

Rapport sur l'inversion de matrice appliquée aux matrices de Hilbert.

@Author: Massiles Ghernaout, L3 informatique, Université du Havre.

Implémentation des tests :

Déroulé:

- Instancier une matrice Hilbert d'un ordre donné.
- On calcule son inverse.
- On calcule, Mprime, le produit entre la matrice (une copie) et son inverse.
- On calcule la différence entre Mprime et la matrice identité du même ordre.
- On calcule et on affiche la valeur des normes matricielles L1 et L infinie.
- On calcule et on affiche la valeur du conditionnement de la matrice suivant les deux normes.

Résultats des tests :

Note:

Les tests se basent sur l'instanciation d'une matrice Hilbert d'ordre $i \in \{3..15\}$, suivi par le calcul de son inverse. Pour cela, les tests ci-dessous sont exécutés en boucle sans aucune interaction nécessaire de la part de l'utilisateur. Toutefois, le test qui nécessite l'interaction de l'utilisateur (le test demandé dans le tp 3) est bien implémenté dans la classe.

```
##### Ordre = 3 #####
Son conditionnement avec L1: 748.0000000000066
Son conditionnement avec Linf: 748.0000000000066
Test réussi, norme_1(AA^-1 - I) est suffisamment petite: 7.105427357601002E-15
Test réussi, norme_inf(AA^-1 - I) est suffisamment petite: 1.4210854715202004E-14
```

```
##### Ordre = 4 #####
Son conditionnement avec L1: 28374.999999997624
Son conditionnement avec Linf: 28374.999999997628
Test réussi, norme_1(AA^-1 - I) est suffisamment petite: 3.410605131648481E-13
Test réussi, norme_inf(AA^-1 - I) est suffisamment petite: 2.877698079828406E-13
```

```
##### Ordre = 5 #####
Son conditionnement avec L1: 943655.9999970518
Son conditionnement avec Linf: 943655.9999970518
Test réussi, norme_1(AA^-1 - I) est suffisamment petite: 8.185452315956354E-12
```

Test réussi, norme_inf($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 7.077005648170598E-12

Ordre = 6

Son conditionnement avec L1: 2.9070279001716707E7

Son conditionnement avec Linf: 2.907027900171671E7

Test réussi, norme_1($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 3.4924596548080444E-10

Test réussi, norme_inf($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 1.766693458193913E-10

Ordre = 7

Son conditionnement avec L1: 9.851948907838542E8

Son conditionnement avec Linf: 9.85194890782543E8

Test réussi, norme_1($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 9.313225746154785E-9

Test réussi, norme_inf($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 7.481503416784108E-9

Ordre = 8

Son conditionnement avec L1: 3.387279156959694E10

Son conditionnement avec Linf: 3.3872791575287006E10

Test réussi, norme_1($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 2.60770320892334E-7

Test réussi, norme_inf($AA^{-1} - I$) est suffisamment petite: 9.69203028944321E-8

Ordre = 9

Son conditionnement avec L1: 1.0996506256002227E12

Son conditionnement avec Linf: 1.0996506383968508E12

Test échoué, norme_1($AA^{-1} - I$) est trop grande: 1.1682510375976562E-5

Test échoué, norme_inf($AA^{-1} - I$) est trop grande: 5.149289791006595E-6

Ordre = 10

Son conditionnement avec L1: 3.5354166949614414E13

Son conditionnement avec Linf: 3.53541640467932E13

Test échoué, norme_1($AA^{-1} - I$) est trop grande: 4.425048828125E-4

Test échoué, norme_inf($AA^{-1} - I$) est trop grande: 2.0417491032276303E-4

Ordre = 11

Son conditionnement avec L1: 1.2330463875822152E15

Son conditionnement avec Linf: 1.2330470731491288E15

Test échoué, norme_1($AA^{-1} - I$) est trop grande: 0.01080322265625

Test échoué, norme_inf($AA^{-1} - I$) est trop grande: 0.005418968299636617

Ordre = 12

Son conditionnement avec L1: 4.1991648064157384E16

Son conditionnement avec Linf: 4.1989597222450432E16

Test échoué, norme_1($AA^{-1} - I$) est trop grande: 0.478515625

Test échoué, norme_inf($AA^{-1} - I$) est trop grande: 0.2897139529231936

Ordre = 13

Son conditionnement avec L1: 2.7561977046264648E19

Son conditionnement avec Linf: 2.74332159236464E19
 Test échoué, norme_1(AA⁻¹ - I) est trop grande: 287.5
 Test échoué, norme_inf(AA⁻¹ - I) est trop grande: 200.1654022783041

Ordre = 14 #####
 Son conditionnement avec L1: 1.81023697792877824E18
 Son conditionnement avec Linf: 1.81373254283350502E18
 Test échoué, norme_1(AA⁻¹ - I) est trop grande: 19.3359375
 Test échoué, norme_inf(AA⁻¹ - I) est trop grande: 11.815727483248338

Ordre = 15 #####
 Son conditionnement avec L1: 1.841371694319648E18
 Son conditionnement avec Linf: 2.0678256290001385E18
 Test échoué, norme_1(AA⁻¹ - I) est trop grande: 20.25
 Test échoué, norme_inf(AA⁻¹ - I) est trop grande: 10.989230697974563

Analyse et commentaires sur les résultats des tests:

- Quand $i \in \{3..8\}$

On voit que les deux normes sont inférieures au epsilon numérique prédéfini, cela est illustré par le message qui affiche leurs valeurs et que le test est bien réussi.

- Quand $i \in \{9..15\}$

On voit que les deux normes sont inférieures au epsilon numérique prédéfini, cela est illustré par le message qui affiche leurs valeurs et que le test est bien réussi.

Explication brève:

Le fait que les normes dépassent la valeur du epsilon numérique prédéfini est dû au fait que:

- Les matrices de Hilbert sont des matrices mal conditionnées.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_de_Hilbert

- Nos tests effectuent plusieurs calculs matriciels différents sur des matrices Hilbert, qui ne sont constituées que de fractions. Par conséquent, les erreurs de calcul se propagent et s'amplifient, ce qui fait que les résultats finaux soient surprenants.