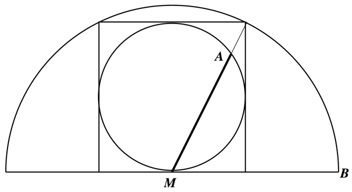
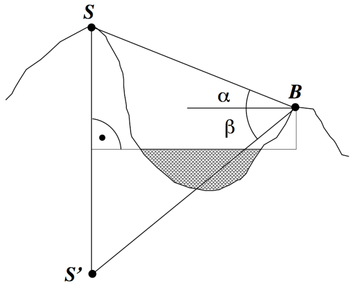
Serie 5 - Funzioni trigonometriche

Puoi affermare di aver capito qualcosa quando riesci a spiegarla a tua nonna.

A. Einstein



1. * Una circonferenza è inscritta in un quadrato il quale a sua volta è inscritto in una semicirconferenza il cui raggio BM misura 5 unità. Determina $|AM|$.



2. Dal punto B, posto 70 m al disopra di uno specchio d'acqua, un osservatore vede il punto S sulla sommità di un monte con l'angolo d'elevazione $\alpha = 28°$ e la sua immagine riflessa nel lago con un angolo di depressione $\beta = 35°$. A che altezza si trova S rispetto allo specchio d'acqua?

3. Determina l'angolo α se...

(a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ e α appartiene al terzo quadrante.

(b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e α appartiene al secondo quadrante.

(c) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\tan\alpha < 0$.

4. Calcolare il valore delle seguenti espressioni senza utilizzare la calcolatrice.

(a) $\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin\pi - 4\sin\frac{3}{2}\pi - \frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{2}$,

(b) $a^2\cos 0 - 2ab\sin\frac{3}{2}\pi - b^2\cos\pi - a\cos\frac{3}{2}\pi$,

(c) $\frac{\tan\frac{\pi}{4} - 2\cot\frac{\pi}{2} + \tan^2\frac{\pi}{6}}{\tan\pi + 2\cot\frac{\pi}{4} + \cot^2\frac{\pi}{6}}$,

(a) $5\cos\frac{\pi}{2} - 3\cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3}{2}\pi + 4\cos 2\pi$,

(b) $5\cot\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2} - 2\tan 0 + \sin\frac{3}{2}\pi - 2\sin 2\pi$,

(c) $\sqrt{2}b^2\sin\frac{\pi}{4} - 4ab\sin\frac{\pi}{6} + a^2\cos 0$.

5. Dato un valore delle funzioni trigonometriche, determina i valori (esatti!) delle funzioni restanti sapendo che α appartiene all'intervallo indicato.

a) $\sin\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

b) $\cos\,\alpha = -\frac{1}{10}$, $\alpha \in [540°, 630°]$;

c) $\tan\,\alpha = 5$, $\alpha \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$.

6. Semplifica le seguenti espressioni:

a) $-\sin(1620° - \alpha)\cdot\sin(540° + \alpha) - 1 - \cos(360° - \alpha)\cdot\cos(180° + \alpha)$

b) $\sin(\pi + \alpha)\cdot\tan(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)\cdot\tan(\pi + \alpha)$

c) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \tan(2\pi - \alpha) + \text{cotan}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(-\alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \text{cotan}(\pi + \alpha)}$

d) $\sin\alpha\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right)$

e) $\frac{\sin^2(\frac{3}{2}\pi+\alpha)+\cos^2(\frac{3}{2}\pi+\alpha)}{\cos\alpha}+\cos(\pi+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)\tan(\pi+\alpha)$

7. Verifica le seguenti identità trigonometriche, escludendo i valori per cui esse risultano prive di senso:

a) $\sin^4\alpha-1=\cos^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha-2)$

b) $(\sin\,\alpha+\cos\,\alpha)^2+(\sin\,\alpha-\cos\,\alpha)^2=2$

c) $\dfrac{\cos\,\alpha}{1-\tan\,\alpha}+\dfrac{\sin\,\alpha}{1-\mathrm{cotan}\,\alpha}=\sin\,\alpha+\cos\,\alpha$

c) $\dfrac{\cos\,\alpha}{1-\tan\,\alpha}+\dfrac{\sin\,\alpha}{1-\mathrm{cotan}\,\alpha}=\sin\,\alpha+\cos\,\alpha$

d) $\dfrac{1}{\cos^4\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\tan^4\alpha+\tan^2\alpha$

e) $(1+\sin\,\alpha+\cos\,\alpha)^2=2(1+\sin\,\alpha)(1+\cos\,\alpha)$

f) $(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)=1$

g) $\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(\tan\beta+\mathrm{cotan}\beta)=1$

