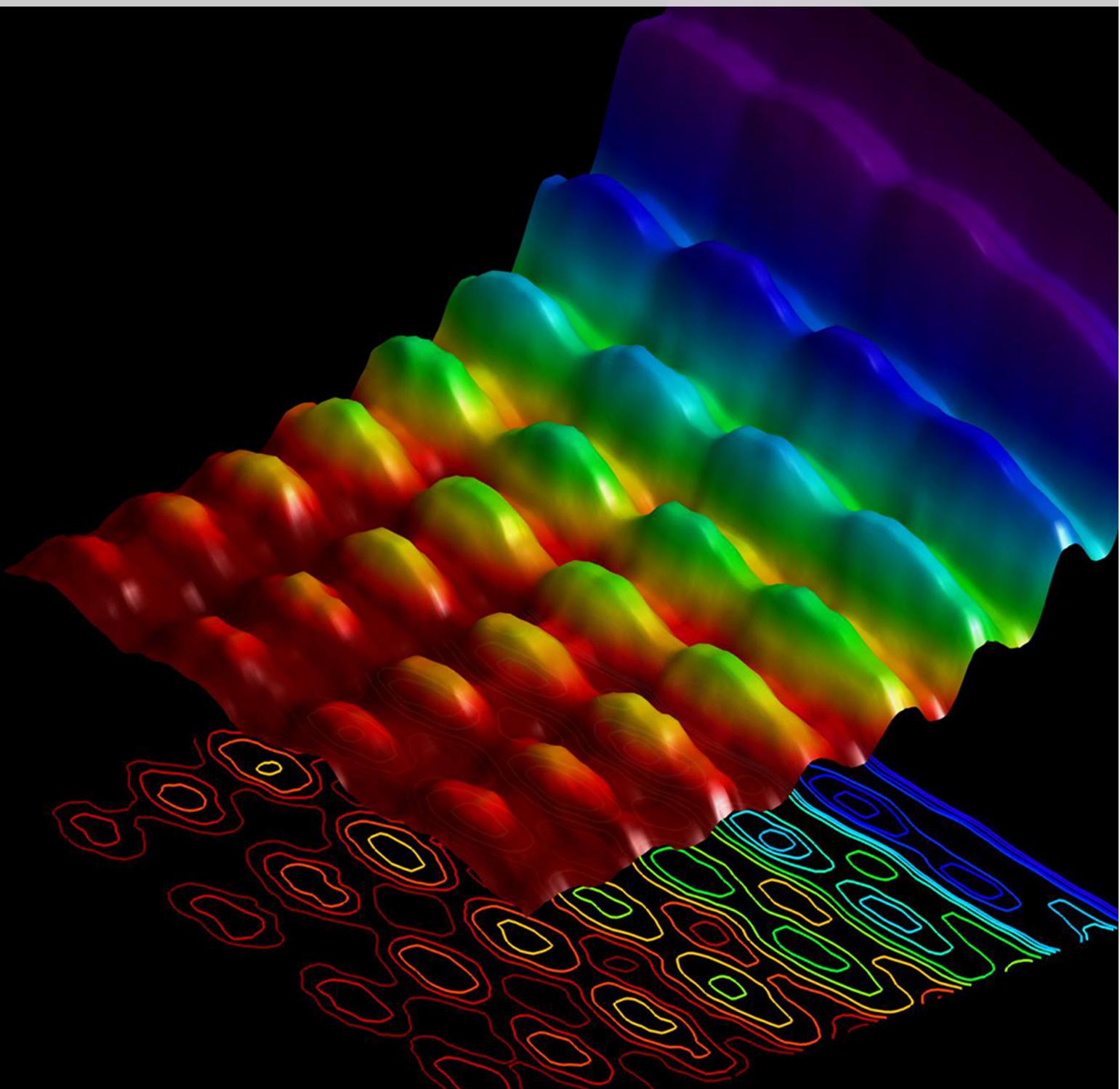


Lavoro per il Concorso nazionale di Scienza e gioventù

Meccanica quantistica

Ferrulli Massimiliano

Lilu2 2023 Esperto: Valentino Huang



Indice

I Aspetti teorici meccanica quantistica	3
1 Abstract	3
2 Nascita della meccanica quantistica	3
3 Radiazione di un corpo nero	4
3.1 Risultati sperimentali	5
3.2 Derivazione dell'equazione di Rayleigh-Jeans	5
4 Ipotesi di quantizzazione di Planck	9
5 Effetto fotoelettrico	11
5.1 Conclusioni	12
6 Esperienza Frank-Hertz	13
6.1 Teoria dell'esperienza	13
6.2 Strumentazione utilizzata	13
6.3 Procedura sperimentale	14
6.4 Analisi ed elaborazione dei dati	17
6.4.1 Grafico 5Hz manuale	17
6.4.2 Grafico 20khz rampa	17
6.4.3 Grafico 50khz rampa	18
6.5 Confronto dati sperimentali	18
6.6 Conclusioni	19
7 Equazione d'onda	20
7.1 Derivazione dell'Equazione d'onda	20
7.2 Soluzione all'equazione d'onda di d'Alambert	20
7.3 Dimostrazione	20
8 Equazione di Schrödinger	22
8.1 Funzione d'onda	22
8.1.1 Stati	22
8.2 Equazione temporale di Schrödinger	22
8.2.1 Derivazione	23
8.3 Stati Stazionari	24
8.4 Buche di Potenziale	25
9 Conclusioni	30

	Indice
II Difrazione di elettroni DIY	31
10 Domanda di partenza	31
11 Introduzione all'esperimento	31
11.1 Grafite	33
12 Fase di progettazione	34
12.1 Schermo di ZnS(Cu)	39
13 Analisi dei costi	40
14 Risultati e considerazioni	41
 III Appendice	 42
15 Allegati	42
15.1 Dimostrazione del principio di equipartizione di Boltzmann	42
16 Referenze	44

I Aspetti teorici meccanica quantistica

1 Abstract

In questo lavoro di meccanica quantistica mi concentro su alcuni dei concetti fondamentali della teoria quantistica, come: la catastrofe ultravioletta, la quantizzazione dell'energia di Max Planck e l'effetto fotoelettrico. Inoltre analizzerò l'esperienza di Franck-Hertz e il suo contributo alla comprensione dell'effetto fotoelettrico. In conclusione presenterò l'equazione di Schrödinger e discuto il suo ruolo nella descrizione del comportamento delle particelle a livello quantistico. Preso nella sua totalità, questo lavoro serve a fornire una panoramica di alcuni dei principi chiave della meccanica quantistica, che non potevano essere spiegati con la meccanica classica, e della loro importanza nella fisica moderna.

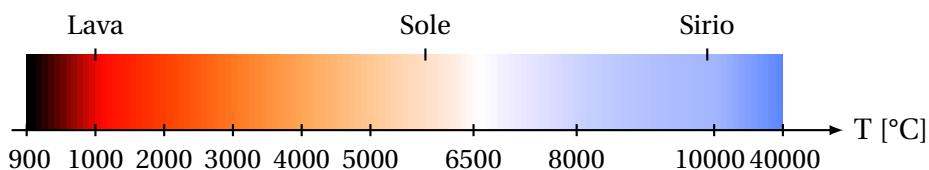
2 Nascita della meccanica quantistica

Negli anni 90 dell'800, il governo tedesco (bureau of standards) chiese a Max Planck di ottimizzare le lampadine in modo tale che producessero la massima luce per il minimo consumo elettrico. Decise di conseguenza di prevedere quanta luce emettesse un filamento caldo e grazie alla fisica classica era a conoscenza che le radiazioni elettromagnetiche erano associate ad una certa lunghezza d'onda e dunque ad un colore (nel caso della luce visibile). Dopo aver provato a sviluppare qualche teoria, senza successo, ritornò ai dati sperimentali e in un atto di disperazione propose ciò che diede il via alla meccanica quantistica, la quantizzazione dell'energia. La luce secondo Planck porta con sè pacchetti d'energia direttamente proporzionali alla frequenza della radiazione. Fu proprio la quantizzazione dell'energia di Planck, in seguito ripresa da Einstein, che permise di risolvere il problema della catastrofe ultravioletta e servì a de Broglie, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Pauli per formulare la meccanica quantistica.

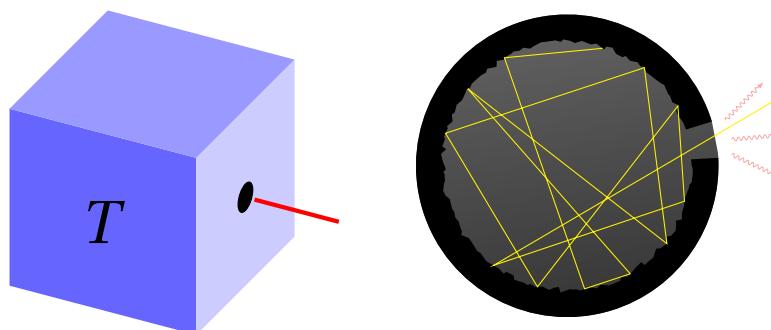
3 Radiazione di un corpo nero

I fisici della fine del 900 volevano spiegare come fosse possibile l'emissione di luce da parte di corpi caldi. Era ben conosciuto il fatto che un corpo che veniva riscaldato passava dall'emettere luce rossastra, a luce sempre più rossa fino a luce più bluastra. Per fare questo introdussero un oggetto teorico chiamato corpo nero.

I fisici cercarono di spiegare come l'intensità della radiazione emessa fosse correlata alla lunghezza d'onda λ .



Un corpo nero è un oggetto che assorbe tutte le radiazioni per poi irradiare il sistema attorno ad esso, affinché esso sia in equilibrio termico. Esso oltre ad essere un perfetto assorbitore di radiazioni, è anche un perfetto emettitore. Nonostante in natura sia impossibile trovare un corpo perfettamente nero, i 2 fisici James Jeans e Lord Jhon Rayleigh studiarono questo fenomeno attraverso l'uso di un cubo chiamato "cubo di Jeans". Questo cubo metallico ha, su una delle facce, un piccolo foro che permette alla radiazione di penetrare all'interno del cubo. Esse riflettono avanti e indietro sulle pareti interne del cubo e vengono assorbite ad ogni riverbero. L'energia viene assorbita dalle pareti sotto forma di energia termica che scalda il cubo e viene riemessa nell'ambiente per avere un equilibrio termico. Essendo il buco molto piccolo, solo una piccola parte delle radiazioni riuscirà ad uscire da esso e per questo il buco si comporterà come un corpo nero. Se le pareti del cubo sono tinte di nero si può osservare che il foro è più nero rispetto ad esse.



3.1 Risultati sperimentali

3.1 Risultati sperimentali

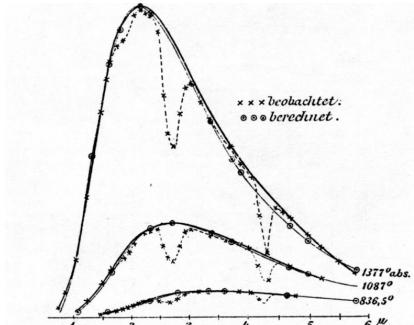


Fig. 24. Energy curves (for page 168) (Lummer and Pringsheim, February 1899, 34; Fig. 1). Thick continuous lines: Experimental data, but continued through the absorption areas indicated by the depressions marked by chain lines, "which [areas] originate partially from water vapour and carbon dioxide in the air". Thin continuous lines: These join the values calculated from the energy distribution equation.

Figura 1: grafico ottenuto grazie ai dati raccolti

Otto Lummer e Ernst Pringsheim studiarono a livello sperimentale come la radianza spettrale¹ cambiasse in funzione della lunghezza d'onda. I due studiosi notarono che avevano delle curve diverse al variare della temperatura, difatti aumentando la temperatura la posizione del massimo è maggiore.

