Serie 12 - Funzioni esponenziali

"Lo sport ci insegna che per la vittoria non basta il talento. Ci vuole il lavoro e il sacrificio quotidiano. Nello sport come nella vita."

P. Mennea

1. Un'anguria "pesa" 0,3 kg e raddoppia di peso ogni 6 giorni.

a) Determina a e b.

b) Qual è l'aumento percentuale giornaliero di peso dell'anguria?

2. L'isotopo radioattivo Iodio-131 (I_{131}) viene impiegato in medicina per la diagnosi e la cura delle malattie della tiroide. Con il passare del tempo, gli atomi di I_{131} decadono in atomi di Xenon (Xe) emettendo radiazioni: si parla di *decadimento radioattivo*. Sapendo che il *periodo di dimezzamento* (cioè il tempo impiegato per ridursi alla metà) dello Iodio-131 è di 8 giorni, ricava, con una quantità iniziale sia di 3 grammi,

a) la funzione esponenziale che descrive il decadimento rispetto ai giorni trascorsi;

b) la percentuale giornaliera di tale decadimento.

3. In un lago, la luminosità si riduce con una decrescita esponenziale. A 2 metri di profondità vengono misurati $L(2) = 1800$ Lux, mentre a 4 metri $L(4) = 648$ Lux.

a) Determina la funzione che esprime la luminosità e rappresentane il grafico;

b) Servendoti del grafico, stabilisci a quale profondità la luminosità si riduce alla metà.

4. * La mattina di un Capodanno, tre amici trovano per terra una moneta da 1 franco. Il primo dei tre afferma: "*se la banca ci versasse il 100% di interesse annuale, fra 1 anno avremmo 2 franchi*". Il secondo aggiunge: "*Avremmo addirittura 2,25 franchi, se l'interesse venisse calcolato semestralmente*"[1]. "*E se la capitalizzazione fosse trimestrale, avremmo 2,44 franchi*", conclude il terzo.

a) Verifica le affermazioni dei 3 amici.

b) Calcola il capitale a fine anno, se la capitalizzazione avviene ogni mese, ogni giorno, ogni ora.

c) Quale sarebbe il capitale a fine anno nel caso di interesse annuo del 100% e capitalizzazione *istantanea* (cioè continua)?

5. * La capacità di memoria di un computer moderno (numero di transistor per unità di superficie di un microprocessore in silicio) si misura in $\frac{\text{bit}}{\text{cm}^2}$. La *Legge di Moore* enuncia che questa grandezza a partire dal 1970 raddoppia ogni 18 mesi. Nel 1970 essa era pari a $10^{-6}\frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$. Quale valore è previsto per un dato momento dopo il 1970?
Questa legge fu formulata da Gordon Moore nell'anno 1964 (originariamente con un tempo di

[1] cioè se il tasso d'interesse annuo fosse convertibile 2 volte all'anno, vale a dire se ogni semestre venisse aggiunta al capitale la metà dell'interesse previsto per un anno

raddoppiamento di 12 mesi, mentre la versione qui riportata risale agli anni settanta). Quattro anni dopo aver fatto questa previsione Gordon Moore sarebbe diventato uno dei fondatori di Intel (il principale produttore di microprocessori).

6. La funzione

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

viene chiamata ***seno iperbolico*** mentre la funzione

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

viene chiamata ***coseno iperbolico***.

Tracciare, nel modo più accurato possibile, il grafico delle funzioni seguenti in uno stesso sistema di coordinate:

(i) $f_1(x) := \frac{1}{2}e^x$,
(ii) $f_2(x) := \frac{1}{2}e^{-x}$.

Utilizza quindi queste due funzioni per tracciare il grafico del seno e del coseno iperbolico.

7. I rimedi omeopatici vengono preparati a partire da sostante chimiche secondo il principio "il simile cura il simile" enunciato dall'inventore dell'omeopatia Christian Hahnemann (1755-1843). Secondo questo principio (non supportato da solide basi scientifiche) una sostanza che provoca determinati sintomi in una persona sana, può guarire una persona ammalata che accusa sintomi analoghi anche se la causa del disturbo è totalmente differente. Ad esempio il veleno di un'ape che provoca gonfiore, arrossamento e riscaldamento della pelle può curare dalle ustioni.

Per evitare che i preparati siano nocivi essi vengono "dinamizzati", ossia diluiti massicciamente (normalmente in acqua o alcool) e poi energicamente scossi.