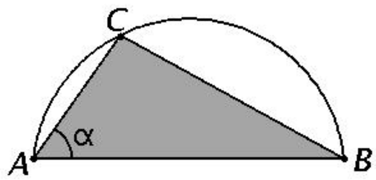
h) $2\left(\cos\pi-2\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{5\tan\pi+6\cos\pi}{3\sin\frac{\pi}{2}}$

i) $\sin^2\frac{3}{2}\pi=\sin\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\pi\right)-\sin\pi$

8. * Con riferimento alla figura a lato...

... determina per quali valori di α la superficie del triangolo inscritto misura metà della superficie della semicirconferenza.

Indicazione: sia r il raggio della semicirconferenza; determina dapprima $x=|AC|$ in funzione di r.



9. Rappresenta graficamente (nel modo più accurato possibile) le due funzioni

$$f(x)=\sin(2x)\qquad\qquad g(x)=2\sin(x)$$

Ovviamente in generale $f(x)\neq g(x)$. Quali sono però i punti di intersezione fra le due funzioni?

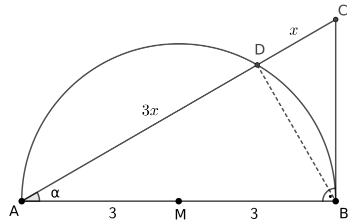
10. * Per $a,b\in\mathbb{R}^*$ è definita la funzione:

$$f(x)=a\cdot\sin(bx)$$

Determina: dominio, insieme delle immagini e periodo della funzione.

11. * Con riferimento alla figura qui accanto,

determina x e l'angolo α, sapendo che : $\overline{AM}=\overline{MB}=3,\overline{AD}=3x,\overline{DC}=x$



12. Si chiama ***secante*** di un angolo α il reciproco del valore di $\cos(\alpha)$, cioé

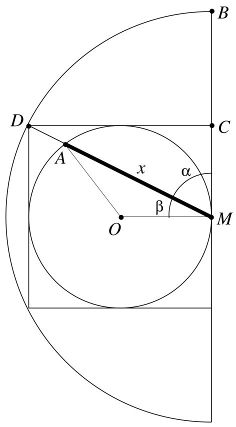
$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}.$$

Si chiama ***cosecante*** di un angolo α l'inverso del valore di $\sin(\alpha)$, cioè $\mathrm{cosec}(\alpha)=(\sin(\alpha))^{-1}$.

Determina l'insieme di definizione, insieme delle immagini e il periodo della funzione secante.

Soluzioni

1. Considera la figura qui sotto:



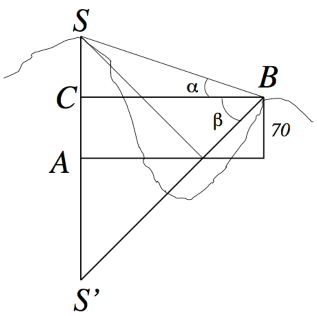
Dato che $|CD| = 2 \cdot |MC|$, vale $\tan \alpha = \dfrac{|CD|}{|MC|} = 2$, e quindi $\alpha = \arctan 2 \cong 1,1071^{\text{rad}}$ e $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \cong 0,4636^{\text{rad}}$.

Inoltre,

$|MO| = |MC| = |MD| \cdot \cos \alpha = |MB| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \cos \alpha \cong 2,236$.

Ricaviamo $x = |AM| = 2 \cdot |MO| \cdot \cos \beta = \boxed{4}$.

2.



