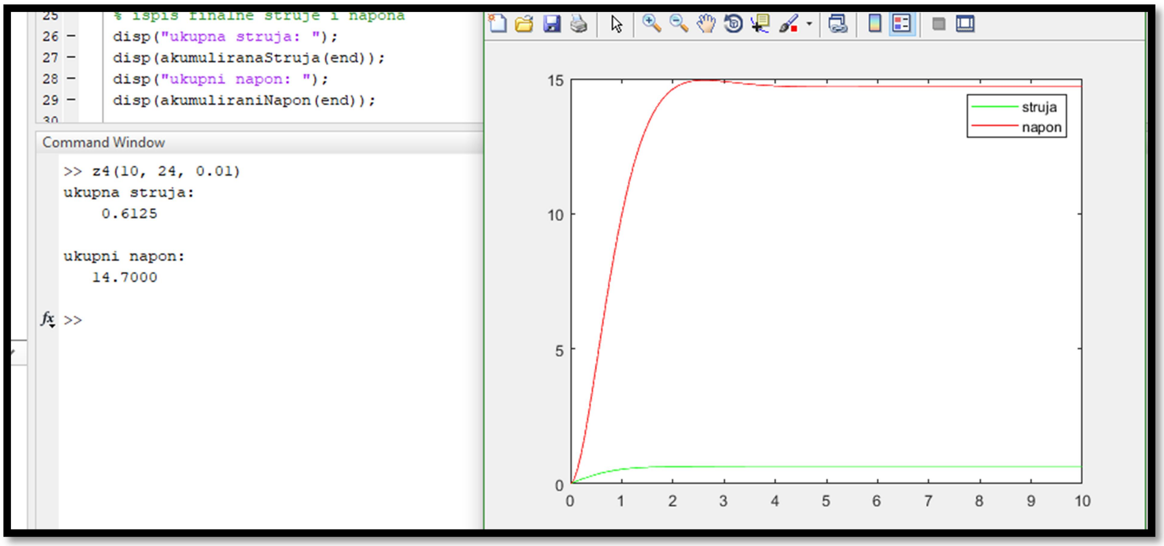
Vremenski dijagram za Rmax = 52.8 je prikazan na sljedecoj slici. Koristen je korak simulacije sa vrijednoscu 0.01, oznaceno kao korak u kodu. Naredna slika pokazuje pozvanu funkciju sa krajnjim vremenom 18sec, jer za vrijednosti napona nakon 18sec nema promjena, dok struja ne mijenja svoju vrijednost nakon tog 13 sekundi. Ovo su ujedno i vrijeme smirivanja za ove vrijednosti (po grafiku djeluje da je i prije, ali po ispisanim vrijednostima to je tek >= 19sec za napon, odnosno >= 13sec za struju).



Stacionarne vrijednosti za oba slucaja kada se desi vrijeme smirivanja:

Za $Rmin$= 9.4 stacionarne vrijednosti napona i struje koje se postižu nakon što se smire prolazni procesi iznse: napon = 14.7 i struja = 1.5638. Za $Rmax$= 52.8 stacionarne vrijednosti uC(t) i iL(t) koje se postižu nakon što se smire prolazni procesi iznse: napon = 14.7 i struja = 0.2784.

Ponavljanjem simulacije za razlicite vrijednosti R dobije se da kritična vrijednost otpornika R u intervalu između R = Rmin i R = Rmax za koju odzivi *napona* i *struje* mijenjaju svoju prirodu i iz monotone prelaze u oscilatornu iznosti R = 24.



Zadatak 5 [2 poena]

Neka je dat beskonačni niz ravni koje su sve paralelne i jednako udaljene jedna od druge sa razmakom $l = 0.23$ i sve ravni imaju normalu (nx,ny,nz) = (1,1,1). Prva ravan prolazi kroz koordinantni početak i ima indeks 0. Vaš zadatak je da koristeći metod statističke simulacije izračunate zapreminu presjeka prostora između ravni 2k i 2k+1 (prostor između 2k+1 i 2k+2 ne učestvuje u traženoj zapremini) i elipsoida čije su dužine poluosa $a = 24.9$, $b = 28.6$, $c = 17.2$ Ideja je u sljedećem. Jednačina elipsoida glasi

