Réseaux d'interaction

S. Balev

Master IWOCS - Université Le Havre Normandie

Plan

Systèmes complexes

> *I think the next century will be the century of complexity.*
>
> – Stephen Hawking

> *Un système complexe est un ensemble constitué d'un grand nombre d'entités en interaction qui empêchent l'observateur de prévoir sa rétroaction, son comportement ou évolution par le calcul.*
>
> – Wikipedia

Systèmes complexes

Les systèmes complexes jouent un rôle très important dans la science, la technologie, l'économie, la vie quotidienne ...

Défis majeurs du 21^{e} siècle :

- Comprendre
- Décrire avec des outils mathématiques
- Prédire
- Contrôler

Le *réseau d'interactions* décrit les interactions entre les entités d'un système complexe. Sa structure détermine le comportement et la dynamique du système.

Réseaux d'interaction

- *Réseau cellulaire* : décrit les interactions entre gènes, protéines et métabolites dans la cellule.
- *Réseau de neurones* : connexions de neurones dans le cerveau.
- *Réseau social* : relations familiales, professionnelles, amicales entre individus.
- *Réseau de communication* : dispositifs de communication qui échangent des données par liens filaires ou sans fil.
- *Réseau électrique* : connecte les producteurs et les consommateurs d'énergie.
- *Réseau de commerce* : échange de biens et des services.

Network science

La théorie des réseaux est une discipline jeune (début 21[e] siècle).

- Cartographie des réseaux : bases de données des réactions biochimiques, collaboration entre acteurs, scientifiques, cartographie de WWW, réseaux sociaux ...
- Universalité des réseaux : malgré leurs origines très différents, les réseaux d'interaction partagent des caractéristiques similaires.

Caractéristiques :

- interdisciplinaire
- empirique, guidée par les données
- quantitative, théorique : théorie des graphes, physique statistique, théorie de contrôle, théorie de l'information
- calculatoire : traitement de grands volumes de données, algorithmes efficaces

Réseau complexe

Source : archive personnel

Impact sociétal

- *Économie* : les compagnies les plus réussies basent leur technologie et leur business model sur les réseaux
- *Santé* : comprendre les maladies, conception de médicaments, génie métabolique, *network medicine*
- *Sécurité* : lutte contre le terrorisme
- *Épidémiologie* : prédire la propagation d'une épidémie en temps réel, politiques de vaccination, lutte contre les virus informatiques
- *Neuroscience* : comprendre le cerveau (projet Connectome)
- *Management* : comprendre la structure d'une organisation, communication efficace

Vocabulaire

Théorie de graphes	Théorie de réseaux
graphe	réseau
sommet	noeud
arête	lien

Plan

Nombre de nœuds et liens, degrés

- Nombre de nœuds : N
- Nombre de liens : L
- Degré du nœud i : k_i
- Degré moyen :

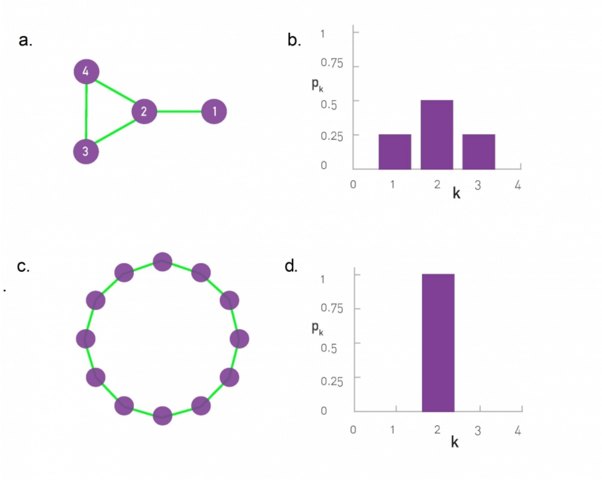
$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2L}{N}$$

Distribution de degrés

- p_k : probabilité qu'un nœud choisi au hasard ait degré k
- $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
- $p_k = \frac{N_k}{N}$ où N_k est le nombre de nœuds de degré k
- $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$

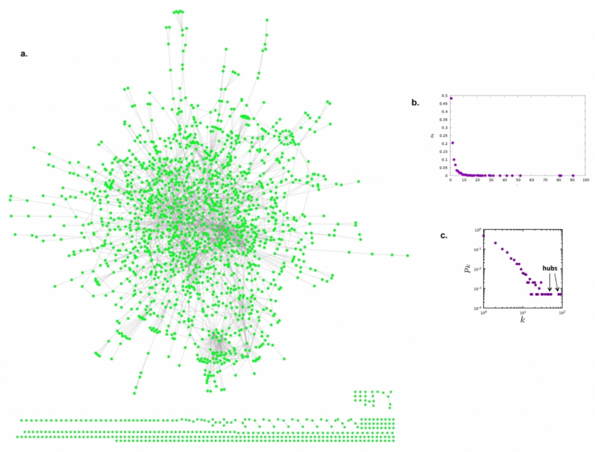
La distribution des degrés détermine beaucoup de phénomènes dans le réseau, de la robustesse à la propagation de virus.

Distribution de degrés - exemple



Source http ://networksciencebook.com/

Distribution de degrés - exemple réel



Source http ://networksciencebook.com/

Distances

- Distance entre deux nœuds d_{ij} : la longueur du plus court chemin entre i et j
- Diamètre du réseau :

$$d_{\max} = \max\{d_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq N\}$$

- distance moyenne

$$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1\ldots N, i \neq j} d_{ij}$$

Centralité

Mesures d'importance de chaque nœud ou lien.