Sia h l'altezza cercata. Per la proprietà di riflessione, vale $h = |AS| = |AS'| = \frac{1}{2}|SS'|$. Sia C il punto sul segmento SS' a 70 metri di altezza rispetto al lago, e $d = |BC|$ la distanza *orizzontale* tra B e C. Dato che $|AC| = 70$, dal disegno si ricavano le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{|CS|}{|BC|} = \tan \alpha \\ \dfrac{|CS'|}{|BC|} = \tan \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{h-70}{d} = \tan 28^\circ \\ \dfrac{h+70}{d} = \tan 35^\circ \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{h-70}{\tan 28^\circ} = d \\ \dfrac{h+70}{\tan 35^\circ} = d \end{cases} ;$$

il confronto delle due equazioni conduce a

$$\begin{aligned} \frac{h-70}{\tan 28^\circ} = \frac{h+70}{\tan 35^\circ} \quad &\iff \quad h \tan 35^\circ - 70 \tan 35^\circ = h \tan 28^\circ + 70 \tan 28^\circ \\ &\iff \quad h(\tan 35^\circ - \tan 28^\circ) = 70(\tan 35^\circ + \tan 28^\circ) \\ &\iff \quad h = 70 \cdot \frac{\tan 35^\circ + \tan 28^\circ}{\tan 35^\circ - \tan 28^\circ} \cong \boxed{511,8\ \text{m}} \quad . \end{aligned}$$

3. a) $\alpha = 150^\circ$ (oppure $\frac{5\pi}{6}$); b) impossibile; $\alpha = 135^\circ$ (oppure $\alpha = \frac{3\pi}{4}$).

4.

a) $= \frac{2}{3} \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) - \frac{5}{3} \cdot 1 = 3$

b) $= 5 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 4 \cdot 1 = -1$

c) $= a^2 - 2ab \cdot (-1) - b^2 \cdot (-1) - a \cdot 0 = (a+b)^2$

d) $= 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + (-1) - 2 \cdot 0 = -1$

e) $= \frac{1 - 2 \cdot 0 + (\sqrt{3}/3)^2}{0 + 2 \cdot 1 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1 - 1/3}{2+3} = \frac{4}{15}$

f) $= \sqrt{2} b^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4ab \frac{1}{2} + a^2 \cdot 1 = (a-b)^2$

5. **a)** P_α si trova nel II quadrante, quindi vale $\cos \alpha < 0$, $\tan\ \alpha < 0$, $\cot\ \alpha < 0$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} \quad , \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \quad , \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{4}{3} \quad .$$

b) P_α si trova nel III quadrante, quindi $\sin \alpha < 0$, $\tan\ \alpha > 0$, $\cot\ \alpha > 0$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{100}} = -\sqrt{\frac{99}{100}} = -\frac{3\sqrt{11}}{10} \quad , \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3\sqrt{11} \quad ,$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{33} \quad .$$

c) P_α si trova nel III quadrante, quindi $\cos\alpha < 0$, $\sin\,\alpha < 0$, $\cot\,\alpha > 0$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}}{26} \quad , \quad \sin\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{5} \quad .$$

6. **a)** $-\sin(1620° - \alpha)\cdot\sin(540° + \alpha) - 1 - \cos(360° - \alpha)\cdot\cos(180° + \alpha) =$
$= -\sin(180° - \alpha)\cdot\sin(180° + \alpha) - 1 - \cos(-\alpha)\cdot\cos(180° + \alpha) =$
$= -\sin\alpha\cdot(-\sin\alpha) - 1 - \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha) = \sin^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0$

b) $\sin(\pi + \alpha)\cdot\tan(\pi - \alpha) + \sin(\pi + \alpha)\cdot\tan(\pi + \alpha) =$
$= \sin(\pi + \alpha)\,(\tan(\pi - \alpha) + \tan(\pi + \alpha)) = -\sin\alpha\cdot(-\tan\alpha + \tan\alpha) = 0$

c) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) - \tan(2\pi - \alpha) + \operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\cos(-\alpha) - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \operatorname{cotan}(\pi + \alpha)} = \dfrac{\cos\alpha - \tan(-\alpha) - \tan\alpha}{\cancel{\cos\alpha - \cos\alpha} + \operatorname{cotan}\alpha} =$
$= \dfrac{\cos\alpha + \cancel{\tan\alpha - \tan\alpha}}{\operatorname{cotan}\alpha} = \cos\alpha\cdot\tan\alpha = \sin\alpha$

d) $= \sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

e) $= \frac{1}{\cos\alpha} + (-\cos\alpha) + (-\sin\alpha)\tan\alpha = \frac{\overbrace{1 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}^{-1}}{\cos\alpha} = 0$

