Serie 10 - Finale Trigonometria

Un astronomo, un fisico e un matematico viaggiano attraversano la Scozia. Dal finestrino del treno avvistano una pecora nera. L'astronomo afferma "in Scozia tutte le pecore sono nere" e il fisico gli risponde "possiamo solamente concludere che in Scozia <u>alcune</u> pecore sono nere". Dopo averci pensato un attimo il matematico afferma: "in Scozia esiste almeno un prato, con almeno una pecora di cui almeno un lato è nero"!

ANONIMO.

1. Verifica le seguenti identità:

a) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha}$

b) $1-\dfrac{\sin(2x)}{2}=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$

c) $\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=2\tan(2x)$

d) $\sin\gamma\cdot\cos\gamma\cdot(\tan\gamma+\cot\gamma)=1$

e) $\dfrac{\cos x\cdot\cot x-\sin x\cdot\tan x}{1/\sin x-1/\cos x}=1+\sin x\cdot\cos x$

f) $(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2+(x\cos\varphi+y\sin\varphi)^2=x^2+y^2$

Sfida un tuo compagno creando un'identità trigonometrica e lasciandogliela dimostrare!

2. Chiedi a un compagno A di scrivere un qualsiasi numero di tre cifre e di ripetere le cifre in modo da ottenere un numero di sei cifre (per esempio 394'394). Voltandoti di spalle in modo da non poter vedere il numero, chiedi ad A di passare il foglietto ad un altro compagno B, al quale chiederai di dividere il numero per 7.

"Non preoccuparti del resto" gli direte "perché non ce n'è". B resterà sorpreso nello scoprire che hai ragione (per esempio 394'394 diviso 7 dà 56'342). Senza dirvi il risultato egli lo passerà al compagno C, che dovrà dividerlo per 11. Ancora una volta dichiarerai che non c'è resto ed avrai ragione anche questa volta (56'342 diviso 11 d' 5'122). Sempre senza conoscere alcuno dei numeri ottenuti in questi calcoli, rivolgiti ad un quarto compagno D perché divida l'ultimo risultato per 13. Risulterà ancora una divisione esatta (5'122 diviso 13 dà 394). Il risultato finale viene scritto su un pezzo di carta che viene piegato e dato a te.

Senza aprire passalo al compagno A e digli di aprire e di controllare che vi risulti scritto il suo numero originale di tre cifre.

Dimostra che il gioco non può fallire qualunque siano le cifre scelte dal primo compagno.

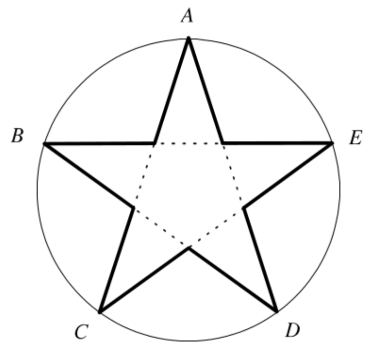
3. Unendo i vertici $ABCDE$ di un pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio $R=10$ come indicato dal disegno si ottiene una figura a forma di stella.

Ritagliando lungo le linee più spesse e piegando le punte lungo le linee tratteggiate si ottiene una piramide regolare.

a) Qual è la sua superficie totale ?

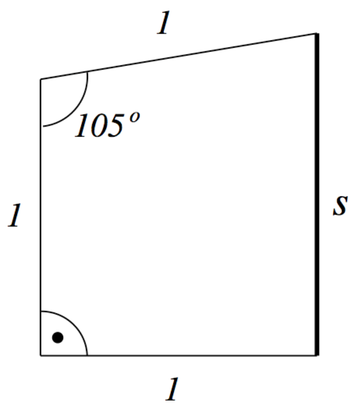
b) Qual è il suo volume ?

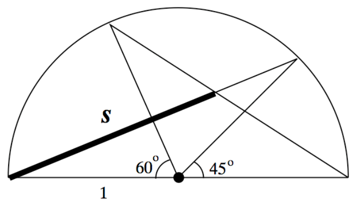
(Approssima i risultati ai centesimi)



