Zadaća 1

iz predmeta Matematikčka logika i teorija izračunljivosti

Prezime i ime: Dizdarević Adi

Br. indexa: 18392

Zadatak	Bodovi
1	
2	
3	
4	
5	

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Primjenom aksioma iskazne algebre minimizirajte izraze:
   (a) $\overline{\overline{B(A \veebar C)} \vee \overline{A}\ \overline{B \veebar C}}$
   (b) $A \vee (B \veebar C) \vee (C \Rightarrow B)$

   Rješenje:
   a)

$$\overline{\overline{B(A \veebar C)} \vee \overline{A}\ \overline{B \veebar C}} = \overline{\overline{B(A \veebar C)}} \wedge \overline{\overline{A}\ \overline{B \veebar C}} =$$

$$B(A \veebar C)(A \vee B \veebar C) = B(A\overline{C} \vee C\overline{A})(A \vee B\overline{C} \vee \overline{B}C) =$$

$$(AB\overline{C} \vee \overline{A}BC)(A \vee B\overline{C} \vee \overline{B}C) = AB\overline{C} \vee AB\overline{C} = AB\overline{C}$$

   b)

$$A \vee (B \veebar C) \vee (C \Rightarrow B) = A \vee B\overline{C} \vee \overline{B}C \vee \overline{C} \vee B =$$

$$A \vee \overline{C} \vee B\overline{C} \vee B \vee \overline{B}C = A \vee \overline{C} \vee B \vee C = T$$

2. Da li je sljedeći izraz $(\mathrm{p} \vee (\neg \mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{r})) \wedge \mathrm{s} \vee (\mathrm{s} \iff \mathrm{r}) \wedge \mathrm{q}$ tautologija? Ako nije, pod kojim uvjetima je tačan (zadovoljiv)?

   Rješenje:

$$(p \vee (\overline{q} \Rightarrow r))s \vee (s \iff r)q =$$

$$(p \vee q \vee r)s \vee (sr \vee \overline{s}\ \overline{r})q =$$

$$(sp \vee sq \vee sr \vee srq \vee \overline{s}\ \overline{r}q =$$

$$sp \vee sq \vee sr \vee \overline{s}\ \overline{r}q =$$

$$sp \vee srq \vee s\overline{r}q \vee sr \vee \overline{s}\ \overline{r}q =$$

$$sp \vee sr \vee \overline{r}q(r \vee \overline{r}) =$$

$$sp \vee sr \vee \overline{r}q(\top) =$$

$$sp \vee sr \vee \overline{r}q$$

   Dobijeni izraz nije tautologija, međutim zadovoljiv je pod sljedećim uslovima:

p	**q**	**r**	**s**	**I**
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

3. Primjenom aksioma i pravila izvođenja formalne teorije propozicijske logike, dokažite model:

$$q \Rightarrow (p \Rightarrow r), \neg r, q \vdash \neg p.$$

Rješenje:

(1)	$q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	[premisa]
(2)	$\overline{r}$	[premisa]
(3)	q	[premisa]
(4)	$p \Rightarrow r$	[modus ponens (1) i (3)]
(5)	p	[pretpostavka]
(6)	r	[modus ponens (4) i (5)]
(7)	$\bot$	[RAA (2) i (6)]

Obzirom da je pretpostavka pogrešna, negacija pretpostavke će biti $\neg p$ stoga je po teoremu dedukcije: $q \Rightarrow (p \Rightarrow r), \neg r, q \vdash \neg p$

