Serie 15 - Equazioni e disequazioni logaritmiche

"La matematica, vista nella giusta luce, possiede non soltanto verità ma anche suprema bellezza. Una bellezza fredda e austera, come quella della scultura."

B. Russell

1. Risolvi le seguenti equazioni:

a) $100^x = 5$

b) $4^{x+1} = 14$

c) $5^{2x+2} = 3^{5x-1}$

d) $12^{2x+5} = 55 \cdot 7^{3x}$

e) $41 \cdot 2^x = 12 \cdot 6^{x-1}$

f) $3^{2x} \cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1} \cdot 11^{2-x}$

g) $3^{2x+1} - 5^{x+1} = 3^{2x} + 5^x$

h) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$

i) $9^{x+1} - 3^{x+2} = 18$

j) $2 \cdot 3^{x+1} - 3 \cdot 5^{x+1} = 6 \cdot 5^x - 3^{x+2}$

k) $\dfrac{2^x}{2^x+1} + \dfrac{2^x}{2^x+4} = 1$

l) $16^x - 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 = 0$

2. Risolvi le seguenti equazioni:

a) $\log\, x - \log\, \frac{3}{5} = \log\, 60$

b) $\log\,(3x+2) - \log\,(x-1) = \log\, 2$

c) $\log\, \sqrt{2x-9} + \log\, \sqrt{4x-1} = \log\, 3$

d) $\dfrac{\log\, x}{\log\,(2-x)} = 2$

e) $\log\, x^3 = (\log\, x)^3$

f) $\log_4\,(\log_3\, x^2) = 1$

g) $2\log\, x = \log\,(2x-3) + \log\,(x-2)$

h) $x^{7+3\log\, x} = 10 \cdot x^5$

i) $\dfrac{\log\, x+5}{\log\, x+2} - \dfrac{2}{5}\,(\log\, x+5) = -\dfrac{2}{5}$

j) $\log_a\,(ax) \cdot \log_x\,(ax) = \log_{a^2}\, \dfrac{1}{a}$

3. Risolvi le seguenti disequazioni:

a) $3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 13$

b) $5 \cdot 7^{x-1} \leq 10^{2x+2}$

c) $5 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-2} < 7 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{5x}$

d) $13^{x^2+2} > 11^{2x^2}$

e) $3 \cdot 49^x - 19 \cdot 7^x + 20 > 0$

f) $9^x - 5 \leq 4 \cdot 3^x$

4. Risolvi le seguenti disequazioni:

a) $\log(3x+2) < \log(x-5)$

b) $\log(x+1) \geq \log(1-x)$

c) $\log_3(2x+1) \geq \log_3(5x) + 2$

d) $\log_{\frac{1}{3}}(7x) < 2$

e) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x \geq 2$

f) $2\log(x+1) \geq \log(2x-2)$

5. Scrivi in notazione scientifica:

a) 55^{80} **b)** $0,00056^{121}$ **c)** $7 \cdot 2^{54\,486} - 1$

6. Un numero primo della forma $p_n = 2^n - 1$ è detto *numero primo di Mersenne*[1]. Per questi particolari numeri esiste un test molto efficace (test di LucasLehmer) che determina se essi siano primi o meno (es: $2^3 - 1 = 7$ è primo mentre $2^4 - 1 = 15$ non è primo). Questa formula viene dunque utilizzata per generare numeri primi molto grandi utilizzati in crittografia (nell'ambito del progetto denominato GIMPS: *Great Internet Mersenne Prime Search*).

Nella seguente tabella sono riportati gli esponenti n relativi ai numeri primi p_n di Mersenne scoperti negli ultimi anni:

data	scopritore(-i)	n
15 dicembre 2005	C. Cooper , S. Boone	30402457
4 settembre 2006	C. Cooper , S. Boone	32582657
23 agosto 2008	E. Smith	43112609
6 settembre 2008	H.-M. Elvenich	37156667
12 aprile 2009	O. M. Strindmo	42643801
...	...	...
7 gennaio 2016	C. Cooper	74207281
3 gennaio 2018	Jon Pace	77232917

a) Scrivi i numeri p_n dati in notazione scientifica.

b) La *Electronic Frontier Foundation* (`www.eff.org`) ha messo in palio la cifra di 100 000 \$ per la scoperta di un numero primo di almeno 10 milioni di cifre. Chi, tra gli scopritori sopra elencati, ha potuto riscuotere il premio?

c) Dimostra che se p_n è primo, allora n è primo.

d) Dimostra che se p_n è primo, allora $\frac{p_n \cdot (p_n+1)}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ è un numero perfetto (vale a dire che la somma dei suoi divisori è uguale al numero stesso).

