UNIVERZITET U SARAJEVU

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET SARAJEVO

DOMAĆA ZADAĆA 1

OPERACIONA ISTRAŽIVANJA

Student: Mašović Haris

Indeks: 1689/17993

Odsjek: Računarstvo i Informatika

Datum: **Potpis:**

11.04.2020 ______________

Zadatak 1 [1 poen]

Pomoću metoda grananja i ograničavanja (branch & bound) riješite problem cjelobrojnog programiranja

$\max 64 X_1 + 126 X_2 + 111 X_3$

$11 X_1 + 7 X_2 + 13 X_3 \leq 27$
$14 X_1 + 12 X_2 + 15 X_3 \leq 44$
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$
$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$

Za rješavanje pomoćnih problema (necjelobrojnog) linearnog programiranja koristite MATLAB funkciju "`linprog`".

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanjaproblema (ne samo krajnje rješenje) u "`pdf`" formatu.

NAPOMENA: Podrazumijeva se da ćete za pomoćne probleme linearnog programiranja koji se javljaju tokom rješavanja prikazivati samo njihovo krajnje rješenje, odnosno ono što dobijete pomoću funkcije "`linprog`".

* Rjesavanjem linearne relaksacije pocetnog problema imamo:

```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
   [x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [0 0 0], [inf inf inf]);
   x
   -z

Optimal solution found.


x =

         0
    3.6667
         0


ans =

   462
```

Vidimo da je Z (ujedno i max vrijednost) = 462, a x vektor [0 3.6667 0]. Sada posto je x2 jedina necjelobrojna je x2, shodno tome granamo po toj varijabli uz uslove x2 <= 3 i x2 >= 4. Shodno tome imamo dva potproblema koje cemo nazvati P1 i P2.

P1:

$$\max 64 X_1 + 126 X_2 + 111 X_3$$

$$11\,X_1 + 7\,X_2 + 13\,X_3 \leq 27$$
$$14\,X_1 + 12\,X_2 + 15\,X_3 \leq 44$$
$$X_2 \leq 3$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$$

P2:

$$\max 64\,X_1 + 126\,X_2 + 111\,X_3$$

$$11\,X_1 + 7\,X_2 + 13\,X_3 \leq 27$$
$$14\,X_1 + 12\,X_2 + 15\,X_3 \leq 44$$
$$X_2 \geq 4$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$$

Rjesavanjem linearnih relaksacija problema P1 i P2 (respektivno) imamo:

```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
[x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [0 0 0], [inf 3 inf]);
x
-z

Optimal solution found.


x =

         0
    3.0000
    0.4615


ans =

  429.2308
```

```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
[x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [0 4 0], [inf inf inf]);
x
-z

No feasible solution found.

Linprog stopped because no point satisfies the constraints.


x =

     []


ans =

     []
```

Vidimo da problem P2 nema rjesenja, shodno tome nastavljamo sa problemom P1. Jedina necjelobrojna varijabla je x3, shodno tome dodajemo nova dva potproblema P1.1 i P1.2 sa ogranicenjima x3 <= 0 i x3 >= 1 respektivno.

P1.1:

$$11\,X_1 + 7\,X_2 + 13\,X_3 \leq 27$$
$$14\,X_1 + 12\,X_2 + 15\,X_3 \leq 44$$

$$X_2 \leq 3 X_3 \leq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$$

P1.2:

$$11\,X_1 + 7\,X_2 + 13\,X_3 \leq 27$$
$$14\,X_1 + 12\,X_2 + 15\,X_3 \leq 44$$

$$X_2 \leq 3 X_3 \geq 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$$

Rjesavanjem linearnih relaksacija problema P1.1 i P1.2 (respektivno) imamo:

```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
[x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [0 0 0], [inf 3 0]);
x
-z

Optimal solution found.


x =

    0.5455
    3.0000
         0


ans =

  412.9091
```

```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
[x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [0 0 1], [inf 3 inf]);
x
-z

Optimal solution found.


x =

         0
    2.0000
    1.0000


ans =

   363
```

Rjesavanjem potproblema P1.2 smo dobili dozvoljeno rjesenje, a ono iznosi Z = 363, x = [0 2 1]. Ovo Z predstavlja nase minimalno Z (za koje jos ne znamo je li optimalno). Rjesavanjem problema P1.1 smo dobili rjesenje Z = 412.0, x = [0.54 3 0]. Varijabla x1 je jedina necjelobrojna shodno dodajemo nova dva ogranicenja: x1 <= 0 i x1 >= 1 kao potprobleme P1.1.1 i P1.1.2.

P1.1.1:

$$11\,X_1 + 7\,X_2 + 13\,X_3 \leq 27$$
$$14\,X_1 + 12\,X_2 + 15\,X_3 \leq 44$$
$$X_2 \leq 3 X_3 \leq 0 X_1 \leq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$$

P.1.1.2:

$$11\,X_1 + 7\,X_2 + 13\,X_3 \leq 27$$
$$14\,X_1 + 12\,X_2 + 15\,X_3 \leq 44$$
$$X_2 \leq 3 X_3 \leq 0 X_1 \geq 1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$
$$X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{Z}$$

Rjesavanjem linearnih relaksacija problema P1.1.1 i P1.1.2 (respektivno) imamo:

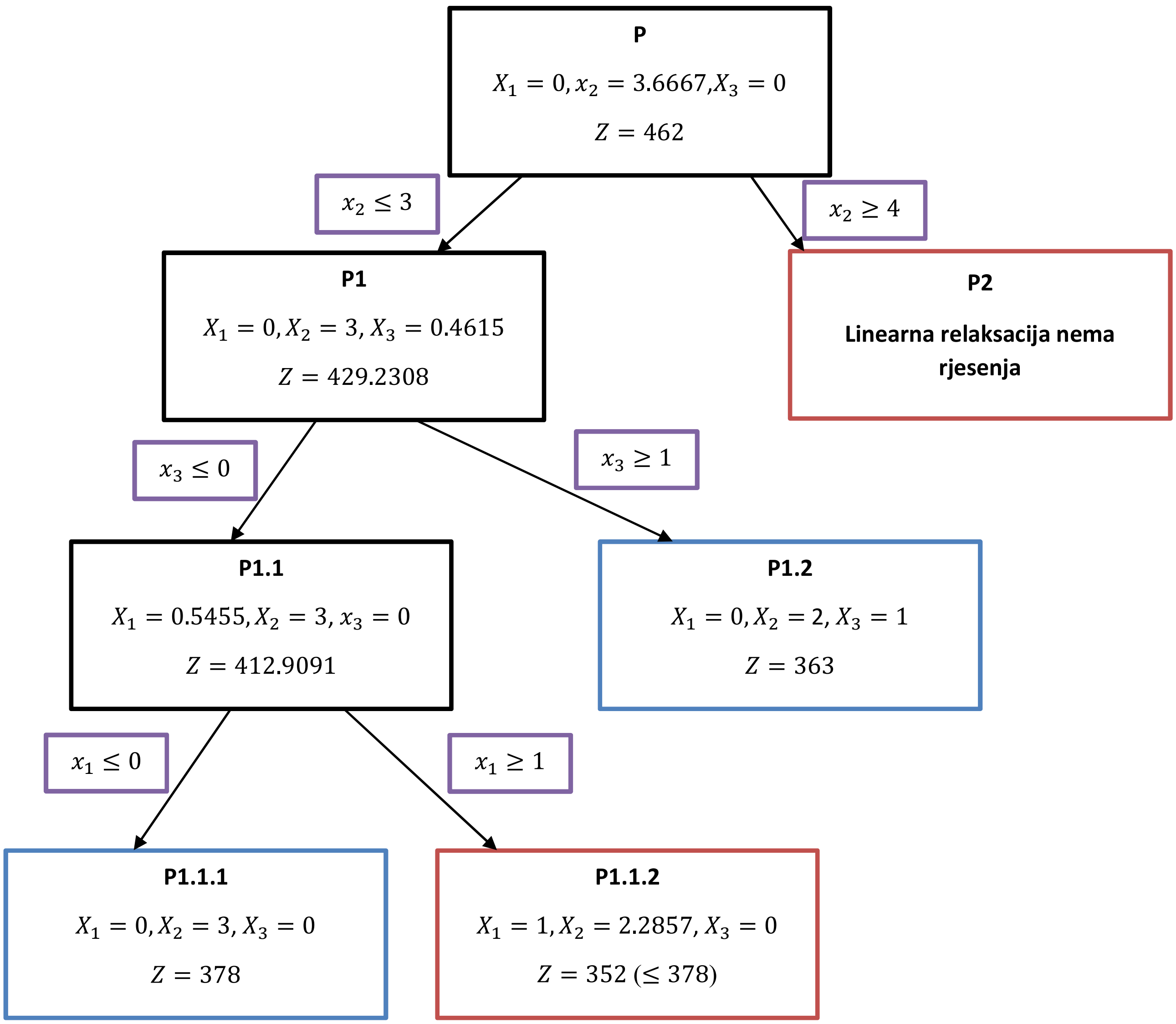
```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
[x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [0 0 0], [0 3 0]);
x
-z

Optimal solution found.


x =

     0
     3
     0


ans =

   378
```

```
>> a = [11 7 13; 14 12 15]; b = [27; 44]; c = [64 126 111];
[x, z] = linprog(-c, a, b, [], [], [1 0 0], [inf 3 0]);
x
-z

Optimal solution found.


x =

    1.0000
    2.2857
         0


ans =

  352.0000
```

Na lijevoj slici (P1.1.1) vidimo da je Z = 378 i x = [0 3 0]. Ovo predstavlja nase novo optimalno i dozvoljeno rjesenje. Na desnoj slici vidimo da P1.1.2 ima vrijednost Z = 352 sto je manja vrijednost nego nase trenutno optimalno rjesenje, shodno tome razmatranje dalje problema P1.1.2 nema smisla. Ovim je okoncan postupak rjesavanja pocetnog problema, i rjesenja su:

$$Z = 378$$
$$X_1 = 0, X_2 = 3, X_3 = 0$$

Citav postupak je dat sljedecim grafikom:



Zadatak 2 [1 poen]

Lopov je provalio u skladište u kojem se nalazi 4 komada proizvoda P_1 od kojih svaki teži 7 kg i vrijedi 50 KM, 3 komada proizvoda P_2 od kojih svaki teži 6 kg i vrijedi 44 KM, 4 komada proizvoda P_3 od kojih svaki teži 2 kg i vrijedi 39 KM, 3 komada proizvoda P_4 od kojih svaki teži 2 kg i vrijedi 30 KM i , 4 komada proizvoda P_5 od kojih svaki teži 7 kg i vrijedi 31 KM. , Lopov ima na raspolaganju ranac čija je ukupna nosivost 16 kg.

Odredite koliko komada svakog od proizvoda u skladištu lopov treba da ukrade da ostvari najveću zaradu, vodeći računa o maksimalnoj nosivosti ranca u koji mora staviti ukradene proizvode. Prvo formirajte matematički model ovog problema kao specijalni slučaj cjelobrojnog linearnog programiranja, a zatim riješite ovaj problem koristeći tehniku dinamičkog programiranja.

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u "`pdf`" formatu.

* Iz postavke imamo sljedece podatke:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Težina (w_i)	7	6	2	2	7
Cijena (c_i)	50	44	39	30	31
Količna (t_i)	4	3	4	3	4

Matematički model problema je dat:

$$arg \max Z = 50x_1 + 44x_2 + 39x_3 + 30x_4 + 31x_5$$

$$7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq 16$$

$$0 \leq x_1 \leq 4$$
$$0 \leq x_2 \leq 3$$
$$0 \leq x_3 \leq 4$$
$$0 \leq x_4 \leq 3$$
$$0 \leq x_5 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$$

Formirajmo sada Bellmanove jednacine za svih 5 iteracija:

$$z(v,0) = 0$$

$$z(v,1) = \max\left\{c_1x_1 + z(v - w_1x_1, 0)\middle| x_1 = 0, \dots, \min\left\{t_1, \left\lfloor\frac{v}{w_1}\right\rfloor\right\}\right\} =$$

$$\max\left\{50x_1 + z(v - 7x_1, 0)\middle| x_1 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{7}\right\rfloor\right\}\right\} =$$

$$\max\left\{50x_1 \middle| x_1 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{7}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$z(v,2) = \max\left\{c_2x_2 + z(v - w_2x_2, 1)\middle|x_2 = 0, \dots, \min\left\{t_2, \left\lfloor\frac{v}{w_2}\right\rfloor\right\}\right\} =$$

$$\max\left\{44x_2 + z(v - 6x_2, 1)\middle|x_2 = 0, \dots, \min\left\{3, \left\lfloor\frac{v}{6}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$z(v,3) = \max\left\{c_3x_3 + z(v - w_3x_3, 2)\middle|x_3 = 0, \dots, \min\left\{t_3, \left\lfloor\frac{v}{w_3}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$= \max\left\{39x_3 + z(v - 2x_3, 2)\middle|x_3 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$z(v,4) = \max\left\{c_4x_4 + z(v - w_4x_4, 3)\middle|x_4 = 0, \dots, \min\left\{t_4, \left\lfloor\frac{v}{w_4}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$= \max\left\{30x_4 + z(v - 2x_4, 3)\middle|x_4 = 0, \dots, \min\left\{3, \left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$z(v,5) = \max\left\{c_5x_5 + z(v - w_5x_5, 4)\middle|x_5 = 0, \dots, \min\left\{t_5, \left\lfloor\frac{v}{w_5}\right\rfloor\right\}\right\}$$

$$= \max\left\{31x_5 + z(v - 7x_5, 4)\middle|x_5 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{7}\right\rfloor\right\}\right\}$$

Krenimo sada sa iteracijama. Za i = 1, imamo:

$$z(v,1) = \max\left\{50x_1\middle|x_1 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{7}\right\rfloor\right\}\right\}$$

