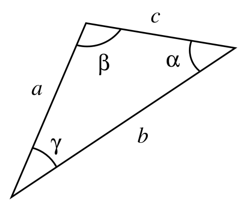
Serie 7 - Teorema del seno e del coseno

Il dubbio è l'inizio della conoscenza.

Cartesio

1. Completa la tabella con i lati e gli angoli mancanti (approssima a 2 decimali).

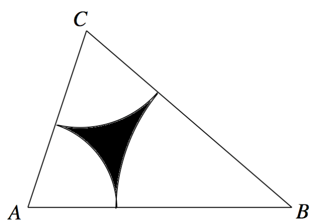


a	b	c	α	β	γ
6	7	8			
	5	3	110°		
	10		50°		20°
	20	18			50°
13		8	70°		
		25	42°	110°	
10	13	24			
5	7				100°

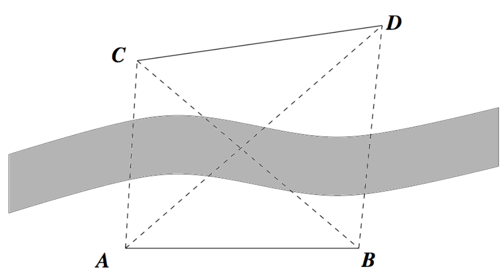
2. a) Di un parallelogrammo $ABCD$ è noto che vale $|AB| = 30$ e $|BC| = 55$, e che per l'ampiezza dell'angolo in A vale $\alpha = 40°$. Quanto misurano le diagonali?

b) Determina la misura delle *bisettrici* di un triangolo di lati 4, 6 e 8 unità.

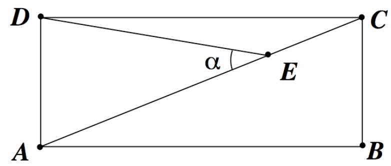
3. Sapendo che $|AB| = 10$, $|BC| = 13$ e $|AC| = 9$ e che gli archi di circonferenza sono tangenti sui lati del triangolo, determina l'area della superficie evidenziata.



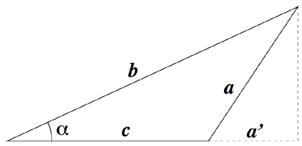
4. Per misurare la distanza tra due punti situati dall'altra parte del fiume, visibili ma non raggiungibili, sono state effettuate le seguenti misurazioni: $|AB| = 208\text{m}$, $\widehat{BAC} = 71,4°$, $\widehat{BAD} = 55,6°$, $\widehat{ABD} = 93°$, $\widehat{ABC} = 49,3°$. Determina $|CD|$.



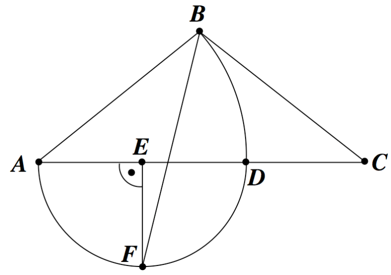
5. $ABCD$ è un rettangolo con $|AB| = 48$ e $|BC| = 14$. Inoltre vale $|CE| = 10$. Determina $|DE|$ e l'ampiezza di $\alpha = \widehat{AED}$.



6. Nel fascicolo abbiamo dimostrato il teorema del coseno nel caso in cui l'altezza del triangolo di riferimento sia **interna** al triangolo stesso. Dimostra il teorema del coseno nel caso in cui l'altezza è invece esterna al triangolo.



7. * ABC è un triangolo isoscele con $|AB| = 8$ e $|AC| = 12$. ABD è un settore circolare. Determina $|BF|$.

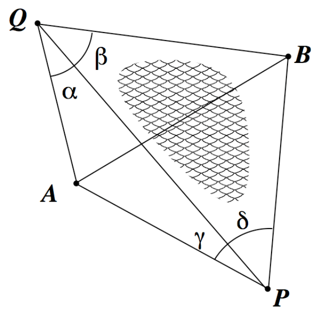


8. Per $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{R}$) è possibile seno e coseno utilizzando di $t = \tan\frac{\alpha}{2}$:

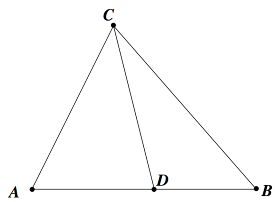
$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Dimostra queste formule.

9. Nell'impossibilità di attraversare il laghetto, per determinare la distanza tra il punto A e il punto B vengono effettuate le seguenti misurazioni: $\alpha = 32°$, $\beta = 42°$, $\gamma = 24°$, $\delta = 48°$ e $|PQ| = 550$ m.
Determina $|AB|$.