- Centralité de degré : $C_i = k_i$
- Centralité de proximité :

$$C_i = \frac{1}{\sum_j d_{ij}}$$

- Centralité d'intermédiarité

$$C_i = \sum_{s \neq i \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}$$

- Centralité spectrale et PageRank

Coefficient de clustering

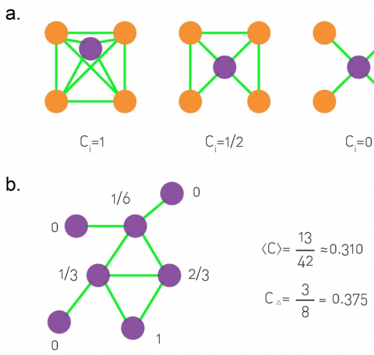
Mesure la densité locale des liens

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)}$$

où L_i est le nombre de liens entre voisins de i

- $0 \leq C_i \leq 1$
- $C_i = 0$ si aucune paire de voisins de i n'est connectée
- $C_i = 1$ si les voisins de i forment un graphe complet
- C_i est probabilité que deux voisins de i soient connectés

Coefficient de clustering - exemple



Source http ://networksciencebook.com/

Plan

- Comprendre les lois qui guident la formation et l'évolution des réseaux complexes
- Construire des modèles qui reproduisent les propriétés des réseaux d'interaction.
- De point de vue modélisation les réseaux sont très simples : nœuds et liens. Mais comment placer les liens ?
- Pourquoi pas aléatoirement ?

Réseau aléatoire

Un réseau aléatoire $G(N, p)$ contient N nœuds et chaque paire de nœuds et connectée avec probabilité p.

Construction de $G(N, p)$

- Commencer par N nœuds isolés
- Pour chacune des $N(N-1)/2$ paires de nœuds :
  - Tirer un nombre aléatoire entre 0 et 1
  - Si ce nombre est inférieur à p, connecter les deux nœuds

Les graphes aléatoires sont introduits par Paul Erdős et Alfréd Rényi. Dans une série d'articles entre 1959 et 1968 ils établissent des liens entre probabilités, combinatoire et théorie de graphes.

Nombre de liens et degré moyen

- Nombre de liens

$$\langle L \rangle = p\frac{N(N-1)}{2}$$

- Degré moyen

$$\langle k \rangle = \frac{2\langle L \rangle}{N} = p(N-1)$$

Distribution de degrés

La probabilité qu'un nœud ait k liens est le produit de :

- la probabilité que k liens sont présents
- la probabilité que les autres $(N - 1 - k)$ liens ne sont pas présents
- Le nombre de façons à choisir k parmi $N - 1$ liens

$$p_k = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Loi binomiale

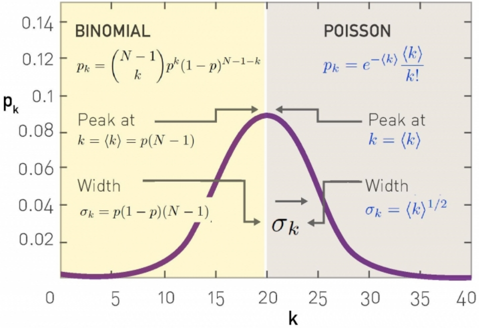
Loi binomiale et loi de Poisson

Loi de Poisson

$$p_k = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

- Cousine de la loi binomiale avec la même forme
- Bonne approximation pour $\langle k \rangle \ll N$ (les réseaux de terrain sont creux)
- Poisson dépend d'un seul paramètre
- Ne dépend pas de la taille du réseau

Loi binomiale et loi de Poisson

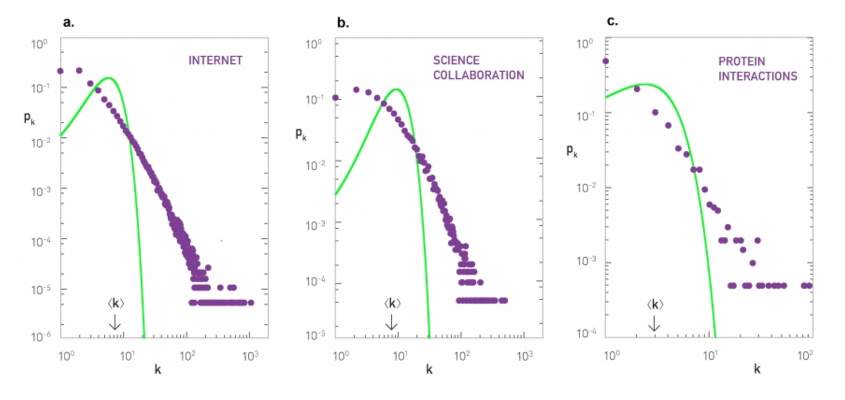


Source http ://networksciencebook.com/

Les réseaux de terrain ne suivent pas la loi de Poisson

- La population mondiale est $N = 7 \times 10^9$ et selon les sociologues un individu typique connaît $\langle k \rangle = 1000$ personnes.
- En assumant une loi de Poisson, $\sigma = \sqrt{1000} \approx 32$ et un individu typique connaît entre 968 et 1032 personnes.
- Les réseaux de terrain ont des *hubs*

Les réseaux de terrain ne suivent pas la loi de Poisson



Source http ://networksciencebook.com/

Évolution d'un réseau aléatoire

Soit N_G la taille de la composante géante (la plus grande composante connexe). Comment varie N_G/N en fonction de p (ou de $\langle k \rangle$) ?

- Pour $p = 0$ ($\langle k \rangle = 0$) on a $N_G = 1$ et $N_G/N \to 0$ pour large N
- Pour $p = 1$ ($\langle k \rangle = N - 1$) on a $N_G = N$ et $N_G/N = 1$
- Que se passe-t-il entre les deux ?

Le résultat principal d'Erdős et Rényi est qu'une composante géante émerge pour

$$\langle k \rangle = 1 \text{ ou } p = \frac{1}{N-1} \approx \frac{1}{N}$$

Évolution d'un réseau aléatoire

- Régime sous-critique : $\langle k \rangle < 1$ ($p < 1/N$)

$$N_G/N \sim 0$$

- Point critique : $\langle k \rangle = 1$ ($p = 1/N$)
- Régime super-critique : $\langle k \rangle > 1$ ($p > 1/N$)