(v, x_1)	**50x_1**	**Z(v,1)**
(0,0)	0	0
(0,1)	0	0
(0,2)	0	0
(0,3)	0	0
(0,4)	0	0
(0,5)	0	0
(0,6)	0	0
(0,7),(1,0)	0,50	50
(0,8),(1,1)	0,50	50
(0,9),(1,2)	0,50	50
(0,10),(1,3)	0,50	50
(0,11),(1,4)	0,50	50
(0,12),(1,5)	0,50	50
(0,13),(1,6)	0,50	50
(0,14),(1,7),(2,0)	0,50,100	100
(0,15),(1,8),(2,1)	0,50,100	100
(0,16),(1,9),(2,2)	0,50,100	100

Zatim za slucaj i = 2 imamo:

$$z(v,2) = \max\left\{44x_2 + z(v - 6x_2, 1)\middle|x_2 = 0, \dots, \min\left\{3, \left\lfloor\frac{v}{6}\right\rfloor\right\}\right\}$$

v	$(x_2, v-6x_2)$	$44x_2 + z(v-6x_2, 1)$	Z(v,2)
0	(0,0)	0 + z(0,1) = 0	0
1	(0,1)	0 + z(1,1) = 0	0
2	(0,2)	0 + z(2,1) = 0	0
3	(0,3)	0 + z(3,1) = 0	0
4	(0,4)	0 + z(4,1) = 0	0
5	(0,5)	0 + z(5,1) = 0	0
6	(0,6), (1,0)	0, 44 + z(0, 1) = 44	44
7	(0,7), (1,1)	50, 44	50
8	(0,8), (1,2)	50, 44	50
9	(0,9),(1,3)	50, 44	50
10	(0,10),(1,4)	50, 44	50
11	(0,11),(1,5)	50, 44	50
12	(0,12), (1,6), (2,0)	50, 44, 88	88
13	(0,13), (1,7), (2,1)	50, 94, 88	94
14	(0,14), (1,8), (2,2)	100, 94, 88	100
15	(0,15), (1,9), (2,3)	100, 94, 88	100
16	(0,16), (1,10), (2,4)	100, 94, 88	100

Zatim za slucaj i = 3 imamo:

$$z(v,3) = \max\left\{39x_3 + z(v-2x_3, 2) \middle| x_3 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor\right\}\right\}$$

v	$(x_3, v-2x_3)$	$39x_3 + z(v-2x_3, 2)$	Z(v,3)
0	(0,0)	0	0
1	(0,1)	0	0
2	(0,2), (1,0)	0, 39	39
3	(0,3), (1,1)	0, 39	39
4	(0,4), (1,2), (2,0)	0, 39, 78	78
5	(0,5), (1,3), (2,1)	0, 39, 78	78
6	(0,6), (1,4),(2,2),(3,0)	44, 39, 78, 117	117
7	(0,7), (1,5), (2,3), (3,1)	50, 39, 78, 117	117
8	(0,8),(1,6),(2,4),(3,2),(4,0)	50, 83, 78, 117, 156	156
9	(0,9),(1,7),(2,5),(3,3),(4,1)	50, 89, 78, 117, 156	156
10	(0,10),(1,8),(2,6),(3,4),(4,2)	50, 89, 122, 117, 156	156
11	(0,11),(1,9),(2,7),(3,5),(4,3)	50, 89, 128, 117, 156	156
12	(0,12),(1,10),(2,8),(3,6),(4,4)	88, 89,128, 161, 156	161
13	(0,13),(1,11),(2,9),(3,7),(4,5)	94, 89, 128, 167, 156	167
14	(0,14),(1,12),(2,10),(3,8),(4,6)	100, 127, 128, 167, 200	200
15	(0,15),(1,13),(2,11),(3,9),(4,7)	100, 133, 128, 167, 206	206
16	(0,16),(1,14),(2,12),(3,10),(4,8)	100, 139, 166, 167, 206	206

Zatim za slucaj i = 4 imamo:

$$z(v,4) = \max\left\{30x_4 + z(v-2x_4, 3) \middle| x_4 = 0, \dots, \min\left\{3, \left\lfloor\frac{v}{2}\right\rfloor\right\}\right\}$$

v	$(x_4, v-2x_4)$	$30x_4 + z(v-2x_4, 3)$	Z(v,4)
0	(0,0)	0	0
1	(0,1)	0	0
2	(0,2), (1,0)	39, 30	39
3	(0,3), (1,1)	39, 30	39
4	(0,4), (1,2), (2,0)	78, 69, 60	78
5	(0,5), (1,3), (2,1)	78, 69, 60	78
6	(0,6),(1,4),(2,2),(3,0)	117, 108, 99, 90	117
7	(0,7),(1,5),(2,3),(3,1)	117, 108, 99, 90	117
8	(0,8),(1,6),(2,4),(3,2)	156, 147, 138, 129	156
9	(0,9),(1,7),(2,5),(3,3)	156, 147, 138, 129	156
10	(0,10),(1,8),(2,6),(3,4)	156, 186, 177, 168	186
11	(0,11),(1,9),(2,7),(3,5)	156, 186, 177, 168	186
12	(0,12),(1,10),(2,8),(3,6)	161, 186, 216, 207	216
13	(0,13),(1,11),(2,9),(3,7)	167, 186, 216, 207	216
14	(0,14),(1,12),(2,10),(3,8)	200, 191, 216, 246	246
15	(0,15),(1,13),(2,11),(3,9)	206, 197, 216, 246	246
16	(0,16),(1,14),(2,12),(3,10)	206, 230, 221, 246	246

Zatim za slucaj i = 5 imamo:

$$z(v,5) = \max\left\{31x_5 + z(v-7x_5, 4)\middle| x_5 = 0, \dots, \min\left\{4, \left\lfloor\frac{v}{7}\right\rfloor\right\}\right\}$$

v	$(x_5, v-7x_5)$	$31x_5 + z(v-7x_5, 4)$	Z(v,5)
0	(0,0)	0	0
1	(0,1)	0	0
2	(0,2)	39	39
3	(0,3)	39	39
4	(0,4)	78	78
5	(0,5)	78	78
6	(0,6)	117	117
7	(0,7),(1,0)	117, 31	117
8	(0,8),(1,1)	156, 31	156
9	(0,9),(1,2)	156, 70	156
10	(0,10),(1,3)	186, 70	186
11	(0,11),(1,4)	186, 109	186
12	(0,12),(1,5)	216, 109	216
13	(0,13),(1,6)	216, 148	216
14	(0,14),(1,7),(2,0)	246, 48, 62	246
15	(0,15),(1,8),(2,1)	246, 187, 62	246
16	(0,16),(1,9),(2,2)	246, 187, 101	246

Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi Z = 246. Za i=5 i v=16 maksimum je postignut za $x_5 = 0$ što ostavlja ranac neizmjenjenog kapaciteta. Zatim za i=4 i v=16 maksimum je postignut za $x_4 = 3$ pa se kapacitet slobodnog prostora smanjio na 10kg. Za i=3 i v=16 maksimum je postignut za $x_3 = 4$, pa se kapacitet slobodnog prostora smanjio na 2kg. Za i=2 i v=16 maksimum je postignut za $x_2 = 0$, sto znaci da ne uzimamo te predmete. Za i=1 i v=16, maksimum bi trebao biti za $x_1 = 2$, ali u rancu je ostalo 2kg, a tezina predmeta je veca u odnosu na slobodni prostor pa se predmet se ne uzima.

