Geometria analitica

Il 2 aprile 2018 il satellite cinese *Tiangong-1*, partito il 17 agosto del 2011 e operativo fino alla fine del 2016, è rientrato nell'atmosfera terrestre andando a cadere nell'Oceano Pacifico, al termine di una discesa incontrollata causata da problemi tecnici che già da mesi rendevano impossibile per i tecnici da terra comandarne i motori.

La stazione Spaziale Tiangong-1, immagine ESA

La notizia di questa caduta incontrollata aveva creato un grande interesse mediatico e molti media online avevano trattato con grande allarmismo la vicenda, andando ad affermare di una possibile pioggia di detriti che avrebbe investito zone popolate della Terra (o addirittura una caduta del satellite sull'Italia)!
Effettivamente per i tecnici che seguivano il rientro del satellite non è stato facile prevedere con esattezza il punto esatto di impatto sul suolo terrestre, anche se fortunatamente questo era sempre stato previsto in zone non abitate.
(Per maggiori informazioni: `www.esa.int/ita/ESA_in_your_country/Italy/Tiangong-1_Domande_frequenti`).

Come è possibile dunque poter studiare, analizzare e prevedere questi moti molto complessi anche in spazi tridimensionali? Un approccio prettamente geometrico risulta ovviamente molto complicato e difficilmente applicabile. Proprio per questo è interessante applicare quanto sviluppato nella teoria dei vettori alla geometria così da poter "tradurre" a livello algebrico (ovvero di calcolo) le situazioni geometriche anche più complesse e poterle studiare con i potenti mezzi dati dall'algebra.

1 La retta nel piano cartesiano

1.1 Introduzione

La retta è un luogo geometrico già trattato e può essere descritto tramite le usuali equazioni.

Equazione cartesiana di una retta: è possibile descrivere una retta nel piano cartesiano tramite la sua **equazione cartesiana esplicita:**

$$y = mx + q$$

dove $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ è la pendenza della retta e q è l'ordinata all'origine (ovvero la retta interseca l'asse y nel punto $(0; q)$). In questo caso si tratta del grafico della funzione affine $f(x) = ax + b$.

Con questa equazione **non** è possibile descrivere però *rette verticali.* In questo caso è possibile utilizzare **l'equazione cartesiana implicita:**

$$ax + by + c = 0$$

Osservazione: considera la retta r definita dall'equazione $y = 2x + 3$, ciò indica che essa contiene tutti i punti $P(x; y)$ che verificano l'equazione data.
Ad esempio: $P(1; 5) \in r$ poiché $5 = 2 \cdot 1 + 3$ mentre $Q(-5; 7) \notin r$ poiché $7 \neq 2 \cdot (-5) + 3$.

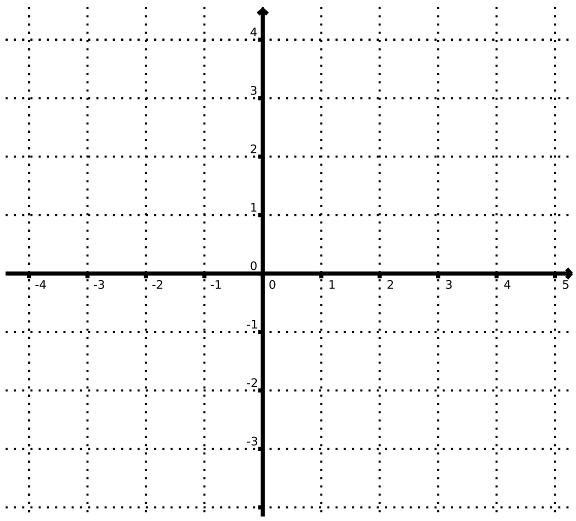
Esempio introduttivo: Rappresenta le rette

$$r_1 : \quad y = 2x \qquad \text{e} \qquad r_2 : \quad y = x + 1$$

determina i punti sulle due rette per $x = -1, 1, 2, 3, 4$, esprimi questi punti tramite i loro **vettori luogo** $\overrightarrow{OP}_i$ per r_1 e $\overrightarrow{OQ}_i$ per r_2:

x	$\overrightarrow{OP}$
-1	
1	
2	
3	
4	

x	$\overrightarrow{OQ}$
-1	
1	
2	
3	
4	

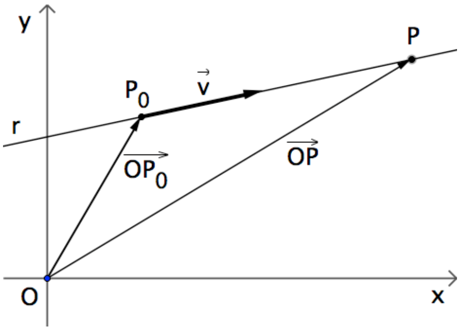


Bonus: determina l'equazione di una retta verticale per $A(2; 2)$:

. . . .

1.2 Definizione

Una retta r nel piano è determinata in modo univoco da un punto $P_0(x_0, y_0)$ su di essa e da un vettore $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ parallelo ad essa (un **vettore direttore**) di r.



$$\begin{aligned} & P(x,y) \text{ giace su } r \\ \Longleftrightarrow \quad & \overrightarrow{P_0P} \text{ e } \vec{v} \text{ sono collineari} \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{v} \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda \cdot \vec{v} \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

L'equazione vettoriale

$$\boxed{r \;:\; \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}} \quad \text{oppure, in componenti,} \quad \boxed{r \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

è l'**equazione parametrica (vettoriale)** della retta r. Al variare del **parametro** λ, $\overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}$ percorre i vettori luogo di *tutti* i punti sulla retta r. Quindi, variando λ nell'espressione in componenti si ottengono le coordinate $P(x, y)$ di *tutti* i punti sulla retta r.

Scrivendo separatamente le componenti dei vettori, si ricavano le *equazioni parametriche* (numeriche) della retta:

$$\boxed{r \;:\; \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}}$$

Esempi:

1) *Determina un'equazione parametrica della retta r passante per $A(4, 5)$ e parallela al vettore $\vec{v} = \binom{3}{-2}$ e rappresentala graficamente.*

Per $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$ quali punti della retta otteniamo? Calcolali e indicali nel grafico.