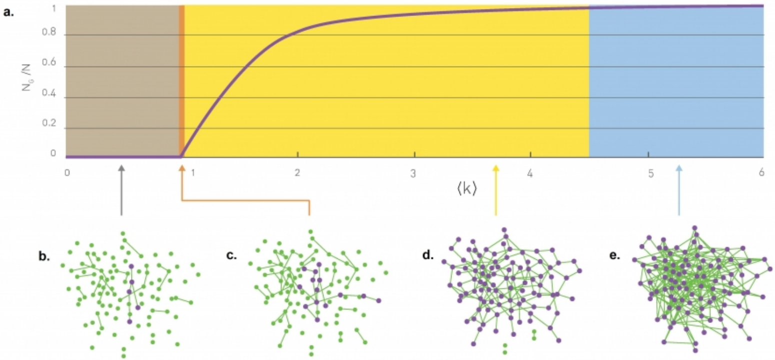
$$N_G/N > 0, \quad N_G/N \sim \langle k \rangle - 1 \text{ proche du point critique}$$

- Régime connecté : $\langle k \rangle > \ln N$ ($p > \ln N/N$)

$$N_G/N \sim 1$$

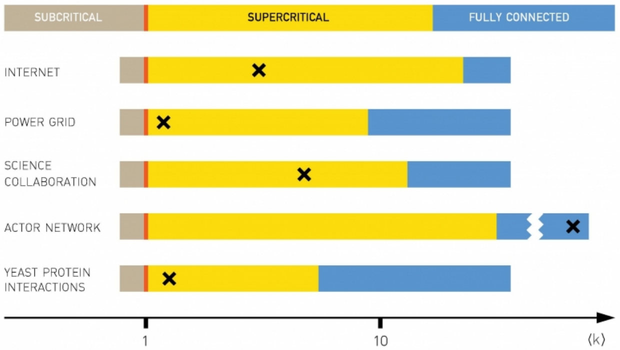
Tous les nœuds sont absorbés par la composante géante.

Évolution d'un réseau aléatoire



Source http ://networksciencebook.com/

Les réseaux de terrain sont super-critiques



Source http ://networksciencebook.com/

Petits mondes

- Six degrés de séparation : deux personnes quelconques peuvent être connectés par une chaîne de 6 ou moins connaissances
- Expérience de Stanley Milgram (1967)
- Traduction en langage réseau : *la distance entre deux nœuds choisis au hasard est courte.*
- *Courte* par rapport à quoi ?
- Comment cela s'explique ?

Petits mondes

Soit $N(d)$ le nombre de nœuds à distance $\leq d$ d'un nœud de départ.

$$N(d) \approx 1 + \langle k \rangle + \langle k \rangle^2 + \cdots + \langle k \rangle^d = \frac{\langle k \rangle^{d+1} - 1}{\langle k \rangle - 1} \approx \langle k \rangle^d$$

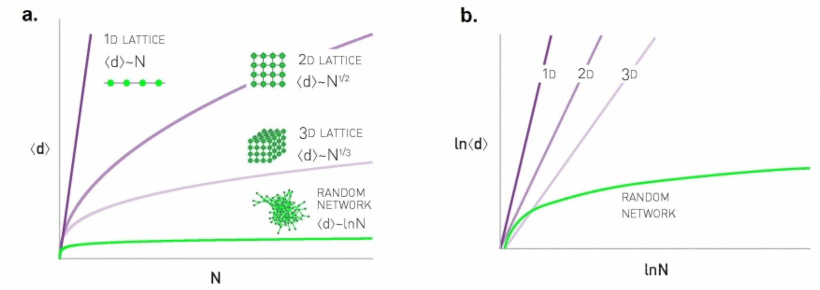
Pour la distance maximale on a $N(d_{\max}) \approx N$ d'où

$$d_{\max} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

Dans la plupart des réseaux $d_{\max}$ est déterminé par quelques chemins extrêmes et typiquement la propriété *petit monde* est définie par

$$\langle d \rangle \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$$

Petits mondes



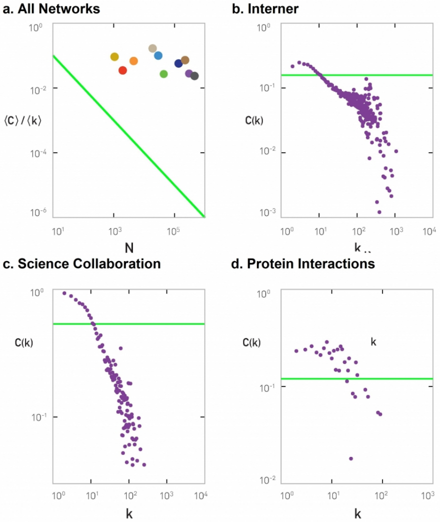
Source http ://networksciencebook.com/

Coefficient de clustering

Pour un réseau aléatoire :

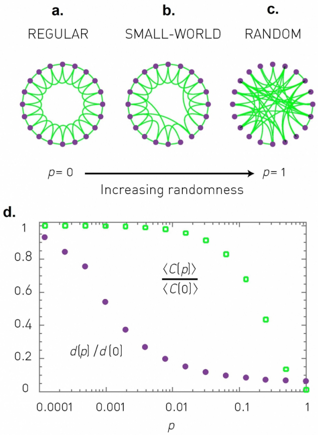
$$C_i = p = \frac{\langle k \rangle}{N}$$

- Pour $\langle k \rangle$ fixe le coefficient de clustering décroît comme $1/N$
- Le coefficient de clustering d'un nœud ne dépend pas de son degré



Source http ://networksciencebook.com/

Modèle de Watts-Strogatz (1998)



Source http ://networksciencebook.com/

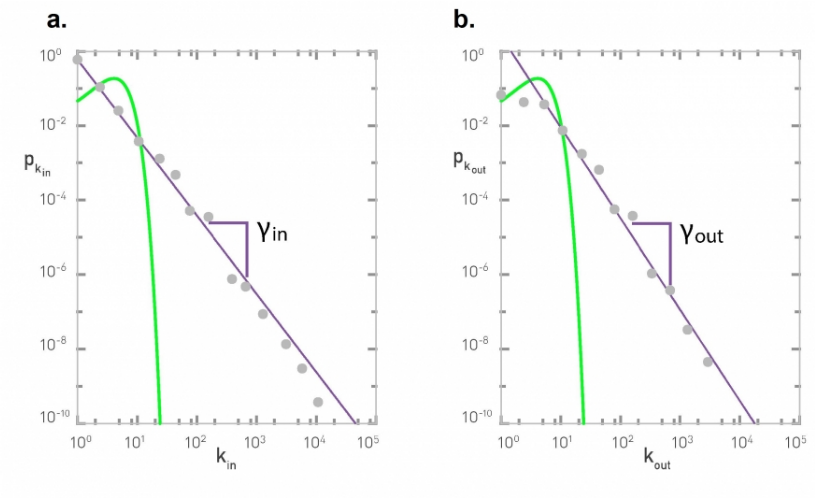
Récapitulatif

Les réseaux aléatoires sont-ils un bon modèle des réseaux de terrain ?