3.2 Derivazione dell'equazione di Rayleigh-Jeans

per rendere i calcoli più semplici, è conveniente studiare la densità di energia $\rho(f) \propto R(f)$, ovvero l'energia su unità di volume ad una temperatura T in un intervallo di frequenza f e $f + df$, piuttosto che studiare la radianza spettrale.,

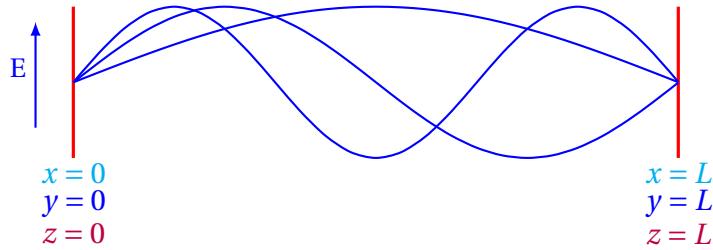
$$R(f) = \frac{c}{4\pi} \rho(f)$$

Per studiare la densità di energia è sufficiente calcolare quante onde riuscirebbe a stare all'interno del cubo, calcolare l'energia media di ognuna di esse per poi calcolare la densità di energia nell'intervallo di frequenza $f + df$.

All'interno del cubo le onde riflettono sui vari muri sovrapponendosi in modo distruttivo, annullandosi, e in modo costruttivo. Se la sovrapposizione di due onde è costruttiva si formeranno delle onde stazionarie all'interno del cubo. Prendiamo in considerazione le onde lungo una componente (ad esempio la componente x), l'oscillazione genera un campo elettrico perpendicolare alla direzione di propagazione. Siccome la direzione di oscillazione è parallela a quella del vettore area \vec{A} , allora il campo elettrico \vec{E} sarà parallelo alla parete del cubo. Dato che il cubo è stato realizzato con un materiale metallico, è un circuito con zero resistenza il quale non permette che della tensione, quindi un campo elettrico, esista su di esso. Il modulo del campo elettrico \vec{E} sulle pareti sarà 0. Tenendo conto che un'onda stazionaria viene descritta con un'equazione del tipo: $y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$, allora l'intensità del campo elettrico verrà descritto con l'equazione $E(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$.

¹In radiometria, la radianza è la quantità di luce emessa, riflessa, trasmessa o ricevuta da una data superficie, per unità di angolo solido per unità di area proiettata. La radianza spettrale è la radianza di una superficie per unità di frequenza oppure di lunghezza d'onda.

3.2 Derivazione dell'equazione di Rayleigh-Jeans



per $x = 0$

$$E(x, t) = 2A \sin(k \cdot 0) \cos(\omega t) = 0$$

per $x = L$

$$E(x, t) = 2A \sin(kL) \cos(\omega t) = 0 \longleftrightarrow \text{se e solo se } kL = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

$$k^2 = \pi^2 \left(\frac{n}{L} \right)^2$$

$k^2 = \pi^2 \left(\left(\frac{n_x}{L} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{L} \right)^2 \right)$ Numero d'onda per un'onda tridimensionale

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{k^2 \cdot L^2}{\pi^2}$$

$$\text{dato che: } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$$

$$\text{otteniamo: } n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{4L^2 f^2}{c^2}$$

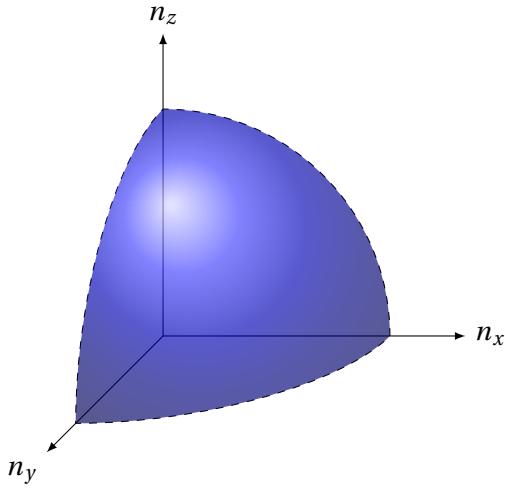
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^2 (\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2) = \left(\frac{2L}{\lambda} \right)^2 \cdot 1$$

se $\lambda = \frac{c}{f}$:

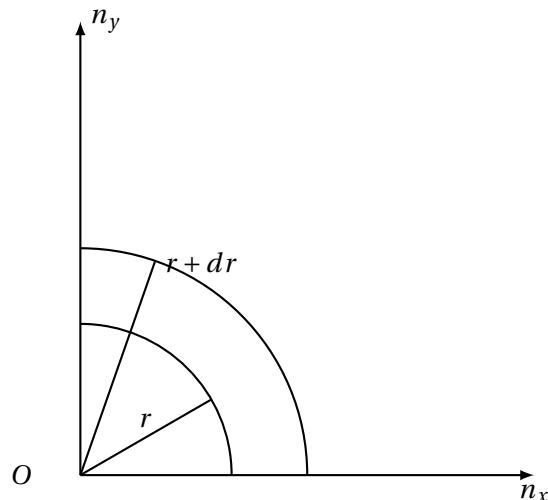
$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left(\frac{2Lf}{c} \right)^2 \underline{\text{risolvendo rispetto } f} \quad f = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Per determinare la densità di stati nel cubo tridimensionale in un intervallo di frequenze considerando degli assi a cui associamo i valori interi di n . Consideriamo una sfera con centro all'origine degli assi n_x n_y n_z e prendiamo in esame solo i valori positivi di x, y, z , ovvero $\frac{1}{8}$ della sfera, faremo uso della simmetria per completare la sfera.

3.2 Derivazione dell'equazione di Rayleigh-Jeans



Se la nostra sfera ha raggio r , allora possiamo determinare la densità di stati considerando quanti stati ci sono tra un raggio r e un raggio $r + dr$.



$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (\text{Pitagora})$$

$$\text{se } f = \frac{c}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \rightarrow f = \frac{cr}{2L} \rightarrow r = \frac{2Lf}{c}$$

$$\frac{dr}{df} = \frac{2L}{c} \rightarrow dr = \frac{2L}{c} df$$

$$\text{Il volume del guscio sferico sarà } dV = \frac{4\pi r^2 dr}{8} = \frac{\pi r^2 dr}{2}$$

$$N(r) dr = \frac{1}{2} \pi r^2 dr$$

3.2 Derivazione dell'equazione di Rayleigh-Jeans

$$N(f)df = 2 \cdot \frac{4\pi L^3}{c^3} f^2 df = \frac{8\pi L^3}{c^3} f^2 df$$

Moltiplichiamo per 2 dato che ci sono 2 possibili stati di polarizzazione della radiazione eletromagnetica: quello del campo elettrico e quello del campo magnetico.

Ora vogliamo calcolare l'energia media di ogni onda. Dato che un'onda stazionaria altera solamente l'ampiezza, ovvero vi è un solo parametro indipendente, grazie agli studi condotti da Boltzmann sappiamo che l'energia media è data dall'equazione $K_{\text{media}} = \frac{1}{2}kT$ e quindi l'energia totale sarà $E_{\text{totale}} = 2 \cdot K_{\text{media}} = kT$. La distribuzione di Boltzmann concerne la distribuzione di una quantità di energia tra particelle identiche ma distinguibili e predice una probabilità di distribuzione di energia, la quale può essere calcolata usando la seguente espressione:

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE}$$

Risolvendo questa equazione troviamo che $\bar{E} = kT$. (La dimostrazione dettagliata è disponibile negli allegati)

Ora che abbiamo sia il numero di onde che l'energia media di ognuna di esse, possiamo calcolare l'energia per unità di volume moltiplicando il numero di onde $N(f)df$ per l'energia media e in seguito dividere per il volume.

$$\rho(f)df = N(f)df \cdot kT \cdot \frac{1}{L^3} = \frac{8\pi f^2 kT}{c^3} df$$

Se invece vogliamo esprimere in funzione della lunghezza d'onda λ

$$\rho(\lambda)d\lambda = -\rho(f)df$$

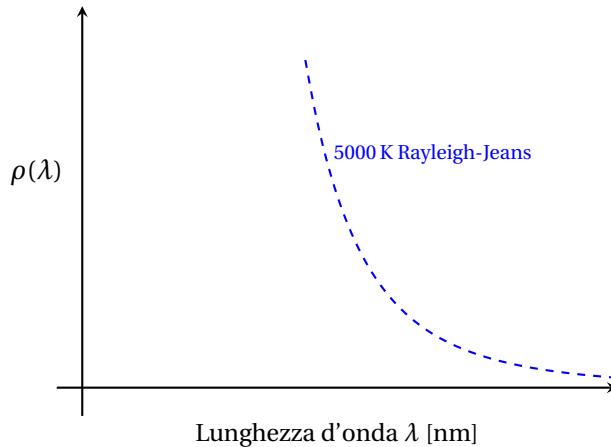
Il segno negativo è dovuto al fatto che quando la frequenza aumenta, la lunghezza d'onda diminuisce

$$f = \frac{c}{\lambda} \longrightarrow \frac{df}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

$$\rho(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi f^2 kT}{c^3} df = \frac{8\pi (\frac{c}{\lambda})^2 kT}{c^3} \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda$$

se si rappresenta $\rho(\lambda)d\lambda$ in funzione della lunghezza d'onda λ otteniamo un grafico di tipo:

4 Ipotesi di quantizzazione di Planck



Ovvero una funzione che si comporta come i risultati delle esperienze di Otto Lummer e Ernst Pringsheim per grandi lunghezze d'onda, per piccole lunghezze d'onda notiamo che l'energia tende a infinito e questa è chiamata catastrofe ultravioletta.

4 Ipotesi di quantizzazione di Planck

Dai dati sperimentali, della Figura 1 si sapeva che l'energia sarebbe dovuta tendere a 0 con lunghezze d'onda piccole e Max Planck introdusse l'idea di energia quantizzata. Ipotizzando che l'energia di un oscillatore potesse assumere solo multipli di un valore base:

$$E = n \cdot \epsilon \quad n = 1, 2, 3$$

In questo modo si sostituiscono gli integrali della formula della distribuzione di Boltzmann con delle sommatorie.

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE} \rightarrow \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (n\epsilon e^{-n\epsilon/kT})}{\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-n\epsilon/kT})}$$

siccome

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n &= \frac{a}{1-r} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT} = \frac{1}{1-e^{-\epsilon/kT}} \\ \frac{df}{d\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{1}{1-e^{-\epsilon/kT}} \right) = \frac{-1}{kT} \left(\frac{e^{-\epsilon/kT}}{(1-e^{-\epsilon/kT})^2} \right) \end{aligned}$$

ciò significa che

$$\bar{E} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \iff \epsilon = \hbar f$$

4 Ipotesi di quantizzazione di Planck

$$\begin{aligned} \varepsilon \ll kT &\quad \longrightarrow \quad e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{kT} \quad \longrightarrow \quad \bar{E} \approx kT \quad f \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow \infty &\quad \rightarrow \quad e^{\frac{\varepsilon}{kT}} \rightarrow \infty \quad \longrightarrow \quad \bar{E} \rightarrow \infty \quad f \rightarrow \infty \quad \varepsilon \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Essendo che $\varepsilon = \hbar f$:

$$\bar{E} = \frac{\hbar f}{e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1}$$

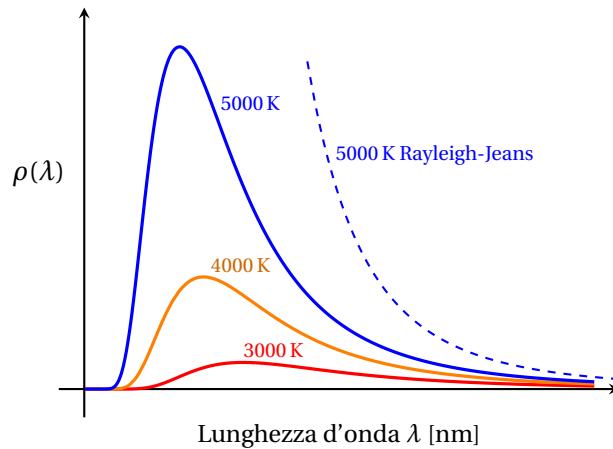
e ricordando che $N(f)df = \frac{8\pi L^3}{c^3} f^2 df$:

$$\rho(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{\hbar f}{e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1} df$$

Se si decide di esprimere l'equazione in termini di lunghezza d'onda:

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi\hbar c}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{\hbar c}{\lambda kT}} - 1}$$

Se rappresentiamo questa funzione in un grafico $\rho(\lambda)$ su λ e lo compariamo al grafico ottenuto dall'equazione di Rayleigh-Jeans, vediamo come il problema dell'energia che diverge per piccole lunghezze d'onda non è più presente e anzi abbiamo un grafico che combacia con i dati sperimentali raccolti nel 1899 da Otto Lummer e Ernst Pringsheim.