7. Le cellule animali e vegetali contengono oltre all'isotopo comune del carbonio (il C_{12}) anche del carbonio-14 (C_{14}), un isotopo radioattivo. Durante la vita di un organismo, grazie allo scambio con l'ambiente circostante, la percentuale di C_{14} rimane costante, ma dopo la morte dell'organismo essa comincia a diminuire per effetto del decadimento radioattivo.

a) Il tempo di dimezzamento del C_{14} ammonta a 5730 anni (cioè: la quantita di carbonio radioattivo dimezza nel giro di 5730 anni a causa dell'emissione di radiazioni). Di quale percentuale diminuisce il contenuto di C_{14} in un secolo? E in un millennio?

b) Misurando il decadimento radioattivo al minuto, è possibile calcolare il tempo trascorso dalla morte di un organismo (cioè dal momento in cui è cessato lo scambio di carbonio con l'ambiente). In questo modo è possibile datare campioni di materiale organico risalenti ad epoche anche molto remote. Supponendo che un grammo di carbonio emetta inizialmente in media 15,3 particelle al minuto, determina l'età:

- di un osso di mammut (1,9 particelle al minuto per grammo)
- di un sarcofago egizio (8 particelle al minuto per grammo)
- di un legno carbonizzato di Stonehenge (9,5 particelle al minuto per grammo)

[1] in onore del teologo, filosofo e matematico Padre Marin Mersenne (1588-1648)

8. * Nel 1935, i sismologi Charles Richter (1900-1985) e Beno Gutenberg (1889-1960) proposero di misurare gli effetti di un terremoto per mezzo della sua *magnitudo*

$$M(I) = \log\left(\frac{I}{S}\right) \quad ,$$

dove I rappresenta l'intensità del sisma (misurata con un sismografo posto a 100 km dal suo epicentro) e S rappresenta l'intensità di un *terremoto standard*, appena percettibile. La *scala Richter* utilizzata oggi rappresenta l'evoluzione di tale metodo (in contrapposizione alla *scala Mercalli*, basata su osservazioni empiriche).

a) Determina la magnitudo del terremoto standard.

b) Il terremoto più devastante registrato dall'introduzione della scala Richter fu il *grande terremoto del Cile* (22 maggio 1960), che fece registrare una magnitudo di 9,5. Quanto più intenso fu tale sisma rispetto al terremoto di magnitudo 6 verificatosi nel sud-est dell'Iran il 27 gennaio 2011?

c) Il terremoto verificatosi a Città del Messico il 19 giugno 1985 fece registrare una magnitudo di 8,1. Il giorno dopo la stess città fu colpita da un altro sisma, la cui intensità fu però di 3 volte inferiore. Quale fu la sua magnitudo?

9. * Definiamo in $\mathbb{R}_+^*$ la seguente legge di composizione

$$a \circledcirc b := e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}.$$

Determinare se le seguenti proposizioni sono vere o false.

a) $\circledcirc$ è un'operazione commutativa.

b) e è l'elemento neutro di questa operazione, cioè $\forall a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\} : a \circledcirc e = e \circledcirc a = a$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ esiste $x \in \mathbb{R}_+^*$ tale che $a \circledcirc x = b$.

d) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ vale $a \circledcirc (b \cdot c) = (a \circledcirc b) \cdot (a \circledcirc c)$.

Trova inoltre l'inverso di a rispetto a $\circledcirc$.