- Distribution de degrés ✗
- Connectivité ✗
- Distances ✔
- Coefficient de clustering ✗

Plan

Distribution de degrés du WWW



Source http ://networksciencebook.com/

Réseaux invariants d'échelle

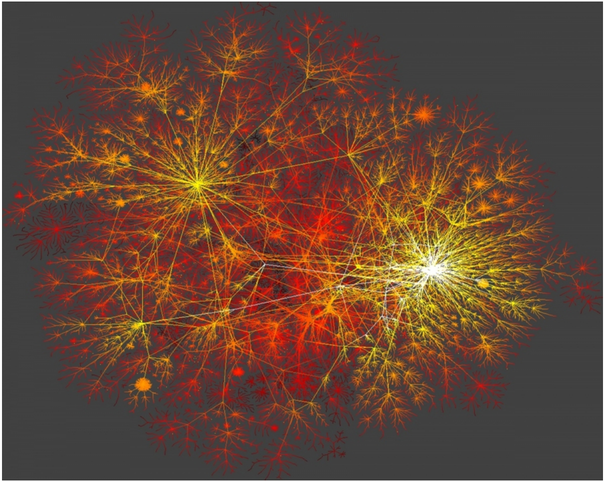
La distribution de degrés suit une loi de puissance :

$$p_k \sim k^{-\gamma}$$

où γ est l'exposant de la loi.

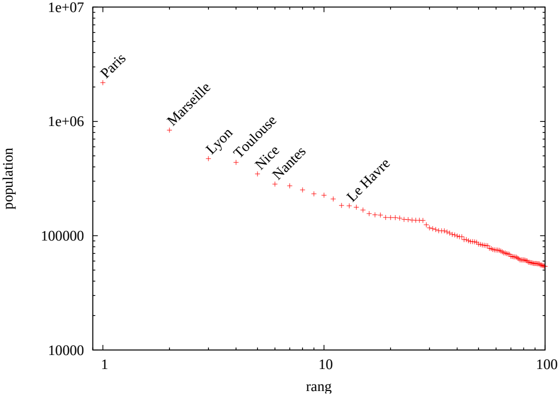
Pour WWW $\gamma_{\text{in}} = 2.1$ et $\gamma_{\text{out}} = 2.45$.

Carte d'internet



Source http ://www.caida.org

Loi de puissance - exemple



On retrouve la même loi à l'échelle d'une région, d'un continent ou du monde.

Loi de Pareto ou la règle 80/20

- 80 % de la terre est propriété de 20 % de la population
- 80 % du temps d'exécution passe sur 20 % du code
- 80 % du temps on porte nos 20 % de vêtements préférés
- ...

Formalisme continu

C'est plus pratique de passer de probabilités discrètes p_k à une fonction continue

$$p(k) = Ck^{-\gamma}$$

Soit $k_{\min}$ le degré minimum. On a donc

$$\int_{k_{\min}}^{\infty} p(k)dk = 1$$

d'où

$$C = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1} \text{ et } p(k) = (\gamma - 1)k_{\min}^{\gamma-1}k^{-\gamma}$$

Le plus grand hub

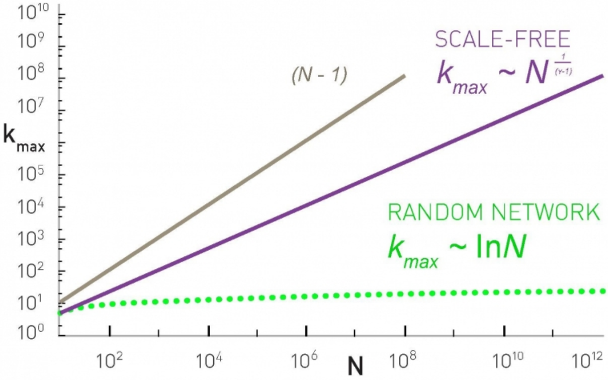
Si $k_{\max}$ est le degré maximal, on a

$$\int_{k_{\max}}^{\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}$$

d'où

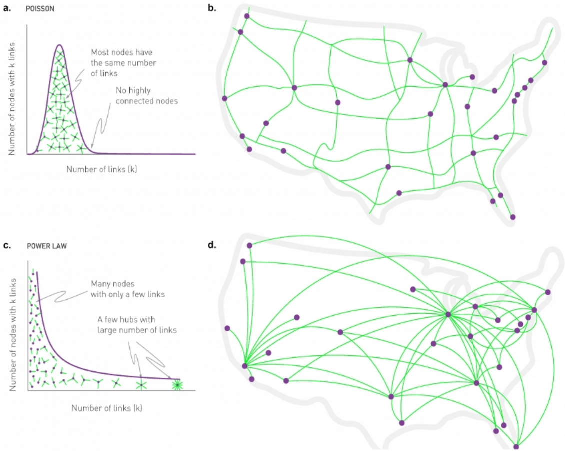
$$k_{\max} = k_{\min} N^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Le plus grand hub



Source http ://networksciencebook.com/

Loi de Poisson vs loi de puissance



Source http ://networksciencebook.com/

Moments de la loi de puissance

$$\langle k^n \rangle = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k^n p(k) dk = C \frac{k_{\max}^{n-\gamma+1} - k_{\min}^{n-\gamma+1}}{n-\gamma+1}$$

- $n = 1$: degré moyen
- $n = 2$: mesure la *dispersion* : la variance $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$ et sa racine carrée, l'écart type
- $n = 3$: mesure l'asymétrie de la distribution, etc.