Una "dinamizzazione" con potenza 1C corrisponde a diluire una parte di sostanza in 99 di diluente, una "dinamizzazione" 2C corrisponde a due diluizioni del tipo 1C in successione; dunque si avrà una diluizione con fattore 1 a $10'000$.

Dalle conoscenze della chimica moderna sappiamo che una mole di una sostanza contiene $N = 6.022 \cdot 10^{23}$ molecole (numero di Avogadro). Per semplicità prendiamo ad esempio una mole di carbonato di calcio ($CaCO_3$): essa ha una massa di circa 100 grammi e contiene dunque N molecole.

Immagina di sciogliere 1 grammo di carbonato di calcio in 100ml di acqua e successivamente di "dinamizzare" la soluzione con potenza 15C (che corrisponde ad una diluizione "media" secondo i principi omeopatici). Quante molecole rimarranno alla fine di questo processo nella soluzione?

Soluzioni

Osservazione: negli esercizi **1 - 3** occorre determinare i parametri a e b di una funzione della forma $f(x) = b \cdot a^x$. Conoscendo due coppie (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ciò conduce ad un sistema di equazioni

$$\begin{cases} y_1 = b \cdot a^{x_1} \\ y_2 = b \cdot a^{x_2} \end{cases}$$

con incognite a e b. Nota che vale $f(0) = b$.

1. **a)** Sappiamo che $b = f(0) = 0,3$ e $f(6) = 2 \cdot f(0) = 0,6 = 0,3 \cdot a^6$, $a = \left(\frac{0,6}{0,3}\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{6}}$. La funzione cercata è quindi

$$f(t) = 0,3 \cdot \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^t = 0,3 \cdot 2^{\frac{t}{6}} \quad .$$

b) L'aumento percentuale giornaliero è costante; possiamo quindi ad esempio calcolare l'aumento tra il primo e il secondo giorno:

$$\begin{aligned} a_{\%} &= \frac{f(1) - f(0)}{f(0)} \cdot 100\% = \left(\frac{f(1)}{f(0)} - 1\right) \cdot 100\% = \left(\frac{b \cdot a^1}{b} - 1\right) \cdot 100\% = \\ &= (a - 1) \cdot 100\% = (2^{\frac{1}{6}} - 1) \cdot 100\% \cong 12,25\%. \end{aligned}$$

2. **a)** Sia $f(t) = b \cdot a^t$ la funzione che descrive il decadimento; la quantità iniziale è di 3 grammi, e quindi $b = f(0) = 3$; dal momento che

$$f(8) = \frac{1}{2} f(0) \quad \Longleftrightarrow \quad 3 \cdot a^8 = \frac{3}{2} \quad ,$$

deve valere $a^8 = \frac{1}{2}$, e quindi $a = \sqrt[8]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{8}}$, e

$$f(t) = 3 \cdot a^t = 3 \cdot \left(2^{-\frac{1}{8}}\right)^t = 3 \cdot 2^{-\frac{t}{8}} \quad .$$

Nota che, se in un processo di decrescita esponenziale conosciamo la quantità iniziale $b = f(0)$ e il tempo t_d di dimezzamento, possiamo immediatamente ricavare la funzione che descrive il processo:

$$f(t) = b \cdot 2^{-\frac{t}{t_d}} \quad .$$

Ciò segue dal fatto che la condizione $f(t_d) = \frac{1}{2} f(0)$ conduce all'equazione $b \cdot a^{t_d} = \frac{1}{2} b$, e quindi ad $a = 2^{-\frac{1}{t_d}}$.

b) Calcoliamo (*in generale!*) la percentuale giornaliera di decadimento come segue:

$$p = \frac{f(0) - f(1)}{f(0)} \cdot 100\% = \frac{ba^0 - ba^1}{b} \cdot 100\% = \frac{b - ba}{b} \cdot 100\% = (1 - a) \cdot 100\% \quad ;$$

nel nostro caso vale $a = 2^{-\frac{1}{8}}$, e quindi

$$p = (1 - a) \cdot 100\% = (1 - 2^{-\frac{1}{8}}) \cdot 100\% \cong 8,3\% \quad .$$

3. **a)** Sia $L(p) = b \cdot a^p$ la funzione che descrive la luminosità L in funzione della profondità p; dato che $L(2) = 1800$ e $L(4) = 648$, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 1800 = b \cdot a^2 \\ 648 = b \cdot a^4 \end{cases}$$

