

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DA RIGIDEZ DIRETA PARA UMA TRELIÇA ESPACIAL

## *APPLICATION OF THE DIRECT STIFFNESS METHOD TO A SPATIAL LATTICE*

Danilo Caetano Nunes<sup>1</sup>  
Gregório Sandro Vieira<sup>2</sup>

### **Resumo**

Esse trabalho buscou aplicar o Método da Rigidez Direta a uma estrutura reticulada espacial, com o intuito de calcular suas reações de apoio quando aplicada uma força externa. A escolha da aplicação de tal método se dá pelo fato de ser um método muito utilizado em programas computacionais comerciais de cálculo, e pelo fato de, apesar de tamanha importância demonstrada por esse método, não ser um tema apresentado profundamente durante a graduação em engenharia civil. Definiu-se a estrutura como sendo um tetraedro regular com três nós apoiados e um nó livre onde foi aplicada a força externa. Calculou-se a matriz de rigidez global da estrutura e os vetores de forças e de deslocamentos. Através da multiplicação dessas matrizes, encontrou-se os valores das incógnitas dos deslocamentos e das forças. Para os cálculos matriciais do trabalho foram utilizados os programas computacionais *Matlab* e *Excel*, e para a conferência dos resultados foi utilizado o programa computacional *STRAP*. Os resultados encontrados foram satisfatoriamente próximos ao encontrado pelo *STRAP*, validando a aplicação do Método da Rigidez Direta para essa estrutura reticulada.

**Palavras chave:** Método da rigidez direta, Matriz de rigidez, Treliza espacial.

### **Abstract**

This work aimed to apply the Direct Stiffness Method to a spatial lattice structure, in order to calculate its support reactions when an external force is applied. The choice of the application of such method is due to the fact that it is a method widely used in commercial computational programs, and the fact that, despite the importance of this method, it is not a topic presented deeply during the undergraduate degree in civil engineering. The structure was defined as a regular tetrahedron with three supported knots and a free knot where the external force was applied. The overall stiffness matrix of the structure and the vectors of force and displacements were constructed. Through the multiplication of these matrices, the unknown values of displacements and forces were found. For the work matrix calculations, the Matlab and Excel computer programs were used, and for the conference of the results the STRAP computer program was used. The results were satisfactorily close to those found by STRAP, validating the application of the Direct Stiffness Method for this lattice structure.

**Keywords:** Direct stiffness method, Stiffness matrix, Spatial lattice.

(1) Acadêmico, Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia

(2) Professor Doutor, Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia

# 1. INTRODUÇÃO

Uma das áreas mais importantes dentro da engenharia civil é a área de cálculo estrutural. Tal área é de suma importância não apenas no campo da engenharia, mas como para a sociedade como um todo, por ser ela a responsável por garantir a construção segura de qualquer edificação. A estrutura é responsável por resistir aos esforços externos e transmiti-los ao solo, sendo durável e garantindo conforto ao usuário. Este trabalho está direcionado para o cálculo estrutural fazendo uso de um método específico, o Método da Rigidez Direta (MRD).

O método da rigidez direta é oriundo do campo da aeronáutica, onde durante o período entre a Primeira Guerra Mundial (1914-1918) e a Segunda Guerra Mundial (1939-1945), grandes potências econômicas, como Estados Unidos, Inglaterra e Alemanha, realizavam experimentos buscando desenvolver aviões mais velozes e com menores coeficientes de empuxo. (FELLIPA, 2000).

Apenas em 1959 é que foi realmente apresentado o primeiro trabalho sobre o Método da Rigidez Direta, na Alemanha, por um pesquisador que trabalhava na Boeing. A partir desse artigo, e por esse método se mostrar simples, de fácil aplicação e formulação elegante, a rigidez direta conquistou vários engenheiros e contribuiu bastante para o aprimoramento do Método dos Elementos Finitos (SORIANO, 2009).

O método utiliza como incógnitas primárias os deslocamentos escolhidos, que são os graus de liberdade da estrutura, sendo dessa maneira uma ramificação mais aprofundada do Método dos Deslocamentos que, segundo Martha (2010) é um dos métodos clássicos, juntamente com o Método das Forças (ou da Flexibilidade), sendo o segundo, porém menos utilizado em programas de cálculo devido a necessidade de intervenção humana ao longo do cálculo. No caso do Método das Forças as incógnitas são esforços oriundos da liberação de restrições de uma estrutura hiperestática de modo a torna-la isostática (SORIANO, 2005).