Na kraju imamo:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 3, x_5 = 0, \qquad Z = 246$$

Lopov treba da ukrade 4 predmeta x_3 i 3 predmeta x_4 da bi postigao maksimalnu zaradu, iako mu ostane u ruksaku slobodnog prostora 2kg.

Zadatak 3 [1 poen]

Na raspolaganju je 9 namirnica, koje redom imaju kalorične moći 145, 160, 105, 165, 285, 110, 115, 250 i 210 kalorija. Odredite koje je namirnice potrebno odabrati da bi se od njih napravio obrok čija je kalorična moć što je god moguće bliža željenom iznosu od 1225 kalorija, ali ni u kom slučaju više od toga. Prvo formirajte matematički model ovog problema kao specijalni slučaj cjelobrojnog linearnog programiranja, a zatim riješite ovaj problem koristeći tehniku dinamičkog programiranja.

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u "`pdf`" formatu.

* Receno je da se napravi automatizovano rjesenje, zato sto inicijalna postavka daje veliko ogranicenje. Shodno time formirajmo sljedeci matematicki model:

$$arg\max Z = 145x_1 + 160x_2 + 105x_3 + 165x_4 + 285x_5 + 110x_6 + 115x_7 + 250x_8 + 210x_9$$

$$145x_1 + 160x_2 + 105x_3 + 165x_4 + 285x_5 + 110x_6 + 115x_7 + 250x_8 + 210x_9 \leq 1225$$

$$x_1 \in \{0,1\}, x_2 \in \{0,1\}, x_3 \in \{0,1\},$$

$$x_4 \in \{0,1\}, x_5 \in \{0,1\}, x_6 \in \{0,1\},$$

$$x_7 \in \{0,1\}, x_8 \in \{0,1\}, x_9 \in \{0,1\}$$

Rekurzivna jednacina Bellmana raspisana po iteracijama glasi:

$$z(v,0) = 0$$

$$z(v,1) = \max\{z(v,0), c_1 + z(v - w_1, 0)\}$$
$$= \max\{0, 145 + z(v - 145{,}0)\} = 145\ (za\ v \geq 145, inace\ 0)$$

$$z(v,2) = \max\{z(v,1), c_2 + z(v - w_2, 1)\}$$
$$= \max\{z(v,1), 160 + z(v - 160{,}1)\}\ (za\ v \geq 160, inace\ z(v,1))$$

$$z(v,3) = \max\{z(v,2), c_3 + z(v - w_3, 2)\}$$
$$= \max\{z(v,2), 105 + z(v - 105{,}2)\}\ (za\ v \geq 105, inace\ z(v,2))$$

$$z(v,4) = \max\{z(v,3), c_4 + z(v - w_4, 3)\}$$
$$= \max\{z(v,3), 165 + z(v - 165{,}3)\}\ (za\ v \geq 165, inace\ z(v,3))$$

$$z(v,5) = \max\{z(v,4), c_5 + z(v - w_5, 4)\}$$
$$= \max\{z(v,4), 285 + z(v - 285{,}4)\}\ (za\ v \geq 285, inace\ z(v,4))$$

$$z(v,6) = \max \{z(v,5), c_6 + z(v - w_6, 5)\}$$
$$= \max \{z(v,5), 110 + z(v - 110,5)\} \; (za\ v \geq 110, inace\ z(v,5))$$

$$z(v,7) = \max \{z(v,6), c_7 + z(v - w_7, 6)\}$$
$$= \max \{z(v,6), 115 + z(v - 115,6)\} \; (za\ v \geq 115, inace\ z(v,6))$$

$$z(v,8) = \max \{z(v,7), c_8 + z(v - w_8, 7)\}$$
$$= \max \{z(v,7), 250 + z(v - 250,7)\} \; (za\ v \geq 250, inace\ z(v,7))$$

$$z(v,9) = \max \{z(v,8), c_9 + z(v - w_9, 8)\}$$
$$= \max \{z(v,8), 210 + z(v - 210,8)\} \; (za\ v \geq 210, inace\ z(v,8))$$

Dalje, za racunanje je napisan kod u matlabu (*treci.m* fajl), koji ce izracunati sve iteracije. Kod generise .txt fajl pod nazivom treci_tabela.txt i tu smjesta matricni rezultat iteracija. Takodjer je uradjen pronalazak optimalnog rjesenja, kao i koje namirnice treba uzeti. Kao rezultat tog koda dobija se sljedece rjesenje:

```
>> [Z, x] = treci()

Z =

        1225


x =

     1     1     1     1     1     0     1     1     0
```

Vidimo da dobijamo optimalno rjesenje Z = 1225, te da trebamo uzeti sve namirnice osim seste i devete namirnice da bi postigli optimalno rjesenje.

Postupak odredjivanja optimalnog rjesenja radimo tako da uzmemo prvo vrijednosti za i = 9 i v = 1225, i za tu vrijednost gledamo da li se uzela u prosloj iteraciji, ako jeste ne uzimamo tu namirnicu, ako nije uzimamo. Ukoliko se ne uzme namirnica velicina ruksaka (ogranicenje) se ne mijenja, a ukoliko uzmemo namirnicu, smanjujemo velicinu slobodnog prostra u ruksaku. Ovaj postupak ponavljamo sve dok velicina ruskaka ne postane 0, ili dok se ne predju sve iteracije. Ovaj postupak je implementiraj pri kraju. Prelaskom unazad kroz sve iteracije dobijamo rjesenje kao sto je prikazano na prethodnoj slici.

U nastavku je dat kod *treci.m* fajla (ujedno poslan kao prilog ove zadace):

```matlab
function [Z, x] = treci()
% Masovic Haris - Zadatak 3 - Domaca zadaca 1
% funkcija koja racuna 1225 redova, 9 kolona
% zadatak 3 sa zadace, pisano u 2017a, u slucaju nepoznatih poziva

% definisanje parametara iz postavke zadace
graniceV = [145 160 105 165 285 110 115 250 210];
ogranicenje = 1225;
brojPredmeta = 9;

% processing
% matrica koja pamtriz z(v, s)
matrica = zeros(ogranicenje, brojPredmeta);
% matrica koja pameti da li se za trenutni z(i,j) uzelo iz prethodne kolone
uzimanje = zeros(ogranicenje, brojPredmeta);

for i = 1 : 1 : ogranicenje
    for j = 1 : 1 : brojPredmeta
        granica = graniceV(1, j);
        if i >= granica
            if j == 1
                matrica(i, j) = graniceV(1, j);
                uzimanje(i, j) = 1;
            else
                offset = 0;
                if i - granica == 0
                    offset = 1;
                end
                prijasnja = granica + matrica(i - granica + offset , j - 1);

                if matrica(i, j - 1) > prijasnja
                    matrica(i, j) = matrica(i, j - 1);
                else
                    matrica(i, j) = prijasnja;
                    uzimanje(i, j) = 1;
                end
            end
        else
            % slucaj da nisu ispunjeni uslovi
            if i == 1 || j == 1
                matrica(i, j) = 0;
            else
                matrica(i, j) = matrica(i, j - 1);
            end
        end
    end
end

% ispis u fajl, u istom direktoriju
dlmwrite('treci_tabela.txt', matrica, 'delimiter', '\t');
% formiranje izlaza, ispis optimalnog rjesenja
Z = matrica(ogranicenje, brojPredmeta);
x = zeros(1, brojPredmeta);

for i = brojPredmeta : -1 : 1
    if ogranicenje > 0
        x(i) = uzimanje(ogranicenje, i);
        if x(i) == 1
            ogranicenje = ogranicenje - graniceV(1, i);
        end
    else
        break;
    end
end
end
```

Zadatak 4 [1 poen]

Primjenom dinamičkog programiranja, nađite put koji polazi iz donjeg lijevog ugla a završava u gornjem desnom uglu sljedeće matrice, a koji je takav da se isključivo smije kretati sa nekog polja za jedno mjesto nadesno ili nagore, i za koji je suma elemenata preko kojih put prolazi minimalna (u odnosu na sve druge takve puteve).