Soluzioni

1. **a)** $100^x = 5 \iff x\underbrace{\log 100}_{2} = \log 5 \iff x = \frac{1}{2}\log 5 \quad , \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}\log 5\right\}$

b) $4^{x+1} = 14 \iff (x+1)\log 4 = \log 14 \iff x = \frac{\log 14}{\log 4} - 1 \quad , \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{\log 14}{\log 4} - 1\right\}$

c) $5^{2x+2} = 3^{5x-1} \iff (2x+2)\log 5 = (5x-1)\log 3$

$\iff x(2\log 5 - 5\log 3) = -\log 3 - 2\log 5 \iff x = \frac{\log 3 + 2\log 5}{5\log 3 - 2\log 5} \quad , \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{\log 3+2\log 5}{5\log 3-2\log 5}\right\}$

d) $12^{2x+5} = 55\cdot 7^{3x} \iff (2x+5)\log 12 = \log 55 + 3x\log 7$

$\iff x(2\log 12 - 3\log 7) = \log 55 - 5\log 12 \iff x = \frac{\log 55 - 5\log 12}{2\log 12 - 3\log 7} \quad , \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{\log 55-5\log 12}{2\log 12-3\log 7}\right\}$

e) $41\cdot 2^x = 12\cdot 6^{x-1} \iff \log 41 + x\log 2 = \log 12 + (x-1)\log 6$ ecc., $\mathcal{S} = \left\{\frac{\log 6+\log 41-\log 12}{\log 6-\log 2}\right\}$

f) $3^{2x}\cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1}\cdot 11^{2-x} \iff 2x\log 3 + (3x-4)\log 5 = (x-1)\log 7 + (2-x)\log 11$ ecc.,

$\mathcal{S} = \left\{\frac{4\log 5-\log 7+2\log 11}{2\log 3+3\log 5-\log 7+\log 11}\right\}$

g) $3^{2x+1} - 5^{x+1} = 3^{2x} + 5^x \iff 3\cdot 3^{2x} - 5\cdot 5^x = 3^{2x} + 5^x \iff 2\cdot 3^{2x} = 6\cdot 5^x$

$\iff 3^{2x} = 3\cdot 5^x \iff 2x\log 3 = \log 3 + x\log 5$ ecc. $\quad , \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{\log 3}{2\log 3-\log 5}\right\}$

h) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x} \iff \sqrt{x}\log x = \frac{1}{2}x\log x \iff (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x)\log x = 0 \iff \log x = 0$ oppure $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = 0$ $\iff x = 1$ oppure $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$; $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = \frac{1}{4}x^2 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = 4$. Verificando i risultati, constatiamo che $x = 0$ non è accettabile, e quindi $\mathcal{S} = \{\,1\,,\,4\,\}$

i) $9^{x+1} - 3^{x+2} = 18 \iff 9\cdot(3^x)^2 - 9\cdot 3^x = 18 \iff (3^x)^2 - 3^x - 2 = 0 \iff (3^x+1)(3^x-2) = 0$

$\iff 3^x = -1$, impossibile, oppure $3^x = 2$, $x = \log_3 2 \quad ; \quad \mathcal{S} = \{\log_3 2\}$

j) $2\cdot 3^{x+1} - 3\cdot 5^{x+1} = 6\cdot 5^x - 3^{x+2} \iff 6\cdot 3^x - 15\cdot 5^x = 6\cdot 5^x - 9\cdot 3^x \iff 5\cdot 3^x = 7\cdot 5^x$ ecc.;

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\log 7-\log 5}{\log 3-\log 5}\right\}$

k) $\dfrac{2^x}{2^x+1} + \dfrac{2^x}{2^x+4} = 1 \Rightarrow 2^x(2^x+4) + 2^x(2^x+1) = (2^x+1)(2^x+4) \iff 2^{2x} + 4\cdot 2^x + 2^{2x} + 2^x = 2^{2x} + 5\cdot 2^x + 4 \iff 2^{2x} = 4 \iff 4^x = 4 \iff x = 1$; la soluzione è accettabile (si trattava di un'equazione fratta!) e quindi $\mathcal{S} = \{1\}$

l) $16^x - 3\cdot 2^{2x+1} + 8 = 0 \iff (2^{2x})^2 - 6\cdot 2^{2x} + 8 = 0 \iff (2^{2x}-4)(2^{2x}-2) = 0 \iff 2^{2x} = 4$ oppure $2^{2x} = 2 \iff x = 1$ oppure $x = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