A formulação desse método é feita levando em consideração o equilíbrio de cada nó, de forma que os deslocamentos dos nós da estrutura são as suas incógnitas. A formulação algébrica compacta do método segue conforme mostrado na equação 1.

$$K \times D = F \quad (1)$$

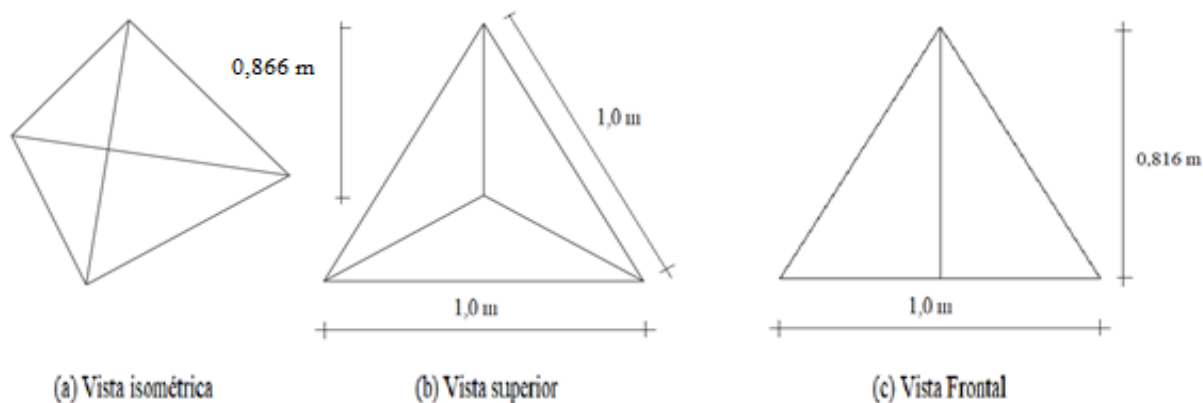
Onde K é a matriz de rigidez da estrutura, F o vetor de cargas nodais e D o vetor de deslocamentos nodais.

## 2. METODOLOGIA

Buscando-se calcular as reações de apoio de uma treliça espacial optou-se pelo uso do Método da Rigidez Direta.

Para poder utilizar o método, primeiramente fez-se necessária a idealização de uma estrutura reticulada na forma de uma treliça espacial, seus apoios e forças aplicadas. Tal idealização resultou em um tetraedro regular, composto por 6 barras, sendo todas de 1,0 metro de comprimento (Figura 1). Além da geometria da estrutura, foram definidos também as características da seção transversal das barras. O material escolhido para as barras da treliça foi o aço, que apresenta um módulo de elasticidade igual a 210 GPa. A seção transversal definida foi a de tubo industrial metálico, com dimensão de  $\frac{1}{2}$ ", ou 12,7 mm, e espessura de 0,90 mm, chegando-se assim a uma área de  $3,34 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ .

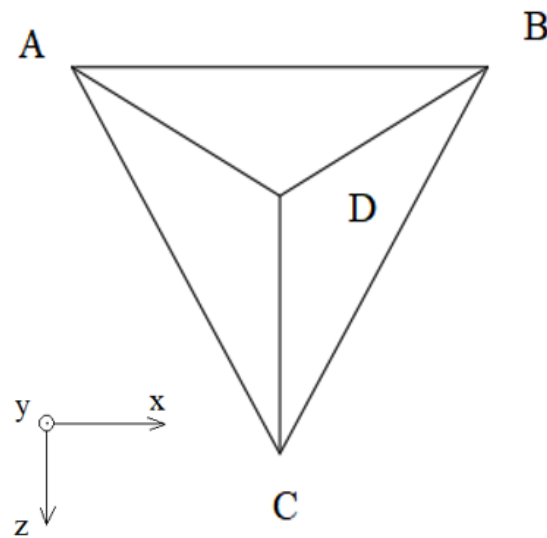
Figura 1 - Vistas da estrutura espacial



Fonte: Autor (2019)

Foi definido um sistema global de coordenadas onde o ponto inicial (0,0,0) foi nomeado como sendo no nó A da estrutura. Cada nó da estrutura foi nomeado com uma letra maiúscula, onde o primeiro nó foi o A, e o último o D (Figura 2). Dessa forma as barras foram nomeadas a partir dos seus nós inicial e final.