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

Pri tome, čitav elipsoid u potpunosti leži unutar kvadra određenog nejednakostima

$$-a <= x <= a$$
$$-b <= y <= b$$
$$-c <= z <= c$$

Sad, ukoliko nasumice izaberemo neku tačku (x, y, z) koja leži unutar takvog kvadra, vjerovatnoća da se ona istovremeno nalazi i unutar elipsoida iznosi

$$p = V_e / V_k$$

gdje su V_e i V_k zapremine elipsoida i kvadra respektivno. Kako je zapreminu kvadra lako naći (produkt dužina stranica), slijedi da se iz poznate zapremine kvadra i poznate vjerovatnoće p lako računa zapremina elipsoida. Međutim, vjerovatnoću p možemo procijeniti pomoću statističke simulacije. Naime, neka smo eksperiment sa slučajnim izborom tačke ponovili ukupno N puta i neka je od tih N tačaka ukupno n tačaka palo unutar elipsoida. Ukoliko je N dovoljno velik, vjerovatnoća da tačka pada unutar elipsoida može se procijeniti kao količnik n / N. Pri tome, tačka pada unutar elipsoida ako je zadovoljeno

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 <= 1$. Potrebno je da napravite program u Matlabu koji će za zadanu vrijednost N izvršiti procjenu tražene zapremine pomoću N eksperimenata sa slučajno odabranim tačkama (vrijednosti a, b i c trebaju biti hard-kodirane u programu). Nakon toga, trebate obaviti po 5 simulacija uzimajući $N = 1000$, zatim $N = 5000$ i, konačno, $N = 10000$ (po 5 simulacija za svaku vrijednost N; naime, zbog slučajnosti, rezultati neće biti isti u svakoj simulaciji čak i ako vrijednost N ostane ista). Rezultate simulacije trebate upisati u tabelu poput sljedeće:

	Simulacija 1	Simulacija 2	Simulacija 3	Simulacija 4	Simulacija 5
N = 1000					
N = 5000					
N = 10000					

Potrebno je da predate listing programa, i kratak izvještaj koji sadrži postavku problema, opis i rezultate simulacije, u .pdf formatu.

Na osnovu zadate formule $p= Ve\ /\ Vk$, vrijedi $Ve = p \cdot Vk$ i $p= n\ /\ N$

Zatim imamo $Vk = 2{\cdot}a{\cdot}2{\cdot}b{\cdot}2{\cdot}c = 8{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}c$

Onda mozemo dobiti finalnu formulu, $Ve=(n/N){\cdot}8{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}c$.

Za realizaciju postavljenog zadatka, napisan je sljedeći kod:

```
function [V] = z5(N)
a = 24.9;
b = 28.6;
c = 17.2;
zadani_l = 0.23;
n = 0;

brojRavni = ceil(b/zadani_l);

for i = 1 : N
    x = -1*a + (2*a).* rand(1,1);
    y = -1*b + (2*b).* rand(1,1);
    z = -1*c + (2*c).* rand(1,1);
    temp = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2;
    % povecati n ukoliko se nalazi na definisanim
    % granicama iz postavke i unutar elipsoida
    if temp <= 1
        for k = -brojRavni : brojRavni
            temp2 = x + y + z + 2 * k * zadani_l * sqrt(3);
            temp3 = x + y + z + (2 * k + 1) * zadani_l * sqrt(3);

            if temp2 < 0 && temp3 > 0
                n = n+1;
            end
        end
    end
end

V = (n/N)*8*a*b*c;
end
```

Prvo se vrsi provjera da li je tacka unutar elipsoida, zatim ukoliko jeste, onda se gleda da li pripada trazenoj ravni (temp2 i temp3 varijable). Ukoliko su zadovoljeni uslovi, vrsimo povecavanje broja tacaka. Tabela simulacija je data:

	Simulacija 1	Simulacija 2	Simulacija 3	Simulacija 4	Simulacija 5
***N* = 1000**	28417.234560	25575.511104	25281.539712	24301.635072	24399.625536
***N* = 5000**	25457.922547	26770.994765	25614.707290	25947.874867	25163.951155
***N* = 10000**	25614.707290	25212.946387	25418.726362	26281.042445	25712.697754

Zadatak 6 [1.5 poen]

