Serie 6 - Formule e identità trigonometriche

1. Semplifica le seguenti espressioni:

a) $5\ \sin\ 750° + 2\ \sin\ 120° - \tan(-120°)$;

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\ \alpha + \sin\ \alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

c) $\tan(\alpha + \pi) \cdot \cos(-\alpha)$;

d) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)}$;

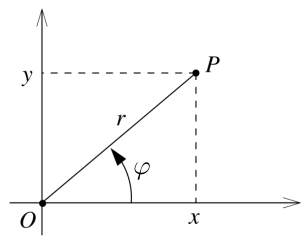
e) $\tan\ 45° \cdot \sin(180° + \alpha) + 5\ \sin\ \alpha - 2\ \cos(90° - \alpha) + 2\ \sin(-\alpha)$;

f) $\text{cotan}\left(\frac{5}{2}\pi + \alpha\right) \cdot \tan(\pi + \alpha) - 3\ \tan(\pi - \alpha) \cdot \text{cotan}\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right)$;

g) $\sin(180° - \alpha) \cdot \sin\ 90° + \cos\ 90° \cdot \tan\ 25° + \cos\ 0° \cdot \cos(90° + \alpha) - \sin(-\alpha)$.

2. * Coordinate Polari

Per identificare un punto P nel piano, oltre alle usuali *coordinate cartesiane* (o *coordinate rettangolari*) x e y a volte è comodo utilizzare le *coordinate polari* r e φ: $r \in \mathbb{R}^+$ indica la distanza del punto P dall'origine O, mentre $\varphi \in [0, 2\pi[$ indica l'ampiezza dell'angolo orientato che il segmento OP forma con l'asse delle ascisse.



a) Ricava le formule per passare dalle coordinate cartesiane (x, y) alle coordinate polari (r, φ) e viceversa.

b) Date le coordinate cartesiane x e y, determina le coordinate polari r e φ:

(i) $x = 0,\ y = 3$ **(ii)** $x = 5,\ y = 0$ **(iii)** $x = -2,\ y = 1$ **(iv)** $x = 1,\ y = -3$.

c) Date le coordinate polari r e φ, determina le coordinate cartesiane x e y

(i) $r = 1,\ \varphi = \frac{3}{4}\pi$ **(ii)** $r = 3,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$ **(iii)** $r = 2,\ \varphi = 2$ **(iv)** $r = 3,\ \varphi = \frac{5}{4}\pi$.

3. Verifica le identità trigonometriche seguenti. Per quale valore dei parametri esse hanno senso?

a) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

b) $\dfrac{1 - \sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\cos\beta}{1 + \sin\beta}$;

c) $\dfrac{\tan\gamma - \sin\gamma}{\sin^3\gamma} = \dfrac{1}{\cos\gamma \cdot (1 + \cos\gamma)}$;

d) $1 - \dfrac{\cos^2\omega}{1 + \sin\omega} = \sin\omega$;

e) $(1 - \sin^2\alpha) \cdot (1 + \tan^2\alpha) = 1$;

f) $\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot (\tan\beta + \text{cotan}\beta) = 1$.

4. Dimostra le **formule di triplicazione**

a) $\sin(3\alpha) = \sin\alpha \cdot (4\cos^2\alpha - 1) = \sin\alpha \cdot (3 - 4\sin^2\alpha)$;

b) $\cos(3\alpha) = \cos\alpha \cdot (1 - 4\sin^2\alpha) = \cos\alpha \cdot (4\cos^2\alpha - 3)$;

c) $\tan(3\alpha) = \dfrac{\tan\alpha \cdot (3 - \tan^2\alpha)}{1 - 3\tan^2\alpha}$.

5. Verifica le seguenti identità:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin(2\alpha)$;

b) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}$;

c) $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1+\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$.

d) $1 + \sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

e) $\dfrac{\sin 40° + \sin 10°}{\sin 25° \cos 15°} = 2,$

f) $2\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos 2\alpha + \cos 2\beta} = 1,$

g) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

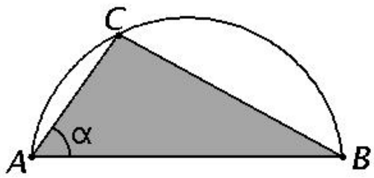
h) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$;

6. * Mostra che, se α, β e γ sono gli angoli interni di un triangolo (qualsiasi), allora vale

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma \quad .$$

7. * Calcola i valori *esatti* di $\sin(3°)$ e $\cos(3°)$. Aiuto: calcola dapprima $\sin(15°)$ e $\cos(15°)$ e utilizza $\sin(18°) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\cos(18°) = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}$ (valori già calcolati).

