Serie 11 - Esponenziali

"Il problema dell'umanità è che gli stupidi sono sempre sicurissimi, mentre gli intelligenti sono pieni di dubbi."

B. Russell

1. Calcola senza utilizzare la calcolatrice:

(i) $(2^2)^3$

(ii) $2^{(2^3)}$

(iii) $(\sqrt{5})^6$

(iv) $\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)^8$

(v) $4^0 \cdot 4^{-2}4^{-3}$

(vi) $\sqrt[2]{0}$

(vii) $\sqrt[2]{625}$

(a) $a^2 \cdot a^4 \cdot a^5$

(b) $a^{-n}a^{n+1}$

(c) $\frac{a^n}{a^{n-1}}$

(d) $\left(\frac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^2$

(e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$

(f) $\frac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

(g) $\sqrt[3]{1000}$

(h) $\sqrt[3]{0,001}$

2. Calcola utilizzando le regole per le potenze:

a) $10^{\frac{5}{2}} \cdot \left(10^{\frac{1}{2}} : 10^{-\frac{3}{2}}\right)$

b) $\pi^{\frac{1}{2}} : \pi \cdot \pi^{-\frac{1}{2}}$

c) $a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right)$

d) $\left(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

e) $8^{0,25} \cdot (3 \cdot 2^{0,25} + 2 \cdot 32^{0,25} - 8^{0,75})$

f) $9^{-0,3} \cdot 9^{0,7} \cdot 9^{1,1} \cdot 9$

g) $\left(\dfrac{3^{-4} \cdot 5^3}{3^{11} \cdot 5^{-2}}\right)^{\frac{1}{5}}$

h) $\dfrac{a^3 : (a^{-2})^{\frac{1}{4}}}{b^3 : (b^{-3})^{\frac{1}{2}}} : \left(\dfrac{a^2 : (a^{-1})^{\frac{1}{3}}}{b^2 : (b^{-2})^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{15}{12}}$

i) $\sqrt[4]{\sqrt{17}+1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{17}-1}$

j) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{13}}} \cdot \sqrt[12]{a^{11}}$

3. Un foglio di carta ha lo spessore di $\frac{1}{10}$ mm. Supponiamo che sia possibile piegarlo a piacimento.

a) Quale sarà il suo spessore dopo che lo abbiamo piegato per n volte a metà?

b) Prova a stimare il numero di piegature necessarie affinchè lo spessore del foglio superi l'altezza dell'aula (ca. 3 m).

c) Prova a stimare il numero di piegature necessarie affinchè lo spessore del foglio superi la distanza terra-luna (ca. $3,844 \cdot 10^8$ m).

d) Dopo aver piegato il foglio fino a toccare la luna ci ritroviamo con una "torre" a base quadrata di lato 2 cm. Quando era grande il foglio utilizzato (foglio quadrato)?

Nota: tra qualche settimana risolveremo questo genere di esercizi sfruttando le proprietà dei cosiddetti *logaritmi*).

4. Rappresenta le funzioni:

$$f : x \mapsto y = \left(\frac{3}{4}\right)^x \quad , \quad g : x \mapsto y = (\sqrt{3})^x \quad , \quad h : x \mapsto y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$$

nello stesso sistema di riferimento.

5. Sapendo che i punti A e B giacciono sulla curva di equazione $y = b \cdot a^x$, determina a e b:

a) $A(1, \frac{1}{2})$, $B(16, \frac{1}{16})$; **b)** $A(1, 1)$, $B(32, 16)$; **c)** $A(4, 40)$, $B(16, 320)$.