7. **a)** $\sin^4\alpha - 1 = \cos^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha - 2)$ ha senso $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Semplifichiamo il termine a destra:

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha - 2) &= \cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha)^2 - 2(1 - \sin^2\alpha) = \\ &= \sin^4\alpha \cancel{-2\sin^2\alpha} + 1 - 2 \cancel{+2\sin^2\alpha} = \sin^4\alpha - 1 \quad .\end{aligned}$$

b) $(\sin\,\alpha + \cos\,\alpha)^2 + (\sin\,\alpha - \cos\,\alpha)^2 = 2$ ha senso $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Semplifichiamo il termine a sinistra:

$$\begin{aligned}&(\sin\,\alpha + \cos\,\alpha)^2 + (\sin\,\alpha - \cos\,\alpha)^2 = \\ = \;&\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \\ = \;&\underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} = 2 \quad .\end{aligned}$$

c) $\dfrac{\cos\,\alpha}{1 - \tan\,\alpha} + \dfrac{\sin\,\alpha}{1 - \operatorname{cotan}\alpha} = \sin\,\alpha + \cos\,\alpha$ ha senso se $\alpha\in \mathrm{D}_{\tan}\cap\mathrm{D}_{\cot}$ (cioè se $\alpha\neq k\cdot\frac{\pi}{2}$ con $k\in\mathbb{Z}$), $\tan\alpha\neq 1$ e $\cot\alpha\neq 1$ (cioè $\alpha\neq\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$). Semplifichiamo il termine a sinistra:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\,\alpha}{1 - \tan\,\alpha} + \frac{\sin\,\alpha}{1 - \operatorname{cotan}\alpha} &= \frac{\cos\,\alpha}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} + \frac{\sin\,\alpha}{1 - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos\,\alpha}{\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha}} + \frac{\sin\,\alpha}{\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha}} = \\ &= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{\cancel{(\cos\alpha - \sin\alpha)}(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cancel{\cos\alpha - \sin\alpha}} = \\ &= \cos\alpha + \sin\alpha \quad .\end{aligned}$$

d) $\dfrac{1}{\cos^4\alpha} - \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^4\alpha + \tan^2\alpha$ ha senso se $\cos\alpha\neq 0$, cioè se $\alpha\neq\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Ricordando la relazione $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, semplifichiamo il termine a sinistra:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^4\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha} &= \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = \\ &= \tan^2\alpha(\tan^2\alpha + 1) = \tan^4\alpha + \tan^2\alpha \quad .\end{aligned}$$

e) $(1 + \sin\,\alpha + \cos\,\alpha)^2 = 2(1 + \sin\,\alpha)(1 + \cos\,\alpha)$ ha senso $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Semplifichiamo il termine a sinistra, ricordando che $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$:

$$\begin{aligned}(1 + \sin\,\alpha + \cos\,\alpha)^2 &= 1 + \underbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + 2\sin\alpha + 2\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = \\ &= 2(1 + \sin\alpha + \underbrace{\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}_{\cos\alpha(1 + \sin\alpha)}) = \\ &= 2(1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)\end{aligned}$$

(nota che abbiamo impiegato una “doppia messa in evidenza”).

f) $(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)=1$ ha senso se $\alpha\in \mathrm{D}_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:
$(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)=\cos^2\alpha\cdot(1+\tan^2\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\tan^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

g) $\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(\tan\beta+\mathrm{cotan}\beta)=1$ ha senso se $\alpha\in \mathrm{D}_{\tan}\cap \mathrm{D}_{\mathrm{cotan}}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:
$\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(\tan\beta+\mathrm{cotan}\beta)=\sin\beta\cdot(\cos\beta\cdot\tan\beta)+\cos\beta\cdot(\sin\beta\cdot\mathrm{cotan}\beta)=\sin\beta\cdot\sin\beta+\cos\beta\cdot\cos\beta=1$.