2. **a)** $\log\, x - \log\, \frac{3}{5} = \log\, 60 \iff \log\left(\frac{5}{3}x\right) = \log 60 \Rightarrow \frac{5}{3}x = 60 \iff x = 36$ (accettabile); $\mathcal{S} = \{36\}$

b) $\log\,(3x+2) - \log\,(x-1) = \log\, 2 \iff \log\left(\frac{3x+2}{x-1}\right) = \log 2 \Rightarrow \frac{3x+2}{x-1} = 2 \iff x = -4$ (non accettabile); $\mathcal{S} = \varnothing$

c) $\log\, \sqrt{2x-9} + \log\, \sqrt{4x-1} = \log\, 3 \Rightarrow \sqrt{(2x-9)(4x-1)} = 3 \Rightarrow \overset{4}{\cancel{8}}x^2 - \overset{19}{\cancel{38}}x + \cancel{9} = \cancel{9} \iff$ $x(4x-19) = 0 \iff x = 0$ (non accettabile) oppure $x = \frac{19}{4}$ (accettabile); $\mathcal{S} = \left\{\frac{19}{4}\right\}$

d) $\dfrac{\log\, x}{\log\,(2-x)} = 2 \Rightarrow \log x = \log(2-x)^2 \Rightarrow x = (2-x)^2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff$

$(x-4)(x-1) = 0 \iff x = 1$ oppure $x = 4$ (non accettabili); $\mathcal{S} = \varnothing$

e) $\log\, x^3 = (\log\, x)^3 \iff (\log x)^3 - 3\log x = 0 \iff \log x(\log x + \sqrt{3})(\log x - \sqrt{3}) = 0 \iff \log x = 0$ oppure $\log x = -\sqrt{3}$ oppure $\log x = \sqrt{3} \iff x = 1$ (accettabile) oppure $x = 10^{-\sqrt{3}}$ (accettabile) oppure $x = 10^{\sqrt{3}}$ (accettabile); $\mathcal{S} = \left\{1, 10^{\pm\sqrt{3}}\right\}$

f) $\log_4\left(\log_3\, x^2\right) = 1 \Rightarrow \log_3\, x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 3^4 = 81 \iff x = \pm 9$ (entrambe accettabili); $\mathcal{S} = \{\pm 9\}$

g) $2\log\, x = \log\,(2x-3) + \log\,(x-2) \Rightarrow x^2 = (2x-3)(x-2) \iff x^2 - 7x + 6 = 0 \iff$

$(x-6)(x-1) = 0 \iff x = 1$ (non accettabile) oppure $x = 6$ (accettabile); $\mathcal{S} = \{6\}$

h) $x^{7+3\log\, x} = 10\cdot x^5 \Rightarrow (7 + 3\log x)\log x = \underbrace{\log 10}_{1} + 5\log x \iff 3(\log x)^2 + 2\log x - 1 = 0 \iff$

$\log x = -1$ oppure $\log x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{10}$ oppure $x = 10^{\frac{1}{3}}$ (entrambe accettabili); $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{10}, 10^{-\frac{1}{3}}\right\}$

i) $\dfrac{\log\,x+5}{\log\,x+2}-\dfrac{2}{5}\,(\log\,x+5)=-\dfrac{2}{5} \iff \dfrac{\log\,x+5}{\log\,x+2}=\dfrac{2}{5}\,(\log\,x+4) \iff$
$5\log\,x+25\;=\;2\,(\log\,x+4)\,(\log\,x+2) \iff 2(\log x)^2+7\log x-9\;=\;0 \iff \log x\;=\;-\dfrac{9}{2}$ oppure $\log x=1 \iff x=10^{-\frac{9}{2}}$ oppure $x=10$ (entrambe accettabili); $\mathcal{S}=\left\{10^{-\frac{9}{2}},10\right\}$