10. Sapendo che $|AB| = 16$, $|BC| = 15$, $|AC| = 10$ e che i triangoli ADC e DBC hanno lo stesso perimetro, determina perimetro e area del triangolo ADC.



11. * Notiamo $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ il semiperimetro di un triangolo qualsiasi.

a) Dimostra le seguenti formule:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \text{e} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Aiuto: utilizza il teorema del coseno e le formule di bisezione.

b) Aiutandoti con la parte a) dimostra la ***formula di Erone***:

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

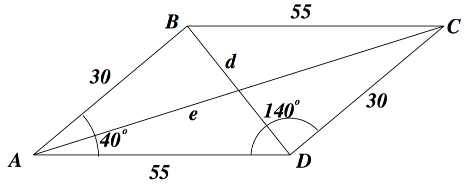
Soluzioni

1. Soluzione:

a	b	c	α	β	γ
6	7	8	$46,57°$	$57,91°$	$75,52°$
$6,65$	5	3	$110°$	$44,93°$	$25,07°$
$8,15$	10	$3,64$	$50°$	$110°$	$20°$
$22,30$ opp. $3,41$	20	18	$71,66°$ opp. $8,34°$	$58,34°$ opp. $121,66°$	$50°$
13	$13,34$	8	$70°$	$74,67°$	$35,33°$
$35,63$	$50,04$	25	$42°$	$110°$	$28°$
10	13	24	imp.	imp.	imp.
5	7	$9,28$	$32,04°$	$47,96°$	$100°$

2. a) L'angolo ottuso del parallelogrammo misura $140°$ (la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a $360°$). Applicando il teorema del coseno al triangolo ADB ricaviamo la diagonale minore:

$$d = \sqrt{30^2 + 55^2 - 2 \cdot 30 \cdot 55 \cdot \cos 40°} \cong 37,38 \quad ;$$

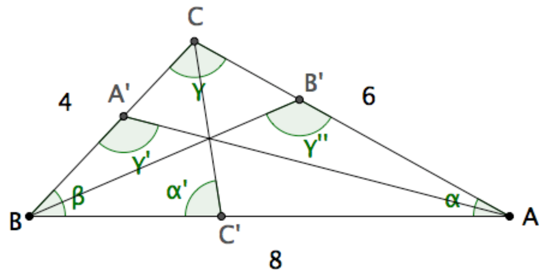


analogamente, applicando il teorema del coseno ad ADC ricaviamo la diagonale maggiore:

$$e = \sqrt{30^2 + 55^2 - 2 \cdot 30 \cdot 55 \cdot \cos 140°} \cong 80,33 \quad .$$

b) Innanzitutto, ricaviamo le ampiezze degli angoli grazie al teorema del coseno:

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{6^2+8^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 8}\right) \cong 28,96° \quad ; \\ \beta &= \arccos\left(\frac{4^2+8^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 8}\right) \cong 46,57° \quad ; \\ \gamma &= 180° - \alpha - \beta \cong 104,47° \quad .\end{aligned}$$



– Determiniamo la bisettrice $|AA'|$: $\gamma' = \widehat{BA'A} = 180° - \beta - \frac{1}{2}\alpha \cong 118,95°$, e

$$|AA'| = |AB| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma'} \cong 8 \cdot \frac{\sin 46,57°}{\sin 118,95°} \cong 6,64 \quad ;$$

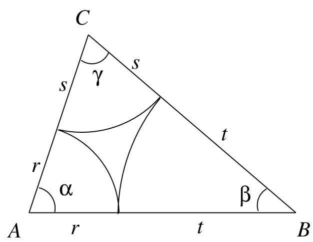
– Determiniamo la bisettrice $|BB'|$: $\gamma'' = \widehat{BB'A} = 180° - \alpha - \frac{1}{2}\beta \cong 127,76°$, e

$$|BB'| = |AB| \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma''} \cong 8 \cdot \frac{\sin 28,96°}{\sin 127,76°} \cong 4,90 \quad ;$$

– Determiniamo la bisettrice $|CC'|$: $\alpha' = \widehat{BC'C} = 180° - \beta - \frac{1}{2}\gamma \cong 81,20°$, e

$$|CC'| = |BC| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha'} \cong 4 \cdot \frac{\sin 46,57°}{\sin 81,20°} \cong 2,94 \quad .$$

3.



Siano r, s, t come in figura. Allora deve valere

$$\begin{cases} r+s=9 \\ r+t=10 \\ s+t=13 \end{cases}$$

Si tratta di un semplice sistema di 3 equazioni nelle incognite r, s, t con soluzioni $r=3,\ s=6,\ t=7$.