Comportement asymptotique pour $N \to \infty$ ($k_{max} \to \infty$) :

- Si $n \leq \gamma - 1$, $\langle k^n \rangle$ est fini
- Si $n > \gamma - 1$, $\langle k^n \rangle$ est infini

Scale-free

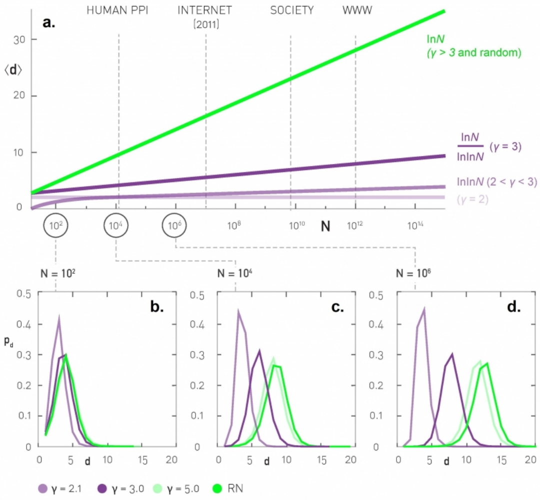
Pour la plupart des réseaux, γ est entre 2 et 3. C'est-à-dire, $\langle k \rangle$ converge mais $\langle k^2 \rangle$ diverge.

- Les réseaux aléatoires ont une échelle. Le degré typique d'un nœud est $\langle k \rangle \pm \langle k \rangle^{1/2}$ Ainsi $\langle k \rangle$ est « l'échelle » du réseau.
- Les réseaux en loi de puissance n'ont pas d'échelle (scale-free). Le degré typique d'un nœud est $\langle k \rangle \pm \infty$.

Est-ce que la présence de hubs réduit encore la distance moyenne ?

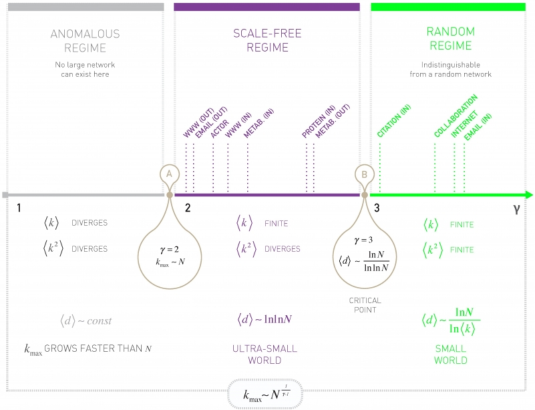
$$\langle d \rangle \sim \begin{cases} \text{const} & \gamma = 2 \\ \ln \ln N & 2 < \gamma < 3 \\ \frac{\ln N}{\ln \ln N} & \gamma = 3 \\ \ln N & \gamma > 3 \end{cases}$$

Ultra-petits mondes



Source http ://networksciencebook.com/

Le rôle de γ



Source http ://networksciencebook.com/

Plan

Questions

- Pourquoi des systèmes aussi différentes que WWW et la cellule convergent vers architectures invariantes d'échelle similaires ?
- Pourquoi le modèle d'Erdős-Rényi n'arrive pas à reproduire les hubs et les lois de puissance observés dans les réseaux de terrain ?

Croissance et attachement préférentiel

- Les réseaux croissent par ajout de nouveaux nœuds
- Les nouveaux nœuds préfèrent se lier aux nœuds les plus connectés.

Modèle de Barabási-Albert

- On commence par un petit réseau de m_0 nœuds tous de degré au moins 1
- À chaque pas de temps :
  - *Croissance* : on ajoute un nouveau nœud avec m ($\leq m_0$) liens qui le connectent avec les autres nœuds déjà présents.
  - *Attachement préférentiel* : La probabilité de connecter le nouveau nœud à un nœud i dépend linéairement de son degré k_i :

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Les nœuds de degré élevé ont plus de chances d'attirer des liens (*rich gets richer*).

Dynamique des degrés

$$k_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}$$

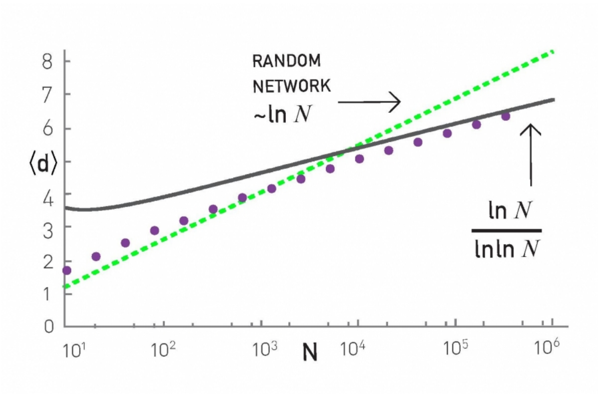
- Le degré de chaque nœud croît en suivant une loi de puissance avec le même exposant pour tous les nœuds
- La croissance est sous-linéaire (avec le temps, chaque nœud est en compétition pour des nouveaux liens avec de plus en plus de nœuds.
- Plus un nœud arrive tôt (petit t_i), plus son degré est élevé (*first-mover advantage*)

Distribution des degrés

$$p(k) \approx 2m^2 k^{-\gamma} \text{ avec } \gamma = 3$$

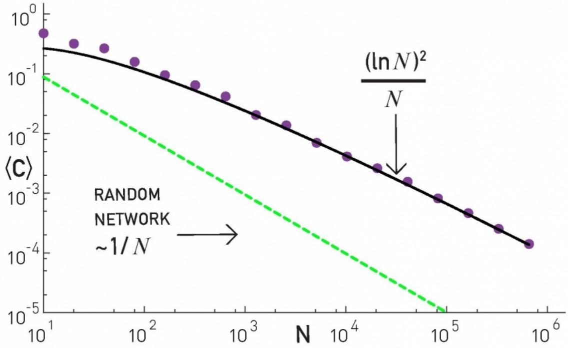
- L'exposant γ ne dépend pas de m
- La distribution des degrés ne dépend ni de N, ni de t (état stationnaire d'invariance d'échelle).

Distance moyenne



Source http ://networksciencebook.com/

Coefficient de clustering



Source http ://networksciencebook.com/

Détecter l'attachement préférentiel

Observer un réseau de terrain en moments t et $t + \Delta t$ et le changement des degrés $\Delta k_i = k_i(t + \Delta t) - k_i(t)$.