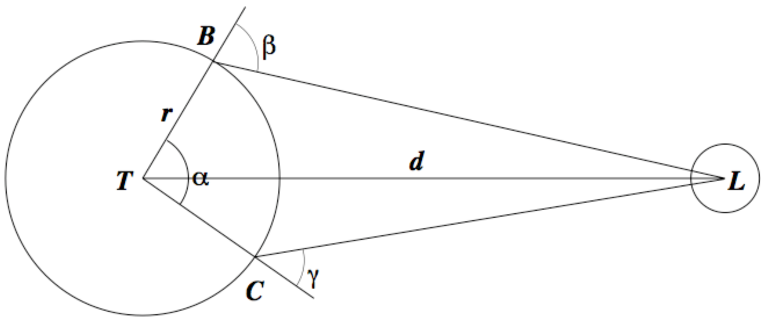
4. Una leggenda della mitologia greca narra di un'epidemia che imperversava ad Atene e del ricorso degli abitanti all'oracolo di Delfi per sapere fino a quando la pestilenza li avrebbe afflitti; la risposta dell'oracolo fu *"Raddoppiate l'ara di Apollo se volete placare le ire divine"*. L'ara di Apollo era cubica e la soluzione semplicisticamente adottata fu quella di porne un'altra identica accanto a quella primitiva; ma la pestilenza si fece ancora più acuta e, ad una nuova delegazione, l'oracolo precisò che l'altare doveva essere in volume doppio del primitivo, conservandone la forma cubica. Il problema si presentava così assai più complesso e Platone, a cui gli Ateniesi si sarebbero rivolti, li ammonì affermando che **"Il Dio ha punito il popolo per aver trascurato la scienza della geometria che è scienza per eccellenza"**.

Il problema del raddoppio del cubo utilizzando soltanto riga e compasso tenne occupati i matematici per secoli fino a quando, nel XIX secolo, l'impossibilità di tale costruzione fu dimostrata grazie ai contributi fondamentali di Niels Abel (1802-1829) e Evariste Galois (1811-1832). Quindi, utilizzando gli strumenti geometrici, lo spigolo di un cubo di volume doppio può soltanto essere approssimato. I disegni mostrano appunto due metodi approssimativi per raddoppiare un cubo di spigolo unitario. Per entrambi, determina lo scarto percentuale di s rispetto alla misura effettiva del nuovo spigolo:





5. Allo scopo di stimare la distanza d tra i centri della terra e della luna, il 31 agosto 1752 gli astronomi francesi Jérôme Lalande (1732-1807) e Nicolas De Lacaille (1713-1762) si recarono rispettivamente a Berlino (B) e Città del Capo (C), situate approssimativamente alla stessa latitudine, e misurarono gli angoli β e γ tra la direzione TB risp. TC dello zenith e la direzione BL risp. CL del centro L della luna al suo passaggio sul meridiano. Sfruttando questi dati assieme alla somma α delle latitudini delle due località e alla misura r del raggio terrestre essi furono in grado, con un metodo trigonometrico, di determinare d con buona approssimazione.



Determina d, sapendo che vale $\alpha = 86,4411°$, $\beta = 41,2622°$, $\gamma = 46,5603°$ e $r = 6378$ km.

6. Un paracadutista viene seguito da terra, simultaneamente, da due giudici di gara distanti tra loro 5 km. I due giudici misurano ad un certo istante due angoli di elevazione pari a $26,5°$ e $18,2°$. Supponendo che sia il paracadutista che i due giudici si trovano nello stesso piano verticale, determinare l'altezza dal suolo del paracadutista nell'istante in cui si sono effettuate le misure.

7. Utilizzando il teorema dei seni si dimostri che per un triangolo qualsiasi (con a lato opposto a α, b a β e c a γ) vale la relazione

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Questa relazione viene chiamata ***teorema delle tangenti***.

8. **1)** $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (x in radianti) ;
2) $\cos x=-1$ (x in gradi) ;
3) $\cos(5x-20°)=\cos(x+30°)$;
4) $\sin(2x)=\cos(3x)$ (x in radianti) ;
5) $\sin x+\cos x=0$ (x in radianti) ;
6) $5\,\sin x+1=2\,\sin x+2$ (x in gradi) ;
7) $2\,\sin^2 x+3\,\sin x+1=0$ (x in radianti) ;
8) $\tan x+\sqrt{3}\,\text{cotan}\,x=1+\sqrt{3}$ (x in radianti) ;
9) $\sin^2 x-7\,\cos x=7$ (x in radianti) .
10) $2\sin x-3\ cosx=1$
11) $2\sin^2 x-\sin x\cos x+3\cos^2 x=2$

Soluzioni

1. Tralasciata

2. Scrivere un numero a tre cifre "due volte" coincide con prendere il numero (esempio 394) e moltiplicarlo per 1001 ($394\cdot 1001=394'394$): moltiplicando per 1000 si porta il numero oltre le migliaia, mentre l'ultimo uno del 1001 ci garantisce che il numero originale sia alle ultime tre posizioni (centinaia, decine e unità).