15	41	44	10	31	45	24	32	43	21	26
20	49	47	31	25	40	27	46	36	24	36
15	40	32	15	49	19	45	31	23	40	41
12	16	47	21	47	38	30	25	25	25	46

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u "`pdf`" formatu.

* Obzirom da je dozvoljeno kretanje samo nadesno ili nagore, svaki element matrice suma se moze dobiti kao element iz prethodne kolone uvecan za tezinu iz polazne matrice, ili kao element iz reda ispod uvećan za težinu iz polazne matrice na tom polju.

Dakle, ako označimo polaznu matricu sa A, njene elemente sa $a_{i,j}$ matricu suma sa S, a njene elemente $s_{i,j}$, onda se element matrice S na polju (i, j) može dobiti kao

$$s_{i,j} = \min\{ s_{i,j-1}, s_{i-1,j} \} + a_{i,j}$$

Koristeći se ovom formulom, dobijamo matricu suma S prikazanu u nastavku. Zeleno obojena polja su polja koja su uzeta za formiranje minimalnog puta.

<table>
<tr><td>62</td><td>-</td><td>103</td><td>-</td><td>147</td><td></td><td>152</td><td>-</td><td>183</td><td>-</td><td>228</td><td>-</td><td>252</td><td>-</td><td>284</td><td>-</td><td>327</td><td>-</td><td>348</td><td>-</td><td>374</td></tr>
<tr><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>47</td><td>-</td><td>96</td><td>-</td><td>143</td><td></td><td>142</td><td>-</td><td>167</td><td>-</td><td>207</td><td>-</td><td>234</td><td>-</td><td>280</td><td></td><td>314</td><td>-</td><td>338</td><td>-</td><td>374</td></tr>
<tr><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>27</td><td>-</td><td>67</td><td>-</td><td>99</td><td></td><td>111</td><td>-</td><td>160</td><td>-</td><td>179</td><td>-</td><td>224</td><td>-</td><td>255</td><td>-</td><td>278</td><td>-</td><td>318</td><td>-</td><td>359</td></tr>
<tr><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td>-</td><td>28</td><td>-</td><td>75</td><td>-</td><td>96</td><td>-</td><td>143</td><td>-</td><td>181</td><td>-</td><td>211</td><td>-</td><td>236</td><td>-</td><td>261</td><td>-</td><td>286</td><td>-</td><td>332</td></tr>
</table>

U prethodnoj tabeli je predstavljen najkraci put od donjeg lijevog ugla, do desnog gornjeg ugla.

Zadatak 5 [1 poen]

Dat je problem trgovačkog putnika sa 5 gradova, pri čemu su cijene putovanja između pojedinih gradova date u sljedećoj tablici:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	23	20	13	45
2	36	0	43	23	47
3	40	33	0	22	43
4	18	39	19	0	43
5	36	46	42	38	0

Riješite ovaj problem koristeći Held-Karpov algoritam. Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u "`pdf`" formatu.

* Da bi dobili sve moguce putanje koristit cemo sljedecu rekurzivnu formulu:

$$z(i,\Sigma) = \min\{c_{i,j} + z(j,\Sigma\backslash\{\text{j}\}) \mid j\epsilon\Sigma\}$$

Krenimo od početnih vrijednosti $z(i,\emptyset)$, koje iznose:

$$z(2,\emptyset) = c_{2,1} = 36$$

$$z(3,\emptyset) = c_{3,1} = 40$$

$$z(4,\emptyset) = c_{4,1} = 18$$

$$z(5,\emptyset) = c_{5,1} = 36$$

Sada treba izracunati vrijednost funkcije z i za jednoclane skupove. Za slucaj kada kada su skupovi samo jedan grad imamo:

$$z(i,\{\text{p}\}) = \min\{c_{i,j} + z(j,\{\text{p}\}\backslash\{\text{j}\}) \mid j\epsilon\{\text{p}\}\} = c_{i,p} + z(p,\emptyset)$$

Odnosno:

$$z(2,\{3\}) = c_{2,3} + z(3,\emptyset) = 43 + 40 = 83 \text{ (za j = 3)}$$

$$z(2,\{4\}) = c_{2,4} + z(4,\emptyset) = 23 + 18 = 41 \text{ (za j = 4)}$$

$$z(2,\{5\}) = c_{2,5} + z(5,\emptyset) = 47 + 36 = 83 \text{ (za j = 5)}$$

$$z(3,\{2\}) = c_{3,2} + z(2,\emptyset) = 33 + 36 = 69 \text{ (za j = 2)}$$

$$z(3,\{4\}) = c_{3,4} + z(4,\emptyset) = 22 + 18 = 40 \text{ (za j = 4)}$$

$$z(3,\{5\}) = c_{3,5} + z(5,\emptyset) = 43 + 36 = 79 \text{ (za j = 5)}$$

$$z(4,\{2\}) = c_{4,2} + z(2,\emptyset) = 39 + 36 = 75 \text{ (za j = 2)}$$

$$z(4,\{3\}) = c_{4,3} + z(3,\emptyset) = 19 + 40 = 59 \text{ (za j = 3)}$$

$$z(4,\{5\}) = c_{4,5} + z(5,\emptyset) = 43 + 36 = 79 \text{ (za j = 5)}$$

$$z(5,\{2\}) = c_{5,2} + z(2,\emptyset) = 46 + 36 = 82 \text{ (za j = 2)}$$

$$z(5,\{3\}) = c_{5,3} + z(3,\emptyset) = 42 + 40 = 82 \text{ (za j = 3)}$$

$$z(5,\{4\}) = c_{5,4} + z(4,\emptyset) = 38 + 18 = 56 \text{ (za j = 4)}$$

Sada treba izracunati vrijednost funkcije z i za dvoclane skupove. Za slucaj kada kada su skupovi neka od kombinacija dva grada imamo:

$$z(i,\{p,q\}) \ = \ min\left\{ c_{i,j} + z(j,\{p,q\}\backslash\{j\}) \middle| \ j \in \{p,q\}\right\} \ = \ min\,\{c_{i,p} + z(p,\{q\}), c_{i,q} + z(q,\{p\})\}$$