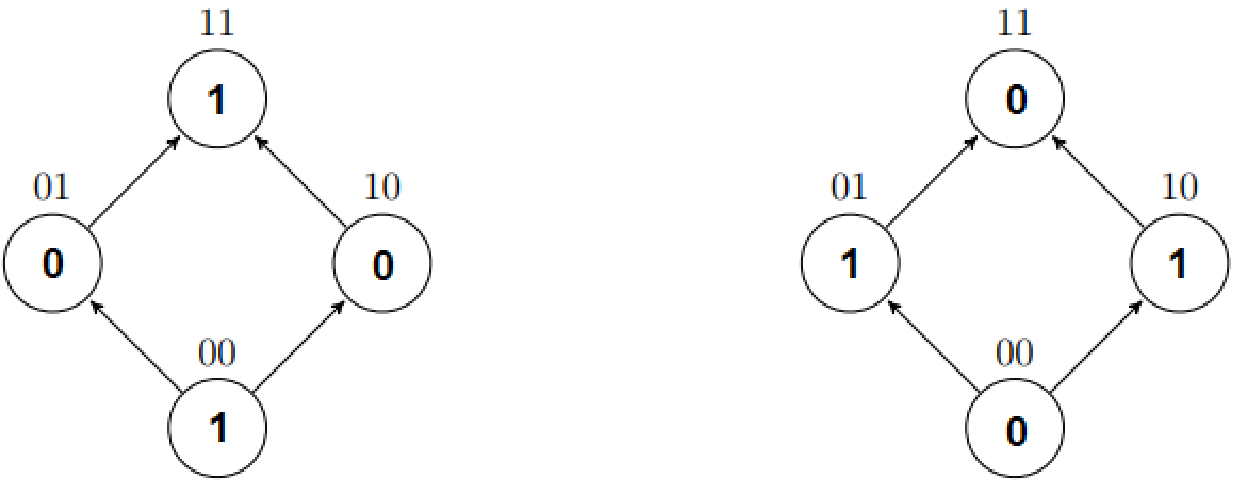
4. Primjenom Postovog teorema ispitajte da li je skup S = $\{\iff, \veebar\}$ logičkih operacija funkcionalno kompletan. Izrazite operacije standardne baze $\{\wedge, \vee, \neg\}$ pomoću operacija iz skupa S. Ukoliko neki skup nije funkcionalno kompletan, proširite ga minimalnim brojem dodatnih logičkih operacija tako da on postane funkcionalno kompletan. Nije dozvoljeno korištenje univerzalnih logičkih operacija.

   Rješenje:
   1) ZADRŽAVANJE NEISTINE
   $\iff$ *:* $\bot \iff \bot = \top$ dakle NE zadržava;
   $\veebar$*:* $\bot \veebar \bot = \bot$ dakle DA, zadržava;

   2) ZADRŽAVANJE ISTINE
   $\iff$ *:* $\top \iff \top = \top$ dakle DA, zadržava;
   $\veebar$*:* $\top \veebar \top = \bot$ dakle NE zadržava;

   3) LINEARNOST
   $\iff$ *:* u ANF formi se zapisuje kao: $x_1 \iff x_2 = \overline{x_1 \veebar x_2} = \top \veebar x_1 \veebar x_2$ te je zapisan u obliku $(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \veebar a_1 x_1 \veebar a_2 x_2 \veebar ... \veebar a_n x_n$ gdje je $a_0 = \top, a_1 = \top, a_2 = \top$. Dakle operacija je linearna.
   $\veebar$*:* u ANF formi se zapisuje kao: $x_1 \veebar x_2 = \bot \veebar x_1 \veebar x_2$ gdje je $a_0 = \bot, a_1 = \top, a_2 = \top$. Dakle operacija je linearna.

4) MONOTONOST
Ispitivanje monotonosti preko Hasseovog dijagrama:



(a) $\iff$ nije monotona

(b) $\veebar$ nije monotona

Figure 1

5) SAMODUALNOST
$\overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$?
$\overline{x \iff y} = \overline{x} \iff \overline{y}$
$x \veebar y \neq x \iff y$
$\iff$ nije samodualna;
$\overline{x \veebar y} = \overline{x} \veebar \overline{y}$
$x \iff \neq x \veebar y$
$\veebar$ nije samodualna;

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
$\iff$	+			+	+
$\veebar$		+		+	+