5 Effetto photoelettrico

Planck aveva difficoltà a comprendere gli oscillatori che entravano in gioco nella sua teoria della radiazione del corpo nero e si dedicò a lungo alla ricerca di possibili interpretazioni del quanto di energia in termini di meccanismi di emissione e assorbimento della radiazione da parte delle cariche presenti sulle pareti della cavità. Tuttavia, fu Einstein a dare una svolta decisiva nella comprensione dei quanti di energia, grazie alla sua spiegazione dell'effetto photoelettrico e alla successiva teoria dell'emissione e dell'assorbimento della radiazione elettromagnetica da parte degli atomi. L'effetto photoelettrico consiste nell'emissione di elettroni da una superficie metallica quando viene colpita da una radiazione elettromagnetica di frequenza pari o superiore a una soglia minima specifica per ogni tipo di metallo. Questa soglia è detta soglia photoelettrica. La quantità di elettroni emessi dalla superficie dipende dall'intensità della radiazione, ma l'energia di ogni singolo elettrone non dipende da essa, bensì dalla frequenza della radiazione. Nel 1887, Hertz scoprì l'effetto photoelettrico durante un esperimento che aveva come obiettivo quello di produrre ed individuare le onde elettromagnetiche. Utilizzò uno spinterometro² in un circuito per generare le onde e un altro circuito simile per rilevarle. Nel 1902, Lenard esaminò questo effetto e scoprì che la luce incidente su una superficie metallica produce l'emissione di elettroni, il cui livello di energia dipende dalla frequenza della luce e non dalla sua intensità. Lenard era a conoscenza dell'effetto termoionico che permetteva di estrarre³ gli elettroni dalla superficie metallica svolgendo del lavoro, detto "lavoro di estrazione", in modo tale da sorpassare la barriera di potenziale. Nell'effetto photoelettrico tale energia viene fornita dalla radiazione elettromagnetica che incide sulla superficie. Il lavoro necessario per estrarre gli elettroni varia da materiale a materiale. L'elettrone supera la barriera di potenziale con un'energia cinetica K e ad una certa distanza dalla superficie che è stata colpita, poniamo un anodo a potenziale V variabile. Se $V > 0$ allora vi è una differenza di potenziale che accelera gli elettroni verso l'anodo e il numero di elettroni emessi al secondo è pari alla corrente I misurata in A . Se il potenziale V è negativo, gli elettroni vengono decelerati e perdono energia cinetica K . La corrente I è pari a 0 quando l'energia cinetica iniziale è pari o inferiore alla barriera di potenziale $e|V_0|$. Nel 1905 Einstein propose un'interpretazione della radiazione che utilizzava i quanti di Max Planck in un'articolo⁴. Einstein mostrò come la radiazione di un corpo nero si comportasse come un insieme di quanti di luce indipendenti e cita l'effetto photoelettrico. Secondo quanto riportato da Einstein, se la radiazione si comportasse come un insieme di quanti elementari allora la conseguente emissione di elettroni dalla superficie potrebbe essere vista come vari urti anelastici tra elettroni e quanti. In ogni collisione il quanto può conferire dell'energia $E = hf$ all'elettrone e utilizzarla come lavoro di

²Lo spinterometro è un dispositivo che permette di generare delle scariche elettriche nell'aria grazie a due elettrodi che comunicano con un circuito ad induzione.

³Un catodo metallico riscaldato emette elettroni e dunque si comporta come un emettitore di raggi catodici, ovvero fasci di elettroni.

⁴https://www.informationphilosopher.com/solutions/scientists/einstein/1905_Radiation.pdf.

5.1 Conclusioni

estrazione W e in parte in energia cinetica K secondo la seguente relazione: $hf = W + K$
Quindi $E = hf - W$, essendo E legato al valore critico $V_0 \rightarrow E = e|V_0|$

$$|V_0| = \frac{h}{e}f - \frac{W}{e}$$

5.1 Conclusioni

L'energia dell'elettrone è linearmente dipendente dalla frequenza f e nell'equazione non vi è l'intensità della radiazione, ecco perché l'energia allora non dipenda dall'intensità. Il valore critico al di sotto del quale non vi sono emissioni di elettroni è $\frac{W}{h}$ e cambia da materiale a materiale.

6 Esperienza Frank-Hertz

Nel 1913 Niels Bohr propose il suo modello atomico a orbite assumendo che gli elettroni potessero saltare da un'orbita ad un'altra guadagnando o perdendo energia e possono rimanere su un'orbita senza irradiare energia. Poco dopo James Franck e Gustav Hertz confermarono, pubblicando il 24 aprile 1914 i risultati di un'esperienza, l'ipotesi di Bohr per la quale i livelli energetici tra le orbite di un atomo sono quantizzati.^{blux}

6.1 Teoria dell'esperienza

In questo esperimento un catodo viene riscaldato e per effetto fotoionico rilascia degli elettroni i quali, per via di una differenza di potenziale ΔV tra il catodo e la griglia, vengono accelerati verso la griglia. In seguito decelerano per via di un ulteriore differenza di potenziale tra la griglia e l'anodo.

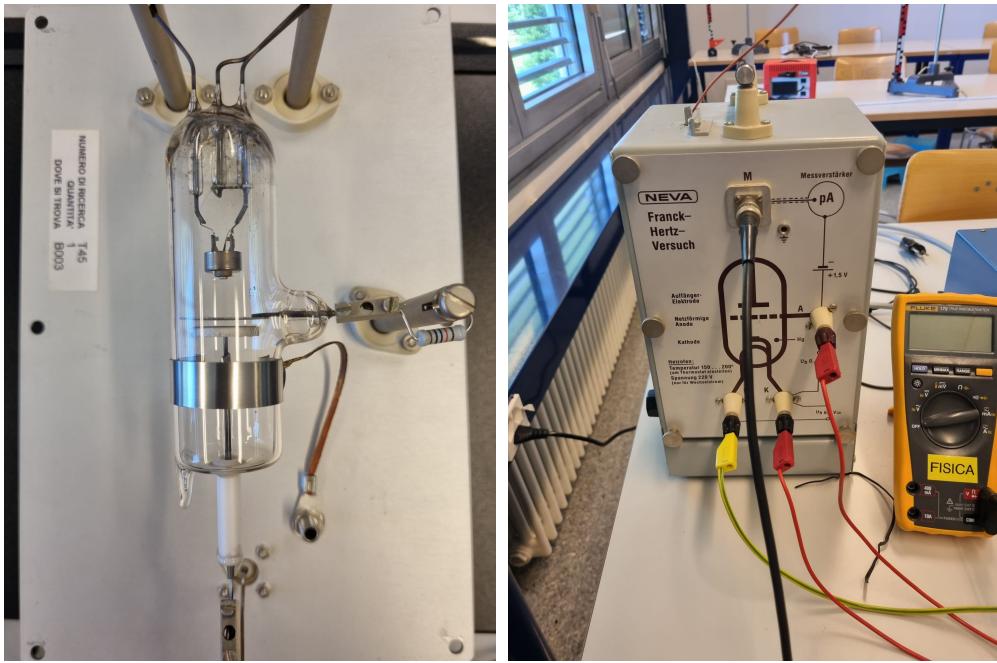
Sperimentalmente si può notare come ci siano dei picchi di corrente quando la tensione raggiunge valori che sono multipli interi di 4.9 V $T = k \cdot 4.9V | k \in \mathbb{R}$. Questo è il valore necessario per far eccitare un atomo di mercurio l'atomo emetterà una radiazione quando l'elettrone ritornerà nella sua orbita iniziale. I massimi visibili dal grafico sono dovuti agli urti elastici tra gli elettroni e gli atomi di mercurio, essi infatti perdono energia cinetica accumulata e di conseguenza non avranno una velocità che permetta loro di raggiungere l'anodo, per tanto non misureremo alcuna corrente. Un elettrone che ha energia cinetica maggiore di 4.9 eV (e minore di $2 * 4.9 \text{ eV}$) non perderà completamente la sua velocità e dunque potrà arrivare all'anodo, questo è il motivo per il quale vediamo un'aumento di corrente nel grafico dopo i massimi.

6.2 Strumentazione utilizzata

Per questo esperimento ci siamo forniti di una capsula mostrato nella figura (a) all'interno del quale troviamo una griglia, un anodo e un catodo. All'interno di esso vi è un gas denso di atomi di mercurio e il gas viene scaldato a $150^\circ / 200^\circ$. Abbiamo utilizzato una stazione di controllo che faceva da generatore sia di rampa⁵ che manuale, essa è collegata con dei cavi al forno e all'interfaccia Pasco per avere in tempo reale i dati sul computer. Per monitorare la temperatura del forno facciamo uso di un termometro.

⁵Un generatore a rampa è un generatore che dopo aver gradualmente aumentato la tensione fino al valore desiderato, fa calare la tensione a 0 per poi ricominciare ad aumentare la tensione.

6.3 Procedura sperimentale



(a) Capsula col vuoto

(b) Forno con il pannello frontale e termometro



(a) interfaccia

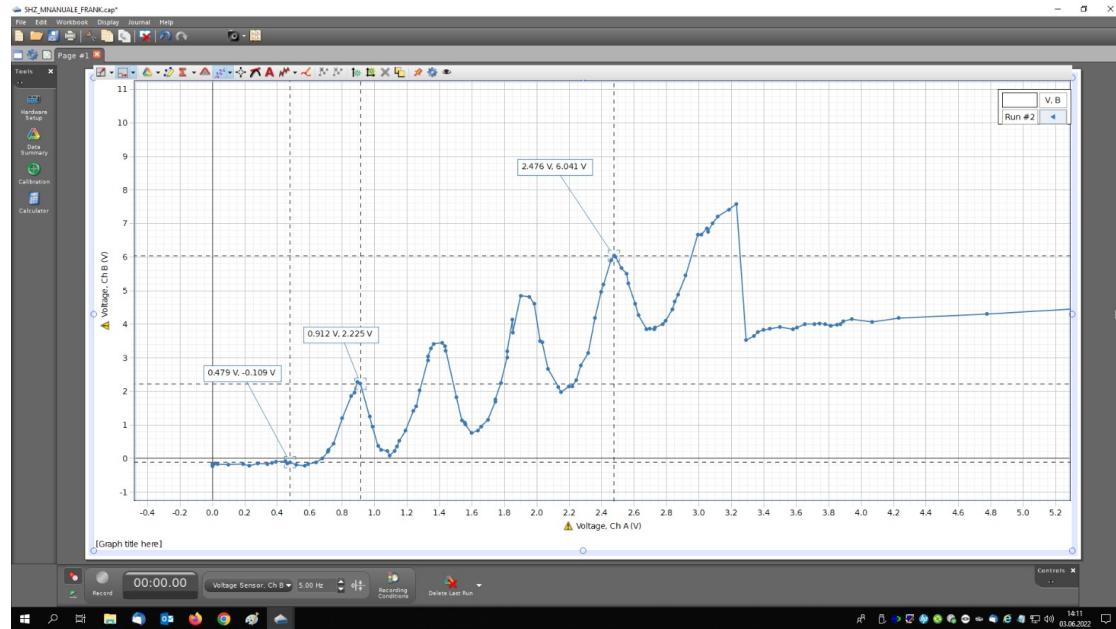
(b) Stazione di controllo

6.3 Procedura sperimentale

Inizialmente abbiamo collegato i nostri strumenti alla stazione di controllo e abbiamo aspettato finché il forno, contenente la capsula al suo interno, si scaldasse fino ad arrivare ad almeno 150°. Successivamente abbiamo collegato l'interfaccia capstone e configurato su Pasco Capstone un grafico tensione su tensione e non corrente su voltaggio dato che il software dava qualche problema. La prima volta abbiamo commesso qualche errore probabilmente con le impostazioni nella stazione di controllo e abbiamo notato una forte emissione di luce prove-