2) *Determina e rappresenta un'equazione parametrica della retta s passante per $A(-1, 2)$ e $B(5, 6)$.*

Osservazione: l'equazione parametrica di una retta **non è unica**: in essa compaiono le coordinate di un punto $P_0 \in r$ *qualsiasi della retta* e le componenti di un vettore $\vec{v} \parallel r$ *qualsiasi*.
È dunque possibile *scegliere* un differente P_0 (sempre sulla retta) e $\vec{v}$ (sempre collineare a r) per ottenere un'equazione differente che rappresenta però la stessa identica retta.

Ad **esempio**: nell'es. **2)** avremmo potuto scegliere $P_0 = B(5, 6)$ e dimezzare il vettore $\overrightarrow{AB}$ (per semplificare la scrittura) ottenendo la seguente *parametrizzazione*:

s : ....

Questa equazione rappresenta nuovamente la stessa identica retta s seppur con una *parametrizzazione diversa*. In particolare se inseriamo $\lambda = 1$ nella prima equazione otterremmo il punto:

Mentre inserendo $\lambda = 1$ nella seconda equazione otterremmo il punto:

1.3 Punto e retta

Data una retta $r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}$ e un punto $A(x_A, y_A)$, è facile verificare se A giace su r: è sufficiente controllare se il sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

di *due equazioni* nell'*unica* incognita λ è risolvibile oppure no (cioè se, isolando λ nelle due equazioni, non si ottengono contraddizioni).

Esempio: *siano* $P(-5,-1)$, $Q(5,2)$ *e* $s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Verifica che $P \in s$ *e* $Q \notin s$.

Trova ora una differente parametrizzazione della retta s e esegui il compito nuovamente. Cosa noti?

Come abbiamo già notato, l'equazione parametrica di una retta riduce la conoscenza di un punto su di essa alla conoscenza del corrispondente valore del parametro λ. Ciò permette a volte di riformulare un problema geometrico come un'equazione in λ.

Esempio: *Considera la retta*

$$r \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

determina le coordinate di un punto $P \in r$ *che disti 10 dall'origine degli assi cartesiani.*

Le coordinate di un punto generico della retta r possono essere espresse in relazione al parametro λ:

$$P(\ldots\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

1.4 Equazione cartesiana e equazione parametrica

Come abbiamo visto vi sono differenti modi (differenti equazioni) per descrivere la stessa retta. Introduciamo ora alcune tecniche per passare da un'equazione all'altra. Ovviamente un metodo è quello di trovare due punti appartenenti alla retta per poi determinare l'equazione conosciuta. Vi sono però dei metodi più veloci:
$\boxed{\text{Dall'equazione parametrica a quella cartesiana:}}$ vi sono tre possibili metodi.

1) Un primo metodo consiste **nell'eliminare** con le consuete tecniche algebriche il parametro λ dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

Così facendo si ottiene l'**equazione cartesiana** di una retta, nella **forma esplicita** (1) o nella **forma implicita** (2).

$$\boxed{(1) \quad y = mx + q} \qquad\qquad \boxed{(2) \quad ax + by + c = 0}$$

Esempio: consideriamo ancora la stessa retta dell'esempio 1) della pagina precedente:

$$r \ : \begin{cases} x = 4 + 3\lambda & \text{(I)} \\ y = 5 - 2\lambda & \text{(II)} \end{cases} \qquad ; \quad \text{da } 2 \cdot \text{(I)} + 3 \cdot \text{(II) otteniamo } 2x + 3y = 8 + 15 \text{ , e}$$

$$r \ : \ 2x + 3y - 23 = 0 \quad \text{(implicita)} \quad \text{risp.} \quad r \ : \ y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{3} \quad \text{(esplicita)} \ .$$

2) Sfruttando vettore direttore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ si può facilmente ricavare la pendenza della retta: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v_2}{v_1}$. Conoscendo le coordinate del punto $P(x_0, y_0)$ otteniamo facilmente l'equazione con la formula conosciuta: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

Esempio: sempre in riferimento alla stessa retta:

$$y - 5 = \frac{-2}{3}(x - 4) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{-2}{3}x + \frac{23}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x + 3y - 23 = 0$$

Esercizio: trasforma la seguente equazione vettoriale di una retta in un'equazione cartesiana:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Osservazioni:

(i) L'equazione implicita di una retta *non è unica* (lo è soltanto "a meno di una costante moltiplicativa"): ad **esempio**, abbiamo appena notato che $4x - 6y + 16 = 0$ e $2x - 3y + 8 = 0$ definiscono la stessa retta.

(ii) Per contro, l'equazione esplicita è unica, ma essa *non esiste sempre*: in particolare, una retta verticale può essere descritta soltanto da un'equazione parametrica o da un'equazione cartesiana implicita (in quanto essa non rappresenta il grafico di una funzione!).

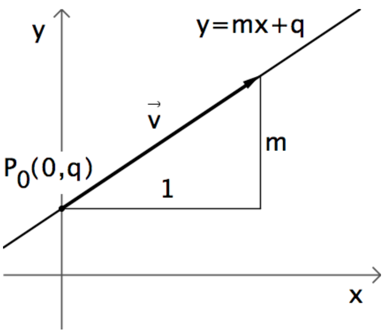
Consideriamo ad **esempio** la retta verticale per $P_0(5,5)$; con $\vec{v} = \binom{0}{1}$ vale

$$r \ : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{risp.} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 + \lambda \end{cases} \quad ;$$

ricaviamo immediatamente $x - 5 = 0$ quale equazione implicita, ma nessuna relazione del tipo $y = mx + q$.

Dall'equazione cartesiana a quella parametrica:

Per scrivere l'equazione parametrica di una retta data con l'equazione cartesiana, sfruttiamo di nuovo il significato geometrico dei parametri m (*pendenza*, o *coefficiente angolare*) e q (*ordinata all'origine*):



Con $P_0(0,q)$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ ricaviamo

$$\boxed{r \ : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}} \quad \text{risp.} \quad \boxed{r \ : \begin{cases} x = \lambda \\ y = q + \lambda \cdot m \end{cases}}$$

(ovvero, scegliamo x quale parametro).

Ad **esempio**, per la retta $r : y = -2x + 7$ utilizziamo $P_0(0,7)$ e $\vec{v} = \binom{1}{-2}$, ricavando

$$r \ : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad .$$

ESERCIZIO: Determina l'equazione parametrica della retta: $y = -\frac{x}{2} + 4$.