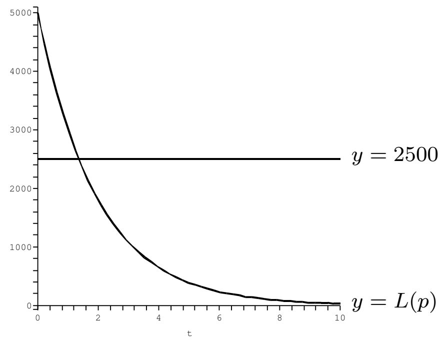
Dalla prima equazione otteniamo: $b = \frac{1800}{a^2}$, inserendo nella seconda equazione otteniamo:

$$648 = \frac{1800}{a^2} \cdot a^4 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = \frac{9}{25} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm\frac{3}{5}$$

Non potendo accettare una base negativa, l'unica soluzione è $a = \frac{3}{5}$. Inserendo in una delle due equazioni otteniamo: $1800 = b \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad b = 5000$ e dunque la funzione cercata è:

$$L(p) = 5000 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^p \quad .$$

b) A lato è rappresentato il grafico della funzione $y = L(p)$. Si nota che la luminosità raggiunge il valore 2500 alla profondità di circa $1,4$ metri.



Per determinare il valore esatto si risolve l'equazione

$$2500 = 5000\left(\frac{3}{5}\right)^p \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^p = \frac{1}{2} \quad .$$

La soluzione è $h = \log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{2}\right) \cong 1,357$ (metri).

4. Sia $c(t)$ il capitale al tempo t (in anni).

a)
- Capitalizzazione annuale:
  $c(1) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$;
- Capitalizzazione semestrale:
  $c\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}$ (dopo 1 semestre)
  $c(1) = c\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}\right) = c\left(\frac{1}{2}\right)(1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$;
- Capitalizzazione trimestrale:
  $c\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}$ (dopo 1 trimestre)
  $c\left(\frac{2}{4}\right) = c\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}c\left(\frac{1}{4}\right) = c\left(\frac{1}{4}\right)(1 + \frac{1}{4}) = (1 + \frac{1}{4})^2$ (dopo 2 trimestri)
  $c\left(\frac{3}{4}\right) = c\left(\frac{2}{4}\right) + \frac{1}{4}c\left(\frac{2}{4}\right) = c\left(\frac{2}{4}\right)(1 + \frac{1}{4}) = (1 + \frac{1}{4})^3$ (dopo 3 trimestri)
  $c(1) = c\left(\frac{4}{4}\right) = c\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}c\left(\frac{3}{4}\right) = c\left(\frac{3}{4}\right)(1 + \frac{1}{4}) = (1 + \frac{1}{4})^4 = 2,4414$.

In generale: avendo un capitale iniziale di C_0 e un tasso di interesse i, possiamo calcolare la funzione $C(n)$ che indica l'evoluzione del capitale al variare del tempo n come segue:

0) Al momento zero avremo $C(0) = C_0$ franchi.

1) Dopo un intervallo di tempo (ad esempio un anno se a capitalizzazione annuale) otteniamo:

$$C(1) = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1 + i)$$

2) Dopo due intervalli di tempo (ad esempio due anni) avremo:

$$C(2) = \underbrace{C(1)}_{\text{capitale presente sul conto}} + \underbrace{C(1) \cdot i}_{\text{interesse generato}} = C(1) \cdot (1 + i) = \underbrace{C_0 \cdot (1 + i)}_{C(1)} \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^2$$

3) Dopo tre intervalli di tempo (ad esempio tre anni) avremo:

$$C(3) = \underbrace{C(2)}_{\text{capitale presente sul conto}} + \underbrace{C(2) \cdot i}_{\text{interesse generato}} = C(2) \cdot (1 + i) = \underbrace{C_0 \cdot (1 + i)^2}_{C(2)} \cdot (1 + i) = C_0 \cdot (1 + i)^3$$

...

n) Dopo n intervalli di tempo otteniamo:

$$C(n) = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

Nel caso specifico vi è inoltre da notare che il tasso di interesse viene calcolato *a seconda della suddivisione dell'anno*, cioè come $i = \frac{1}{n}$. Ad esempio nella capitalizzazione semestrale avremo $i = \frac{1}{2}$, mentre nella capitalizzazione mensile avremo $i = \frac{1}{12}$ e così via.

b) Analogamente:
- mensilmente: $c(1) = c\left(\frac{12}{12}\right) = (1 + \frac{1}{12})^{12} \cong 2,6130$;
- giornalmente: $c(1) = c\left(\frac{360}{360}\right) = (1 + \frac{1}{360})^{360} \cong 2,7145$;
- ogni ora: $c(1) = c\left(\frac{518400}{518400}\right) = (1 + \frac{1}{518400})^{518400} \cong 2,7181$.