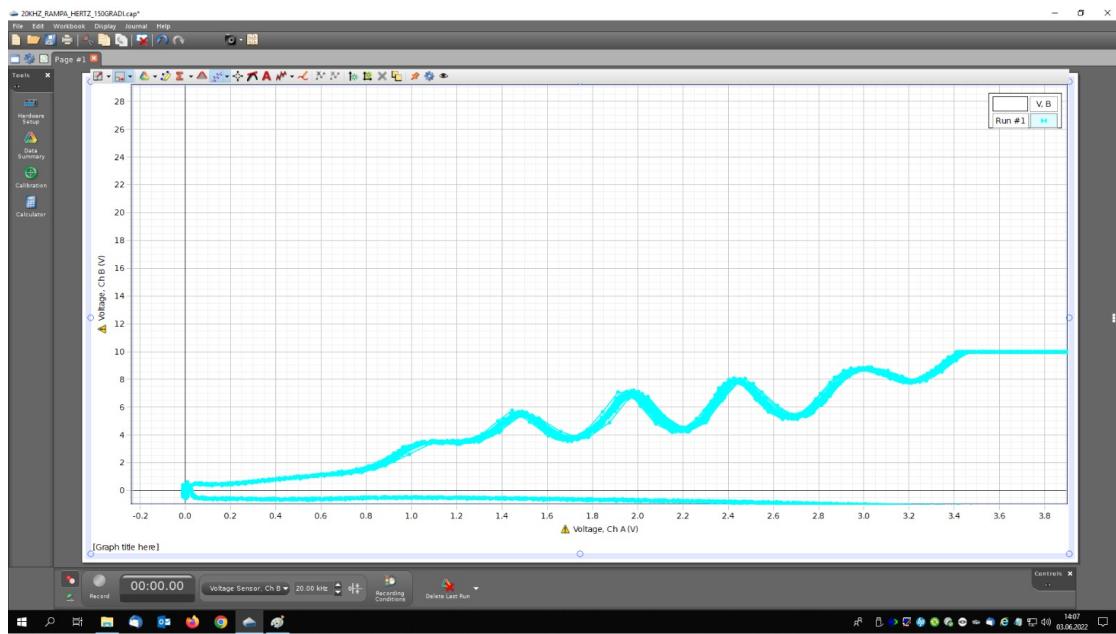
6.3 Procedura sperimentale

niente dalla capsula. La volta dopo abbiamo raccolto diversi dati cambiando sia la frequenza di cattura dei dati sia la modalità con cui generiamo la differenza di potenziale, infatti abbiamo preso dati sia in modalità rampa che modalità manuale. Questi sono i migliori grafici da noi ottenuti:

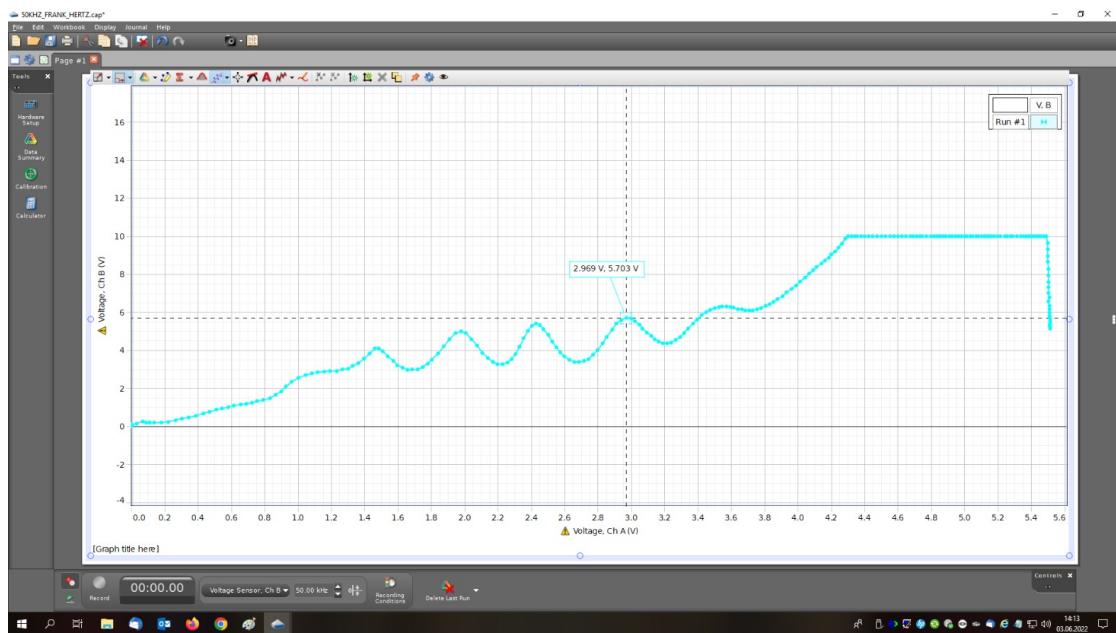


(a) Misurazioni prese in manuale a 5hz

6.3 Procedura sperimentale



(a) Misurazioni prese in rampa a 20khz



(a) Misurazioni prese in rampa a 50khz

6.4 Analisi ed elaborazione dei dati

6.4 Analisi ed elaborazione dei dati

6.4.1 Grafico 5Hz manuale

Per ottenere il primo grafico abbiamo girato manualmente la manopola per cambiare la differenza di potenziale e registravamo i dati ad una frequenza di 5hz, come si può vedere dal grafico non abbiamo una curva morbida e la distanza tra i picchi non è esattamente di 4.9V. Questo grafico dà una idea dell'esperienza, ma dati i pochi dati registrati al secondo e per l'imprecisione dovuta a girare la manopola manualmente, il grafico non ha delle curve morbide.

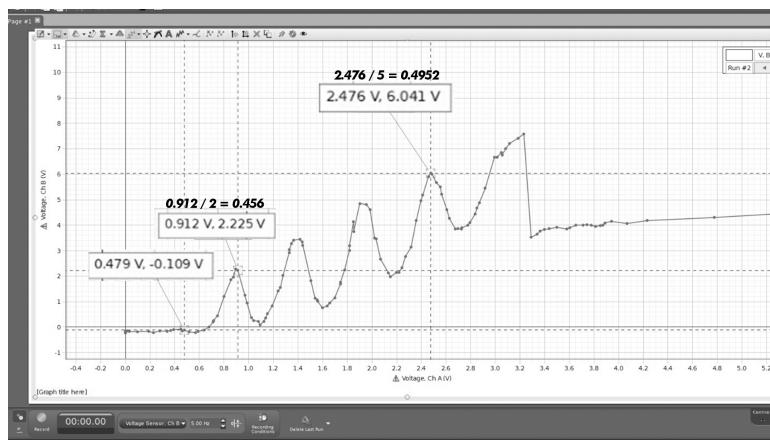


Figura 2: Grafico dell'esperienza misurando a 5Hz con il generatore in modalità manuale

6.4.2 Grafico 20khz rampa

Il secondo grafico è stato ottenuto misurando la tensione con una frequenza di 20khz e usando una corrente a rampa che oscilla da 0 a 3.9V.

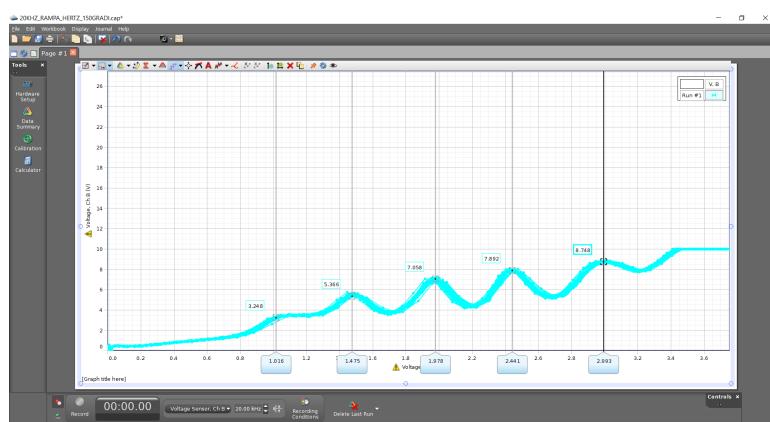


Figura 3: Grafico dell'esperienza misurando a 20kHz con il generatore in modalità rampa

6.5 Confronto dati sperimentali

6.4.3 Grafico 50khz rampa

Il terzo grafico è il migliore tra quelli da noi ottenuti (registrando a 50khz) nonstante non si vedano bene i primi 2 massimi e dato l'elevatissimo numero di punti che il software faceva fatica a gestire, non abbiamo potuto avere più di un ciclo della corrente a rampa.

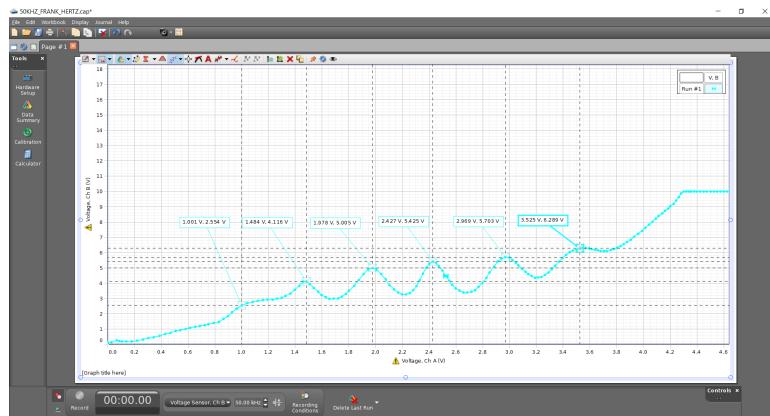


Figura 4: Grafico dell'esperienza misurando a 50kHz con il generatore in modalità rampa

Tabella 1: Analisi dei dati

Picco	Valore ascisse (V)	Distanza picchi (V)	Valore medio	distanza max dal valore medio
1 °	0.508	0.508		
2 °	1.001	0.493		
3 °	1.484	0.483		
4 °	1.978	0.494	0.504	0.055
5 °	2.427	0.449		
6 °	2.969	0.542		
7 °	3.525	0.556		

I grafici da noi ottenuti sono disponibili presso questo link:

https://drive.google.com/drive/folders/1mq4SQE_YU--R_TNUjwDuWZX2CgA0i-yc?usp=sharing

6.5 Confronto dati sperimentali

Premessa I dati sperimentali ottenuti sono in V ma sono stati scalati dal software con un moltiplicatore 10^{-1} , di conseguenza nel confronto dei dati sperimentali non verrà utilizzato 0.504 come valore medio, bensì 5.04.

Dall'esperimento del 1914 James Franck e Gustav Ludwig Hertz determinarono che l'energia di eccitazione di un atomo di mercurio fosse $4.88 \pm 0.05\text{eV}$ e l'esperimento confermò che

6.6 Conclusioni

l'atomo di mercurio avesse livelli energetici orbitali discreti. Confrontando i valori ottenuti da Franck ed Hertz e quelli ottenuti da me, possiamo notare come ci sia una differenza di solo 0.16, un errore del 3.17%

6.6 Conclusioni

L'esperienza di Franck-Hertz mostra come gli atomi di mercurio abbiano livelli energetici discreti con quella che risulta essere un'esperienza semplice da preparare. Dato che i livelli energetici degli atomi sono quantizzati, allora la teoria di Bohr e di Planck è confermata.