1.5 Proprietà delle equazioni della retta

Le tre equazioni viste per descrivere una retta nel piano contengono informazioni geometriche diverse, e quindi si prestano di volta in volta alla risoluzione di problemi geometrici diversi:

- l'**equazione parametrica** $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$ contiene le coordinate di un punto $P(x_0, y_0)$ giacente sulla retta e le componenti di un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ad essa collineare; tale equazione esprime le coordinate dei punti della retta, e rappresenta una funzione

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \lambda & \longmapsto & P(\lambda) = P(\, x_0 + \lambda\, v_1 \;,\; y_0 + \lambda\, v_2 \,) \quad ; \end{array}$$

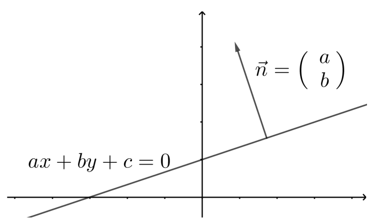
- l'**equazione cartesiana esplicita** $y = mx + q$ descrive la retta come *grafico* di una funzione affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; è facile mostrare che $m = \tan\alpha$ ove α è l'angolo orientato che la retta forma con l'asse delle ascisse, e $q = f(0)$ è l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse Oy;

- l'**equazione cartesiana implicita**, invece, contiene le componenti del cosiddetto **vettore normale** alla retta:

> **Lemma: Vettore normale ad una retta**
> Il vettore $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è perpendicolare alla retta di equazione cartesiana
>
> $$r \;:\; ax + by + c = 0 \quad .$$

Dimostrazione: nella forma implicita, la retta ha equazione $r : y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$; pertanto, come abbiamo già visto, essa ha la direzione del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}$.
Il vettore $\vec{n}$ è perpendicolare a r se vale $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$; verifichiamolo dunque esplicitamente:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + b \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = 0 \quad \blacksquare$$



Esercizio: Trova l'equazione cartesiana della retta seguente. Determina inoltre una retta perpendicolare ad essa che passa per l'origine degli assi cartesiani:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

1.6 Intersezione di 2 rette

Nel caso di due rette date con l'equazione cartesiana ($y = mx+q$ e $y = m'x+q'$) sappiamo che per trovare la loro intersezione basta eguagliare queste equazioni $mx + q = m'x + q'$ e ricavarne la soluzione x.

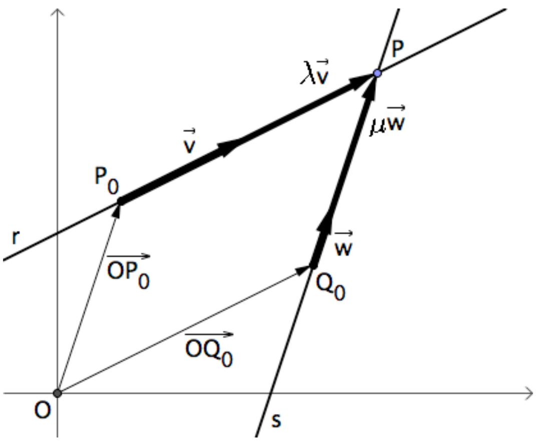
ESERCIZIO: Trova il punto di intersezione tra $y = 2x + 2$ e $y = -x + 4$.

Osservazione: ovviamente questo è possibile se le due rette non sono parallele, ovvero se $m \neq m'$.

Se le due rette r e s sono date per mezzo delle $\boxed{\text{equazioni parametriche}}$

$$r\ :\ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OP}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OP_0}} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \quad \text{risp.} \quad s\ :\ \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OP}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OQ_0}} + \mu \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}'}$$

nel punto d'intersezione $P = r \cap s$ deve valere $\overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v} = \overrightarrow{OQ_0} + \mu\vec{w}$;



eguagliando quindi le equazioni parametriche, ci si riconduce al sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_0 + \lambda\, v_1 = x_0' + \mu\, w_1 \\ y_0 + \lambda\, v_2 = y_0' + \mu\, w_2 \end{cases} \tag{1}$$

con incognite i parametri λ e μ .

Osservazione che occorre utilizzare due parametri diversi per le due rette!

Esempio: intersechiamo le rette

$$r\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 + \lambda = -4 + 4\mu \\ 2 - \lambda = -3 + \mu \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda - 4\mu = -5 \\ \lambda + \mu = 5 \end{cases} \quad ;$$

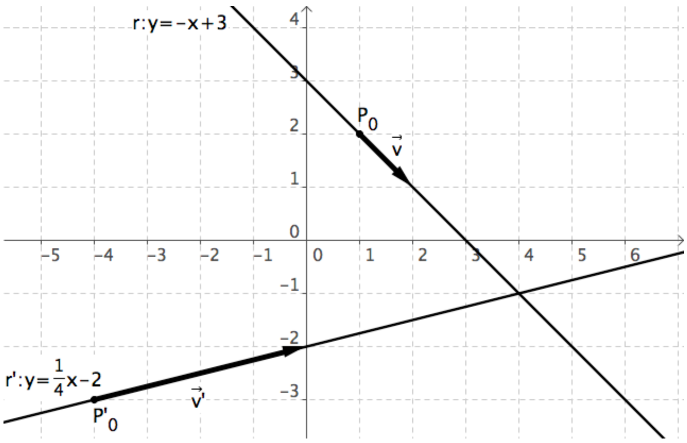
dalla differenza delle due equazioni risulta $-5\mu = -10 \iff \mu = 2$ e $\lambda = 5 - \mu = 3$.

Quindi, $\mathcal{S} = \{\ (3,2)\}$ e si ottengono le coordinate di $P = r \cap s$ sostituendo $\lambda = 3$ nelle equazioni parametriche di r :

$$P(1+\lambda, 2-\lambda) = P(4,-1) \quad ,$$

oppure sostituendo $\mu = 2$ nelle equazioni parametriche di s :

$$P(-4+4\mu, -3+\mu) = P(4,-1) \quad .$$



Osservazione: risolvendo il sistema (1), possono presentarsi tre casi:

- $\mathcal{S} = \{(\lambda, \mu)\}$: il sistema ha una sola soluzione, e le rette sono incidenti (v. sopra);
- $\mathcal{S} = \varnothing$: il sistema non ha soluzioni, e le rette sono parallele;
- $\mathcal{S}$ contiene un'infinità di elementi: le due equazioni del sistema sono equivalenti, e le due rette coincidono (si tratta cioè di due diverse parametrizzazioni della stessa retta).