Odnosno:

$$z(2,\{3,4\}) \ = \min\{c_{2,3} + z(3,\{4\}), c_{2,4} + z\big(4,\{3\}\big\} = \min\{43 + 40, 23 + 59\} = 82 \ (za\ j = 4)$$

$$z(2,\{3,5\}) \ = \min\{c_{2,3} + z(3,\{5\}), c_{2,5} + c\big(5,\{3\}\big\} = \min\{43 + 79, 47 + 82\} = \ 122 \ (za\ j = 3)$$

$$z(2,\{4,5\}) \ = \min\{c_{2,4} + z(4,\{5\}), c_{2,5} + c\big(5,\{4\}\big\} = \min\{23 + 79, 47 + 56\} = \ 102 \ (za\ j = 4)$$

$$z(3,\{2,4\}) \ = \min\{c_{3,2} + z(2,\{4\}), c_{3,4} + z\big(4,\{2\}\big\} = \min\{33 + 41, 22 + 75\} = 74 \ (za\ j = 2)$$

$$z(3,\{2,5\}) \ = \min\{c_{3,2} + z(2,\{5\}), c_{3,5} + c\big(5,\{2\}\big\} = \min\{33 + 83, 43 + 82\} = 116 \ (za\ j = 2)$$

$$z(3,\{4,5\}) \ = \min\{c_{3,4} + z(4,\{5\}), c_{3,5} + c\big(5,\{4\}\big\} = \min\{22 + 79, 43 + 56\} = \ 99 \ (za\ j = 5)$$

$$z(4,\{2,3\}) \ = \min\{c_{4,2} + z(2,\{3\}), c_{4,3} + z\big(3,\{2\}\big\} = \min\{39 + 83, 19 + 69\} = 88 \ (za\ j = 3)$$

$$z(4,\{2,5\}) \ = \min\{c_{4,2} + z(2,\{5\}), c_{4,5} + c\big(5,\{2\}\big\} = \min\{39 + 83, 43 + 82\} = \ 122 \ (za\ j = 2)$$

$$z(4,\{3,5\}) \ = \min\{c_{4,3} + z(3,\{5\}), c_{4,5} + c\big(5,\{3\}\big\} = \min\{19 + 79, 43 + 82\} = \ 98 \ (za\ j = 3)$$

$$z(5,\{2,3\}) \ = \min\{c_{5,2} + z(2,\{3\}), c_{5,3} + z\big(3,\{2\}\big\} = \min\{46 + 83, 42 + 69\} = 111 \ (za\ j = 3)$$

$$z(5,\{2,4\}) \ = \min\{c_{5,2} + z(2,\{4\}), c_{5,4} + z\big(4,\{2\}\big\} = \min\{46 + 41{,}38 + 75\} = 87 \ (za\ j = 2)$$

$$z(5,\{3,4\}) \ = \min\{c_{5,3} + z(3,\{4\}), c_{5,4} + z\big(4,\{3\}\big\} = \min\{42 + 40{,}38 + 59\} = 82 \ (za\ j = 3)$$

Sada treba izracunati vrijednost funkcije z i za troclane skupove. Za slucaj kada kada su skupovi neka od kombinacija tri grada imamo:

$$z(i,\{p,q,r\}) \ = \ min\,\{c_{i,p} + z(p,\{q,r\}), c_{i,q} + z(q,\{p,r\}), c_{i,r} + z(r,\{p,q\})\}$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} z(2,\{3,4,5\}) &= \min\big\{c_{2,3} + z(3,\{4,5\}), c_{2,4} + z(4,\{3,5\}), c_{2,5} + z(5,\{3,4\})\ \big\} \\ &= \ \min\{43 + 99, 23 + 98{,}47 + 82\} = 121 \ (za\ j = 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(3,\{2,4,5\}) &= \min\big\{c_{3,2} + z(2,\{4,5\}), c_{3,4} + z(4,\{2,5\}), c_{3,5} + z(5,\{2,4\})\ \big\} \\ &= \ \min\{33 + 102, 22 + 122{,}43 + 87\} = 130 \ (za\ j = 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(4,\{2,3,5\}) &= \min\big\{c_{4,2} + z(2,\{3,5\}), c_{4,3} + z(3,\{2,5\}), c_{4,5} + z(5,\{2,3\})\ \big\} \\ &= \min\{39 + 122, 19 + 116{,}43 + 111\} = 135 \ (za\ j = 3) \end{aligned}$$

$$z(5,\{2,3,4\}) = \min\left\{c_{5,2} + z(2,\{3,4\}), c_{5,3} + z(3,\{2,4\}), c_{5,4} + z(4,\{2,3\})\ \right\}$$
$$= \ \min\{46 + 82, 42 + 74{,}38 + 88\} = 116\ (za\ j = 3)$$

Sada treba izracunati vrijednost funkcije z i za troclane skupove. Za slucaj kada kada su skupovi neka od kombinacija cetiri grada imamo:

$$z(i,\{p,q,r,s\}) = \ min\ \{c_{i,p} + z(p,\{q,r,s\}), c_{i,q} + z(q,\{p,r,s\}), c_{i,r} + z(r,\{p,q,s\}), c_{i,s} + z(s,\{p,q,r\})\}$$

Odnosno:

$$z(1,\{2,3,4,5\}) = \min\left\{c_{1,2} + z(2,\{3,4,5\}), c_{1,3} + z(3,\{2,4,5\}), c_{1,4} + z(4,\{2,3,5\}), c_{1,5} + z(5,\{2,3,4\})\right\} = \min\{23 + 121{,}20 + 130{,}13 + 135{,}45 + 135\} = 144\ (za\ j = 2)$$

Pri zadnjem racunu, minimum je postignut je za j=2 što znači da iz grada 1 prelazimo u grad 2 što nam ostavlja skup {3,4,5} kao skup neposjećenih gradova. Zatim dalje za z(2, {3,4,5}) je postignut za j = 4 odnosno idemo dalje u grad 4, a ostaje skup {3,5}. Dalje minimum za z(4,{3,5}) je postignut za grad 3, pa idemo u grad 3, a onda poslije idemo u grad 5, a iz njega se vracamo u grad 1. Finalno, optimalna tura je 1 → 2 → 4 → 3 → 5 → 1. Cijena ture (citajuci iz pocetne tabele) je 144.

$$Z = 23 + 23 + 19 + 43 + 36 = 144$$

Zadatak 6 [1 poen]

Pomoću dinamičkog programiranja, riješite problem planiranja proizvodnje u toku vremenskog perioda od 5 mjeseci, ukoliko su fiksni troškovi proizvodnje, jedinični troškovi proizvodnje, jedinični troškovi skladištenja, ugovorene isporuke, proizvodni kapaciteti i skladišni kapaciteti po mjesecima dati u sljedećoj tabeli, te ukoliko je poznato da na početku raspolažemo zalihama od 3 komada razmatranog proizvoda i zahtijeva se da na kraju razmatranog perioda u skladištu ostanu zalihe od 2 komada tog proizvoda:

Interval:	1	2	3	4	5
Fiksni troškovi proizvodnje (F_i) [KM]:	1905	1510	1815	1515	1960
Jedinični troškovi proizvodnje (a_i) [KM/kom.]:	135	120	50	130	130
Jedinični troškovi skladištenja (b_i) [KM/kom.]:	6	9	10	7	8
Ugovorene isporuke (q_i) [kom.]:	7	6	7	8	5
Proizvodni kapaciteti (K_i) [kom.]:	7	6	9	6	9
Skladišni kapaciteti (S_i) [kom.]:	4	6	5	3	-

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u "`pdf`" formatu.