8. * Risolvi nuovamente l'esercizio della serie precedente: *"determina per quali valori di α la superficie del triangolo inscritto misura metà della superficie della semicirconferenza"*, utilizzando però direttamente l'angolo α come incognita.



9. * Trasforma le seguenti relazioni in altre che contengono solo la funzione seno:

a) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{2\tan^2 x}$ b) $\sin x \cdot \cos^2 x + \dfrac{\tan x}{\cos x} - \dfrac{\sin^2 x \cdot \cos x}{cotx}$

e trasforma le seguenti relazioni in altre che contengono solo la funzione coseno:

c) $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \dfrac{cotx}{\tan x} \cdot \sin^2 x - \dfrac{\tan x}{\sin x}$ d) $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} - \dfrac{\tan x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$

10. Dato α nel secondo quadrante con $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ determina senza usare la calcolatrice:

a) $\cos(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$

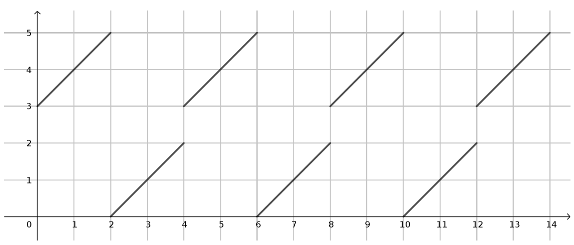
b) $\sin(2\alpha), \cos(2\alpha)$ e $\tan(2\alpha)$.

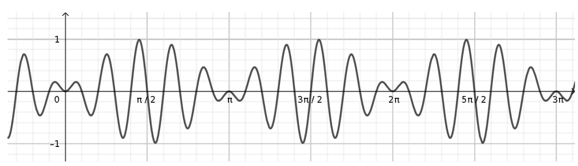
11. * Determinare le formule del perimetro e dell'area di un poligono regolare di $n \geq 3$ lati

a) iscritto in una circonferenza di raggio r.

b) circoscritto in una circonferenza di raggio a (apotema).

12. Determina il periodo delle funzioni rappresentate qui sotto





Soluzioni

1. **a)** $5\sin 750^\circ + 2\sin 120^\circ - \tan(-120^\circ) = 5\sin(\underbrace{750^\circ - 720^\circ}_{30^\circ}) + 2\sin(\underbrace{180^\circ - 120^\circ}_{60^\circ}) - \tan(\underbrace{180^\circ - 120^\circ}_{60^\circ}) =$

$= 5\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{5}{2}$;

b) $\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

c) $\tan(\alpha+\pi)\cdot\cos(-\alpha) = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot\cancel{\cos\alpha} = \sin\alpha$;

d) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\sin(\pi-(\pi+\alpha))}{\sin\alpha} = \frac{\sin(-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha} = -1$;

e) $\tan 45^\circ\cdot\sin(180^\circ+\alpha) + 5\sin\alpha - 2\cos(90^\circ-\alpha) + 2\sin(-\alpha) =$

$= 1\cdot\underbrace{\sin(180^\circ-(180^\circ+\alpha))}_{=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha} + 5\sin\alpha - 2\sin\alpha + 2\sin(-\alpha) = -\sin\alpha + 5\sin\alpha - 2\sin\alpha - 2\sin\alpha = 0$;

f) $\text{cotan}\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)\cdot\tan(\pi+\alpha) - 3\tan(\pi-\alpha)\cdot\text{cotan}\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right) =$

$= \underbrace{\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}_{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan(-\alpha)}\cdot\tan(\alpha) - 3\tan(-\alpha)\cdot\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$

$= -\tan\alpha\cdot\tan\alpha + 3\tan\alpha\cdot\tan\alpha = 2\tan^2\alpha$;

g) $\underbrace{\sin(180^\circ-\alpha)}_{\sin\alpha}\cdot\underbrace{\sin 90^\circ}_{1} + \underbrace{\cos 90^\circ}_{0}\cdot\tan 25^\circ + \underbrace{\cos 0^\circ}_{1}\cdot\underbrace{\cos(90^\circ+\alpha)}_{\sin(90^\circ-90^\circ-\alpha)=-\sin\alpha} - \underbrace{\sin(-\alpha)}_{-\sin\alpha} = \sin\alpha.$

2. **a)** Considerazioni trigonometriche elementari ci permettono di concludere immediatamente che il passaggio da coordinate polari a cartesiane è dato da

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\sin\varphi \end{cases}.$$

c) **(i)** $P(r=1,\varphi=\frac{3}{4}\pi) \rightsquigarrow P(x=1\cdot\cos\frac{3}{4}\pi, y=1\cdot\sin\frac{3}{4}\pi) = P(x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\frac{\sqrt{2}}{2})$;