Esercizio: Trova il punto di intersezione di queste due rette:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ;$$

1) Direttamente dall'equazione parametrica.
2) Trovando le rispettive equazioni cartesiane e intersecando quest'ultime.

1.7 Parallelismo, ortogonalità, angoli

L'intuizione geometrica vettoriale può essere applicata in modo molto efficace se due rette sono date mediante le $\boxed{\text{equazioni parametriche}}$

$$r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v} \qquad \text{e} \qquad s : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'_0} + \mu\vec{w} \quad .$$

- Parallelismo : chiaramente,

$$r \parallel s \quad \iff \quad \text{i vettori direttori } \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ sono collineari} \quad .$$

Esempio: le rette

$$r \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono parallele, perché $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

La *coincidenza* di due rette può essere considerata come un caso particolare di parallelismo: per verificare che $r = s$, si può verificare che $P_0 \in s$ oppure che $Q_0 \in r$. Ad **esempio**, è facile verificare che

$$r \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono coincidenti.

- Ortogonalità : vale

$$r \perp s \quad \iff \quad \vec{v} \perp \vec{w} \quad \iff \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad .$$

Esempio: le rette

$$r \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sono ortogonali, perché $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot (-4) + 4 \cdot 7 = 0$.

- Angolo acuto α tra due rette: si tratta dell'angolo acuto tra *le direzioni* $\vec{v}$ e $\vec{w}$; vale quindi

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \quad ;$$

il *valore assoluto* al numeratore garantisce che $\cos\alpha \in [0, 1] \iff \alpha \in [0°, 90°]$.

Esempio: determiniamo l'ampiezza dell'angolo acuto tra le rette r e s dell'esempio a 9:

$$\frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} = \frac{|4-1|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

e $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \cong 59,04°$.

Equazioni cartesiane esplicite

Ricordiamo ora alcuni importanti risultati riguardo le rette espresse in forma cartesiana:

$$r \;:\; y = mx + q \qquad \text{e} \qquad s \;:\; y = m'x + q' \quad .$$

- Parallelismo : vale

$$r \parallel s \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad m = m';$$

  com'era già noto, due rette sono parallele se possiedono la stessa pendenza.

  Esempio: le rette

$$r \;:\; y = \pi x + 3e^2 \quad \text{e} \quad s \;:\; y = \pi x - \sqrt{2}$$

  sono parallele.

- Ortogonalità : vale

$$r \perp s \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 1 + mm' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m \cdot m' = -1$$

  (anche qui si tratta di una condizione già nota).

  Esempio: le rette

$$r \;:\; y = \frac{3}{4}x + 2 \quad \text{e} \quad s \;:\; y = -\frac{4}{3}x + 8$$

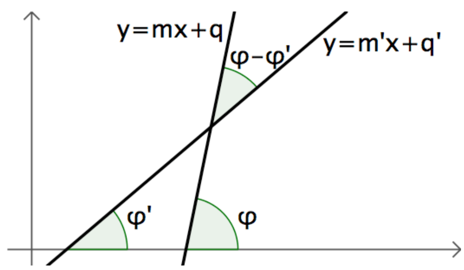
  sono ortogonali.

- Angolo acuto α tra due rette: possiamo procedere in due modi.
  - Come sopra, calcoliamo

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \quad \text{con} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} \quad .$$

  - Oppure, ricordando che $m = \tan\varphi$ e $m' = \tan\varphi'$ ove φ e φ' sono gli angoli formati dalle rette r e s con l'orizzontale, sfruttiamo la *formula di sottrazione per la tangente*:

$$\tan\alpha = \tan(\varphi - \varphi') = \frac{\tan\varphi - \tan\varphi'}{1 + \tan\varphi \cdot \tan\varphi'}$$



    Con il valore assoluto garantiamo inoltre che l'angolo sia acuto:

$$\boxed{\tan\alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|} \quad .$$

Esempio 1: determiniamo l'ampiezza dell'angolo acuto tra le rette r e s dell' esempio a pag. 9;

$$r \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Esempio 2: determina per quali parametri $m, n \in \mathbb{R}$ le seguenti rette sono coincidenti:

$$r \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ n \end{pmatrix} \quad ;$$

Accenniamo, infine, al caso in cui le rette sono date mediante le $\boxed{\text{equazioni cartesiane implicite}}$

$$r \; : \; ax + by + c = 0 \qquad \text{e} \qquad s \; : \; a'x + b'y + c' = 0 \quad .$$

Ricordando (vedi Lemma, pag. 8) che i rispettivi vettori normali sono $\vec{n} = \binom{a}{b}$ e $\vec{n}' = \binom{a'}{b'}$ possiamo affermare quanto segue:

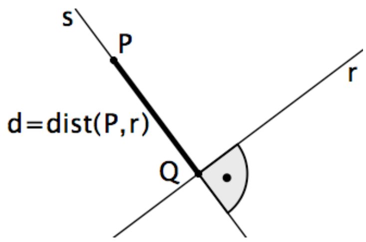
- Parallelismo : due rette sono parellele se e soltanto se le rispettive *direzioni normali* sono parallele; quindi, $r \parallel s \iff \vec{n}$ e $\vec{n}'$ sono collineari.
- Ortogonalità : due rette sono ortogonali se e soltanto se le rispettive *direzioni normali* sono ortogonali; quindi, $r \perp s \iff \vec{n} \perp \vec{n}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$.
- Angolo acuto α tra due rette: si tratta dell'angolo tra le *direzioni* di $\vec{n}$ e $\vec{n}'$; vale quindi $\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{n}'\|}$.

1.8 La distanza tra un punto e una retta

Definizione Distanza
Siano r una retta e P un punto del piano. Allora, la **distanza** tra P e r, denotata $\text{dist}(P, r)$, è la distanza *minima* tra P e un punto di r :

$$\text{dist}(P, r) = \min_{Q \in r} |PQ| \quad .$$

<u>Primo metodo:</u>
Sia Q il punto sulla retta r avente distanza minima da P; allora è facile intuire che il segmento PQ è perpendicolare a r. Quindi, per determinare $d = \text{dist}(P, r)$ potremmo ricavare dapprima un'equazione per la retta s con $P \in s$ e $s \perp r$, determinare le coordinate di $Q = r \cap s$ e infine calcolare $d = |PQ|$.