* Racunamo prvo z(1,s). Racunanje treba obaviti za vrijednosti s u opsegu

$$0 \leq \mathrm{s} \leq \min \left\{\mathrm{S}_1, \mathrm{s}_5 + \sum_{\mathrm{k}=2}^{5} \mathrm{q}_\mathrm{k}\right\} = \min\{4,2 + (6 + 7 + 8 + 5)\} = 4$$

Imamo:

$$z(1, s) = c_1(s + q_1 - s_0, s) = c_1(s + 4, s) = F_1 + a_1(s + 4) + b_1 s$$
$$= 1905 + 135(s + 4) + 6s = 2445 + 141s \ (s + 4 \neq 0 \ za \ s \geq 0)$$

Odavde slijedi ($x_1 = s + q_1 - s_0 = s + 4$)

$$z(1,0) = 2445 + 141 * 0 = 2445 \ (za \ x_1 = 4)$$

$$z(1,1) = 2445 + 141 * 1 = 2586 \ (za \ x_1 = 5)$$

$$z(1,2) = 2445 + 141 * 2 = 2727 \ (za \ x_1 = 6)$$

$$z(1,3) = 2445 + 141 * 3 = 2868 \ (za \ x_1 = 7)$$

$$z(1,4) = 2445 + 141 * 4 = 3009 \ (za \ x_1 = 8)$$

U sljedecoj iteraciji treba racunati vrijednosti z(2,s), pri cemu se racunanje treba za vrijenosti s u opsegu

$$0 \leq \mathrm{s} \leq \min\left\{\mathrm{S}_2, \mathrm{s}_5 + \sum_{\mathrm{k}=3}^{5} \mathrm{q}_\mathrm{k}\right\} = \min\{6{,}2 + (7+8+5)\} = 6$$

Pri tome se vrijednosti z(2,s) racunaju po formuli

$$z(2,s) = \min\{c_2(x_2,s) + z(1, s + q_2 - x_2) \mid \max\{0, s + q_2 - S_1\} \leq x_2 \leq \min\{K_2, s + q_2\}\}$$

$$= \min\{c_2(x_2,s) + z(1, s + 6 - x_2) \mid \max\{0, s+2\} \leq x_2 \leq \min\{6, s+6\}\}$$

$$= \min\{c_2(x_2,s) + z(1, s + 6 - x_2) \mid s + 2 \leq x_2 \leq 6\}$$

Dalje imamo:

$$c_2(x,s) = \begin{cases} F_2 + a_2x_2 + b_2s \; za \; x_2 \neq 0 \\ b_2s \; za \; x_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1510 + 120x_2 + 9s \; za \; x_2 \neq 0 \\ 9s \; za \; x_2 = 0 \end{cases}$$

Odnosno:

S	x_2	$c_2(s,x_2)$	0	1	2	3	4	$s+6-x_2$
			2445	2586	2727	2868	3009	$z(1, s+6-x_2)$
0	2	1750					4759	
	3	1870				4738		
	4	1990			4717			
	5	2110		4696				
	6	2230	4675					
1	3	1879					4888	
	4	1999				4867		
	5	2110			4837			
	6	2239		4825				
2	4	2008					5017	
	5	2119				4987		
	6	2248			4975			
3	5	2128					5137	
	6	2257				5125		
4	6	2266					5275	

U sljedecoj iteraciji treba racunati vrijednosti z(3,s), pri cemu se racunanje treba za vrijenosti s u opsegu

$$0 \leq \mathrm{s} \leq \min\left\{\mathrm{S}_3, \mathrm{s}_5 + \sum_{\mathrm{k}=4}^{5} \mathrm{q}_\mathrm{k}\right\} = \min\{5{,}2 + (8+5)\} = 5$$

Pri tome se vrijednosti z(3,s) racunaju po formuli

$$z(3,s) = \min\{c_3(x_3,s) + z(2, s+q_3-x_3) \mid \max\{0, s+q_3-S_2\} \le x_3 \le \min\{K_3, s+q_3\}\}$$

$$= \min\{c_3(x_3,s) + z(2, s+7-x_3) \mid \max\{0, s+1\} \le x_3 \le \min\{9, s+7\}\}$$

$$= \min\{c_3(x_3,s) + z(2, s+7-x_3) \mid s+1 \le x_3 \le \min\{9, s+7\}\}$$

Dalje imamo:

$$c_3(x,s) = \begin{cases} F_3 + a_3x_3 + b_3s \; za \; x_3 \neq 0 \\ b_3s \; za \; x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1815 + 50x_3 + 10s \; za \; x_3 \neq 0 \\ 10s \; za \; x_3 = 0 \end{cases}$$

Odnosno:

S	x_3	$c_3(s,x_3)$	0	1	2	3	4	$s+7-x_3$
			4675	4825	4975	5125	5275	z(2, $s+7-x_3$)
	1	1865						
	2	1915						
	3	1965					7240	
0	4	2015				7140		
	5	2065			7040			
	6	2115		6940				
	7	2165	6840					
	2	1925						
	3	1975						
	4	2025					7300	
1	5	2075				7200		
	6	2125			7100			
	7	2175		7000				
	8	2225	6900					
	3	1985						
	4	2035						
2	5	2085					7360	
	6	2135				7260		
	7	2185			7160			

	8	2235		7060			
	9	2285	6960				
3	4	2045					
	5	2095					
	6	2145					7420
	7	2195				7320	
	8	2245			7220		
	9	2295		7120			
4	5	2105					
	6	2155					
	7	2205					7480
	8	2255				7380	
	9	2305			7280		
5	6	2165					
	7	2215					
	8	2265					7540
	9	2315				7440	

U sljedecoj iteraciji treba racunati vrijednosti z(4,s), pri cemu se racunanje treba za vrijenosti s u opsegu

$$0 \leq \mathrm{s} \leq \min \left\{ \mathrm{S}_4, \mathrm{s}_5 + \sum_{\mathrm{k}=5}^{5} \mathrm{q}_\mathrm{k} \right\} = \min\{3{,}2 + 5\} = 3$$

Pri tome se vrijednosti z(4,s) racunaju po formuli

$$z(4,s) = \min\{c_4(x_4,s) + z(3, s + q_4 - x_4) \mid \max\{0, s + q_4 - S_3\} \leq x_4 \leq \min\{K_4, s + q_4\}\}$$

$$= \min\{c_4(x_4,s) + z(3, s + 8 - x_4) \mid \max\{0, s + 3\} \leq x_4 \leq \min\{6, s + 8\}\}$$

$$= \min\{c_4(x_4,s) + z(3, s + 8 - x_4) \mid s + 3 \leq x_4 \leq 6\}$$

Dalje imamo:

$$c_4(x,s) = \begin{cases} F_4 + a_4x_4 + b_4s \ za \ x_4 \neq 0 \\ b_4s \ za \ x_4 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1515 + 130x_4 + 7s \ za \ x_4 \neq 0 \\ 7s \ za \ x_4 = 0 \end{cases}$$