6. Senza usare la calcolatrice, determina $\min(a, b)$:

a) $a = 27$, $b = 9^{\sqrt{2}}$; **b)** $a = 100^\pi$, $b = 10^6$; **c)** $a = 2^\pi$, $b = 4^{\sqrt{2}}$; **d)** $a = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $b = \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

7. * Risolvi le seguenti equazioni:

a) $4^x = 8$
b) $8^x = 2$
c) $25^x = \frac{1}{5}$
d) $x^4 = 10^{-4}$
e) $x^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$
f) $x^{\frac{7}{2}} = 10000000$
g) $10^{5x-\frac{1}{2}} = 10^{4x-1}$
h) $3^{4x} = 9^{x+5}$
i) $2^{4x-2} = 64$
j) $4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x$
k) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$
l) $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$.

8. * Determina un'approssimazione delle soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $2^x = 10$; **b)** $\pi^x = 100$; **c)** $x^x = 1000$.

9. * Il rapporto tra i volumi di 2 cubi è 2:1.

a) Calcola il rapporto tra gli spigoli. **b)** Calcola il rapporto tra le superfici totali.

10. * Esercizi Kangourou: questi esercizi sono stati proposti nella competizione di matematica dell'anno 2017.

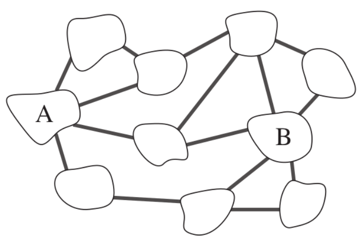
i) I due numeri positivi a e b sono tali che il 75% di a è uguale al 40% di b. Questo equivale a dire che:
A) $15a = 8b$ **B)** $7a = 8b$ **C)** $3a = 2b$ **D)** $5a = 12b$ **E)** $8a = 15b$

ii) Ognuna delle scatole raffigurate qui sotto contiene palline rosse e palline blu, nel numero precisato. Carlo deve prendere, senza guardare, una pallina da una delle scatole. Da quale scatola dovrà pescare per avere la massima probabilità di prendere una pallina blu?
A) 10 blu, 8 rosse **B)** 6 blu, 4 rosse **C)** 8 blu, 6 rosse **D)** 7 blu, 7 rosse **E)** 12 blu, 9 rosse

iii) Due numeri interi positivi consecutivi sono tali che la somma delle cifre di ciascuno dei due è un multiplo di 7. Qual è il minimo numero di cifre che può avere il più piccolo dei due numeri?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

iv) Se $|x| + x + y = 5$ e $x + |y| - y = 10$ quanto vale $x + y$?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

v) In figura si vedono 10 isole collegate da 15 ponti.



Se vogliamo rendere impossibile andare da A a B camminando, qual è il minimo numero di ponti che basta eliminare?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Soluzioni

1. Soluzioni:

(i) $4^3 = 64$

(ii) $2^8 = 256$

(iii) $5^3 = 125$

(iv) $\frac{1}{3^{8/2}} = \frac{1}{81}$

(v) $4^{0-2-3} = 4^{-5}$

(vi) 0

(vii) $\sqrt[2]{25^2} = 25$

(a) a^{11}

(b) $a^{-n+n+1} = a$

(c) $a^{n-(n-1)} = a$

(d) $\left(a^{-3-(-4)}\right)^2 = a^2$

(e) $2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$

(f) $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

(g) $\sqrt[3]{10^3} = 10$

(h) $\sqrt[3]{10^{-3}} = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

2. **a)** $10^{\frac{5}{2}} \cdot \left(10^{\frac{1}{2}} : 10^{-\frac{3}{2}}\right) = 10^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)} = 10^{\frac{9}{2}}$

b) $\pi^{\frac{1}{2}} : \pi \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}} = \pi^{-1} = \dfrac{1}{\pi}$

c) $a^{\frac{3}{4}} : \left(a^{\frac{2}{3}} : a\right) = a^{\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}-1\right)} = a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{12}}$

d) $\left(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 256^{\frac{1}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}} = \left(3 \cdot 2^{\frac{5}{3}} + 3 \cdot 27^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 4 \cdot 2^{\frac{8}{3}}\right) \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2^3 = -2$