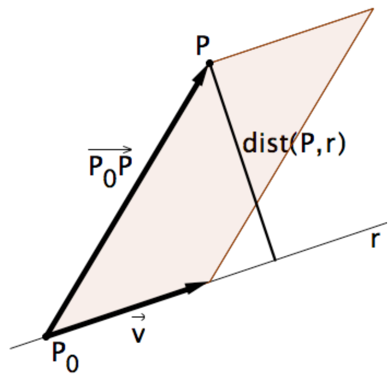
Esempio: determiniamo $\text{dist}(P, r)$, con $P(10, 4)$ e $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Secondo metodo:</u>

$$r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{v} \quad ,$$

la distanza $\text{dist}(P, r)$ corrisponde all'altezza del parallelogrammo di lati equivalenti a $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_0P}$, e può essere quindi calcolata come rapporto tra area e base dello stesso:

$$\boxed{\text{dist}(P, r) = \frac{\left|\det(\vec{v}\,, \overrightarrow{P_0P})\right|}{\|\vec{v}\|}} \quad .$$



Esercizio: Determina la distanza retta-punto dell'esempio precedente

<u>Terzo metodo:</u>
Se la retta è data mediante **l'equazione cartesiana implicita**, la formula per la distanza si rivela particolarmente semplice; difatti vale il

> **Teorema**
> Siano
> $$r \ : \ ax + by + c = 0 \quad \text{e} \quad P(x_P, y_P) \quad ;$$
> allora vale
> $$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad .$$

Dimostrazione: riscriviamo l'equazione in forma parametrica, ricordando quanto visto a pag. 7:

$$r : ax + by + c = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r : \ y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad .$$

Con $P_0(0, -\frac{c}{b})$ e $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P + \frac{c}{b} \end{pmatrix}$ vale quindi

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{\left|\det(\,\vec{v}\,,\, \overrightarrow{P_0P})\right|}{\|\vec{v}\|} = \left| \frac{\begin{vmatrix} b & x_P \\ -a & y_P + \frac{c}{b} \end{vmatrix}}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} \right| = \frac{\left|b(y_P + \frac{c}{b}) - (-a)x_P\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \blacksquare$$

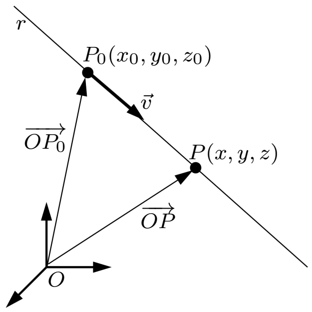
Esercizio: Calcola l'equazione implicita dell'esempio precedente:

$$r : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e utilizza la formula qui sopra per determinare la distanza punto-retta.

2 L'equazione parametrica della retta in V_3

Una retta r nello spazio è determinata in modo univoco da un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ su di essa e da un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ parallelo ad essa (un **vettore direttore**) di r.



$$\begin{aligned} & P(x,y,z) \text{ giace su } r \\ \Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{P_0P} \text{ e } \vec{v} \text{ sono collineari} \\ \Longleftrightarrow\ & \text{esiste } \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{v} \\ \Longleftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda \cdot \vec{v} \\ \Longleftrightarrow\ & \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

$$\boxed{r\ :\ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}} \qquad \boxed{r\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{r\ :\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}}$$

è detta **equazione parametrica** della retta r.

Osservazione: purtroppo, in $\mathbb{R}^3$ non è possibile eliminare il parametro λ dal sistema per ottenere l'equazione cartesiana della retta. Per questo in V_3 ci limiteremo a lavorare con l'equazione parametrica della retta.

Esempi:

1) *Determina un'equazione parametrica della retta r passante per $A(-1, 2, 3)$ e parallela al vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.*

2) *Determina un'equazione parametrica della retta s passante per $A(2, -1, 3)$ e $B(4, 5, -1)$.*

Osservazione: l'equazione parametrica di una retta *non è unica*: in essa compaiono le coordinate di un punto $P_0 \in r$ *qualsiasi* e le componenti di un vettore $\vec{v} \parallel r$ *qualsiasi*.

Ad **esempio**: nell'es. **2)** avremmo potuto scegliere $P_0 = B(4, 5, -1)$ e dimezzare il vettore $\overrightarrow{AB}$ ottenendo una differente *parametrizzazione* della retta:

. . . .

2.1 Punto e retta

Data una retta $r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v}$ e un punto $A(x_A, y_A, z_A)$, è facile verificare se A giace su r: è sufficiente controllare se il sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

di *tre equazioni* nell'*unica* incognita λ è risolvibile oppure no (cioè se, isolando λ nelle tre equazioni, non si ottengono contraddizioni).

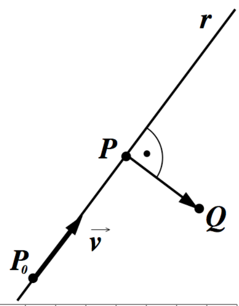
Esempio: *siano* $P(-5, -1, 6)$, $Q(5, 4, 5)$ *e* $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Verifica che $P \in s$ *e* $Q \notin s$.

Come abbiamo già notato, l'equazione parametrica di una retta riduce la conoscenza di un punto su di essa alla conoscenza del corrispondente valore del parametro λ. Ciò permette a volte di riformulare un problema geometrico come un'equazione in λ.

Esempio: *dati il punto* $Q(3, 9, 4)$ *e la retta*

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



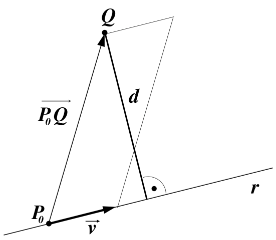
determina le coordinate di un punto $P \in r$ *tale che* $\overrightarrow{PQ} \perp r$.

2.2 Distanza punto retta

Dall'ultimo esempio è quindi facile capire che la distanza tra il punto Q è la retta r può venire determinando il modulo: $\|\overrightarrow{PQ}\|$ (questo è lo stesso metodo utilizzato anche in V_2):

$\overrightarrow{PQ}=$..