7 Equazione d'onda

l'equazione d'onda è una importante equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la propagazione di onde con velocità v . Per ottenere una soluzione, come con ogni equazione differenziale alle derivate parziali, dobbiamo avere delle condizioni di contorno e/o condizioni iniziali. L'equazione d'onda si presenta come: $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ per una dimensione, se si vuole estenderla a più dimensioni si può utilizzare l'operatore Laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$ e diviene: $\frac{1}{v^2} \nabla^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

7.1 Derivazione dell'Equazione d'onda

Consideriamo un elemento di massa dm contenuto in un pezzo dx , se lo spostamento è piccolo la $\vec{F}_{\text{orizzontale}}$ è circa 0. La forza verticale invece è:

$$\sum F_y = -T' \sin(\theta_2) - T \sin(\theta_1) = dm \cdot a = \mu dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

siccome la forza orizzontale è approssimabile a 0 (come d'ipotesi) per piccoli spostamenti:

$$\begin{aligned} T \cos(\theta_1) &\approx T' \cos(\theta_2) \approx T \\ \frac{F}{T} &= \frac{\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{T} = \frac{T' \sin(\theta_2) + T \sin(\theta_1)}{T} = \frac{T' \sin(\theta_2)}{T} + \frac{T \sin(\theta_1)}{T} \\ &\approx \frac{T' \sin(\theta_2)}{T' \cos(\theta_2)} + \frac{T \sin(\theta_1)}{T \cos(\theta_1)} = \tan(\theta_2) + \tan(\theta_1) = -\Delta \frac{\partial y}{\partial x} \text{ pendenza} \\ \frac{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)}{\partial x} &= \frac{-\Delta \frac{\partial y}{\partial x}}{\partial x} = \frac{-\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{T} \end{aligned}$$

tenendo in considerazione che $v = \sqrt{\frac{t}{\mu}}$

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

7.2 Soluzione all'equazione d'onda di d'Alambert

Il metodo di d'Alambert ci procura una soluzione all'equazione d'onda monodimensionale sia t il tempo, x la posizione e sia $u(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a due variabili che può essere derivata 2 volte per ogni variabile. $u(x, t)$ è la soluzione generale per $v = c$

7.3 Dimostrazione

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

7.3 Dimostrazione

$$\begin{aligned}\phi &= u(x, 0) = f(x) + g(x) \\ \psi(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \Big|_{t=0} = cf'(x) - cg'(x) \\ \phi'(x) &= f'(x) + g'(x) \longleftrightarrow \frac{\psi}{c} = f'(x) - g'(x)\end{aligned}$$

dunque:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi'(x) + \frac{\psi(x)}{c} \right) \\ g'(x) &= \frac{1}{2} \left(\phi'(x) - \frac{\psi(x)}{c} \right) \\ f(x) &= \int f'(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + A \\ g(x) &= \int f'(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + B\end{aligned}$$

siccome $\phi(x) = f(x) + g(x) \iff A + B = 0$

$$\begin{aligned}u(x, t) &= f(x + ct) - g(x - ct) \\ &= \frac{1}{2} \phi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + a + \frac{1}{2} \phi(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + B \\ &= \frac{1}{2} (\phi(x + ct) + \phi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds\end{aligned}$$

8 Equazione di Schrödinger

Un sistema classico può essere risolto con l'equazione differenziale di Newton e le condizioni iniziali, il risultato ottenuto può assumere qualsiasi valore. Ciò non è valido nei sistemi quantistici che vengono descritti dall'equazione di Schrödinger, difatti con una funzione d'onda completa applicata all'equazione di Schrödinger si possono ottenere dei valori attesi con la misurazione dell'esperimento. I valori attesi è l'unico modo per misurare una grandezza, mentre i valori permessi sono discreti.

8.1 Funzione d'onda

La funzione d'onda Ψ è una funzione complessa che ha come variabili la posizione e il tempo, il suo modulo $|\Psi|^2$ rappresenta la densità di probabilità dello stato di una particella sulle posizioni in un certo lasso di tempo. La densità di probabilità che la particella abbia posizione x_0 sarà il modulo della parte della funzione d'onda che è in funzione solamente di x: $|\psi(x)|^2$

8.1.1 Stati

Uno stato è un vettore⁶ nello spazio di Hilbert che descrive una particella o un sistema di particelle e tiene informazioni su tutto ciò che è misurabile (posizione, spin, momento angolare ...). Ci fornisce una distribuzione della probabilità per ogni possibile misurazione della particella (oppure del sistema). Per ogni stato abbiamo una Ψ diversa, di conseguenza una energia diversa.

8.2 Equazione temporale di Schrödinger

L'Equazione di Hamilton definisce il moto di una particella materiale attraverso la seguente equazione:

$K - (E - U) = 0$ che può essere anche scritta come $\frac{p^2}{2m} - (E - U) = 0$

L'Equazione di D'Alambert, ci permette invece di descrivere la propagazione delle onde: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$ dove Ψ è la funzione d'onda. $\Psi = \varphi \cdot \chi = \varphi \cdot e^{-2\pi ift} = \varphi \sin(2\pi ft)$

Schrödinger cercò una relazione tra l'aspetto corpuscolare ed ondulatorio, una relazione che regolasse l'andamento delle grandezze caratteristiche delle onde della materia nello stesso modo per il quale l'equazione di D'Alambert definisce la propagazione di un'onda generica.

⁶Lo stato se non puro è invece rappresentato da una matrice densità

8.2 Equazione temporale di Schrödinger

8.2.1 Derivazione

La prima derivata rispetto al tempo dell'equazione d'onda è: $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -2\pi f i \Psi$, mentre la seconda derivata rispetto al tempo dell'equazione d'onda: $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 f^2 \Psi$

$$p = m \cdot v = \frac{hf}{v} \longleftrightarrow m = \frac{hf}{v^2} = \frac{E}{v^2}$$

Sostituendo la quantità di moto nell'equazione di Hamilton: $\frac{h^2 f^2}{2mv^2} - (E - U) = 0$ e ne ricaviamo che la velocità di fase v è: $v = \frac{hf}{\sqrt[3]{2m(E-U)}}$ e ponendola nell'equazione d'onda otteniamo

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{2m(E-U)}{h^2 f^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

sostituendo la derivata calcolata in precedenza

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{2m(E-U)}{h^2 f^2} (-4\pi^2 f^2 \Psi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \Psi = 0$$

Sostituendo $E = hf$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U \Psi - \frac{8\pi^2 m f i^2}{h} \Psi = 0$$

Utilizzando la derivata prima rispetto al tempo: $\frac{4\pi i m}{h} \cdot (-2\pi f i \Psi) = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ Equazione temporale di Schrödinger:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U \Psi + \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

Se si vuole estendere ad una propagazione in una direzione qualsiasi dello spazio:

$$\nabla^2 \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U \Psi + \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

Si può sostituire la costante di Planck ridotta: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ per ottenere la seguente forma dell'equazione temporale di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + U(r, t) \Psi(r, t)$$

8.3 Stati Stazionari

L'equazione di Schrödinger può essere scritta, grazie all'uso dell'operatore hamiltoniano⁷ $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r, t)$, nella seguente forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \hat{H}\Psi(r, t)$$

L'operatore \hat{H} quando viene applicato ad una funzione complessa Ψ fornisce un'ulteriore funzione complessa $\hat{H}\Psi$. Sia l'operatore che l'equazione di Schrödinger sono lineari e ciò implica che ogni combinazione lineare di soluzioni dell'equazione è se stessa un'ulteriore soluzione. Per permettere che $|\Psi|^2$, ovvero la densità di probabilità⁸, non dipenda dal tempo t , basta che la funzione d'onda Ψ abbia la forma $\Psi(r, t) = \psi(r)f(t)$ (un'ulteriore precisazione è trovabile in nota)⁹ con $|f(t)|^2 = 1$ così che $|\Psi(r, t)|^2 = |\psi(r)|^2$

L'equazione di Schrödinger diviene:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\psi(r)f(t)] = \hat{H}[\psi(r)f(t)]$$

In questo caso vogliamo prendere in considerazione il moto di una particella in un potenziale statico. Notiamo come l'operatore hamiltoniano non agisca sulle coordinate temporali dato che contiene le derivate spaziali. Possiamo dunque scrivere l'equazione nel seguente modo: $i\hbar \left(\frac{\partial f(t)}{\partial t} \right) \psi(r) = (\hat{H}\psi(r)) f(t)$ e separando le due parti dell'equazione:

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = \frac{\hat{H}\psi(r)}{\psi(r)}$$

A sinistra abbiamo una funzione dipendente unicamente dal tempo mentre a destra una funzione che dipende dalla posizione. Per fare sì che l'equazione sia sempre valida per ogni momento t e posizione r , i due membri dell'equazione devono essere uguali ad una costante. La costante in questione deve essere espressa in unità di energia e la indicheremo con la lettera E .

$$\begin{cases} \frac{i\hbar}{f(t)} \left(\frac{df(t)}{dt} \right) = E \\ \frac{\hat{H}\psi(r)}{\psi(r)} = E \end{cases}$$

Risolvendo la prima equazione troviamo che:

$$\frac{d}{dt} \ln f(t) = -i \frac{E}{\hbar} \text{ integrando rispetto } dt \rightarrow f(t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

⁷L'operatore hamiltoniano è un operatore lineare che determina l'evoluzione temporale delle funzioni d'onda, ma lo fa mantenendo la norma delle Ψ costante nel tempo, ovvero $\frac{d}{dt} \|\Psi\|^2 = 0$

⁸La funzione di densità di probabilità ci permette di assegnare la probabilità ad intervalli del nostro spazio. La probabilità che una nostra variabile assuma un valore, nell'intervallo a, b , è data da: $\int_a^b f(x) dx$

⁹in realtà sarebbe $\int_S |f(t)|^2 dt = 1$ dove con S si intende tutto lo spazio, ma essendo $f(t)$ una funzione esponenziale non necessitiamo di utilizzare l'integrale

La seconda equazione diviene:

$$\hat{H}\psi(r) = E\psi(r)$$

definendo $\hat{H} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r, t) \right] \psi(r) = E\psi(r)$

Questa è nota come l'equazione stazionaria di Schrödinger e tutte le soluzioni per le quali $|\Psi|^2$ è indipendente dal tempo si presentano sotto la seguente forma:

$$f(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

La risoluzione dell'equazione stazionaria di Schrödinger consente di individuare l'insieme delle funzioni che si mantiene intatta sotto l'operatore lineare \hat{H} , fatta eccezione per un moltiplicatore. Questi moltiplicatori sono gli autovalori E e le funzioni che risolvono quest'equazione sono dette autofunzioni di \hat{H} .

Dato che lo spazio vettoriale delle funzioni, che risolvono questa equazione, è complesso, avremo degli autovalori E dell'operatore hamiltoniano che saranno anch'essi complessi. Se fossero reali d'altronde possiamo trovarli con i valori ammessi per l'energia di una particella dalla funzione Ψ , è fondamentale trovare a quali circostanze E è reale, ovvero $E^* = E$ (dimostrazione tralasciata).

- 1) La funzione Ψ deve descrivere in modo univoco lo stato fisico di una particella, indicando la sua posizione e moto nello spazio e nel tempo. Per fare ciò, deve essere una funzione continua con un solo valore finito per ogni punto dello spazio.
- 2) vogliamo che la quantità di moto sia definita univocamente ovunque nello spazio, dato che la quantità di moto p è associata alla derivata di Ψ rispetto al tempo, allora Ψ deve poter essere derivabile e la prima derivata deve essere continua.

8.4 Buche di Potenziale

Risolviamo l'equazione di Schrödinger stazionaria per una particella che si muove lungo una sola direzione, si tratta di risolvere l'equazione monodimensionale e trovare gli stati stazionari della particella.