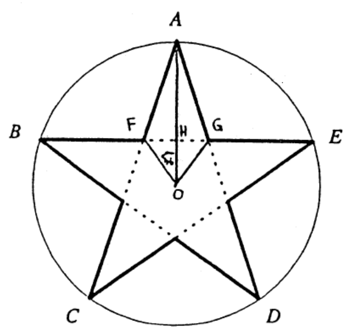
$1001=13\cdot 11\cdot 7$ quindi il numero ottenuto moltiplicando per 1001 sarà ovviamente divisibile per 7,11 e 13 (quindi resto zero). Dividendo per i tre fattori che compongono il 1001 otterremo di nuovo il numero originale.

3. Considera la figura accanto:

$C\widehat{O}D=\dfrac{360}{5}=72°,\qquad C\widehat{A}D=\dfrac{72}{2}=36°, O\widehat{A}F=\dfrac{36}{2}=18°,$

$F\widehat{O}A=\dfrac{360}{10}=36°,\qquad A\widehat{F}O=180-36-18=126°$

Applicando il teorema del seno al triangolo OAF: $\dfrac{10}{\sin 126}=\dfrac{\overline{OF}}{\sin 18}$ otteniamo $\overline{OF}\cong 3.81966$.



a) superficie Totale: $10 \cdot$ Area triangolo $OAF = 10 \cdot (\frac{1}{2}\overline{OF} \cdot \overline{OA} \cdot \sin 36) \cong 112.26$

b) Area pentagono di base: $5 \cdot$ Area triangolo $OFG = 5 \cdot (\frac{1}{2}\overline{OF} \cdot \overline{OG} \cdot \sin 72) \cong 34.68931893$

Con riferimento al triangolo OFH otteniamo: $\cos 36 = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{OF}}$. Da cui $\overline{OH} \cong 3.090169944$ e $\overline{AH} = 10 - \overline{OH} = 6.909830056$

Altezza piramide: $h = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{OH}^2} \cong 6.180339888$ e quindi volume: $\frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot h \cong 71.46$

4. Il nuovo spigolo deve misurare $\sqrt[3]{2} \cong 1,25992$ unità.

- Nel primo caso, ricaviamo immediatamente

$$\alpha = \frac{1}{2}(180^\circ - 105^\circ) = 37,5^\circ \quad \text{e} \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 52,5^\circ \quad .$$

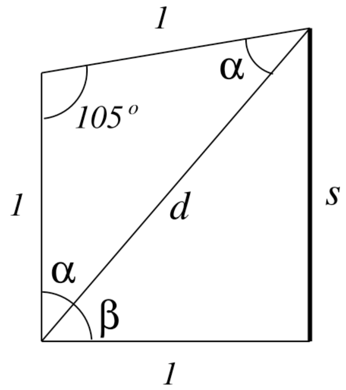
Calcoliamo d con il Teorema del coseno:

$$d = \sqrt{2 - 2\cos 105^\circ} \quad .$$

Infine, di nuovo con il teorema del coseno:

$$s = \sqrt{d^2 + 1 - 2d\cos\beta} \cong 1,25928.$$

Errore percentuale: $E = \frac{|s - \sqrt[3]{2}|}{\sqrt[3]{2}} \cdot 100\% \cong 0,05\%$.



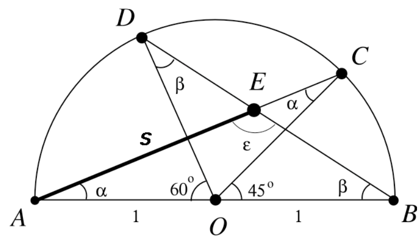
- Nel secondo caso, dal momento che i triangoli AOC e BOD sono isosceli, otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - 45^\circ)) = 22,5^\circ \\ \beta &= \frac{1}{2}(180^\circ - (180^\circ - 60^\circ)) = 30^\circ \\ \varepsilon &= 180^\circ - \alpha - \beta = 127,5^\circ \end{aligned}$$

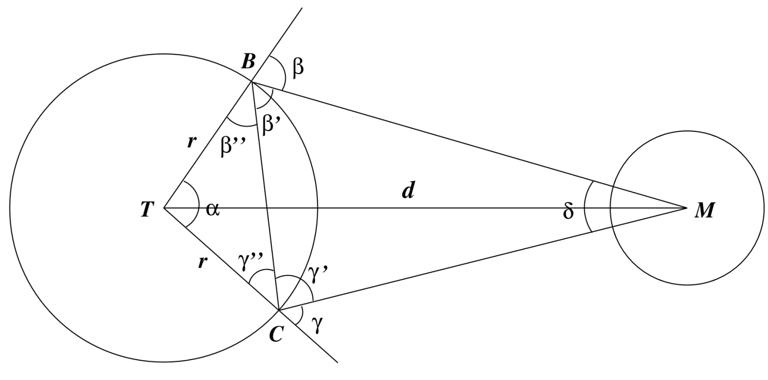
e quindi, con il teorema dei seni:

$$s = |AE| = |AB| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon} \cong 1,26047$$

Errore percentuale: $E = \frac{|s - \sqrt[3]{2}|}{\sqrt[3]{2}} \cdot 100\% \cong 0,04\%$.