<u>Secondo metodo:</u>
Anche il secondo metodo sviluppato per il piano cartesiano (V_2) è valido, vale a dire la distanza retta-punto è l'altezza del parallelogrammo avente lati $\vec{v}$ e $\overrightarrow{P_0Q}$ rispetto alla base $\vec{v}$:



L'area di tale parallelogrammo misura $\|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0Q}\|$. Quindi

$$\boxed{\text{dist}(Q,r)=\frac{\|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0Q}\|}{\|\vec{v}\|}}\ .$$

(Attenzione: non si tratta del determinante!!!)

Esercizio: Calcola la distanza retta-punto dell'esempio precedente: dati il punto $Q(3,9,4)$ e la retta

$$r\ :\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Osservazione 1: In V_2 è possibile determinare esattamente una retta perpendicolare ad una retta data (in un punto), mentre in V_3 questo non è possibile: a tre dimensioni è possibile trovare infiniti vettori (NON collineari) perpendicolari ad un vettore dato!

Osservazione 2: In V_3 non è possibile descrivere una retta con un'equazione cartesiana; in particolare un'equazione del tipo

$$ax+by+cz+d=0$$

NON rappresenta una retta.

Esempio: dimostra che l'equazione $3x+2y-z+2=0$ non è una retta. (Aiuto: genera tre punti distinti e dimostra che non sono allineati).

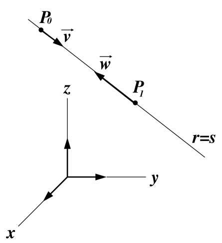
2.3 La posizione reciproca di due rette

Due rette in $\mathbb{R}^3$

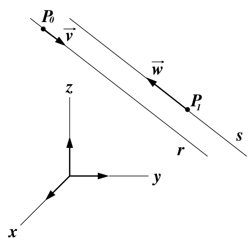
$$r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{e} \quad s : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \mu \cdot \vec{w}$$

possono essere tra loro **coincidenti**, **parallele**, **incidenti** oppure **sghembe**.

- se i vettori direttori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono collineari, allora r e s sono coincidenti oppure parallele:
  - le due rette coincidono ("sono la stessa retta") se P_0 giace su s oppure P_1 giace su r (ricorda che l'equazione parametrica di una retta non è unica, e quindi due equazioni parametriche diverse possono anche descrivere la stessa retta!)
  - in caso contrario, quindi se $P_0 \notin s$ oppure $P_1 \notin r$, le rette sono parallele.



Rette coincidenti



Rette parallele

- se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono collineari, le rette sono incidenti oppure sghembe. Per determinare la posizione reciproca di r e s possiamo studiare il sistema di tre equazioni

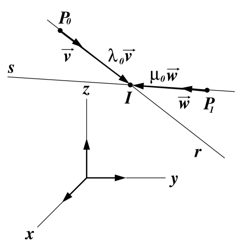
$$\overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OP_1} + \mu \cdot \vec{w} \quad \text{cioè, in componenti} \quad \begin{cases} x_0 + \lambda \cdot v_1 = x_1 + \mu \cdot w_1 \\ y_0 + \lambda \cdot v_2 = y_1 + \mu \cdot w_2 \\ z_0 + \lambda \cdot v_3 = z_1 + \mu \cdot w_3 \end{cases}$$

  in due incognite λ, μ, con $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

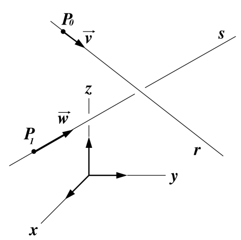
  - se il sistema possiede una una sola soluzione (λ_0, μ_0), le rette si intersecano in un punto I, le cui coordinate possono essere ricavate sostituendo $\lambda = \lambda_0$ nell'equazione parametrica di r oppure $\mu = \mu_0$ nell'equazione parametrica di s:

$$I(x_0 + \lambda_0 \cdot v_1, y_0 + \lambda_0 \cdot v_2, z_0 + \lambda_0 \cdot v_3) = I(x_1 + \mu_0 \cdot w_1, y_1 + \mu_0 \cdot w_2, z_1 + \mu_0 \cdot w_3)$$

  - se il sistema *non* possiede soluzioni, cioè ad esempio se la soluzione (λ_0, μ_0) ricavata dalle prime due equazioni non soddisfa la terza, le rette non hanno punti in comune e pertanto sono sghembe.



Rette incidenti



Rette sghembe

Esempi: *studia la posizione reciproca delle rette r e s:*

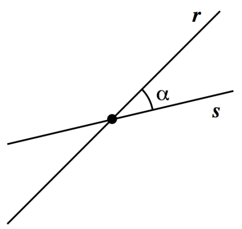
1) $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

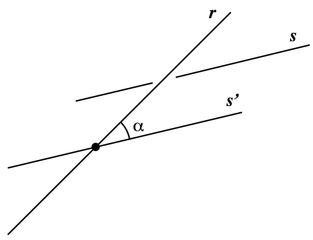
3) $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.4 Angoli e distanze fra rette

Angolo tra due rette: l'angolo acuto tra due rette incidenti è definito in maniera evidente. L'angolo tra due rette sghembe r e s è definito come l'angolo tra r e una (qualsiasi) retta s' parallela a s tale che r e s' siano incidenti.



Rette incidenti



Rette sghembe

In entrambi i casi, quindi, l'angolo tra due rette è l'angolo acuto α tra *i vettori direttori* (direzionali) $\vec{v}$ e $\vec{w}$, calcolabile con l'abituale formula:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}}$$

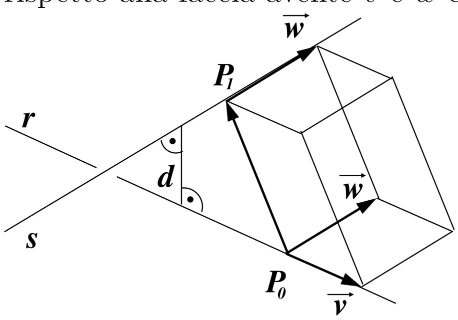
Il valore assoluto garantisce che si tratti dell'angolo acuto.

Distanza tra due rette r e s: si tratta della distanza *minima* tra un punto di r e un punto di s, cioè

$$\operatorname{dist}(r,s) = \min\{|PQ| \mid P\in r, Q\in s\} \quad .$$

Osservazione: Se le rette si intersecano ovviamente questa distanza è nulla mentre se $r \parallel s$, $\operatorname{dist}(r,s)$ la distanza tra r e un punto qualsiasi di s (oppure tra s e un punto qualsiasi di r).