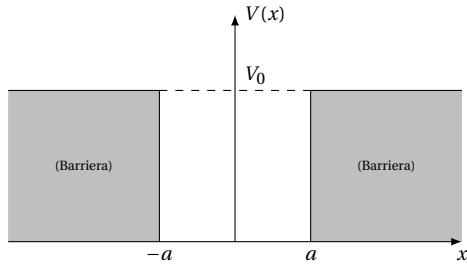
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Risolvendola si trova l'equazione d'onda $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \psi(x)e^{-i\omega t}$

Assumiamo che $\psi(x)$ sia una funzione continua e limitata avente la derivata prima anch'essa continua. L'equazione di Schrödinger stazionaria ha solo $\psi(x)$ come grandezza complessa, il resto sono grandezze reali, ciò implica che se $\psi(x)$ è una soluzione di $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ allora vale $(\hat{H}\psi(x))^* = (E\psi(x))^* \rightarrow \hat{H}\psi(x)^* = E\psi(x)^*$ e $\psi(x)^*$ è anch'essa una soluzione della stessa equazione di Schrödinger avente lo stesso autovalore E . Dato che l'equazione è lineare, secondo l'algebra lineare qualsiasi combinazione di ψ e ψ^* , i 2 autovettori, sarà una

8.4 Buche di Potenziale

soluzione anch'essa dell'equazione. La funzione $\psi + \psi^*$ è una soluzione ma reale. Per praticità utilizzeremo ψ di modulo pari a 1 e questo è possibile dato che un autovettore moltiplicato per uno scalare c è comunque una soluzione. Una buca (quadra) di potenziale può essere schematizzata nel seguente modo:



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq a \\ V_0 & \text{se } |x| > a \end{cases}$$

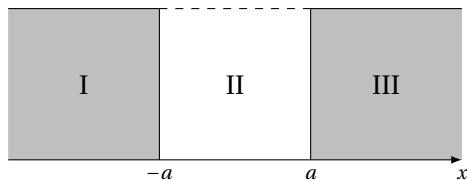
In questo grafico possiamo identificare 3 zone, 2 di queste a potenziale V_0 e l'intervallo tra $-a$ e a che ha potenziale $V = 0$. Chiamiamo $\epsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}$ e $U_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, allora l'equazione di Schrödinger negli intervalli a potenziale diverrà:

$$\psi'' = (U_0 - \epsilon) \psi$$

Nell'intervallo tra $-a$ e a l'equazione di Schrödinger assumerà la forma:

$$\psi'' = -\epsilon \psi$$

Per semplicità chiameremo le zone a potenziale V_0 rispettivamente regioni *I* e *III* e la regione centrale la chiamiamo regione *II*



Per $0 < \epsilon < U_0$ le soluzioni nelle regioni *I* e *III* saranno $e^{\pm x \sqrt{U_0 - \epsilon}}$. Si tratta di una funzione monotona e a dipendenza del segno sarà monotona crescente o decrescente. La funzione e^{qx} per $x \rightarrow +\infty$ diverge, mentre la funzione¹⁰ e^{-qx} divergerà solo per $x \rightarrow -\infty$. Dato che cerchiamo funzioni con l'insieme delle immagini limitato, useremo solo funzioni che

¹⁰ $q = \sqrt{U_0 - \epsilon}$

convergono.

$$\text{regione } I : \psi_I = C_I \cdot e^{qx}$$

$$\text{regione } III : \psi_{III} = C_{III} \cdot e^{-qx}$$

Nella regione II le soluzioni assumono la forma:

$$\psi_{II} = A \cos(kx) + B \sin(kx) \mid k = \sqrt{\epsilon}$$

L'incognita ϵ è l'autovalore E adimensionale (Chiedere a valentino l'adimensionale) Ora verifichiamo che sia ψ che ψ' siano continue in $x = \pm a$

$$C_I \cdot e^{-qa} = A \cos(ka) - B \sin(ka)$$

$$C_{III} \cdot e^{qa} = A \cos(ka) + B \sin(ka)$$

Per le derivate:

$$qC_I \cdot e^{-qa} = Ak \sin(ka) + BK \cos(ka)$$

$$-qC_{III} \cdot e^{qa} = -Ak \sin(ka) + BK \cos(ka)$$

Ne segue che:

$$\begin{cases} q = \frac{Ak \sin(ka) + BK \cos(ka)}{A \cos(ka) - B \sin(ka)} \\ -q = \frac{-Ak \sin(ka) + BK \cos(ka)}{A \cos(ka) + B \sin(ka)} \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} A[q \cos(ka) - k \sin(ka)] - B[q \sin(ka) + k \cos(ka)] = 0 \\ -A[q \cos(ka) - k \sin(ka)] - B[q \sin(ka) + k \cos(ka)] = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} B = 0 \\ q \cos(ka) - k \sin(ka) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ q \sin(ka) + k \cos(ka) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Nelle condizioni (1), all'interno della buca, la funzione d'onda assume la forma: $\psi_{II} = A \cos(kx)$. Introduciamo 2 nuove grandezze: $\xi = ka$ e $\eta = qa$. Ricordando le definizioni di k ($k = \sqrt{\epsilon}$) e q ($q = \sqrt{U_0 - \epsilon}$) ne consegue che: $\xi^2 + \eta^2 = U_0 a^2$ e che $\eta = \xi \tan(\xi)$ (magari passaggi negli allegati?)

Creando un sistema possiamo cercare numericamente le soluzioni, ma allo stesso momento

possiamo dimostrare che le soluzioni sono discrete.

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = U_0 a^2 \\ \eta = \xi \tan(\xi) \end{cases}$$

Possiamo tracciare un grafico avente ξ come asse delle ascisse e η come asse delle ordinate, le soluzioni del sistema corrispondono all'intersezione tra un cerchio di raggio $a\sqrt{U_0}$ e le curve della funzione $\xi \tan(\xi)$

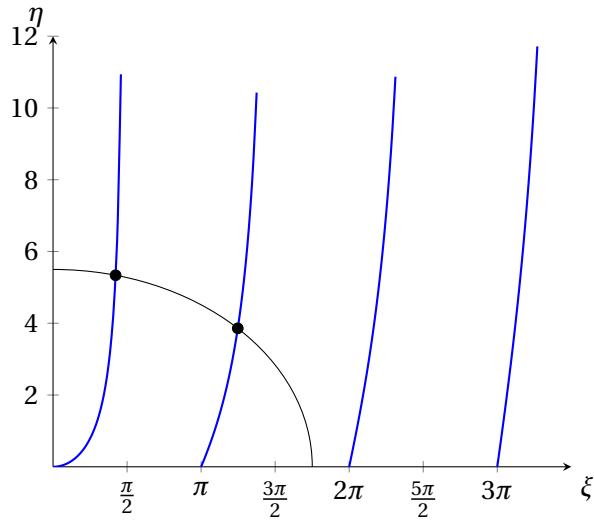


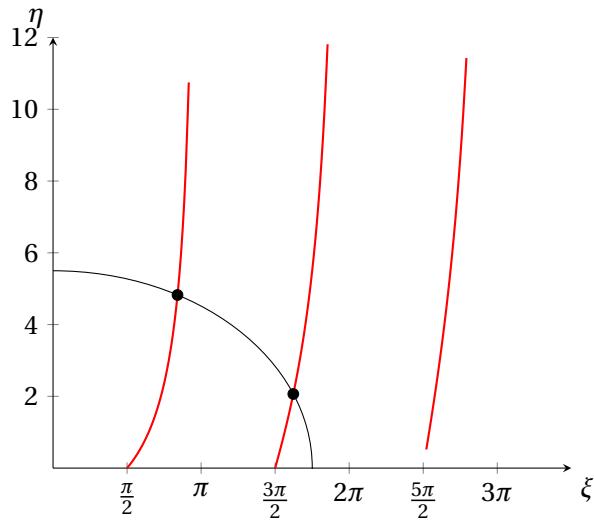
Figura 5: caso $\pi < r < 2\pi$ | $r = a\sqrt{U_0}$

Nel caso in cui $a\sqrt{U_0} < \pi$ abbiamo una sola intersezione che si trova nell'intervallo $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$. Per $\pi < a\sqrt{U_0} < 2\pi$ abbiamo 2 intersezioni, la seconda si trova nell'intervallo $\pi < \xi < \frac{3\pi}{2}$ e così via. Il numero di stati stazionari ammessi dall'equazione di Schrödinger aumenta in funzione della larghezza e della profondità della buca e i valori ammessi per l'energia sono discreti (valori di k).

Le condizioni (2), ovvero il caso $\psi_{II} = B \sin(kx)$, ci permettono di scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = U_0 a^2 \\ \eta = -\xi \cot(\xi) \end{cases}$$

Anche in questo caso è osservabile come le soluzioni trovate siano discrete. Per una data buca, con U_0 e a definiti, gli stati stazionari si alternano tra stati pari e stati dispari in funzione dell'aumento dell'autovalore dell'energia. Lo stato di energia minimo è lo stato pari $0 < \xi < \frac{\pi}{2}$,


 Figura 6: caso $\pi < r < 2\pi$ | $r = a\sqrt{U_0}$

che ne consegue $0 < E < \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}$. Per gli stati pari, la continuità della funzione in $x = a$ e $x = -a$ è garantita se i coefficienti C_I e C_{III} sono uguali e il loro valore è fissato dall'ampiezza A. Gli stati dispari devono avere segno opposto e il loro valore è stabilito dall'ampiezza B.

L'equazione di Schrödinger, a patto che le condizioni di continuità della funzioni e delle loro derivate prime siano rispettate, ci procura le autofunzioni¹¹ ψ che non hanno modulo fissato, si può imporre che le ψ abbiano modulo normalizzato, ovvero pari ad 1.

¹¹È un autovettore nello spazio di Hilbert

9 Conclusioni

Grazie a questo lavoro di maturità ho potuto esplorare varie tappe della meccanica quantistica che mi hanno permesso di comprendere meglio non solo le basi di questa meccanica, bensì la bellezza della natura a livello subatomico. La meccanica classica è descritta dall'equazione di Newton, mentre la meccanica quantistica è governata dall'equazione di Schrödinger, un'equazione che ci permette di descrivere i sistemi quantistici in termini di funzioni d'onda e di calcolare le probabilità di trovare una particolare configurazione del sistema. Tuttavia, questa descrizione quantistica porta alla conclusione che gli stati quantistici sono discreti e non continui, a differenza degli stati descrivibili dalle equazioni della fisica classica. Da questo lavoro ho potuto comprendere come la discretizzazione degli stati sia uno dei concetti fondamentali della meccanica quantistica, essa infatti fornisce anche una spiegazione per fenomeni come la quantizzazione dell'energia e l'effetto fotovoltaico, che sono stati osservati sperimentalmente.

II Diffrazione di elettroni DIY

I ragazzi liceali non vengono introdotti durante la loro formazione alla meccanica quantistica e 15 interrogati su 15 la hanno associata al gatto di Schröedinger. Il fine della mia attività consiste nell'offrire ai giovani studenti del liceo un'occasione di apprendere i concetti fondamentali di questa branca della fisica, permettendo loro di riprodurre, riprogettare e migliorare il mio esperimento DIY¹². Ho scelto la diffrazione degli elettroni poiché rappresenta un equilibrato compromesso tra la complessità teorica e quella pratica nella costruzione.

10 Domanda di partenza

Questa ricerca si concentra sulla possibilità di costruire una strumentazione per la diffrazione di elettroni utilizzando un budget inferiore rispetto alle attrezzature di laboratorio specifiche offerte dalle aziende produttrici. L'obiettivo principale è valutare se sia possibile creare un apparato economico e funzionale per ottenere un pattern di diffrazione circolare visualizzabile sullo schermo.

11 Introduzione all'esperimento

Questo esperimento consiste in un sistema che emette elettroni, sfruttando l'effetto termo-ionico, i quali vengono accelerati e attraverso un reticolo vengono diffratti. Tra il catodo e l'anodo è necessario applicare una differenza di potenziale per accelerare gli elettroni nel vuoto.

¹²DIY sta per Do It Yourself, ovvero fallo te stesso

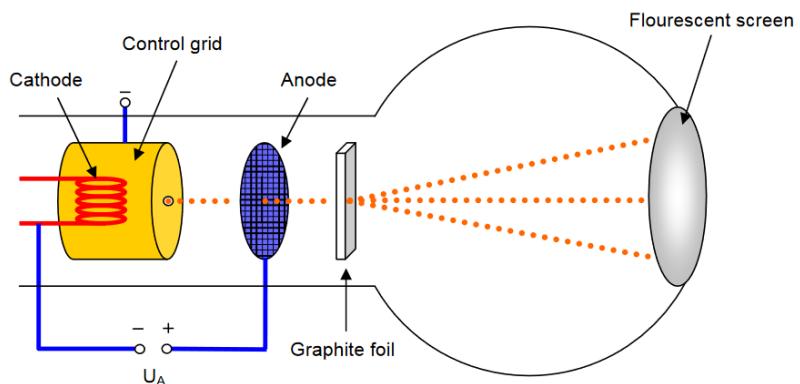


Figura 7: Diagramma dell'esperimento

La lunghezza degli elettroni varia in funzione della tensione applicata secondo la lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot q \cdot V}}$. La legge di Bragg¹³ $n\lambda = 2d \sin(\theta)$ ci ha permesso di calcolare il numero di cerchi che avremmo dovuto vedere fissando d la distanza tra lo strato di grafite e lo schermo e il raggio dello schermo.