Pošto linearnost nije zadovoljena, skup S nije baza, stoga nam je potrebno da proširimo ovaj skup da bi bio baza, proširit ćemo ga sa operacijom "$\wedge$" jer konjukcija nije linearna što nam je potrebno. Dokažimo nelinearnost:
Tablica istine za operaciju konjukcije je sljedeća:

x	y	$x \wedge y$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$

Operacija je linearna ako i samo ako vrijedi ili (1) ako je rezultat operacije "$\top$" tada je broj "$\top$" operanada neparan, a ako je rezultat operacije "$\perp$" tada je broj "$\top$" operanada paran, ili (2) ako je rezultat operacije "$\top$" tada je broj "$\top$" operanada paran, a ako je rezultat operacije "$\perp$" tada je broj "$\top$" operanada neparan. Obzirom da po tablici vidimo da niti (1) niti (2) nisu zadovoljeni što daje $\perp \veebar \perp = \perp$ što znači da je operacija "$\wedge$" nelinearna.

Predstavimo sada $\{\wedge, \vee, \neg\}$ preko proširenog skupa S $= \{\iff, \veebar, \wedge\}$:

$$x \wedge y = x \wedge y$$
$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{(x \veebar \top)(y \veebar \top)} = \overline{xy \veebar x \veebar y \veebar \top} = (x \wedge y) \veebar x \veebar y$$
$$\neg x = x \veebar \top = x \veebar (x \iff x)$$

5. Primjenom binarno kodiranog Quine-McCluskyjevog algoritma naći MKNF formu izraza:

$$I = A(C \veebar D) \vee (CD \Rightarrow A(BD \vee \overline{B \vee C}))$$

ako se zna da se neće pojaviti slučaj u kojem su istovremeno tačni i C i D a A netačan. Dobijenu minimalnu formu pretvoriti u oblik u kojem se koristi pogodna univerzalna logička operacija.

Rješenje:
Prvo uprostimo izraz:
$A(C \veebar D) \vee (CD \Rightarrow A(BD \vee \overline{B \vee C})) =$
$AC\overline{D} \vee A\overline{C}D \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee A(BD \vee \overline{B \vee C}) =$
$\overline{D} \vee \overline{C} \vee ABD \vee A\overline{B}\,\overline{C} = ABD \vee \overline{C} \vee \overline{D}$
Najbolje je poći od negiranog izraza, odnosno od m-mintermi koje se ne nalaze u zadanom skupu i za takvu funkciju se odredi MDNF. Negiranjem ovako dobivenog MDNF dobiva se MKNF forma polaznog izraza. Dakle negirajmo izraz i nađimo SDNF:

$\overline{ABD \vee \overline{C} \vee \overline{D}} = \overline{(ABD)}(CD) = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{D})CD = \overline{A}CD \vee \overline{B}CD \vee \perp = \overline{A}BCD \vee \overline{A}\,\overline{B}CD \vee A\overline{B}CD$

Od čega su zabranjene kombinacije iz postavke zadatka: $\overline{A}BCD$ i $\overline{A}\,\overline{B}CD$.

Binarni zapis izraza je $0111 \vee 0011 \vee 1011$.

Tablica sažimanja:

0		
1	0111*,1011*	0-11,-011
2	0011*	
3		

Tablica pokrivanja i određivanje minimalnog pokrivanja nam nije potrebna obzirom da imamo samo dvije minterme od kojih je jedna zabranjena (0-11), što nam ostavlja da je minimalna forma ovog negiranog izraza: -011 odnosno $\overline{B}CD$, ukoliko negiramo ovo rješenje dobit ćemo traženi MKNF:

$$\overline{\overline{B}CD} = B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$$

Dobijena forma pomoću univerzalne logičke operacije:

$$\overline{\overline{B \vee \overline{C} \vee \overline{D}}} = \overline{\overline{B}CD} =\uparrow \{\overline{B}, C, D\} =\uparrow \{B \uparrow B, C, D\}$$