Supponiamo ora che $r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\vec{v}$ e $s : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \mu\vec{w}$ siano **sghembe**. Allora, $\operatorname{dist}(r,s)$ è uguale alla distanza tra il piano parallelo a r e contenente s e il piano parallelo a s contenente r. Si tratta dell'altezza del parallelepipedo avente spigoli $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\overrightarrow{P_0P_1}$ rispetto alla faccia avente $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come lati:



La distanza d è quindi uguale al quoziente tra il volume e l'area di base del parallelepipedo:

$$\boxed{\operatorname{dist}(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_0P_1}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|}{\|\,\vec{v}\times\vec{w}\|}} \quad .$$

Esercizio: Calcola l'angolo e la distanza tra le rette dell'esempio **3)** della pagina precedente.

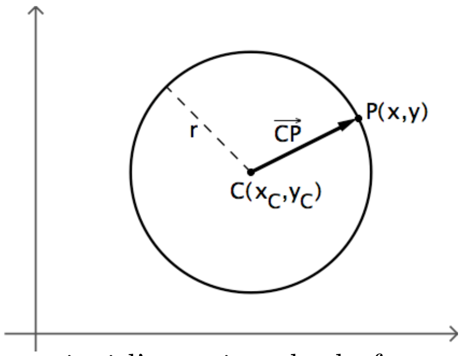
3 La circonferenza nel piano

3.1 Equazione cartesiana

Una **circonferenza** $\mathcal{C}$ di raggio r e centro C è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che $|CP| = r$.
Dalla definizione geometrica ricaviamo immediatamente l'**equazione cartesiana** di una circonferenza:

siano $r > 0$ e $C(x_C, y_C)$; allora vale

$$\begin{aligned} & P(x,y) \in \mathcal{C} \\ \iff \quad & |CP| = r \\ \iff \quad & \sqrt{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2} = r \\ \iff \quad & \boxed{\mathcal{C} : (x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 = r^2} \quad . \end{aligned}$$



Osservazione: se C coincide con l'origine degli assi cartesiani l'equazione ha la forma $x^2 + y^2 = r^2$; per $r = 1$ si ottiene la *circonferenza trigonometrica*.
Esercizio:

1) *Determina l'equazione cartesiana della circonferenza di raggio 7 e centro* $C(5, 4)$.

Rappresenta questa circonferenza e determina i punti con coordinate: $y = -1, x = 2, x = -100, x = -2$. Trova infine le intersezioni con gli assi cartesiani.

2) *Determina l'equazione cartesiana della circonferenza di centro* $C(-2, 3)$ *passante per il punto* $P(1, 1)$.

Dalla forma $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$, sciogliendo le parentesi, l'equazione cartesiana della circonferenza può anche essere scritta nella cosiddetta **forma generale**

$$\boxed{\mathcal{C}\ :\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0} \quad .$$

Negli **esempi** visti sopra vale:

Facilmente possiamo controllare se il punto $P(3; -1)$ appartiene alla prima circonferenza:

. . . .

Viceversa per passare dalla forma generale alla forma cartesiana, dobbiamo utilizzare il *completamento del quadrato*: questa tecnica è stata sviluppata in prima per risolvere le equazioni di secondo grado. Ad esempio risolvi:

$$x^2 + 8x + 14 = 0$$

Applichiamo dunque la stessa tecnica per ricavare il centro C e il raggio r della circonferenza data in forma generale:

1) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x + 12y + 1 = 0$; otteniamo:

2) $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 14x - 15 = 0$; otteniamo:

Osservazione: <u>non</u> tutte le equazioni $x^2 + y^2 + ax + by + c + d = 0$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) rappresentano delle circonferenze.
Ad esempio da $x^2 + y^2 + 14x + 50 = 0$, completando il quadrato, otteniamo:

3.2 Equazione parametrica

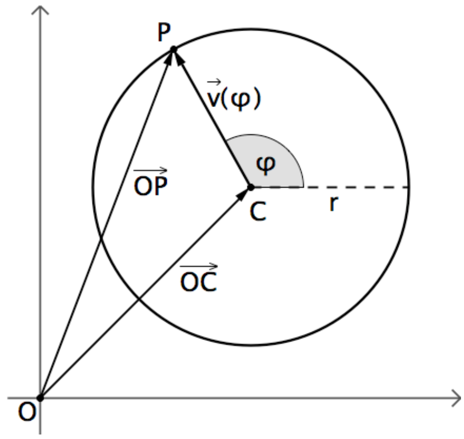
Una circonferenza di raggio r e centro $C(x_C, y_C)$ può anche essere espressa mediante un'**equazione parametrica**: ricordando che, al variare di φ, il vettore $\vec{v}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ descrive i punti sulla circonferenza unitaria,

il punto $P(x, y)$ giace sulla circonferenza se per un certo $\varphi \in \mathbb{R}$ vale

$$\iff \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \vec{v}(\varphi)$$

$$\iff \quad \boxed{\mathcal{C} \; : \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \end{pmatrix}}$$

$$\iff \quad \mathcal{C} \; : \; \begin{cases} x = x_C + r\,\cos\varphi \\ y = y_C + r\,\sin\varphi \end{cases} \quad .$$



Esempio: per le circonferenze studiate sopra, le equazioni parametriche sono:

In questo caso variando il parametro φ possiamo ottenere i vari punti appartenenti alle circonferenze. Per le due circonferenze date, con $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{3}, \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$ otteniamo:

3.3 Rette e circonferenze

Per studiare la posizione reciproca di una retta e di una circonferenza conviene far uso delle equazioni cartesiane; ciò conduce ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = mx + q \end{cases}$$

che può immediatamente essere ricondotto, mediante sostituzione, ad un'equazione quadratica in x:

$$x^2 + (mx + q)^2 + ax + b(mx + q) + c = 0.$$

Esempi: *studia la posizione reciproca della retta* r *e della circonferenza* $\mathcal{C}$.

1) $\begin{cases} \mathcal{C} : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0 \\ r : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$.