(ii) $P(r=3,\varphi=\frac{\pi}{2}) \rightsquigarrow P(x=3\cdot\cos\frac{\pi}{2}, y=3\cdot\sin\frac{\pi}{2}) = P(x=0,y=3)$;

(iii) $P(r=2,\varphi=2) \rightsquigarrow P(x=2\cos 2, y=2\sin 2) = P(x\cong -0,83\ ,\ y\cong 1,82)$;

(iv) $P(r=3,\varphi=\frac{5}{4}\pi) \rightsquigarrow P(x=3\cos\frac{5}{4}\pi, y=3\sin\frac{5}{4}\pi) = P(x=-\frac{3\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{3\sqrt{2}}{2})$.

a) Per il passaggio da coordinate cartesiane a polari, il raggio $r=\sqrt{x^2+y^2}$ si ricava dal teorema di Pitagora, ma per l'angolo φ occorre prestare maggiore attenzione, dal momento che arctan ha per codominio l'intervallo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ma in coordinate polari deve valere $\varphi\in[0,2\pi[$:

- per $P(x,y)$ nel I quadrante, $\arctan\frac{y}{x}$ fornisce il valore corretto di φ;
- per $P(x,y)$ sull'asse Oy, $\arctan\frac{y}{x}$ non è definita;
- per $P(x,y)$ nel II e III quadrante, $\arctan\frac{y}{x}$ fornisce un angolo a cui va aggiunto π;
- per $P(x,y)$ IV quadrante, $\arctan\frac{y}{x}$ fornisce un valore *negativo* a cui va quindi aggiunto 2π .

Riassumendo: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{se } x>0 \text{ e } y\ge 0 \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{se } x<0 \\ \arctan\frac{y}{x}+2\pi & \text{se } x>0 \text{ e } y<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } x=0 \text{ e } y<0 \end{cases}$$

b) **(i)** $P(x=0,y=3) \rightsquigarrow P(r=3,\varphi=\frac{\pi}{2})$ (sull'asse Oy) ;

(ii) $P(x=5,y=0) \rightsquigarrow P(r=5,\varphi=0)$ (sull'asse Ox);

(iii) $P(x=-2,y=1) \rightsquigarrow P\left(r=\sqrt{(-2)^2+1^2}, \varphi=\arctan(-\frac{1}{2})+\pi\right) = P(r=\sqrt{5}, \varphi \cong 2,68)$ (nel III quadr.) ;

(iv) $P(x=1,y=-3) \rightsquigarrow P\left(r=\sqrt{1^2+(-3)^2}, \varphi=\arctan(-3)+2\pi\right) = P(r=\sqrt{10}, \varphi \cong 5,03)$ (nel IV quadr.) .

3. **a)** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ ha senso se $\cos\alpha\neq 0$ e $\sin\alpha\neq 0$, cioè e se $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

b) $\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$ ha senso se $\cos\beta\neq 0$ e $\sin\beta\neq -1$, cioè se $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:

$$\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)}{\cos\beta(1+\sin\beta)}=\frac{1-\sin^2\beta}{\cos\beta(1+\sin\beta)}=\frac{\cos^{\cancel{2}}\beta}{\cancel{\cos\beta}(1+\sin\beta)}=\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}.$$

c) $\dfrac{\tan\gamma-\sin\gamma}{\sin^3\gamma}=\dfrac{1}{\cos\gamma\cdot(1+\cos\gamma)}$ ha senso se $\sin\gamma\neq 0$, $\cos\gamma\neq 0$ e $\cos\gamma\neq -1$, cioè se $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Verifica:

$$\frac{\tan\gamma-\sin\gamma}{\sin^3\gamma}=\frac{\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}-\sin\gamma}{\sin^3\gamma}=\frac{\sin\gamma-\sin\gamma\cdot\cos\gamma}{\cos\gamma\cdot\sin^3\gamma}=\frac{\sin\gamma(1-\cos\gamma)}{\cos\gamma\cdot\sin^3\gamma}=\frac{1-\cos\gamma}{\cos\gamma\cdot\sin^2\gamma}=$$
$$=\frac{1-\cos\gamma}{\cos\gamma\cdot(1-\cos^2\gamma)}=\frac{\cancel{1-\cos\gamma}}{\cos\gamma\cdot\cancel{(1-\cos\gamma)}(1+\cos\gamma)}=\frac{1}{\cos\gamma\cdot(1+\cos\gamma)}.$$

d) $1-\dfrac{\cos^2\omega}{1+\sin\omega}=\sin\omega$ ha senso se $\sin\omega\neq -1$, cioè se $\omega\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:

$$1-\frac{\cos^2\omega}{1+\sin\omega}=1-\frac{1-\sin^2\omega}{1+\sin\omega}=1-\frac{(1-\sin\omega)\cancel{(1+\sin\omega)}}{\cancel{1+\sin\omega}}=1-(1-\sin\omega)=\sin\omega.$$

e) $(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)=1$ ha senso se $\alpha\in D_{\tan}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:

$(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\alpha)=\cos^2\alpha\cdot(1+\tan^2\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\tan^2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$

f) $\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(\tan\beta+\text{cotan}\beta)=1$ ha senso se $\alpha\in D_{\tan}\cap D_{\text{cotan}}=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Verifica:

$\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(\tan\beta+\text{cotan}\beta)=\sin\beta\cdot(\cos\beta\cdot\tan\beta)+\cos\beta\cdot(\sin\beta\cdot\text{cotan}\beta)=\sin\beta\cdot\sin\beta+\cos\beta\cdot\cos\beta=1.$

4. **a)** $\boxed{\sin(3\alpha)}=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin(2\alpha)\cos\alpha+\cos(2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha$

$=\sin\alpha(2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha-1)=\boxed{\sin\alpha(4\cos^2-1)}=\sin\alpha(4(1-\sin^2\alpha)-1)=\boxed{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}.$

b) $\boxed{\cos(3\alpha)}=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos(2\alpha)\cos\alpha-\sin(2\alpha)\sin\alpha=(1-2\sin^2\alpha)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$=\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha)=\boxed{\cos\alpha(1-4\sin^2\alpha)}=\cos\alpha(1-4(1-\cos^2\alpha))=\boxed{\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)}.$

c) $\boxed{\tan(3\alpha)}=\tan(2\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan(2\alpha)+\tan\alpha}{1-\tan(2\alpha)\tan\alpha}=\dfrac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha+\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}$

$=\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\boxed{\dfrac{\tan\alpha(3-\tan^2\alpha)}{1-3\tan^2\alpha}}.$

5. **a)** $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin(2\alpha)$

b) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\,\cos\beta+\cos\alpha\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\cos\beta-\cos\alpha\,\sin\beta}=\frac{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}\left(\frac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}+\frac{\cancel{\cos\alpha}\,\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}\right)}{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}\left(\frac{\sin\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}}-\frac{\cancel{\cos\alpha}\,\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\,\cos\beta}\right)}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}$$

c) Dal momento che $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, con l'aiuto delle formule di prostaferesi ricaviamo

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1+\sin 2\alpha}{0+\cos 2\alpha} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}+\sin 2\alpha}{\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2\alpha} = \frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\cancel{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}}{\cancel{2}\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\cancel{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) \quad .$$

d) Utilizzando le formule di bisezione otteniamo: $2\sin^2\left(\frac{\pi/2+x}{2}\right) = 2\cdot\frac{1-\overbrace{\cos(\pi/2+x)}^{-\sin(x)}}{2} = 1+\sin(x)$ ✓

e) Utilizzando le formule di prostaferesi al numeratore otteniamo $= \frac{2\sin((40+10)2)\cos((40-10)/2)}{\sin(25)\cos(15)} = 2$ ✓ (in alternativa utilizzare le formule di Werner al denominatore)

f) Utilizzando le formule di prostaferesi al denominatore otteniamo $= \frac{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2\cos(\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cos(\frac{2\alpha-2\beta}{2}} = 1$ ✓ (in alternativa utilizzare le formule di Werner al numeratore)

g) Con le formule di Prostaferesi: $= \frac{\cancel{2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cancel{2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})} = \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

h) $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha\,\cos\beta-\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta+\sin\alpha\,\sin\beta} = \frac{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}\left(\frac{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}}-\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}\right)}{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}\left(\frac{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\,\cos\beta}}+\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta}\right)} = \frac{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

6. Siano α, β e γ gli angoli interni di un triangolo. Allora vale $\gamma = \pi-\alpha-\beta$ e di conseguenza

$$\tan\gamma = \tan(\pi-\alpha-\beta) = \tan(-\alpha-\beta) = -\tan(\alpha+\beta) = -\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1} \quad . \qquad (1)$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma &\overset{(1)}{=} \tan\alpha+\tan\beta+\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1} \\
&= \frac{\tan^2\alpha\tan\beta\cancel{-\tan\alpha}+\tan\alpha\tan^2\beta\cancel{-\tan\beta}\cancel{+\tan\alpha}\cancel{+\tan\beta}}{\tan\alpha\tan\beta-1} \\
&= \frac{\tan\alpha\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}{\tan\alpha\tan\beta-1} = \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta-1} \\
&\overset{(1)}{=} \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