j) $\log_a(ax)\cdot\log_x(ax)=\log_{a^2}\dfrac{1}{a} \iff (\underbrace{\log_a a}_{1}+\log_a x)(\log_x a+\underbrace{\log_x x}_{1})=-\dfrac{1}{2} \iff$
$\log_x a+1+\underbrace{\log_a x\cdot\log_x a}_{1}+\log_a x=-\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{\log a}{\log x}+\dfrac{\log x}{\log a}=-\dfrac{5}{2} \iff$
$2(\log x)^2+(5\log a)\cdot\log x+2(\log a)^2=0;\ \Delta=9(\log a)^2\geq 0,$
$\log x=\dfrac{-5\log a+3\log a}{4}=-\dfrac{1}{2}\log a=\log a^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x=a^{-\frac{1}{2}}$
oppure $\log x=\dfrac{-5\log a-3\log a}{4}=-2\log a=\log a^{-2} \Rightarrow x=a^{-2}$;
quindi, se $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, $\mathcal{S}=\left\{a^{-\frac{1}{2}},a^{-2}\right\}$.

3. **a)** $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\geq 13 \iff 2^{1-x}\geq\frac{13}{3} \iff (1-x)\log 2\geq\log 13-\log 3$
$\iff -x\log 2\geq\log 13-\log 3-\log 2 \iff x\leq\frac{\log 2+\log 3-\log 13}{\log 2}=\log_2\frac{6}{13}$, $\mathcal{S}=\left]-\infty,\log_2\frac{6}{13}\right]$
oppure anche $3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\geq 13 \iff x-1\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{13}{3} \iff x\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{13}{3}+1=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{13}{6}\right)=\log_2\frac{6}{13}$

b) $5\cdot 7^{x-1}\leq 10^{2x+2} \iff \log 5+(x-1)\log 7\leq 2x+2 \iff x(\log 7-2)\leq 2-\log 5+\log 7$
$\iff x\geq\frac{2-\log 5+\log 7}{\log 7-2}$, $\mathcal{S}=\left[\frac{2-\log 5+\log 7}{\log 7-2},+\infty\right[$

c) $5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}<7\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{5x} \iff 5\cdot 3^{-3x+2}<7\cdot 4^{-5x}$
$\iff \log 5+(-3x+2)\log 3<\log 7-5x\cdot\log 4 \iff (5\log 4-3\log 3)x<\log 7-\log 5-2\log 3$
$\iff x<\frac{\log 7-\log 5-2\log 3}{5\log 4-3\log 3}$, $\mathcal{S}=\left]-\infty,\frac{\log 7-\log 5-2\log 3}{5\log 4-3\log 3}\right[$

d) $13^{x^2+2}>11^{2x^2} \iff (x^2+2)\log 13>2x^2\log 11 \iff x^2(\log 13-2\log 11)>-2\log 13$
$\iff x^2<\dfrac{2\log 13}{2\log 11-\log 13}$, $\mathcal{S}=\left]-\sqrt{\dfrac{2\log 13}{2\log 11-\log 13}},\sqrt{\dfrac{2\log 13}{2\log 11-\log 13}}\right[$

e) $3\cdot 49^x-19\cdot 7^x+20>0 \iff 3\cdot(7^x)^2-19\cdot 7^x+20>0 \iff (3\cdot 7^x-4)(7^x-5)>0$
$\iff 7^x<\frac{4}{3}$ oppure $7^x>5$, $\mathcal{S}=\left]-\infty,\log_7\frac{4}{3}\right[\cup\left]\log_7 5,+\infty\right[$

f) $9^x-5\leq 4\cdot 3^x \iff (3^x)^2-4\cdot 3^x-5\leq 0 \iff (3^x+1)(3^x-5)\leq 0 \iff 3^x\in[-1,5]$
$\iff 3^x\in]0,5] \iff x\leq\log_3 5$, $\mathcal{S}=]-\infty,\log_3 5]$.