Sostituendo, ricaviamo

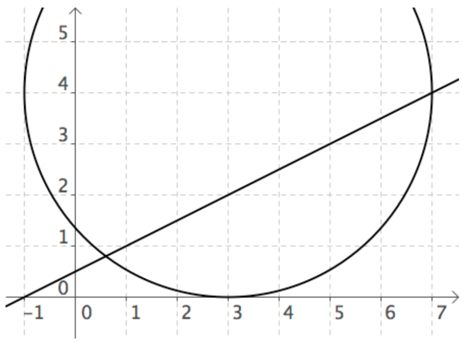
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 - 6x - 8\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) + 9 = 0 \iff \dots \iff 5x^2 - 38x + 21 = 0$$

e le due soluzioni sono

$$x_1 = \frac{38 - \sqrt{38^2 - 20 \cdot 21}}{10} = \frac{3}{5} \ , \ x_2 = \frac{38 + 32}{10} = 7 \ .$$

Vi sono quindi due punti d'intersezione:

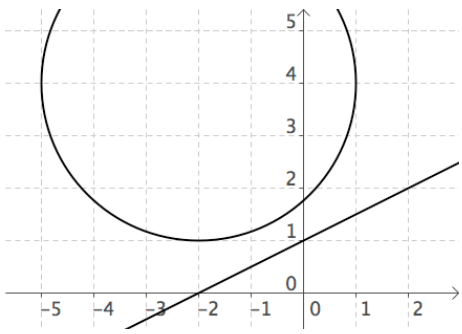
$$P_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \ \text{ e } \ P_2(7, 4) \ .$$



2) $\begin{cases} \mathcal{C} : (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ r : y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$.

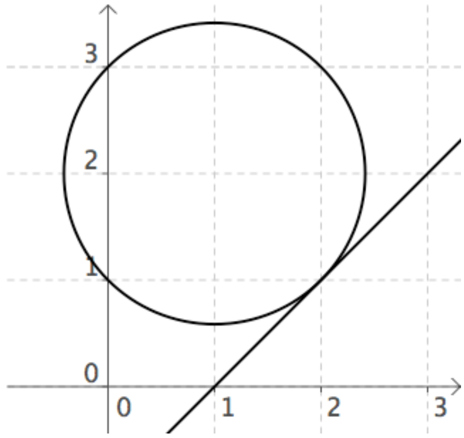
Sostituendo, ricaviamo:

Calcoliamo il discriminante:



3) $\begin{cases} \mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0 \\ r : y = x - 1 \end{cases}$.

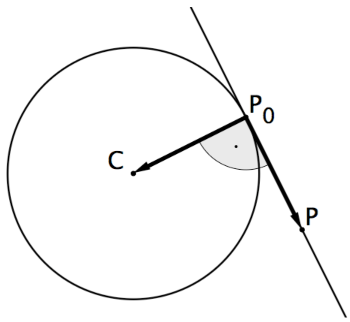
Sostituendo, ricaviamo:



3.4 Retta tangente alla circonferenza

$\boxed{\textbf{1.}}$ Se $\boxed{P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}}$ (condizione verificabile immediatamente sostituendo le coordinate di P_0 nell'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$), allora per un punto $P(x, y)$ sulla retta tangente a $\mathcal{C}$ in P_0 vale

$$\overrightarrow{P_0C} \perp \overrightarrow{P_0P} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_C - x_0 \\ y_C - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0}$$



ove $C(x_C, y_C)$ è il centro della circonferenza. Ciò permette di ricavare immediatamente l'equazione cartesiana di r !

Esempio: $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$, $P_0(4, 3)$.

Innanzitutto verifichiamo che $P_0 \in \mathcal{C}$:

determiniamo il centro C:

Ora, con $C(...;...)$, procediamo come indicato sopra:

$\boxed{\textbf{2.}}$ Se invece il punto $\boxed{P_0(x_0, y_0)}$ non appartiene alla circonferenza $\mathcal{C}$ (ma quanto vediamo è applicabile anche se il punto appartiene alla circonferenza), allora è necessario investigare più approfonditamente la situazione.

Osservazione: come mostrano gli esempi, *la posizione reciproca della retta r e della circonferenza $\mathcal{C}$ si rispecchia nel valore del discriminante dell'equazione quadratica ottenuta sostituendo l'equazione cartesiana esplicita di r nell'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$*:

- $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \cap r = \{P_1, P_2\}$ (due punti d'intersezione);
- $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \cap r = \{P\}$ (r e $\mathcal{C}$ sono tangenti);
- $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \cap r = \varnothing$ (nessuna intersezione).

La *condizione di tangenza* $\Delta = 0$ può essere sfruttata per *determinare l'equazione cartesiana delle rette tangenti ad una circonferenza $\mathcal{C}$ passanti per un dato punto $P(x_P, y_P)$*.

Esempio: *dati $\mathcal{C}$ e P, ricava le tangenti a $\mathcal{C}$ passanti per P.* $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$, $P(7, 5)$.

Innanzitutto, il fatto che $P \in r$ permette di eliminare un parametro dall'equazione cartesiana $y = mx + q$ della retta:

$$5 = m \cdot 7 + q \quad \Rightarrow \quad q = 5 - 7m \quad \text{e quindi} \quad y = mx + 5 - 7m = m(x-7) + 5 \quad ;$$

sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} & x^2 + (m(x-7)+5)^2 - 2x - 6(m(x-7)+5) + 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + m^2(x-7)^2 + 10m(x-7) + 25 - 2x - 6mx + 42m - 30 + 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + m^2x^2 - 14m^2x + 49m^2 + 10mx - 70m + 25 - 2x - 6mx + 42m - 30 + 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (1+m^2)x^2 + (-14m^2 + 4m - 2)x + (49m^2 - 28m - 3) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = (-14m^2 + 4m - 2)^2 - 4 \cdot (1+m^2) \cdot (49m^2 - 28m - 3) = \ldots = -112m^2 + 96m + 16 \quad ;$$

la condizione $\Delta = 0$ conduce all'equazione quadratica in m

$$-112m^2 + 96m + 16 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 7m^2 - 6m - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $m_1 = -\frac{1}{7}$ e $m_2 = 1$. Ci sono quindi *due rette tangenti*, le cui ordinate all'origine sono $q_1 = 5 - 7m_1 = 6$ e $q_2 = 5 - 7m_2 = -2$.

Le tangenti a $\mathcal{C}$ in P sono quindi

$$r_1 \ : \ y = -\frac{1}{7}x + 6 \quad \text{e} \quad r_2 \ : \ y = x - 2 \quad .$$