V	$\lambda(pm)$
6000	15.8331
7000	14.6586
8000	13.7119
9000	12.9277
10000	12.2643
11000	11.6935
12000	11.1957

 Tabella 2: Lunghezza d'onda λ in funzione della tensione V

 13

θ è l'angolo che gli elettroni formano col piano cristallino
d è la distanza interplanare

11.1 Grafite

D	d_{100}	d_{110}	r_{schermo}	θ	n_{100}	n_{110}
0.09 m	$2.10 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$1.21 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	0.02 m	$\arctan(\frac{r_{\text{schermo}}}{D}) = 0.219$	7.429	4.281

Tabella 3: Dati dell'esperimento e numero di massimi

D è la distanza tra lo schermo e lo strato di grafite, mentre r_{schermo} è il raggio massimo dello schermo.

Per permettere che la diffrazione avvenga bisogna scegliere un materiale che abbia spaziatura interplanare simile alla lunghezza d'onda, per questo esperimento abbiamo scelto di fissare il voltaggio a 10kV e la grafite è risultata essere il materiale più idoneo per questo esperimento.

11.1 Grafite

Gli atomi di carbonio nella grafite formano un reticolo esagonale a strati chiamati grafene. La grafite ha le distanze $d_{100} = 2.10 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 210 \text{ pm}$ e $d_{110} = 1.21 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 121 \text{ pm}$

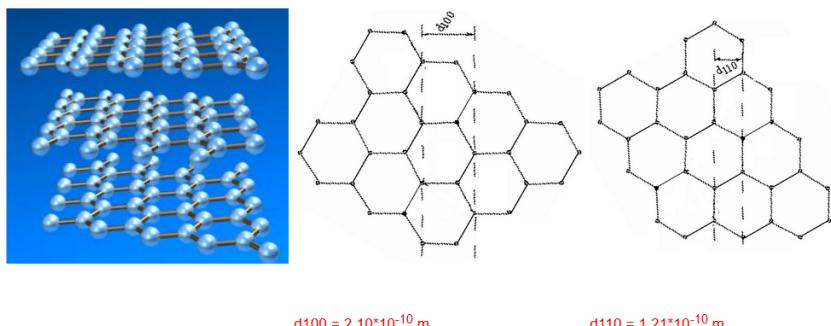
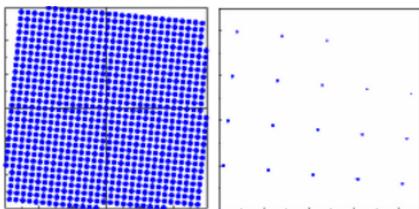


Figura 8: Illustrazione grafite

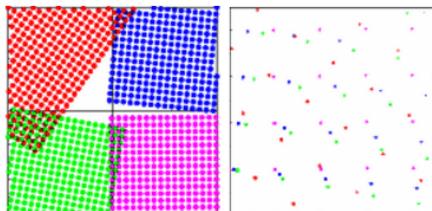
Gli elettroni vengono difrattati dalla struttura policristallina della grafite, difatti non è un singolo cristallo e ognuno di essi è orientato in modo randomico. La diffrazione di polveri produce uno schema di anelli concentrici e questi pattern sono solo la sovrapposizione dei modelli prodotti dai singoli cristalli con orientamenti casuali.

12 Fase di progettazione



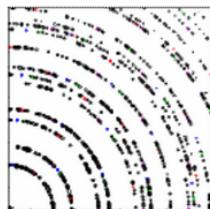
Nella figura 9 è illustrato un singolo cristallo con un orientamento fisso e il suo pattern di diffrazione che è roteato del medesimo angolo del cristallo

Figura 9: mono layer



Nella figura 10 sono illustrati 4 cristalli orientati in modo diverso e i pattern di diffrazione dei medesimi colori dei cristalli illustrati

Figura 10: 4 layer



Nella figura 11 si può vedere chiaramente il pattern di cerchi concentrici facendo uso di 40 cristalli

Figura 11: 40 layer

12 Fase di progettazione

La prima fase è stata quella in cui ho studiato l'esperimento presente nei laboratori del LiLu₂, ho dunque fotografato e compreso la struttura che regge il catodo, l'anodo e la griglia.

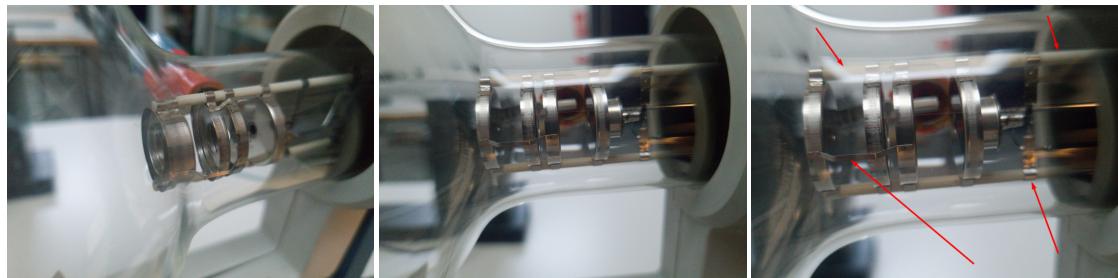


Figura 12: Diversi punti di vista della struttura

Come illustrato in figura 12, questa struttura ha delle componenti piccole che stampate in plastica risulterebbero fragili e difficili da stampare. È stato necessario sviluppare una struttura

12 Fase di progettazione

che fosse meno complessa ma allo stesso tempo che resistesse al vuoto. Per limitare i costi è stato deciso di fare uso di un chiodo come catodo e della carta alluminio come anodo, alla quale applichiamo un foro. La struttura finale è stata progettata in 3 diverse parti su Autodesk Inventor, per assemblare le 3 parti non è necessario l'uso di colle o adesivo perché sono state concepite per incastrarsi tra di loro usando anche delle spine cilindriche.

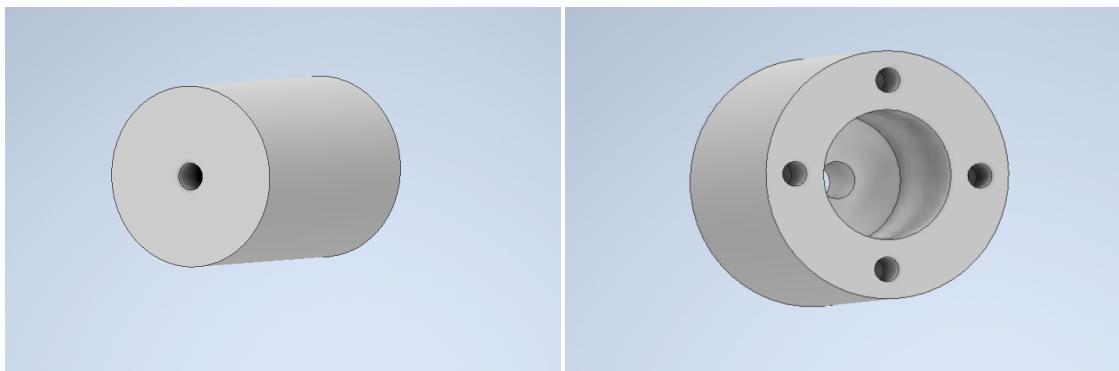


Figura 13: Punti di vista del modello 3d



Figura 14: Componente stampata e con spine
Figura 15: Componente con anodo, catodo, spina e cavo di rame

Le spine avremmo potuto stamparle, ma per via delle loro piccole dimensioni la stampante 3D avrebbe avuto qualche difficoltà. Si è optato per l'uso di un sottile chiodo tagliato con delle tronchesine in modo tale da avere le spine cilindriche in metallo (come si vede in foto). Lo strato di grafite mi è stato gentilmente offerto dal professor Klaus Ensslin dell'ETHZ, ma il medesimo strato è acquistabile presso il seguente link:

https://www.klangspiel.ch/graphit_ersatz_quadro_17/

12 Fase di progettazione



Figura 16: strato di grafite dallo spessore di 0.3mm

Questo strato di grafite doveva rimanere centrato alla beuta e per tenerlo in posizione sono stati progettati due pezzi ad incastro su misura che lo strato di grafite rimanesse in posizione.

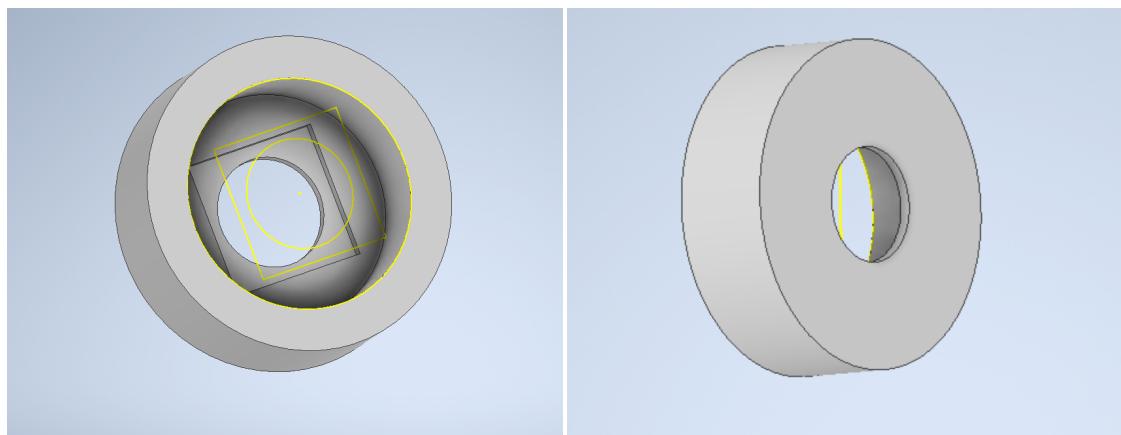


Figura 17: componente che mantiene ferma la griglia

12 Fase di progettazione

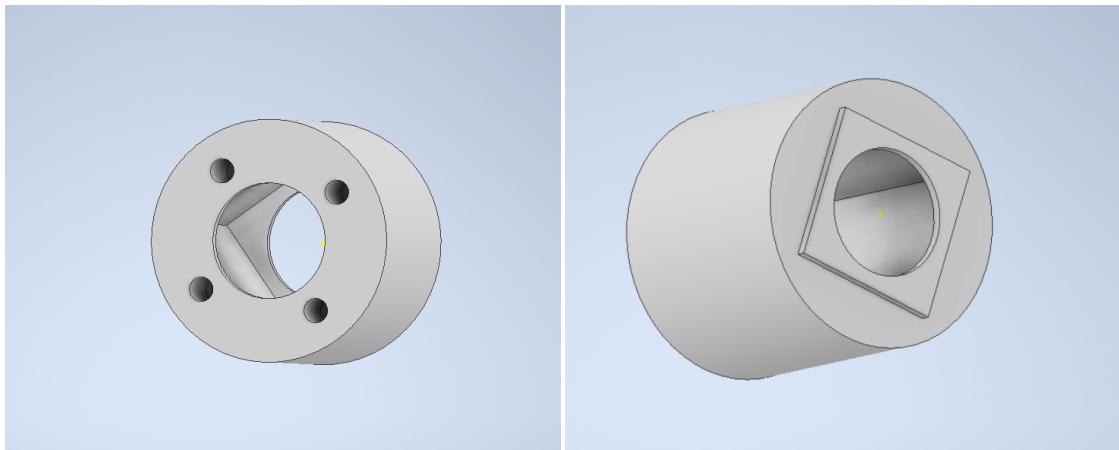


Figura 18: Componente che collega le due precedenti



Figura 19: pezzo collegante stampato

Figura 20: case della grafite

Dopo aver progettato queste parti su Inventor, ho esportato i modelli in .stl per importarli in Ultimaker Cura, un software di slicing che divide la geometria in strati. Ci sono vari settings

12 Fase di progettazione

cambiabili come la percentuale di infill, il numero di layer per mm di altezza e la velocità di stampa. Da Cura vengono esportati vari file .gcode che vengono letti dalla stampante. Queste parti sono state quindi stampate con la mia stampante 3D, una Flsun SuperRacer, in PLA a 50mm/s. Questa velocità è relativamente bassa ed è stata scelta personalmente per avere una qualità migliore nel risultato finale. Se si stampano troppo velocemente die pezzi piccoli, come nel nostro caso, si rischia che l'estrusore non riesca a stare dietro a questa velocità e di conseguenza estrude meno filamento di quello che il software pensa. Questo influisce dunque sulla resistenza della struttura stessa dell'oggetto, ma non è l'unico problema; se la stampa dei primi layer è troppo veloce si rischia che la stampa non aderisca al piatto e che quindi il filamento si attacchi al nozzle.