e) $8^{0{,}25} \cdot \left(3 \cdot 2^{0{,}25} + 2 \cdot 32^{0{,}25} - 8^{0{,}75}\right) = 8^{\frac{1}{4}} \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot 32^{\frac{1}{4}} - 8^{\frac{3}{4}}\right) = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} - 2^{\frac{9}{4}}\right) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 - 2^3 = 6$

f) $9^{-0{,}3} \cdot 9^{0{,}7} \cdot 9^{1{,}1} \cdot 9 = 9^{-0{,}3+0{,}7+1{,}1+1} = 9^{2{,}5} = 9^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{9}\right)^5 = 3^5 = 243$

g) $\left(\dfrac{3^{-4} \cdot 5^3}{3^{11} \cdot 5^{-2}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(3^{-4-11} \cdot 5^{3+2}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{-3} \cdot 5 = \dfrac{5}{27}$

h) $\dfrac{a^3 : (a^{-2})^{\frac{1}{4}}}{b^3 : (b^{-3})^{\frac{1}{2}}} : \left(\dfrac{a^2 : (a^{-1})^{\frac{1}{3}}}{b^2 : (b^{-2})^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{15}{12}} = \dfrac{a^{3+\frac{1}{2}}}{b^{3+\frac{3}{2}}} : \left(\dfrac{a^{2+\frac{1}{3}}}{b^{2+\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{5}{4}} = \dfrac{a^{\frac{7}{2}}}{b^{\frac{9}{2}}} : \left(\dfrac{a^{\frac{7}{3}}}{b^{\frac{12}{5}}}\right)^{\frac{5}{4}} = \dfrac{a^{\frac{7}{2}-\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{4}}}{b^{\frac{9}{2}-\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{4}}} = a^{\frac{7}{12}} \cdot b^{-\frac{3}{2}}$

i) $\sqrt[4]{\sqrt{17}+1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{17}-1} = \sqrt[4]{(\sqrt{17}+1)(\sqrt{17}-1)} = \sqrt[4]{17-1} = \sqrt[4]{16} = 2$

j) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{13}}} \cdot \sqrt[12]{a^{11}} = a^{\frac{13}{12}} \cdot a^{\frac{11}{12}} = a^2$

3. **a)** Dopo 1 piegatura: $2 \cdot \dfrac{1}{10}$ mm ; dopo 2 piegature: $2^2 \cdot \dfrac{1}{10}$ mm ; dopo 3 piegature: $2^3 \cdot \dfrac{1}{10}$ mm ; ... dopo n piegature: $2^n \cdot \dfrac{1}{10}$ mm.

b) Dal momento che vale

$$\frac{1}{10} \cdot 2^{14} < 3000 < \frac{1}{10} \cdot 2^{15} \qquad \text{(in millimetri)}$$

dopo 15 piegature lo spessore supererà l'altezza dell'aula.

c) Dal momento che vale

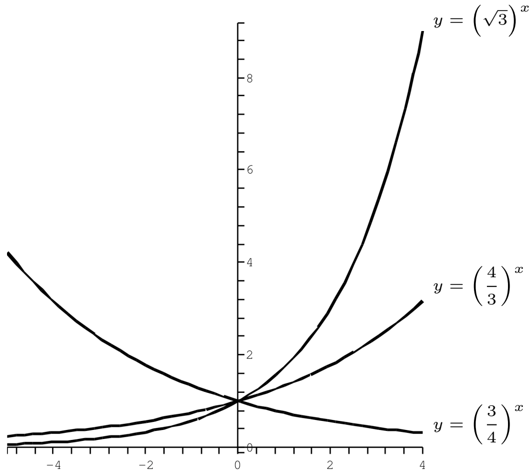
$$\frac{1}{10} \cdot 2^{41} < 3.844 \cdot 10^{11} < \frac{1}{10} \cdot 2^{42} \qquad \text{(in millimetri)}$$

dopo (soltanto!!!) 42 piegature lo spessore supererà la distanza terra-luna.