Ricaviamo l'ampiezza in radianti di α e β con il teorema del coseno:

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos\left(\frac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2\,|AB|\,|AC|}\right) = \arccos\left(\frac{10^2+9^2-13^2}{2\cdot 10\cdot 9}\right) \cong 1,504^{\text{rad}} \\ \beta &= \arccos\left(\frac{|AB|^2+|BC|^2-|AC|^2}{2\,|AB|\,|BC|}\right) = \arccos\left(\frac{10^2+13^2-9^2}{2\cdot 10\cdot 13}\right) \cong 0,763^{\text{rad}}\end{aligned}$$

e quindi $\gamma = \pi - \alpha - \beta \cong 0,876^{\text{rad}}$. L'area cercata si ottiene sottraendo dall'area del triangolo ABC l'area dei 3 settori circolari:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,|AB|\,|AC|\,\sin\alpha - \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}\beta t^2 - \frac{1}{2}\gamma s^2 \cong 3,670 \quad .$$

4. Per l'angolo in D del triangolo ABD vale

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{BAD} - \widehat{ABD} = 180^\circ - 55,6^\circ - 93,0^\circ = 31,40^\circ \quad .$$

Ricaviamo $|AD|$ grazie al Tm. dei seni:

$$|AD| = |AB|\cdot\frac{\sin\widehat{ABD}}{\sin\widehat{ADB}} = 208\frac{\sin 93,0^\circ}{\sin 31,4^\circ} \cong 398,68 \text{ (m)}$$

Analogamente: per l'angolo in C del triangolo ABC vale

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{ABC} = 180^\circ - 71,4^\circ - 49,3^\circ = 59,30^\circ \quad .$$

Ricaviamo $|AC|$ grazie al Tm. dei seni:

$$|AC| = |AB|\cdot\frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = 208\frac{\sin 49,3^\circ}{\sin 59,3^\circ} \cong 183,39 \text{ (m)}$$

L'angolo $\widehat{CAD}$ in A del triangolo ADC misura $\widehat{CAB} - \widehat{DAB} = 71,4^\circ - 55,6^\circ = 15,8^\circ$; grazie al Teorema del coseno otteniamo

$$\begin{aligned}|CD| &= \sqrt{|AC|^2+|AD|^2-2\,|AC|\,|AD|\,\cos\widehat{CAD}} \cong \\ &\cong \sqrt{183,39^2+398,68^2-2\cdot 183,39\cdot 398,68\cdot\cos 15,8^\circ} \cong 227,76 \text{ (m)}\end{aligned}$$

5. **a)** Otteniamo immediatamente $|CA| = \sqrt{|AB|^2+|BC|^2} = \sqrt{48^2+14^2} = 50$, e quindi $|AE| = |AC| - |CE| = 50 - 10 = 40$. Possiamo quindi ricavare $|DE|$ grazie al teorema del coseno: sia $\beta = \widehat{DAE}$ l'angolo in A: è chiaro che vale

$$\cos\beta = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

e quindi non è necessario risalire ad un'approssimazione di β; in conclusione,

$$|DE| = \sqrt{|AD|^2+|AE|^2-2\,|AD|\,|AE|\,\cos\beta} = \sqrt{14^2+40^2-2\cdot 14\cdot 40\cdot\frac{7}{25}} \cong 38,50 \quad .$$

b) Sia di nuovo $\beta = \widehat{DAE}$; per il Teorema dei seni vale $\dfrac{|AD|}{\sin\alpha} = \dfrac{|DE|}{\sin\beta}$, e quindi

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{|AD|\cdot\sin\beta}{|DE|}\right) \cong 20,43^\circ \quad .$$

(non è necessario risalire a β, dato che $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta}$ e $\cos\beta = \frac{7}{25}$).

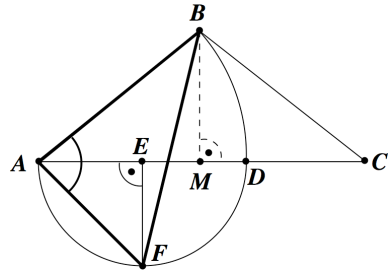
6. L'altezza esterna misura in questo caso $b\cdot\sin(\alpha)$ mentre $a' + c = b\cdot\cos(\alpha)$. Dunque:

$a^2 = h^2 + (a')^2 = (b\sin\alpha)^2 + (b\cos\alpha - c)^2 = (b\sin\alpha)^2 + (c - b\cos\alpha)^2$

$\iff \quad a^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$

$\iff \quad a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \iff \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \blacksquare$

7. Dal momento che $|AD| = |AB| = 8$, vale $|AE| = |EF| = 4$ e quindi $|AF| = 4\sqrt{2}$.



Sia M il punto medio di AC; ricaviamo gli angoli $\widehat{MAF} = 45°$,

$$\widehat{MAB} = \arccos\frac{|AM|}{|AB|} = \arccos\frac{\frac{1}{2}|AC|}{|AB|} = \arccos\frac{6}{8} \cong 41,41°$$

e $\widehat{FAB} = \widehat{MAB} + \widehat{MAF} \cong 86,41°$.