h) $2(-1-2(-1))=-\frac{5\cdot 0+6(-1)}{3\cdot 1}\iff 2=2\checkmark$

i) $(-1)^2=1(0-(-1))-0\iff 1=1\checkmark$

8. Sia quindi $r=\frac{1}{2}|AB|$ il raggio della semicirconferenza e $x=|AC|$. Allora, dal momento che il triangolo ABC è rettangolo vale $|BC|=\sqrt{4r^2-x^2}$ e l'area del triangolo è pari a

$$\mathcal{A}_{\text{tri}}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|=\frac{1}{2}x\sqrt{4r^2-x^2} \quad .$$

La superficie della semicirconferenza è pari a $\mathcal{A}_{\text{sc}}=\dfrac{1}{2}r^2\pi$. Pertanto

$$\mathcal{A}_{\text{tri}}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\text{sc}} \iff \frac{1}{2}x\sqrt{4r^2-x^2}=\frac{1}{4}r^2\pi \iff x\sqrt{4r^2-x^2}=\frac{1}{2}r^2\pi \quad .$$

Elevando al quadrato entrambi i termini ricaviamo

$$x^2(4r^2-x^2)=\frac{1}{4}r^4\pi^2 \iff x^4-4r^2\cdot x^2+\frac{\pi^2r^4}{4}=0 \quad .$$

Si tratta di un'equazione *biquadratica*, che risolviamo quindi innanzitutto rispetto a x^2; il discriminante vale

$$\Delta=(4r^2)^2-\cancel{4}\cdot\frac{\pi^2r^4}{\cancel{4}}=r^4(16-\pi^2)$$

e quindi

$$\left(x^2\right)_{1,2}=\frac{4r^2\pm\sqrt{r^4(16-\pi^2)}}{2}=r^2\cdot\frac{4\pm\sqrt{16-\pi^2}}{2} \quad \begin{cases}\cong r^2\cdot 3,238\\ \cong r^2\cdot 0,762\end{cases} \quad .$$

Estraendo le radici (siamo interessati solo ai risultati positivi) ricaviamo quindi

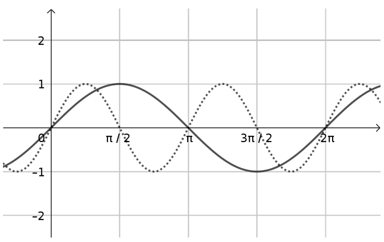
$$x_1\cong\sqrt{3,238}\,r\cong 1,799\,r \quad , \quad x_2\cong\sqrt{0,762}\,r\cong 0,873\,r$$

e, dal momento che $\alpha=\arccos\left(\dfrac{|AC|}{|AB|}\right)$, i due risultati

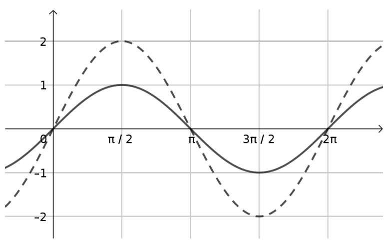
$$\alpha_1\cong\arccos\left(\frac{1,799\cancel{r}}{2\cancel{r}}\right)\cong 25,9^\circ \quad \text{e} \quad \alpha_2\cong\arccos\left(\frac{0,873\cancel{r}}{2\cancel{r}}\right)\cong 64,1^\circ \quad .$$

Gli angoli α_1 e α_2 sono complementari tra loro (*perché?*).

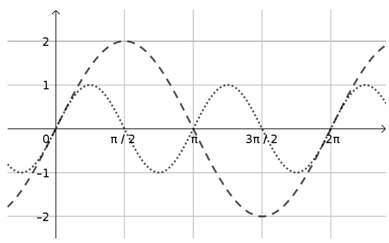
9. Rappresentiamo dapprima le funzioni $f(x)=\sin(2x)$ e $g(x)=2\sin(x)$ separatamente partendo dal grafico di $y=\sin(x)$. Infine confrontiamo i grafici di f e g (terza immagine).