Odnosno:

S	x_4	$c_4(s,x_4)$	0	1	2	3	4	5
			6840	6900	6960	7120	7280	7440
0	3	1905						9345
	4	2035					9315	
	5	2165				9285		
	6	2295			**9255**			
1	4	2042						9482
	5	2172					9452	
	6	2302				**9422**		
2	5	2179						9619
	6	2309					**9589**	
3	6	2316						**9756**

$s+8-x_3$
$z(3, s+8-x_3)$

U sljedecoj iteraciji treba racunati vrijednosti z(5,2):

$$z(5,2) = \min\{c_5(x_5,2) + z(4, 2 + q_5 - x_5) \mid \max\{0, 2 + q_5 - S_4\} \leq x_5 \leq \min\{K_5, 2+5\}\}$$

$$= \min\{c_5(x_5,2) + z(4, 7 - x_5) \mid \max\{0, 4\} \leq x_5 \leq \min\{9, 7\}\}$$

$$= \min\{c_5(x_5,2) + z(4, 7 - x_5) \mid 4 \leq x_5 \leq 7\}$$

Dalje imamo:

$$c_5(x,s) = \begin{cases} F_5 + a_5 x_5 + b_5 s \ za\ x_5 \neq 0 \\ b_5 s \ za\ x_5 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1960 + 130x_5 + 8s \ za\ x_5 \neq 0 \\ 8s \ za\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Odnosno:

S	x_5	$c_5(s,x_5)$	0	1	2	3
			9255	9422	9589	9756
2	4	2496				12252
	5	2626			12215	
	6	2756		12178		
	7	2886	**12141**			

$7 - x_5$
$z(4, 7 - x_5)$

Minimalni troskovi Z(5,2)=12141, $x_5 = 7$. Zalihe na kraju cetvrtog mjeseca $s_4 = s_5 + q_5 - x_5 = 0$. Minimum pri trazenju Z(4,0)=9255, $x_4 = 6$. Zalihe na kraju treceg mjeseca

$s_3 = s_4 + q_4 - x_4 = 2$. Minimum pri trazenju Z(3,2)=6960, $x_3 = 9$. Zalihe na kraju drugog mjeseca $s_2 = s_3 + q_3 - x_3 = 0$. Minimum pri trazenju Z(2,0)=4675, $x_2 = 6$. Zalihe na kraju prvog mjeseca $s_1 = 0$. I na kraju Z(1,0)=2445, $x_1 = 4$. Finalno imamo:

$$Z = 12141$$

$$x_1 = 4, x_2 = 6, x_3 = 9, x_4 = 6, x_5 = 7, s_0 = 3, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 2, s_4 = 0, s_5 = 2$$

Zadatak 7 [1 poen]

Napravite funkciju u MatLab-u za rješavanje problema raspoređivanja resursa primjenom dinamičkog programiranja (Bellmanovog algoritma). Funkcija treba da ima sintaksu [Z,X] = resursi(Q,F); gdje je `Q` količina resursa koje treba rasporediti, a `F` vektor koji se sastoji od *n* stringova pri čemu *i*-ti string opisuje funkciju koja govori koliko iznosi dobit od ulaganja *x* jedinica resursa *i*-tom subjektu. Kao rezultat se dobija optimalna dobit `Z`, kao i vektor `X` koji opisuje koliko resursa treba rasporediti pojedinim subjektima. Na primjer, ukoliko se izvrši sljedeća naredba:

```
[Z,X] = resursi(5,{'5*x','8*x-0.5*x*x','10.8*x-0.6*x*x'})
```

na ekranu treba da se ispiše sljedeće (primjer sa predavanja):

```
Z =
      41.1

X =
      0      2      3
```

Potrebno je da predate MATLAB kod za funkciju "`resursi`" (sve mora biti u jednom M-fajlu, tako da ukoliko su Vam potrebne pomoćne funkcije, trebate ih pisati unutar istog M-fajla kao i glavnu funkciju), kao i kratki izvještaj koji opisuje kako ste implementirali ovu funkciju, te rezultate testiranja. Izvještaj treba biti u "`pdf`" formatu.

* Treba napomenuti da inicijalna postavka ima gresku, te da rezultat mora biti x = [0 1 4]. Testiranjem primjera iz postavke imamo:

```
>> [Z,X] = resursi(5,{'5*x','8*x-0.5*x*x','10.8*x-0.6*x*x'})

Z =

   41.1000


X =

     0     1     4
```

Trazeni *resursi.m* fajl je poslan kao prilog ove zadace, te je u nastavku je dat kod za *resursi.m* fajl, te je dato objasnjenje kao kratki izvjestaj, prateci *flow* koda, u vidu komentara unutar fajla:

```
function [Z, X] = resursi(Q, F)
% Zadatak 7 - Masovic Haris
% Domaca zadaca 1 - 1689/17993

% Q predstavlja kolicinu resura koja se treba raspod
% F je vektor funkcija, pri cemu svaka funkcija govori koliko je dobit od
% ulaganja x jedinica za i-ti subjekt
% kao rezultat vracamo Z optimalno i vektor x-ova koji govori koliko
% resursa treba dati pojedinacnim subjektima

zIteracije = zeros(1, Q + 1); % inicijaliziranje z na 1xQ+1 matricu nula
brojSubjekata = size(F, 2); % broj subjekata za raspodjelu resursa
% pamcenje za svakog subjekta kolicinu uzetog resursa
kolicineSubjekata = [];

% uzorom na pseudo kod iz predavanja, vrtimo petlju po broju subjekata
for i = 1 : brojSubjekata
    % na osnovu vektora funkcija, uzima se funkcija i pravi se
    % anonimna funkcija u matlabu sa parametrom x za svakog subjekta
    string = strjoin(F(i));
    anonFunction = strcat('@(x)', string);
    cFunction = str2func(anonFunction); % funkcija koja prima x kao param
    for q = Q : -1 : 1
        % prolazimo dalje kroz sve resurse, i gledamo da nadjemo max efekat
        % za i subjekata i kolicinu resursa q
        for x = 1 : q
            value = cFunction(x);
            newValue = value + zIteracije(q - x + 1); % racunanje u
            % trazi se max z, i pamti se vrijednost z i kolicina x
            if newValue > zIteracije(q + 1)
                zIteracije(q + 1) = newValue;
                kolicineSubjekata(i, q + 1) = x;
            end
        end
    end
end
Z = zIteracije(Q + 1);
% uzimamo optimalno Z sa zadnje pozicije i nakon toga vrsimo preraspodjelu
% resursa, tako sto idemo od n do 1 sve dok Q ne postane 0
for i = brojSubjekata : -1 : 1
    if Q ~= 0
        % dodjeljujemo x(i) resurs ka i-tom subjektu i skidamo sa Q
        X(i) = kolicineSubjekata(i, Q + 1);
        Q = Q - X(i);
    else
        break;
    end
end
end
```