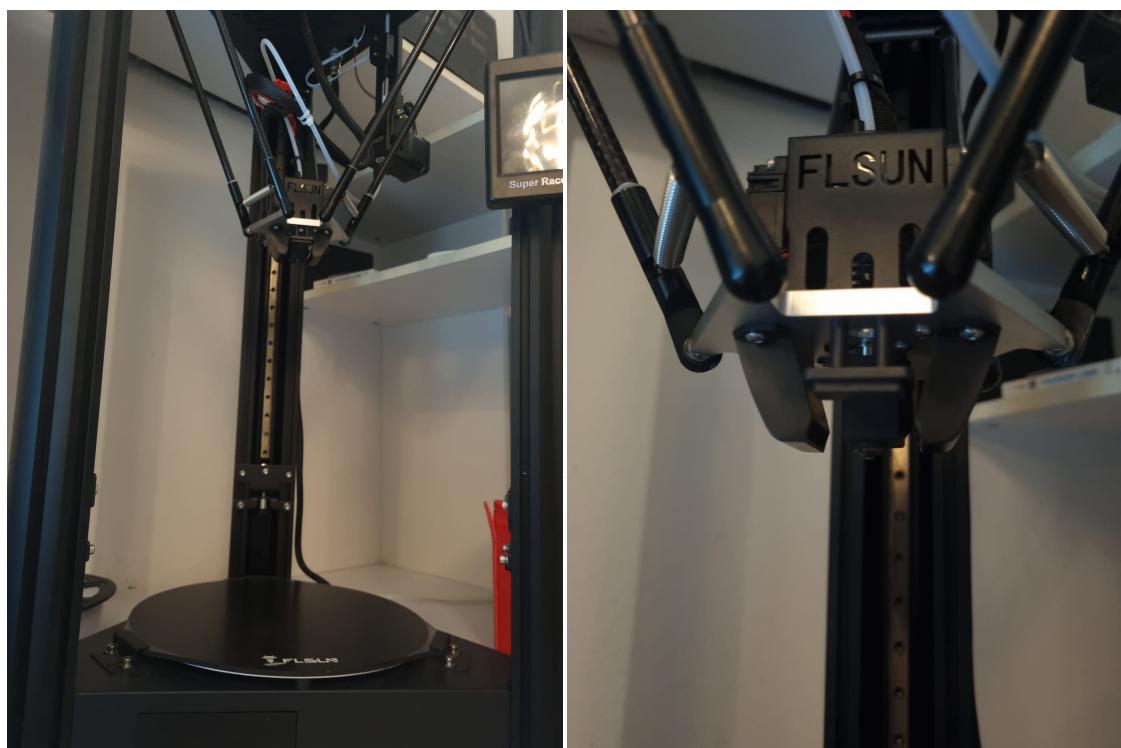


Figura 21: Flsun SuperRacer, stampante 3D delta

Una volta assemblato, la nostra "electron gun" risulta essere come nella figura 23

12.1 Schermo di ZnS(Cu)



Figura 22: Electron gun



Figura 23: Electron gun inserita nella beuta

12.1 Schermo di ZnS(Cu)

Per visualizzare la posizione degli elettroni una volta che vengono difratti, facciamo uso di uno schermo fosforescente. Si potrebbe usare uno schermo di fosforo, ma questa sostanza è estremamente tossica e perciò abbiamo optato di utilizzare uno schermo di sulfuro di zinco ZnS. Durante il primo tentativo abbiamo mischiato 0.5g di $ZnCl_2$ con 3.86mL di $Na_2S \cdot 4H_2O$, abbiamo successivamente filtrato l'acqua della nostra soluzione per avere solamente solfuro di zinco. Questo solfuro è stato poi inserito nel beuta in una soluzione di etanolo, questo etanolo lo abbiamo lasciato evaporare¹⁴ a 50°C per far sì che il ZnS si depositasse sul fondo. Al primo tentativo si è depositato con successo ma non riscontravamo alcuna fluorescenza con l'uso di una luce UV.

¹⁴non bisogna farlo evaporare ad alte temperature altrimenti il solfuro di zinco si sparge su tutte le pareti della beuta



Figura 24: evaporazione a 50°C



Figura 25: ZnS depositato sul fondo della beuta

Durante il secondo tentativo, abbiamo inserito 0.003M di CuCl₂ 25mL in modo tale da drogare il nostro composto e avere come risultato del ZnS con impurità di rame. Avremmo potuto drogarlo con dell'argento però avrebbe avuto un costo maggiore il nostro esperimento. Non siamo riusciti a far evaporare in tempo l'etanolo di questo tentativo, ma con una luce UV si riuscivano ad intravedere dei segni di fluorescenza.

13 Analisi dei costi

Materiale	quantità	costo
PLA	10g	0.30 CHF
Beuta	1 + spedizione	57.6 CHF
Cavo di rame	10cm	0.20 CHF
Strato grafite	1 + spedizione	15 + 1.45 = 16.45 CHF
Autodesk Inventor	6 mesi	gratuito per studenti

Tabella 4: Costi materiali

14 Risultati e considerazioni

Il totale dei costi è di 74.55 CHF, ma in questo risultato non sono stati presi in considerazione né il costo della stampante 3D né dell'elettricità per utilizzare essa. La stampante 3D usata è una Flsun Superracer che costa dai 450 ai 500 chf a dipendenza dello store in cui viene presa. Si può optare di utilizzare i servizi di stampa online e cercando su vari siti, i prezzi per la stampa dei 3 pezzi oscillano tra 30 e 50 CHF in PLA. Nei costi non sono stati inclusi neanche i prezzi dei composti chimici utilizzati, questi materiali non sono recuperabili da chiunque e quindi per provare a ricostruire questo esperimento è richiesto un laboratorio di chimica ben fornito. Questo non dovrebbe essere un problema per dei ragazzi liceali dato che tutte le scuole superiori sono fornite di laboratori. Considerando i circa 75 franchi di costruzione più i 50 franchi per i pezzi stampati in PLA, il costo totale sarebbe di 125 CHF, un prezzo competitivo rispetto al prezzo di un electron tube che varia dai 950 ai 1600 chf a dipendenza del produttore. Se non si è muniti di una stampante 3D si riesce a realizzare questo esperimento col 13.16 % di 950CHF.

14 Risultati e considerazioni

Ci aspettavamo un pattern di diffrazione di cerchi concentrici sul nostro schermo ma non è stato possibile visualizzarlo per 2 motivi. Purtroppo non siamo riusciti ad ottenere in tempo lo schermo funzionante, ma un altro problema riscontrato è dovuto al materiale scelto per la struttura: il chiodo infatti per emettere elettroni deve essere portato ad alte temperature che facevano sciogliere la plastica PLA, avremmo quindi avuto una struttura instabile e insicura dato che all'interno della beuta stavamo facendo il vuoto. Per ovviare al problema si potrebbe utilizzare lo stesso modello progettato da me, ma prodotto da qualche ferramenta o azienda in metallo, in questo modo non si rischierebbe in alcun modo che la struttura si sciolga.

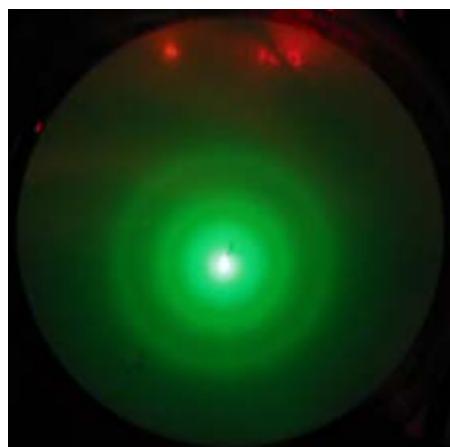


Figura 26: Pattern previsto

III Appendice

15 Allegati

15.1 Dimostrazione del principio di equipartizione di Boltzmann

L'equazione per l'energia media secondo Boltzmann è:

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE}$$

Risolviamo prima il denominatore:

$$\begin{aligned} \int e^{\frac{-x}{k}} dx \text{ se } t = \frac{-x}{k} \text{ allora } dx = \frac{1}{t'} dt \\ t = \frac{-x}{k} \longrightarrow t' = \frac{-1}{k} \\ \int e^{\frac{-x}{k}} \frac{1}{\frac{-1}{k}} dt = \int -ke^{\frac{-x}{k}} dt = -k \int e^t dt \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{\infty} e^{-E/kT} dE = -kT \Big|_0^{\infty} e^{-E/kT} = kT$$

Risolviamo il nominatore:

$$\int_0^{\infty} E e^{-E/kT} dE$$

Integrando per parti sappiamo che:

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g$$

15.1 Dimostrazione del principio di equipartizione di Boltzmann

Quindi:

$$\left(-kTe^{-E/kT}E \right) \Big|_0^\infty + kT \int_0^\infty e^{-E/kT} dE$$

La prima parte tende a 0 ed è dimostrabile utilizzando de l'Hôpital mentre la seconda parte sarà uguale a $(kT)^2$ e l'integrale è il medesimo di quello risolto per il denominatore.

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/kT} dE}{\int_0^\infty e^{-E/kT} dE} = \frac{(kT)^2}{kT} = kT$$

16 Referenze

Bibliography

- [1] Joseph Agassi. "The Kirchhoff-Planck Radiation Law". In: *Science* 156.3771 (1967), 30–37. DOI: [10.1126/science.156.3771.30](https://doi.org/10.1126/science.156.3771.30).
- [4] A. Einstein. "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt". In: *Annalen der Physik* 322.6 (1905), pp. 132–148. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053220607>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19053220607>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19053220607>.
- [5] Luca Forte e Luca Rottoli. *Fisica Quantistica*. Zanichelli, 2019.

Sitography

- [2] Fabrizio Carbone. *The first ever photograph of light as both a particle and wave*. 2022. URL: <https://actu.epfl.ch/news/the-first-ever-photograph-of-light-as-both-a-parti/>.
- [3] CERN. *Electron diffraction tube*. [Online; accessed 22-02-23]. URL: <https://indico.cern.ch/event/36368/contributions/1777448/attachments/723409/992910/electron-diffraction-tube-qrg.pdf>.
- [6] University of Illinois. *D'Alambert solution of the wave equation*. [Online; accessed 9-11-22]. URL: <https://faculty.math.illinois.edu/~jlebl/286-dalemb.pdf>.
- [7] Department of Physics e Astronomy of the University of Tennessee Knoxville. *Electron diffraction*. [Online; accessed 25-02-23]. URL: http://electron6.phys.utk.edu/phys250/modules/module%202/electron_diffraction.htm.
- [8] Tamer Tolba, Lucian Ancu. *Franck-Hertz data for Mercury tube*. [Online; accessed 28-10-22]. 2013. URL: https://www.physik.unibe.ch/unibe/portal/fak_naturwis/b_paw/a_fphyast/content/e41821/e41822/e140946/e148625/e270487/files270494/Franck-Hertz_ger.pdf.
- [9] tikz.net. *tikz.net blackbody graphs*. [Online; accessed 10-10-22]. URL: <https://tikz.net/blackbody/>.