d) Notiamo innanzitutto che abbiamo bisogno di due piegature per dimezzare il lato del quadrato (la prima piegatura genera un rettangolo). Facendo il procedimento inverso (nota: per semplicità di calcolo al posto che 41 piegature ne utilizzeremo 42) otteniamo il lato del quadrato:

$$2(\text{cm}) \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{42}{2}} = 2^{21} \cong 2{,}07 \cdot 10^6 \text{ cm } = 20{,}7 \text{ km}.$$

4. Le tre funzioni:



5. In tutti e tre i casi, i dati conducono ad un sistema di equazioni nelle incognite a e b:

a) Dato che $f(1) = \dfrac{1}{2}$ e $f(16) = \dfrac{1}{16}$, deve valere $\begin{cases} \frac{1}{2} = b \cdot a^1 \\ \frac{1}{16} = b \cdot a^{16} \end{cases}$. Dalla prima equazione ricaviamo $b = \frac{1}{2a}$. Sostituendo nella seconda si ottiene $\frac{1}{16} = \frac{1}{2}a^{15}$, quindi $a = 8^{-\frac{1}{15}}$ e $b = \frac{1}{2} \cdot 8^{\frac{1}{15}}$. La funzione cercata si può quindi scrivere come segue:

$$y = ba^t = \frac{1}{2} \cdot 8^{\frac{1}{15}} \cdot \left(8^{-\frac{1}{15}}\right)^t = \frac{1}{2} \cdot 8^{\frac{1-t}{15}} \quad .$$

b) Risolviamo il sistema $\begin{cases} 1 = b \cdot a^1 \\ 16 = b \cdot a^{32} \end{cases}$; otteniamo $b = a^{-1}$ dalla prima equazione, e sostituendo nella seconda $16 = a^{31}$, $a = 16^{\frac{1}{31}}$. Quindi $b = 16^{-\frac{1}{31}}$ e la funzione cercata è

$$y = ba^t = 16^{-\frac{1}{31}} \cdot \left(16^{\frac{1}{31}}\right)^t = 16^{\frac{1}{31}(t-1)} \quad .$$

c) Procedendo come sopra, otteniamo $a = 8^{\frac{1}{12}}$, $b = 40 \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$ e la funzione

$$y = 40 \cdot 8^{\frac{1}{12}t - \frac{1}{3}} \quad .$$

6. Ricorda che, per $c > 1$, vale $c^s < c^t \iff s < t$.

a) $a = 27 = 3^3$, $b = 9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$, $3 > 2\sqrt{2}$,

b) $a = 100^\pi = 10^{2\pi}$, $b = 10^6$, $2\pi > 6$,

c) $a = 2^\pi$, $b = 4^{\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}}$, $\pi > 2\sqrt{2}$

d) Interpretando $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ come una funzione esponenziale, sappiamo che essa è **decrescente** (base inferiore a 1). Ciò implica che per $3 < 4$ otteniamo $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

e quindi in tutti e quattro i casi vale $a > b$.

7. Ricorda: per l'iniettività della funzione esponenziale vale $a^b = a^c \iff b = c$.

a) $4^x = 8 \iff (2^2)^x = 8 \iff 2^{2x} = 2^3 \iff 2x = 3 \iff x = \frac{3}{2}$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $8^x = 2 \iff 2^{3x} = 2^1 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$, $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $25^x = \frac{1}{5} \iff 5^{2x} = 5^{-1} \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$, $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

d) $x^4 = 10^{-4} \iff x = \pm\sqrt[4]{10^{-4}} = \pm\frac{1}{10}$, $S = \left\{-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right\}$

e) $x^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} \iff x = \left(3^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{5}{3}}$, $S = \left\{3^{-\frac{5}{3}}\right\}$

f) $x^{\frac{7}{2}} = 10^7 \iff x = (10^7)^{\frac{2}{7}} = 10^2 = 100 \quad , \quad S = \{100\}$

g) $10^{5x-\frac{1}{2}} = 10^{4x-1} \iff 5x - \frac{1}{2} = 4x - 1 \iff x = -\frac{1}{2} \quad , \quad S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