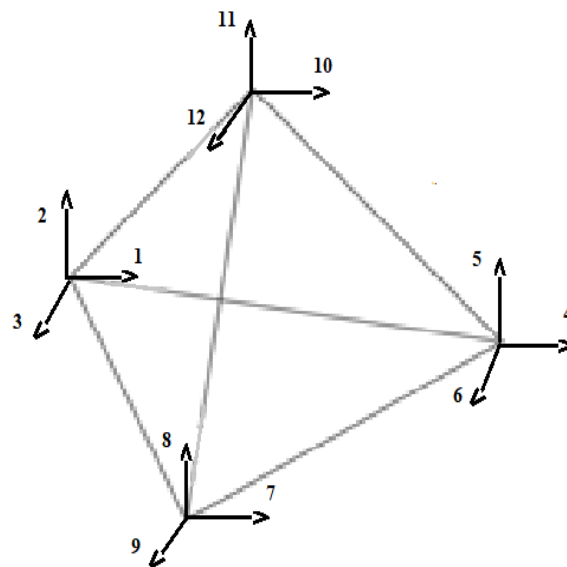
Figura 2 - Nomenclatura dos nós da estrutura



Fonte: Autor (2019)

Para cada nó foram definidos três vetores que representam o sistema de coordenadas global daquele ponto. Esses vetores foram numerados de 1 a 12, iniciando-se pelo nó A (Figura 3).

Figura 3 - Indicadores do posicionamento global de cada nó



Fonte: Druzian (2015)

A partir da localização global dos nós de cada barra, foi calculado os cossenos formados entre as barras da estrutura e o sistema de coordenadas global de modo que foi possível construir a Matriz de Rigidez de cada barra da estrutura ( $K_{ij}$ ).

A Matriz de Rigidez foi montada a partir do modelo genérico, apresentado para uma barra  $ij$ , mostrado na equação 2 a seguir.

$$K_{ij} = \frac{E \times A}{L} \times \begin{bmatrix} \cos^2\theta_x & \cos\theta_x \times \cos\theta_y & \cos\theta_x \times \cos\theta_z & \dots \\ \cos\theta_y \times \cos\theta_x & \cos^2\theta_y & \theta \cos\theta_y \times \cos\theta_z & \dots \\ \cos\theta_z \times \cos\theta_x & \cos\theta_z \times \cos\theta_y & \cos^2\theta_z & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2)$$

Onde:

$E$  = Módulo de elasticidade do aço = 210 GPa;

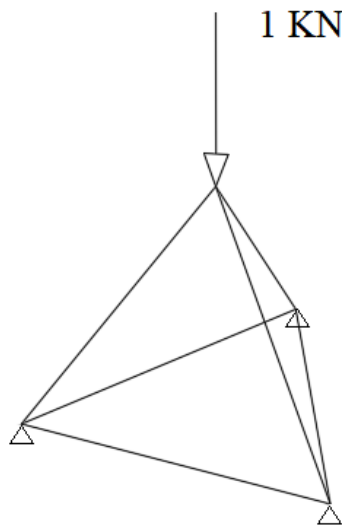
$A$  = Área da seção transversal da barra =  $3,34 \times 10^{-5} \text{ m}^2$

$L$  = Comprimento da barra = 1,0 m;

Utilizando-se os programas computacionais *Matlab* e *Excel* para auxiliar nos cálculos matriciais, obteve-se as matrizes de rigidez de cada barra. Feito isso, foi necessário construir a matriz de rigidez global da estrutura, fazendo-se a projeção de cada  $K_{ij}$  no sistema global de coordenadas, de forma a se obter uma matriz de 12 linhas por 12 colunas, representando cada um dos índices de cada nó da estrutura. Para a construção da matriz de rigidez da estrutura fez-se a sobreposição das matrizes de cada barra, somando os elementos que apresentavam os mesmos índices, formando-se assim uma matriz simétrica.