Poslovnica banke inače posluje sa dva šaltera pri čemu je intenzitet dolaska = 10 a intenzitet uzluzivanja 6. Radno vrijeme poslovnice je od 9:00 do 14:00. U blizini banke se pravi poslovni prostor koji uzrokuje dvije pojave. Od 11 do 13 postoji još 30 korisnika čiji je dolazak raspoređen uniformno. Oko 13 sati normalnom distribucijom sa sigma = 0.6 dolazi još 36 korisnika. Potrebno je isplanirati povećanje broja šaltera tako da je broj korisnika na čekanju maksimalno 3 tokom čitavog radnog vremena. Potrebno je uraditi plot simulacije pomoću MATLAB-a za različit broj šaltera i na osnovu toga obrazložiti novi potrebni broj šaltera po vašem mišljenju za poslovnicu banke. Obrazložiti i koji je period vremena kada se može smanjiti broj aktivnih šaltera i koji je potreban broj šaltera u tom periodu.

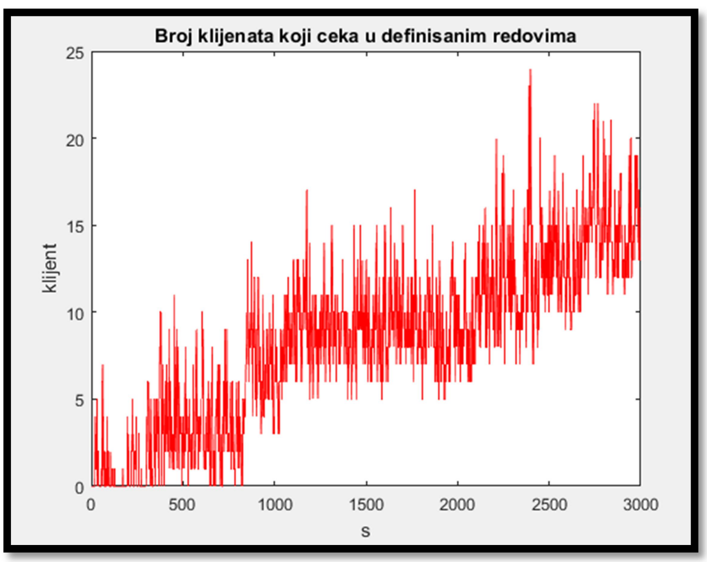
Kod za realizaciju ovog zadatka je dat u nastavku:

```
function [] = z6(brojRedova)

intenzitetDolaska = 10;
intenzitetUsluzivanja = 6;

od11do13BrojNovihKorisnika = 30;
od13NoviKorisnici = 36;
sigma = 0.6;

% radno vrijeme u minutama, od 9 do 14
t = 5 * 60;

% poisonova raspodjela po minut lagano
brojDolazakaTrenutnihKlijenata = poissrnd(intenzitetDolaska , 1, t);
ukupnoKlijanata = sum(brojDolazakaTrenutnihKlijenata) +
od11do13BrojNovihKorisnika + od13NoviKorisnici;
vremenaDolazaka = zeros(1, ukupnoKlijanata);

trenutniTrenutak = 1;

for i = 1 : t
    for j = 1 : brojDolazakaTrenutnihKlijenata(i)
        vremenaDolazaka(trenutniTrenutak) = rand(1) + i - 1;
        trenutniTrenutak = trenutniTrenutak + 1;
    end
end

for i = 1 : od11do13BrojNovihKorisnika
    % od11do13BrojNovihKorisnika tj. novi korisnici ce doci
    % izmedju 120 i 140e minute, odnosno izmedju 11 i 13
    vrijemeDolaskaNovog = unifrnd(120,240);
    vremenaDolazaka(trenutniTrenutak) = vrijemeDolaskaNovog + rand(1);
    trenutniTrenutak = trenutniTrenutak + 1;
end

for i = 1 : od13NoviKorisnici
    % od13NoviKorisnici tj. novi ce doci u 13
    vremenaDolazaka(trenutniTrenutak) = normrnd(240, sigma);
    trenutniTrenutak = trenutniTrenutak + 1;
end

vremenaDolazaka = sort(vremenaDolazaka);
vrijemePotrebnoZaUslugu = 1 ./ poissrnd(intenzitetUsluzivanja, 1,
ukupnoKlijanata);
vrijemeOdlaskaKlijenta = zeros(1, ukupnoKlijanata);
vrijemeOdlaskaKlijenta(1) = vremenaDolazaka(1) +
vrijemePotrebnoZaUslugu(1);

for i = 2 : ukupnoKlijanata
   vrijemeOdlaskaKlijenta(i) = vremenaDolazaka(i) +
vrijemePotrebnoZaUslugu(i);
   if vremenaDolazaka(i) < vrijemeOdlaskaKlijenta(i-1)
        vrijemeOdlaskaKlijenta(i) = vrijemeOdlaskaKlijenta(i) +
vrijemePotrebnoZaUslugu(i-1);
   end
end
```