7. Grazie alla formula di bisezione otteniamo:

$$\sin(15^\circ) = \sin(30^\circ/2) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad , \quad \cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Per mezzo delle *formule di sottrazione* ricaviamo quindi

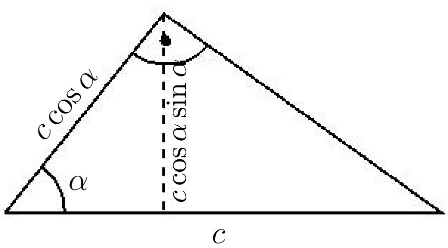
$$\begin{aligned}
\sin(3^\circ) &= \sin(18^\circ-15^\circ) = \sin(18^\circ)\cos(15^\circ)-\cos(18^\circ)\sin(15^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ (= ...)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos(3^\circ) &= \cos(18^\circ-15^\circ) = \cos(18^\circ)\cos(15^\circ)+\sin(18^\circ)\sin(15^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\ (= ...)
\end{aligned}$$

8. Siano α un angolo acuto, c l'ipotenusa e h l'altezza rispetto a c di un triangolo rettangolo; allora vale, ricordando la formula di duplicazione,

$$h = c\sin\alpha\,\cos\alpha = \frac{c}{2}\cdot 2\sin\alpha\,\cos\alpha = \frac{c}{2}\,\sin(2\alpha) \quad .$$



L'area del triangolo vale quindi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{4}c^2\sin(2\alpha) \quad .$$

Indicando con r il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo, vale $c = 2r$ e

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}(2r)^2\sin(2\alpha) = r^2\sin(2\alpha)\ , \quad \text{cioè} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot r^2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(2\alpha) = \frac{\pi}{4} \quad .$$

Deve quindi valere

$$\alpha = \frac{1}{2}\text{arcsin}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong 25,88^\circ \quad \text{oppure} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \text{arcsin}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cong 64,12^\circ$$

(ricorda che $\sin(\gamma) = \sin(180^\circ - \gamma)$!).

9. a) $sin^2x - 1$ b) $\sin x - 2\sin^3 x + \dfrac{\sin x}{1-\sin^2 x}$ c) $\cos^2 x - \cos x$ d) $\dfrac{\cos(x)}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$

10. a) $\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{1}{2}$, dato che l'angolo è nel secondo quadrante: $\cos\alpha = -1/2$.
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\sqrt{3}$

b) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{1}{2}$
$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \sqrt{3}$

11. Considera il disegno qui a fianco.

Se il poligono regolare ha n lati, l'angolo al centro (ottenuto dividendo il poligono in n triangoli) vale: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$. Considerando metà triangolo (in modo da avere un triangolo rettangolo) otteniamo facilmente che:

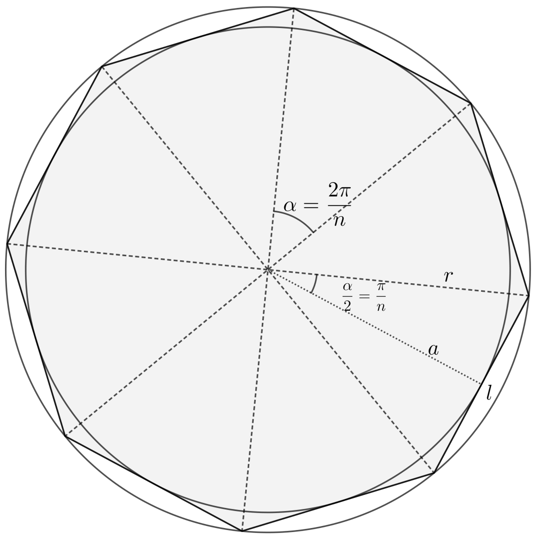
$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{l/2}{r} \quad \Longleftrightarrow \quad l = 2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

e quindi:

a) $P_n = 2nr\sin(\pi/n)$; $\quad A_n = \frac{nr^2}{2}\sin(2\pi/n)$
b) Basta applicare la formula di trasformazione:

$$a = r\sin(\pi/2 - \pi/n)$$

Nota: è possibile modificare le formule trigonometriche con altre formulazioni equivalenti, per cui è possibile trovare risultati "diversi" che sono però equivalenti.



Ad esempio possiamo raffigurare l'ottagono (caso $n = 8$).

12. Prima funzione: 4. Seconda funzione: 2π.