Com a Matriz de Rigidez finalizada, definiu-se os vetores de Forças e de Deslocamentos, ambos com 12 linhas. Para a construção do vetor de forças foi definido que nos nós A, B e C seriam apoiados e com restrição de translação nas três direções (X;Y;Z), porém mantendo a rotação livre, assim sendo, nesses pontos teríamos uma força desconhecida – incógnitas – em cada uma das direções, forças essas que seriam as responsáveis de impedir a translação da estrutura. Quanto a forças externas aplicadas à estrutura foi definida apenas uma força unitária no ponto D (0,5; 0,816; 0,289), que é o ponto central da estrutura (Figura 4).

Figura 4 - Forças aplicadas para o cálculo das reações de apoio da estrutura



Fonte: Autor (2019)

O vetor de forças  $\{F\}$  foi construído utilizando-se de incógnitas nas linhas que representavam os pontos onde se localizavam os apoios da estrutura. As linhas, que representavam os pontos onde foi aplicada a força externa, foram preenchidas com o módulo dessa força, e as demais linhas foram preenchidas com zeros, assumindo que não existiam outras forças agindo na estrutura.

O vetor de deslocamentos  $\{D\}$  foi construído de forma similar, nos pontos que representavam os apoios os deslocamentos foram considerados como zero, uma vez que a função dos apoios é a de impedir deslocamentos nesses pontos. Os demais pontos foram preenchidos com incógnitas.

Com a matriz de rigidez global da estrutura construída foi necessário realizar algumas intervenções para facilitar o cálculo. As linhas e as colunas que representavam, na matriz  $K$ , as linhas do vetor  $F$  onde existiam as forças desconhecidas – ou as reações de apoio – foram deslocadas para o final da matriz, da mesma forma aconteceu no vetor de deslocamentos. Sendo assim a matriz  $K$  ficou dividida em 4 partes (Figura 5).

Figura 5 - F, K e D após a manipulação matricial

F conhecido	K11		K12	Deflexão desconhecida
	K21		K22	
F desconhecido				Deflexão = 0

Fonte: Autor (2019)

Para o cálculo dos deslocamentos desconhecidos fez-se necessário utilizar a submatriz  $K_{11}$ . Fez  $[K_{11}]^{-1}$  e então aplicou-se a equação 3, utilizando apenas as mesmas linhas e colunas de  $\{F\}$  e  $\{D\}$  que se referem ao  $K_{11}$ .

$$\{D\} = [K_{11}^{-1}] \times \{F\} \quad (3)$$

Como os valores de  $\{F\}$  que foram utilizados eram todos conhecidos, obteve-se com essa operação os valores das deflexões que eram incógnitas.

Para o cálculo das incógnitas do vetor  $\{F\}$  utilizou-se a submatriz  $K_{21}$  e os valores dos deslocamentos encontrados acima, aplicados na equação 4.

$$\{F\} = [K_{21}] \times \{D\} \quad (4)$$

Após finalizados os cálculos e encontradas as reações de apoio da estrutura fazendo-se a aplicação do Método da Rigidez Direta, optou-se por verificar a confiabilidade dos resultados modelando a estrutura no programa computacional de cálculo estrutural *STRAP*. Foram definidas as mesmas propriedades intrínsecas da estrutura, mesmo arranjo e a mesma situação de cálculo.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como foi explicado na seção anterior, a primeira etapa do cálculo foi construir a matriz de rigidez de cada barra. Com essas matrizes prontas fez-se a sobreposição delas,

somando-se os elementos que apresentam os mesmos índices, construindo assim a matriz de rigidez global da estrutura (Figura 6).

Figura 6 - Matriz de rigidez global da estrutura

3,346	0,910	1,288	-2,230	0,000	0,000	-0,558	0,000	-0,966	-0,558	-0,910	-0,322
0,910	1,486	0,526	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,910	-1,486	-0,526
1,288	0,526	1,859	0,000	0,000	0,000	-0,966	0,000	-1,673	-0,322	-0,526	-0,186
-2,230	0,000	0,000	3,346	-0,911	-1,288	-0,558	0,000	0,966	-0,558	0,911	0,323
0,000	0,000	0,000	-0,911	1,486	0,526	0,000	0,000	0,000	0,911	-1,486	-0,526
0,000	0,000	0,000	-1,288	0,526	1,859	0,966	0,000	-1,673	0,323	-0,526	-0,186
-0,558	0,000	-0,966	-0,558	0,000	0,966	1,115	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,488	-1,052	0,000	-1,488	1,052
-0,966	0,000	-1,673	0,966	0,000	-1,673	0,000	-1,052	4,089	0,000	1,052	-0,744
-0,558	-0,910	-0,322	-0,558	0,911	0,323	0,000	0,000	0,000	1,116	0,000	0,000
-0,910	-1,486	-0,526	0,911	-1,486	-0,526	0,000	-1,488	1,052	0,000	4,460	0,001
-0,322	-0,526	-0,186	0,323	-0,526	-0,186	0,000	1,052	-0,744	0,000	0,001	1,117