Infine, applicando il teorema del coseno al triangolo ABF,

$$\begin{aligned} |BF| &= \sqrt{|AB|^2 + |AF|^2 - 2\,|AB|\,|AF|\,\cos\widehat{FAB}} \cong \\ &\cong \sqrt{64 + 32 - 2 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 86,41°} \cong 9,50 \quad . \end{aligned}$$

8. Con le formule di duplicazione otteniamo:

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \cos^2\tfrac{\alpha}{2} - \sin^2\tfrac{\alpha}{2}.$$

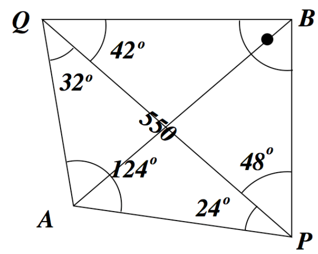
Sapendo che $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$ otteniamo:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Moltiplichiamo queste funzioni per $\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ e otteniamo il risultato ricercato.

Nota: durante l'ultimo passaggio abbiamo diviso per $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, ciò implica che abbiamo supposto che $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ e cioè $\alpha \neq \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{R})$!

9. Innanzitutto, ricaviamo gli angoli mancanti del quadrilatero $APBQ$:



$$\begin{aligned} \widehat{QAP} &= 180° - 24° - 32° = 124° \quad , \\ \widehat{QBP} &= 180° - 42° - 48° = 90° \quad . \end{aligned}$$

Dal momento che $\widehat{QBP}$ è retto, vale

$$|BP| = 550 \cdot \sin 42° \cong 368,02 \text{ m} \quad ;$$

ricaviamo inoltre, con il teorema dei seni,

$$|AP| = 550 \cdot \frac{\sin 32°}{\sin 124°} \cong 351,56 \text{ m} \quad .$$

Infine, con il teorema del coseno,

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2 - 2\,|AP|\,|BP|\,\cos(24° + 48°)} \cong \\ &\cong \sqrt{351,56^2 + 368,02^2 - 2 \cdot 351,56 \cdot 368,02 \cdot \cos 72°} \cong 423,17\,\text{m} \quad . \end{aligned}$$

10. Siano $x = |AD|$ e $y = |DB|$: allora vale $x + y = |AB| = 16$. Dal momento che i perimetri di ADC e DBC sono uguali, deve valere

$$\underbrace{|AD|}_{x} + \underbrace{|AC|}_{10} + \cancel{|CD|} = \cancel{|CD|} + \underbrace{|DB|}_{y} + \underbrace{|BC|}_{15}$$

e quindi $x + 10 = y + 15$, cioè $x - y = 5$. Quindi, x e y sono soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni otteniamo $2x = 21$, $x = 10,5$ e sottraendole $2y = 11$, $y = 5,5$. Grazie al teorema del coseno ricaviamo α (cioè l'angolo in A) e $|CD|$:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \arccos\left(\frac{10^2+16^2-15^2}{2\cdot 10\cdot 16}\right) \cong 65,83^\circ \quad ;$$

$$|CD| = \sqrt{b^2+x^2-2bx\cos\alpha} = \sqrt{10^2+10,5^2-2\cdot 10\cdot 10,5\cdot\cos 65,83^\circ} \cong 11,15 \qquad \text{(cm)}$$

Infine, calcoliamo il perimetro:

$$\mathcal{P} = b + x + |CD| \cong 10 + 10,5 + 11,15 = 31,65 \qquad \text{(cm)}$$

e l'area:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bx\cdot\sin\alpha \cong \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10,5\cdot\sin 65,83^\circ \cong 47,90 \qquad (\text{cm}^2) \quad .$$

11. a) Innanzitutto dal teorema del coseno ($a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$) possiamo ricavare: $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
Per la parte sinistra della prima equazione, utilizzando prima la formula di bisezione e poi quanto visto per il teorema del coseno, otteniamo:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}.$$

Per la parte destra della prima equazione dovremo solamente sciogliere le parentesi e otterremo:

$$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2})(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2})(\frac{-a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2})}{bc}} = \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}.$$

I due bracci della formula si equivalgono e ciò dimostra la regola.
Per la seconda formula si utilizza lo stesso procedimento sfruttando la formula di bisezione del seno ($\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$) e ancora il teorema del coseno.

b) Dalla formula di duplicazione otteniamo che $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Inserendo questa formula nella formula per l'area di un triangolo qualsiasi otteniamo:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \ldots$$

Dopodiché basta sfruttare le regole dimostrate nella parte a) per arrivare alla formula desiderata:

$$\cdots = bc\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \square$$