La funzione $f(x)=\sin(2x)$ (linea puntinata) oscilla con "rapidità doppia" rispetto alla funzione $y=\sin(x)$ (linea continua).



Il grafico di $g(x)=2\sin(x)$ (linea tratteggiata) corrisponde al grafico di $y=\sin(x)$ (linea continua) ma dilatato verticalmente con fattore 2.



Confrontando i grafici di f e g notiamo come le intersezioni avvengono ai multipli di π.

Per la risoluzione algebrica sfruttiamo l'identità $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ (che verrà dimostrata nel fascicolo).

Dunque $f(x) = g(x) \iff 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)$ da cui ricaviamo le soluzioni $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ e $\cos(x) = 1 \iff x = k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Dunque possiamo concludere che i punti di intersezione sono $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

10. Il dominio è $\mathbb{R}$ (ricorda che $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$).

Dato che $Im_{\sin} = [-1; 1]$ si può concludere che $Im_{f(x)} = [-a; a]$.

Sia $p \in \mathbb{R}$ il periodo della funzione, quindi $a\sin(bx) = a\sin(b(x + p))$, sapendo che il periodo di $\sin(x)$ è 2π (cioè $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2\pi)$) allora:

$b(x + p) = bx + 2\pi \iff p = \frac{2\pi}{b}$.

11. Possiamo trovare le seguenti misure:

$\overline{DB} = \sqrt{6^2 - (3x =)^2} = \sqrt{36 - 9x^2}$, $\overline{CB} = \sqrt{(4x)^2 - 6^2} = \sqrt{16x^2 - 36}$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo CDB otteniamo:

$x^2 + (36 - 9x^2) = 16x^2 - 36 \iff 24x^2 = 72 \iff x = \sqrt{3}$

Calcolando le misure restanti dei lati si può verificare facilmente che il triangolo ABC è la metà di un triangolo equilatero e dunque $\alpha = 30°$.

12.
- **Insieme di definizione:** la funzione $\cos(\alpha)$ è zero per $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Dunque

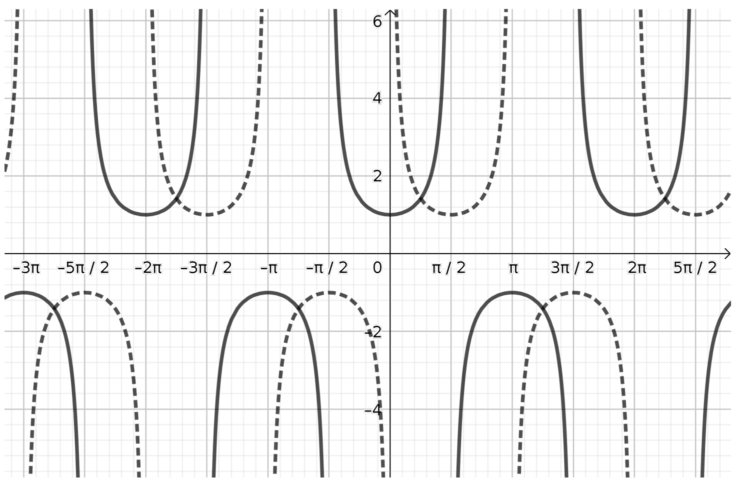
$$\mathcal{D}_{\sec} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$$

- **Insieme delle immagini:** l'insieme delle immagini del coseno è: $\mathcal{I}m_{\cos} = [-1; 1]$. Dividendo per dei numeri "piccoli" (il cui valore è tra -1 e +1) ottengo sempre dei numeri "grandi": $x < 1 \iff \frac{1}{x} > 1$ e allo stesso tempo: $x > -1 \iff \frac{1}{x} < -1$, dunque si può facilmente verificare che:

$$\mathcal{I}m_{\sec} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

- **Periodo**: Sapendo che la funzione coseno ha un periodo di 2π: $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ otteniamo: $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cos(\alpha+2k\pi)} = \sec(\alpha + 2k\pi)$, dunque anche la cosecante ha un periodo di 2π.

Risultati analoghi valgono per la cosecante.



In nero la funzione secante, tratteggiata la funzione cosecante.