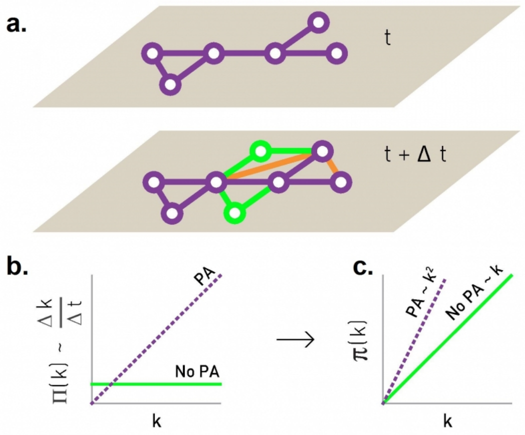
$$\frac{\Delta k_i}{\Delta t} \sim \Pi(k_i)$$

Pour éliminer le bruit, on utilise plutôt une fonction cumulative

$$\pi(k) = \sum_{k_i=0}^{k} \Pi(k_i)$$

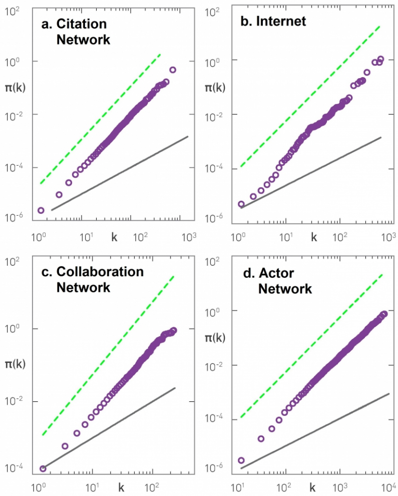
- $\pi(k) \sim k$ - pas d'attachement préferentiel
- $\pi(k) \sim k^2$ - attachement préférentiel linéaire

Détecter l'attachement préférentiel



Source http ://networksciencebook.com/

Attachement préférentiel pour des réseaux de terrain



Source http ://networksciencebook.com/

Mécanismes locaux

Le modèle de Barabási-Albert assume une connaissance *globale* du réseau. Le nouveau nœud choisit ses voisins en fonction de leurs degrés.

Il est possible de construire des réseaux invariants d'échelle avec des mécanismes *locales* sans explicitement utiliser l'attachement préférentiel.

Modèle de sélection de lien

Le nouveau nœud choisit un lien au hasard et se connecte avec une de ses extrémités

La probabilité de tomber sur un nœud de degré k est

$$q_k \sim k p_k$$

On a donc un attachement préférentiel linéaire.

Modèle de copie

- Le nouveau nœeud choisit au hasard un nœud i
- Avec probabilité p il se connecte à i
- Avec probabilité $1 - p$ il se connecte à un des voisins de i

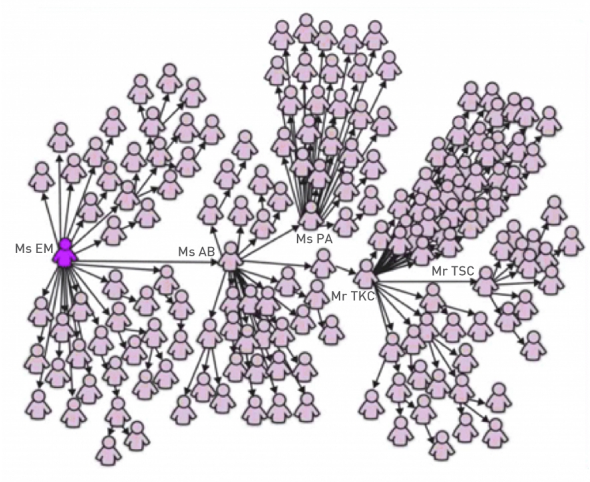
La probabilité de tomber sur un nœud de degré k est

$$q_k = \frac{p}{N} + \frac{1-p}{2L}k$$

On a donc à nouveau un attachement préférentiel linéaire.

Plan

Propagation de SARS en 2003



Source http ://networksciencebook.com/

Processus de propagation

- Biologique : propagation de pathogènes, épidémies, maladies contagieuses
- Numérique : virus informatiques
- Social : propagation de connaissances, produits, comportement, rumeurs, fake news, etc.

Modélisation épidémiologique

- Population séparée en compartiments :
  - *Susceptibles (S)*
  - *Infectieux (I)*
  - *Remis (R)*
- Population homogène : tous les individus ont la même chance d'être en contact avec un individu infectieux

Modèle SI

- $S(t)$ - nombre de susceptibles en temps t
- $I(t)$ - nombre d'infectieux en temps t
- $\langle k \rangle$ - nombre de contacts d'un individu typique
- β probabilité de transmission dans une unité de temps.

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta \langle k \rangle \frac{S(t)}{N} I(t)$$
$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta \langle k \rangle \frac{S(t)}{N} I(t)$$

En posant $s(t) = S(t)/N$ et $i(t) = I(t)/N$ et en prenant en compte $s(t) + i(t) = 1$, on obtient :

$$\frac{di}{dt} = \beta \langle k \rangle i(1 - i)$$

La solution de cette équation différentielle est

$$i = \frac{Ce^{\beta\langle k\rangle t}}{1 + Ce^{\beta\langle k\rangle t}}$$

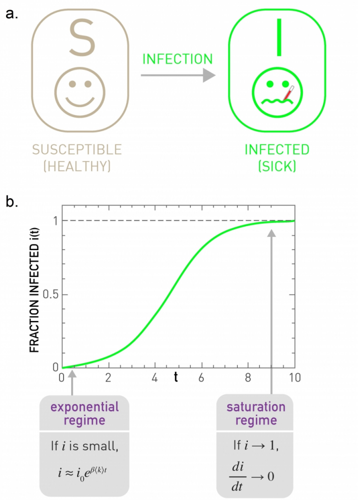
avec $C = \frac{i_0}{1-i_0}$.

- Croissance exponentielle au début
- Le *temps caractéristique* pour atteindre une fraction de $1/e$ (environ 36 %) de la population est

$$\tau = \frac{1}{\beta\langle k\rangle}$$

- La croissance ralentit avec le temps et $i(\infty) = 1$.