Fonte: Autor (2019)

Foi calculado, finalmente, as incógnitas do vetor  $\{F\}$  que representam as reações de apoio da estrutura. As forças calculadas através do MRD, bem como os valores obtidos pelo *STRAP* encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Forças calculadas (KN)

Força	MRD	STRAP
FxA	0,20	0,19
FyA	0,33	0,33
FzA	0,12	0,11
FxB	-0,20	-0,19
FyB	0,33	0,33
FzB	0,12	0,11
FxC	0	0
FyC	0,33	0,33
FzC	-0,24	-0,22

Fonte: Autor (2019)



Pode-se verificar, pelos resultados obtidos, a validade do Método da Rigidez direta, uma vez que os resultados obtidos pela aplicação do método ficaram muito próximos dos obtidos através do programa comercial de cálculo *STRAP*. Entre as razões pelos resultados terem essa pequena diferença pode-se citar os erros causados pelo arredondamento, causados pelos programas *Matlab* e *Excel*, responsáveis pelo cálculo do modelo. Mas como o erro foi de pequena grandeza, a validade do método continua sendo garantida.

#### 4. CONCLUSÃO

Com auxílio dos *softwares* comerciais *Matlab* e *Excel* foi aplicado o MRD para uma treliça espacial buscando-se encontrar suas reações de apoio. Uma vez encontrados esses valores fez-se a comparação deles com os valores obtidos pelo programa comercial de cálculo estrutural *STRAP* para a mesma estrutura. Os valores obtidos, quando comparados, apresentam valores próximos. A diferença entre os resultados pode ter sido causada devido a erros gerados pelo arredondamento dos valores durante a aplicação do método. Todavia, apesar da diferença entre os resultados, e pelo fato de serem de pequena grandeza, os resultados obtidos pela aplicação do MRD são válidos e poderiam ser considerados para a execução da estrutura.

Assim sendo, deve-se ter em mente que o futuro da engenharia está intrinsecamente ligado aos programas computacionais de cálculo e, por isso, é de suma importância que os engenheiros tenham conhecimentos de como tais *softwares* funcionam e quais métodos de cálculo utilizam, para estarem aptos a entender e revisar os resultados apresentados por eles, projetando, assim, modelos viáveis, duráveis e seguros.

## REFERÊNCIAS

AZEVEDO, A.,F.,M.. **Método dos elementos finitos**. 258f. 1ª edição. Universidade do Porto: Faculdade de engenharia, Porto, 2003.

DRUZIAN, B.,M.. **Rotina computacional para análise de treliças espaciais**. 75f. Monografia (monografia em engenharia civil) – UFSM: Centro de tecnologia, Santa Maria, 2015.

FELIPPA, C., A.. **A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts**.University of Colorado: Center for Aerospace Structures, Boulder, Colorado, 2000.

MARTHA, L., F.. **Método da rigidez direta para modelos estruturais lineares e elásticos**. 352p. 2010.

RIBEIRO, L.,F.,S., *et al.* **Aplicação do método da rigidez direta na análise matricial de treliças planas indeterminadas estaticamente**. 5f. SECITEC – Semana de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Itumbiara, 2017.

BRITO, C., M., S., R., **Modelagem e simulação numérica de treliças espaciais submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos em regime elástico não linear**. 88f. Monografia (monografia em engenharia civil) – UFBA: Escola politécnica, Salvador, 2018.

SORIANO, H., L.. **Análise de estruturas: Formulação matricial e implementação computacional**. [S.I.]: Ciência Moderna, 2005.

SORIANO, H., L.. **Elementos finitos: Formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. [S.I.]: Ciência Moderna, 2009.

SOUZA, F., R., V., **Implementação computacional do método da rigidez direta para análise de sistemas estruturais planos**. 52f. Monografia (monografia em engenharia civil) – UFOP: Departamento de engenharia civil, Ouro Preto, 2017.