h) $3^{4x} = 9^{x+5} \iff 3^{4x} = 3^{2(x+5)} \iff 4x = 2x + 10 \iff x = 5 \quad , \quad S = \{5\}$

i) $2^{4x-2} = 64 \iff 2^{4x-2} = 2^6 \iff 4x - 2 = 6 \iff x = 2 \quad , \quad S = \{2\}$

j) $4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x \iff 2^2 \cdot 2^x \cdot 2^5 = 2^{2x} \iff 2^{7+x} = 2^{2x} \iff x = 7 \quad , \quad S = \{7\}$

k) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x \iff 4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2$; sostituendo $y = 2^x$, otteniamo l'equazione di secondo grado $4y + 32 = y^2 \iff y^2 - 4y - 32 = 0 \iff (y+4)(y-8) = 0$ le cui soluzioni sono $y = -4$ e $y = 8$; dal momento che $2^x = -4$ è impossibile, l'unica soluzione dell'equazione originale è la soluzione di $2^x = 8$, cioè $x = 3$. Quindi, $\mathcal{S} = \{3\}$.

l) $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$; sostituendo $y = 9^x$ otteniamo l'equazione $y^2 + 3 = 4y$, le cui soluzioni sono $y = 3$ e $y = 1$. Quindi, le soluzioni dell'equazione originale sono le soluzioni delle equazioni $9^x = 3$ e $9^x = 1$, cioè $x = \frac{1}{2}$ e $x = 0$. Quindi, $\mathcal{S} = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

8. **a)**
- $2^3 < 10 < 2^4 \Rightarrow x \in]3; 4[$
- $2^{3,3} < 10 < 2^{3,4} \Rightarrow x \in]3,3; 3,4[$
- $2^{3,32} < 10 < 2^{3,33} \Rightarrow x \in]3,32; 3,33[$
- $2^{3,321} < 10 < 2^{3,322} \Rightarrow x \in]3,321; 3,322[$

(la soluzione è $x = \log_2 10 \cong 3,321928...$).

b)
- $\pi^4 < 100 < \pi^5 \Rightarrow x \in]4; 5[$
- $\pi^4 < 100 < \pi^{4,1} \Rightarrow x \in]4; 4,1[$
- $\pi^{4,02} < 100 < \pi^{4,03} \Rightarrow x \in]4,02; 4,03[$
- $\pi^{4,022} < 100 < \pi^{4,023} \Rightarrow x \in]4,022; 4,023[$

(la soluzione è $x = \log_\pi 100 \cong 4,0229317...$).

c)
- $4^4 < 1000 < 5^5 \Rightarrow x \in]4; 5[$
- $4,5^{4,5} < 1000 < 4,6^{4,6} \Rightarrow x \in]4,5; 4,6[$
- $4,55^{4,55} < 1000 < 4,56^{4,56} \Rightarrow x \in]4,55; 4,56[$
- $4,555^{4,555} < 1000 < 4,556^{4,556} \Rightarrow x \in]4,555; 4,556[$

(la soluzione non è esprimibile per mezzo di logaritmi; con il comando `fsolve`, MAPLE fornisce l'approssimazione $x = 4,555535705$).

9. Sia ℓ lo spigolo del cubo. Allora il volume è $V = \ell^3$ e la superficie totale $S = 6\ell^2$.

a) In funzione del volume, lo spigolo di un cubo misura $\ell = V^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{V}$. Siano ℓ_1 e ℓ_2 i due spigoli, V_1 e V_2 i due volumi. Allora vale

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{V^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \quad .$$

b) Siano S_1 e S_2 le due superfici totali. Allora vale

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{6\ell_1^2}{6\ell_2^2} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} \quad .$$

(*Nota che il rapporto tra le superfici è pari al quadrato del rapporto tra gli spigoli.*)

10. Soluzioni: i) A ii) B iii) C iv) A v) C