5. Considera la figura:



Innanzitutto, calcoliamo la distanza $|BC|$ con il teorema del coseno:

$$|BC| = \sqrt{r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\alpha} = r\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} = 6378\sqrt{2(1 - \cos 86,4411)} \cong 8735,42 \quad \text{(km)}.$$

Dal momento che il triangolo BCT è isoscele, vale

$$\beta'' = \gamma'' = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}(180^\circ - 86,4411^\circ) \cong 46,7795^\circ$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \beta' &= 180^\circ - \beta - \beta'' \cong 91,9583^\circ \\ \gamma' &= 180^\circ - \gamma - \gamma'' \cong 86,6602^\circ \\ \delta &= 180^\circ - \beta' - \gamma' \cong 1,3815^\circ \quad . \end{aligned}$$

Per il teorema del seno vale $\dfrac{|BM|}{\sin\gamma'} = \dfrac{|BC|}{\sin\delta}$ e quindi

$$|BM| = |BC| \cdot \frac{\sin\gamma'}{\sin\delta} \cong 8735,42 \cdot \frac{\sin 86,6602^\circ}{\sin 1,3815^\circ} \cong 361\,709,05 \quad \text{(km)}.$$

Infine, con il teorema del coseno ricaviamo

$$\begin{aligned} d = |TM| &= \sqrt{r^2 + |BM|^2 - 2\cdot r \cdot |BM| \cdot \cos(\beta' + \beta'')} \cong \\ &\cong \sqrt{6378^2 + 361\,709,05^2 - 2\cdot 6378 \cdot 361\,709,05 \cdot \cos 138,7378^\circ} \cong 366\,527,53 \quad \text{(km)}. \end{aligned}$$

6. Deve valere $\tan(18.2) = \frac{h}{x}$ e $\tan 26.5 = \frac{h}{x}$, da cui $x = \frac{-5\cdot\tan(18.2)}{\tan(18.2)-\tan(26.5)} \cong 9.68$ e quindi $h = x\cdot\tan 26.5 \cong 4.83$ km.

7. Dal teorema del seno $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ e quindi $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. Inserendo nella formula otteniamo:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a - \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}}{a + \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{a\sin\alpha - a\sin\beta}{\cancel{\sin\alpha}}}{\frac{a\sin\alpha + a\sin\beta}{\cancel{\sin\alpha}}} = \frac{\cancel{a}(\sin\alpha - \sin\beta)}{\cancel{a}(\sin\alpha + \sin\beta)} = \frac{\cancel{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cancel{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

8. **1)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = \sin\dfrac{\pi}{3}$;

da **I)** ricaviamo $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2) $\cos x = -1 \iff \cos x = \cos 180^\circ$;

da **II)** ricaviamo $\mathcal{S} = \{\pm 180^\circ + k\cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{180^\circ + k\cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Nota che il segno "$\pm$" è superfluo dal momento che $-180^\circ = 180^\circ + (-1)\cdot 360^\circ \quad (k = -1)$.

3) $\cos(5x - 20^\circ) = \cos(x + 30^\circ) \overset{\textbf{II)}}{\iff} 5x - 20^\circ = \pm(x + 30^\circ) + k\cdot 360^\circ$;

dobbiamo distinguere 2 casi:

- $5x - 20^\circ = x + 30^\circ + k\cdot 360^\circ \iff 4x = 50^\circ + k\cdot 360^\circ \iff x = 12^\circ\, 30' + k\cdot 90^\circ$
- $5x - 20^\circ = -x - 30^\circ + k\cdot 360^\circ \iff 6x = -10^\circ + k\cdot 360^\circ \iff x = -1^\circ\, 40' + k\cdot 60^\circ$

quindi $\mathcal{S} = \{12^\circ\, 30' + k\cdot 90^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1^\circ\, 40' + k\cdot 60^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4) <u>1° modo:</u> $\sin(2x) = \cos(3x) \iff \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \cos(3x) \overset{\textbf{II)}}{\iff} \frac{\pi}{2} - 2x = \pm 3x + 2k\pi$;

distinguiamo 2 casi:

- $\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + 2k\pi \iff -5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{10} - \frac{2}{5}k\pi$ (o anche[1] $\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$)
- $\frac{\pi}{2} - 2x = -3x + 2k\pi \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

quindi $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

<u>2° modo:</u> $\sin(2x) = \cos(3x) \iff \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 3x)$

$\overset{\textbf{I)}}{\iff} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi$ oppure $2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 3x) + 2k\pi$;

- $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \iff 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$
- $2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - 3x) + 2k\pi \iff 2x = \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \iff x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$ (oppure $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$)

quindi $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

[1] dal momento che k può assumere qualsiasi valore intero, sia positivo che negativo

5) $\sin x + \cos x = 0 \iff \sin x = -\cos x \iff \sin x = \cos(\pi - x)$;

<u>1° modo:</u> $\sin x = \cos(\pi - x) \iff \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\pi - x) \overset{\textbf{II)}}{\iff} \frac{\pi}{2} - x = \pm(\pi - x) + 2k\pi$

- $\frac{\pi}{2} - x = \pi - x + 2k\pi \iff 0x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, impossibile
- $\frac{\pi}{2} - x = -\pi + x + 2k\pi \iff x = \frac{3}{4}\pi - k\pi$ (oppure $\frac{3}{4}\pi + k\pi$)

quindi $\mathcal{S} = \{\frac{3}{4}\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

<u>2° modo:</u> $\sin x = \cos(\pi - x) \iff \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - (\pi - x)) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, analogo.

<u>3° modo:</u> dividendo l'equazione $\sin x = -\cos x$ per $\cos x$ si ottiene

$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \iff \tan x = -1 \iff \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \overset{\textbf{III)}}{\iff} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

e quindi $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (nota che $\frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi$).

6) $5\sin x + 1 = 2\sin x + 2 \iff \sin x = \frac{1}{3} \iff \sin x = \sin\alpha$ con $\alpha = \arcsin\frac{1}{3} \cong 19^\circ\, 28'\, 16''$

e quindi $\mathcal{S} = \{\alpha + k\cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(180^\circ - \alpha) + k\cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

7) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$; sostituendo $y = \sin x$ ricaviamo $2y^2 + 3y + 1 = 0$

$\iff y = \sin x = \frac{-3-\sqrt{9-8}}{4} = -1$ oppure $y = \sin x = \frac{-3+\sqrt{9-8}}{4} = -\frac{1}{2}$

- $\sin x = -1 \iff \sin x = \sin(-\frac{\pi}{2})$
  $\overset{\textbf{I)}}{\iff} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = \pi - (-\frac{\pi}{2}) + 2k\pi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
  (nota che $\frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$)
- $\sin x = -\frac{1}{2} \iff \sin x = \sin(-\frac{\pi}{6})$
  $\overset{\textbf{I)}}{\iff} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oppure $x = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + 2k\pi = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$

quindi $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

8) $\tan x + \sqrt{3}\,\text{cotan}\, x = 1 + \sqrt{3} \iff \tan x + \dfrac{\sqrt{3}}{\tan x} = 1 + \sqrt{3}$

$\iff \tan^2 x - (1+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0 \iff (\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0$ (trin. tipico!)

$\iff \tan x = 1$ oppure $\tan x = \sqrt{3}$;

- $\tan x = 1 \iff \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \overset{\textbf{III)}}{\iff} x = \frac{\pi}{4} + k\pi$
- $\tan x = \sqrt{3} \iff \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \overset{\textbf{III)}}{\iff} x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

quindi $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

9) Ricordando che vale $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$\sin^2 x - 7\cos x = 7 \iff 1 - \cos^2 x - 7\cos x = 6 \iff \cos^2 x + 7\cos x + 6 = 0$

$\iff (\cos x + 6)(\cos x + 1) = 0$

- $\cos x + 6 = 0 \iff \cos x = -6$, impossibile
- $\cos x + 1 = 0 \iff \cos x = -1$, vedi **2)**

quindi $\mathcal{S} = \{180^\circ + k\cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

10) Per risolvere $2\sin x - 3\,cosx = 1$ il procedimento è uguale a quanto visto nella serie sulle equazioni. Otteniamo dunque:

$\mathcal{S} = \{2(\arctan(\sqrt{3} - 1) + \pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2(\arctan(-1 - \sqrt{3}) + \pi k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

11) La risoluzione di $2\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x = 2$ è analoga a quanto visto nelle serie precedenti.

$\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$