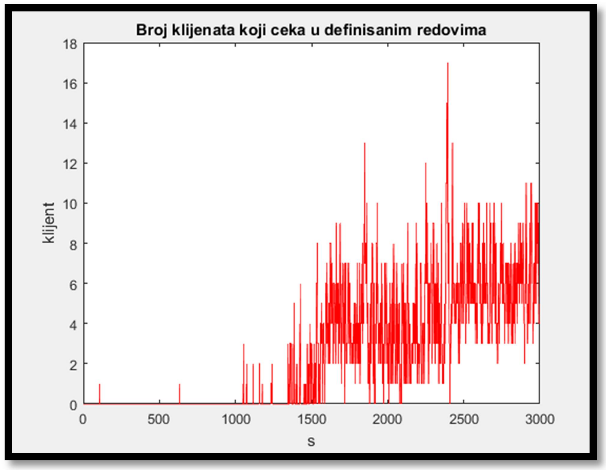
```
% gledamo svakih 10 sekundi stanje
duzina = (t * 60) / 6;
indexiPo10Sekundi = 1 : duzina;

svakih10Sekundi = 1 : 0.1 : 301;
kolikoKorisnikaCekaURedovima = zeros(1, duzina);
brojSlobodnihSaltera = ones(1, duzina) .* brojRedova;

for i = indexiPo10Sekundi
    for j = 1 : ukupnoKlijanata
        if vremenaDolazaka(j) < svakih10Sekundi(i) &&
vrijemeOdlaskaKlijenta(j) > svakih10Sekundi(i)
            if brojSlobodnihSaltera(i) > 0
                brojSlobodnihSaltera(i) = brojSlobodnihSaltera(i) - 1;
            else
                kolikoKorisnikaCekaURedovima(i)=
kolikoKorisnikaCekaURedovima(i) + 1;
            end
        end
    end
end

plot(indexiPo10Sekundi, kolikoKorisnikaCekaURedovima, 'r');

end
```

Optimalan broj šaltera ćemo predložiti tako što ćemo pozvati gornju funkciju za broj saltera: 5, 10, 15, 25, 30. Shodno tome imamo:

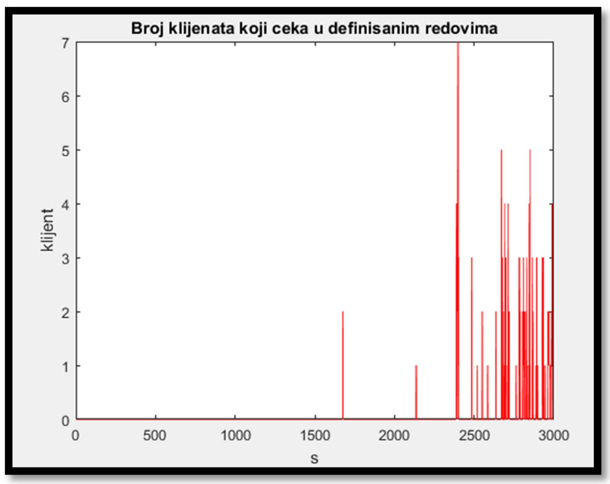
5:



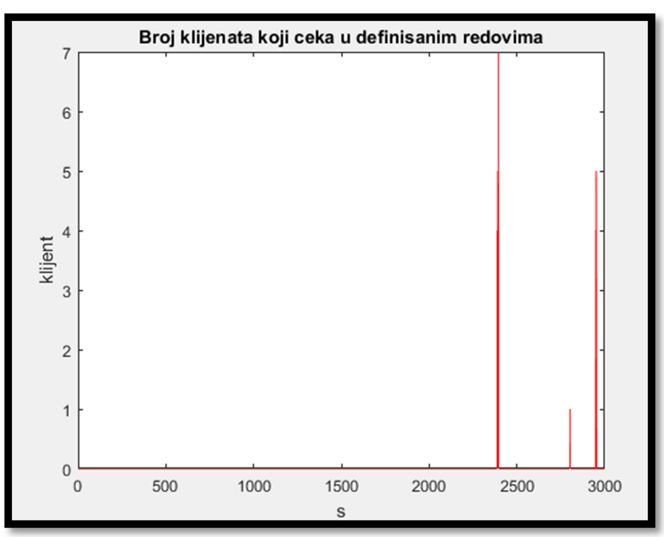
10:


Broj klijenata koji ceka u definisanim redovima
klijent
s
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

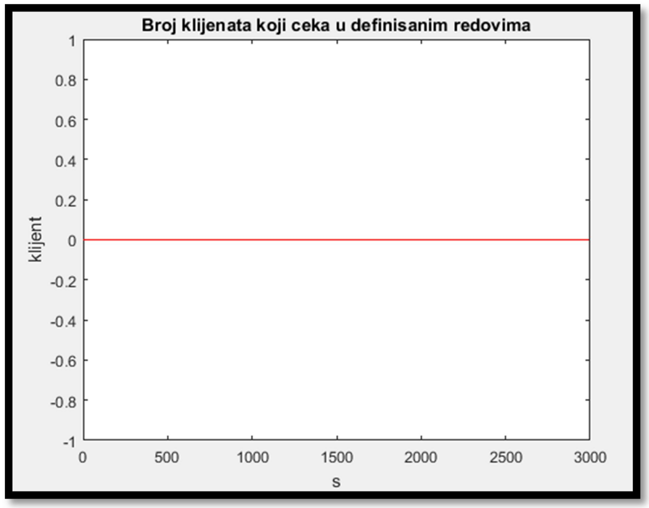
15:


Broj klijenata koji ceka u definisanim redovima
klijent
s
0
1
2
3
4
5
6
7
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

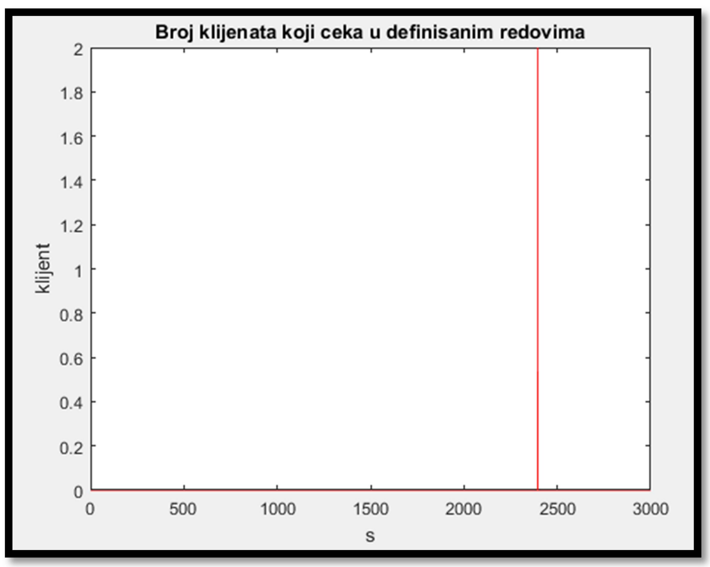
25:


Broj klijenata koji ceka u definisanim redovima
klijent
s
0
1
2
3
4
5
6
7
0
500
1000
1500
2000
2500
3000

30:



Vidimo da bi dobili tražene uslove u zadatku, treba nam neki broj redova izmdju 25 i 30. Eksperimentalnom metodom se utvrdilo da je najbolji broj 27 koji zadovoljava trazene uslove:



Broj aktivnih saltera mozemo smanjiti ukoliko npr gledamo prvih 100 minuta radnog vremena. Potreban broj saltera je 10 (sto mozemo primijetiti na slici od 10 aktivnih saltera iznad).