c) "Osservando" quanto succede abbreviando sempre più l'intervallo dopo il quale si capitalizza, si nota che il capitale $c(1)$ si avvicina al *numero di Eulero*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2,718281828459045 \quad .$$

5. Sia $f(t) = a \cdot b^t$ la funzione cercata, ove t rappresenta il tempo (in mesi) trascorso dal 1970. Notiamo subito che $f(0) = b = 10^{-6}$, e da $f(18) = 2 \cdot f(0) \iff b \cdot a^{18} = 2b$ ricaviamo $a = 2^{\frac{1}{18}}$. Quindi, la legge di Moore è espressa dalla funzione

$$f(t) = 10^{-6} \cdot 2^{\frac{1}{18}t} \qquad \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2} \quad .$$

Nota che, se in un processo di crescita esponenziale conosciamo la quantità iniziale $b = f(0)$ e il tempo t_r di raddoppiamento, possiamo immediatamente ricavare la funzione che descrive il processo:

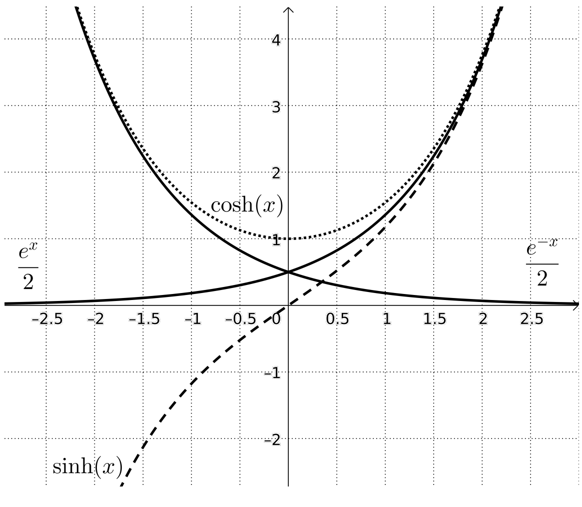
$$f(t) = b \cdot 2^{\frac{t}{t_r}} \quad .$$

Infatti, la condizione $f(t_r) = 2f(0)$ conduce all'equazione $b \cdot a^{t_r} = 2b$, e quindi ad $a = 2^{\frac{1}{t_r}}$ (analogamente a quanto visto in coda all'es. **2.a)**).

Più in generale, se per un certo processo di crescita (o decrescita) esponenziale è noto il fattore k relativo ad un intervallo t_k, vale

$$f(t) = b \cdot k^{\frac{t}{t_k}} \quad .$$

6. Una volta tracciati i grafici di f_1 e f_2 bisognerà solamente sommare o sottrarre le relative distanze dall'asse x. In alternativa facendo la media tra i valori delle due funzioni ($\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$) otteniamo il seno iperbolico.



La funzione seno iperbolico è tratteggiata mentre il coseno iperbolico è puntinato.

Nota: il nome richiama la trigonometria anche se la costruzione non ha niente a che vedere con gli angoli. Nonostante questo vi sono molte proprietà simili tra le funzioni iperboliche (seno e coseno iperbolico) e le funzioni trigonometriche. Ad esempio:

$$\sinh(x)^2 - \cosh(x)^2 = 1;$$

Particolare importanza ricopre il coseno iperbolico in quanto rappresenta la **curva catenaria**, ovvero la curva ottenuta lasciando penzolare una corda (o una catena) con i capi fissati. Per ragioni pratiche in ingegneria questa curva è spesso approssimata da una parabola.

7. Nella prima soluzione abbiamo

$$\frac{N}{100} = 6.022 \cdot 10^{21} \text{ molecole}$$

Una diluizione 15C corrisponde dunque a un rapporto di 1 a 100^{15} e dunque il numero di molecole si riduce a:

$$\frac{6.022 \cdot 10^{21}}{100^{15}} = \frac{6.022 \cdot 10^{21}}{10^{30}} = 6.022 \cdot 10^{-9}$$

Otteniamo un numero inferiore all'uno: ciò indica che in realtà non rimarrà nemmeno una molecola o più precisamente c'è una probabilità di 6 su 1 miliardo che alla fine del processo rimanga una singola molecola nel diluente. Abbiamo dunque ottenuto semplice acqua!