Modèle SI



Source http ://networksciencebook.com/

Modèle SIS

Les individus infectieux guérissent avec un taux μ pour redevenir susceptibles.

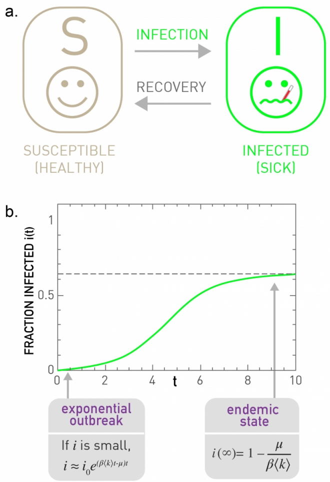
$$\frac{di}{dt} = \beta\langle k\rangle i(1-i) - \mu i$$

La solution est :

$$i = \left(1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}{1+Ce^{(\beta\langle k\rangle-\mu)t}}$$

avec $C = \frac{i_0}{1-i_0-\mu/\beta\langle k\rangle}$.

Modèle SIS



Source http ://networksciencebook.com/

Modèle SIS

Taux de reproduction de base :

$$R_0 = \frac{\beta\langle k\rangle}{\mu}$$

représente le nombre d'individus infectés par un individu infectieux pendant sa période d'infection dans une population de susceptibles.

- État endémique ($R_0 > 1$) : $i(\infty) = 1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$
- État sans maladie ($R_0 < 1$) : i décroît exponentiellement et la maladie disparaît.

Temps caractéristique :

$$\tau = \frac{1}{\mu(R_0 - 1)}$$

Modèle SIR

a.

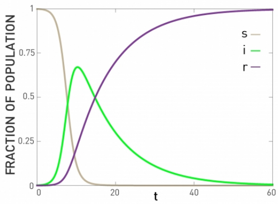
b.

$$\frac{ds}{dt} = -\beta\langle k\rangle i\,[1 - r - i]$$

$$\frac{di}{dt} = -\mu i + \beta\langle k\rangle i\,[1 - r - i]$$

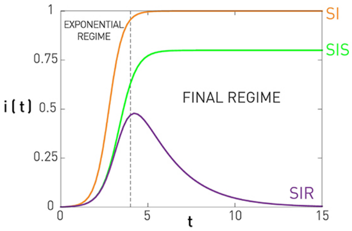
$$\frac{dr}{dt} = \mu i$$

c.



Source http ://networksciencebook.com/

Comparaison SI - SIS - SIR



	SI	SIS	SIR
Exponential Regime: Number of infected individuals grows exponentially	$i = \frac{i_0 e^{\beta\langle k\rangle t}}{1 - i_0 + i_0 e^{\beta\langle k\rangle t}}$	$i = \left(1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}\right)\frac{Ce^{(\beta\langle k\rangle - \mu)t}}{1 + Ce^{(\beta\langle k\rangle - \mu)t}}$	No closed solution
Final Regime: Saturation at $t \rightarrow = \infty$	$i(\infty) = 1$	$i(\infty) = 1 - \frac{\mu}{\beta\langle k\rangle}$	$i(\infty) = 0$
Epidemic Threshold: Disease does not always spread	No threshold	$R_0 = 1$	$R_0 = 1$

Source http ://networksciencebook.com/

Modèle SI dans un réseau

On regroupe les nœuds en blocs par degré. $i_k = I_k / N_k$ représente la fraction de nœuds de degré k infectieux.

$$i = \sum_k p_k i_k$$

On réécrit le modèle SI pour chaque degré k :

$$\frac{di_k}{dt} = \beta k \Theta_k (1 - i_k)$$

où Θ_k représente la fraction de voisins infectés d'un nœud de degré k susceptible.

Modèle SI dans un réseau - début d'épidémie

$$\tau \approx \frac{\langle k \rangle}{\beta(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)}$$

$$i_k \approx i_0 \left(1 + \frac{k(\langle k \rangle - 1)}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \left(e^{t/\tau} - 1 \right) \right)$$

- Plus le degré d'un nœud est élevé, plus il est probable qu'il devient infectieux
- Le temps caractéristique τ dépend non seulement de $\langle k \rangle$ mais aussi de la *distribution des degrés* (le deuxième moment $\langle k^2 \rangle$)

Temps caractéristique pour différents réseaux

- *Réseau aléatoire* : $\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle (\langle k \rangle + 1)$ d'où

$$\tau = \frac{1}{\beta \langle k \rangle}$$

  (la même chose que le cas homogène).
- *Réseau sans échelle avec* $\gamma \geq 3$: $\langle k^2 \rangle$ est fini et on a une dynamique similaire
- *Réseau sans échelle avec* $\gamma < 3$: $\langle k^2 \rangle \to \infty$ et donc

$$\tau \to 0$$

La propagation dans un réseau invariant d'échelle est instantanée

Modèle SIS dans un réseau

Reformulation par degrés :

$$\frac{di_k}{dt} = \beta k \Theta_k (1 - i_k) - \mu i_k$$

Temps caractéristique :

$$\tau \approx \frac{\langle k \rangle}{\beta \langle k^2 \rangle - \mu \langle k \rangle}$$

- Si μ est suffisamment grand, la maladie disparaît
- Le temps caractéristique dépend non seulement du degré moyen $\langle k \rangle$, mais aussi de la dispersion des degrés $\langle k^2 \rangle$

Seuil épidémique

Pour prédire si la maladie persiste, on définit le *taux de propagation* :

$$\lambda = \frac{\beta}{\mu}$$

qui ne dépend pas du réseau. Comme dans le cas homogène, on cherche un *seuil épidémique* λ_c :

- Si $\lambda > \lambda_c$ la maladie persiste
- Si $\lambda < \lambda_c$ la maladie disparaît

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

Seuil épidémique pour différents réseaux

- *Réseau aléatoire* :

$$\lambda_c = \frac{1}{\langle k \rangle + 1}$$

- *Réseau sans échelle avec* $\gamma > 3$:

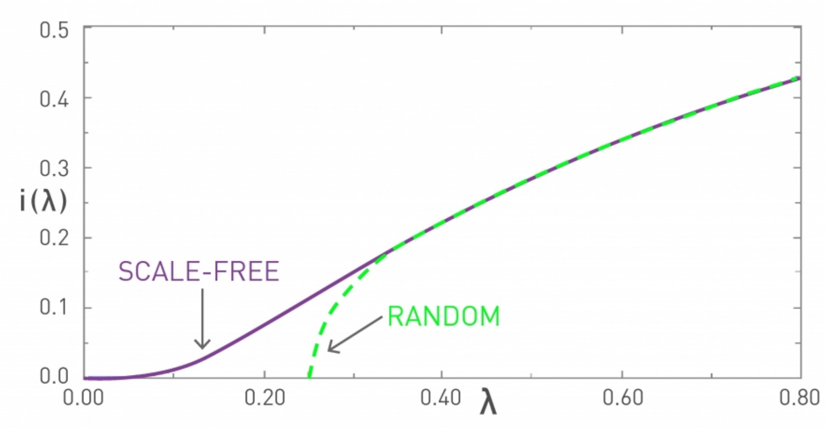
$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

- *Réseau sans échelle avec* $\gamma < 3$:

$$\lambda_c \to 0$$

Dans un réseau invariant d'échelle, même les pathogènes avec très faible taux de propagation persistent.

Seuil épidémique



Source http ://networksciencebook.com/

Récapitulatif

- Dans un réseau invariant d'échelle $\tau \to 0$, c'est-à-dire qu'un pathogène atteint la majorité des nœuds très rapidement
- Dans un réseau invariant d'échelle $\lambda_c \to 0$, c'est-à-dire que même les pathogènes avec un taux de propagation très faible persistent dans la population

Récapitulatif

Modèle	τ	λ_c
SI	$\frac{\langle k \rangle}{\beta(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)}$	0
SIS	$\frac{\langle k \rangle}{\beta \langle k^2 \rangle - \mu \langle k \rangle}$	$\frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$
SIR	$\frac{\langle k \rangle}{\beta \langle k^2 \rangle - (\mu + \beta) \langle k \rangle}$	$\frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}$

Immunisation

Idéalement, chaque individu doit recevoir un traitement ou un vaccin (si disponible). Mais :

- Ça coûte trop cher
- Il est difficile d'atteindre toute la population
- Les effets de bord réels ou perçus empêchent une couverture complète

Stratégies de vaccination :

- Visent à minimiser la menace d'épidémie en distribuant le plus efficacement possible les vaccins ou les traitements disponibles
- Traditionnellement elles visent à baisser le taux de propagation λ au dessous du seuil épidémique λ_c
- Mais la disparition du seuil épidémique pour les réseaux sans échelle remet en question l'efficacité de ces stratégies.

Immunisation aléatoire

On immunise une partie g de la population. Ainsi le taux de propagation passe de $\lambda = \frac{\beta}{\mu}$ à $\lambda' = \lambda(1 - g)$. Quel est le seuil critique g_c ?

- *Réseau aléatoire* :

$$g_c = 1 - \frac{\mu}{\beta} \frac{1}{\langle k \rangle + 1}$$

- *Réseau sans échelle* :

$$g_c = 1 - \frac{\mu}{\beta} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$$

Pour $\gamma < 3$, $g_c \to 1$

Exemple

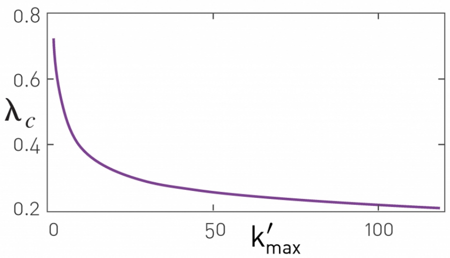
Propagation de virus par échange d'emails. Caractéristiques :

- On suppose $\lambda = 1$
- $\langle k \rangle = 3,26$
- $\langle k^2 \rangle = 1\ 271$

Quel est le seuil critique

- sans prendre en compte la variance ?
- en prenant en comte la variance ?

Viser les hubs pour réduire la variance $\langle k^2 \rangle$ et ainsi augmenter le seuil épidémique

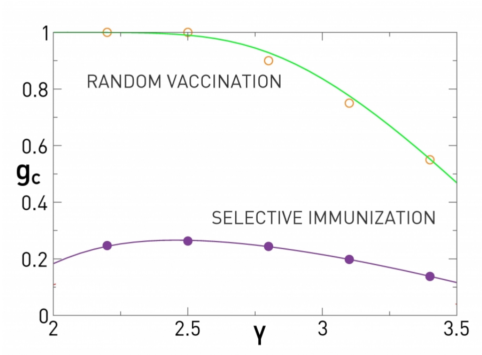


Source http ://networksciencebook.com/

Problème : les hubs sont difficiles à identifier en pratique.

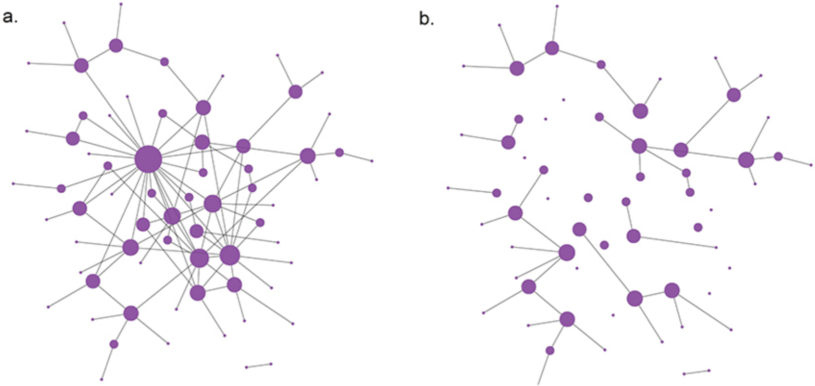
Immunisation sélective

- Choisir au hasard une fraction des nœuds (groupe 0)
- Pour chaque nœud de groupe 0, choisir au hasard un voisin (groupe 1)
- Immuniser groupe 1



Source http ://networksciencebook.com/

Robustesse et immunisation



Source http ://networksciencebook.com/