4. **a)** $\log(3x+2)<\log(x-5) \Rightarrow 3x+2<x-5 \iff x<-\frac{7}{2}$; $\mathcal{S}=\varnothing$ perchè $x-5<0\ \forall\ x<-\frac{7}{2}$

b) $\log(x+1)\geq\log(1-x) \Rightarrow x+1\geq 1-x \iff x\geq 0$; inoltre deve valere: $x+1>0 \iff x>-1$ e $1-x>0 \iff x<1$. In conclusione, $\mathcal{S}=[0,1[$

c) $\log_3(2x+1)\geq\log_3(5x)+2 \iff \log_3(2x+1)\geq\log_3(5x)+\log_3 9 \iff$
$\log_3(2x+1)\geq\log_3(45x) \Rightarrow 2x+1\geq 45x \iff 43x\leq 1 \iff x\leq\frac{1}{43}$; inoltre deve valere:
$2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$ e $x>0$. In conclusione, $\mathcal{S}=\left]0,\frac{1}{43}\right]$

d) $\log_{\frac{1}{3}}(7x)<2 \iff \log_{\frac{1}{3}}(7x)<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{9} \Rightarrow 7x>\frac{1}{9} \iff x>\frac{1}{63}$, $\mathcal{S}=\left]\frac{1}{63},+\infty\right[$

e) $(\log_3 x)^2-\log_3 x\geq 2 \iff (\log_3 x)^2-\log_3 x-2\geq 0 \iff (\log_3 x+1)(\log_3 x-2)\geq 0 \iff$
$\log_3 x\leq -1$ oppure $\log_3 x\geq 2 \iff x\leq\frac{1}{3}$ oppure $x\geq 9$; inoltre deve valere $x>0$.
In conclusione, $\mathcal{S}=\left]0,\frac{1}{3}\right]\cup[9,+\infty[$

f) $2\log(x+1)\geq\log(2x-2) \iff \log(x+1)^2\geq\log(2x-2) \Rightarrow x^2+\cancel{2x}+1\geq\cancel{2x}-2 \iff x^2+3\geq 0,$
sempre vero; inoltre deve valere: $x+1>0 \iff x>-1$ e $2x-2>0 \iff x>1$.
In conclusione, $\mathcal{S}=]1,+\infty[$

5. **a)** $55^{80}=10^{80\log 55}\cong 10^{139,2290}=10^{0,2290}\cdot 10^{139}\cong 1,69\cdot 10^{139}$

b) $0,00056^{121} = 10^{121 \log 0,00056} \cong 10^{-393,4692} \cong 10^{-0,4692} \cdot 10^{-393} \cong 0,339 \cdot 10^{-393} \cong 3,39 \cdot 10^{-394}$

c) $7 \cdot 2^{54\,486} - 1 \cong 7 \cdot 2^{54\,486} = 7 \cdot 10^{54\,486 \log 2} \cong 7 \cdot 10^{16\,401,9203} \cong 7 \cdot 10^{0,9203} \cdot 10^{16\,401} \cong$
$7 \cdot 8,32 \cdot 10^{16\,401} \cong 58,26 \cdot 10^{16\,401} \cong 5,83 \cdot 10^{16\,402}$

6. Sorprendentemente Marsenne, che non aveva una solida istruzione in matematica, era riuscito ad analizzare i numeri fino a $n = 257$ e aveva indicato in modo esatto tutti i numeri primi a eccezione di p_{67} e p_{257} (indicati come primi anche se non lo sono) e p_{61}, p_{89} e p_{107} (che si sono rivelati primi), senza purtroppo indicare quale procedimento aveva utilizzato.

a)
- $2^{30402457} - 1 \cong 2^{30402457} = 10^{\log 2^{30402457}} = 10^{30402457 \log 2} \cong 10^{9152051,499} = 10^{0,499} \cdot 10^{9152051}$ $\cong 3,16 \cdot 10^{9152051}$;
- $2^{32582657} - 1 \cong 10^{32582657 \log 2} \cong 10^{9808357,095} \cong 1,24 \cdot 10^{9808357}$;
- $2^{43112609} - 1 \cong 10^{43112609 \log 2} \cong 10^{12978188,5} \cong 3,16 \cdot 10^{12978188}$;
- $2^{37156667} - 1 \cong 10^{37156667 \log 2} \cong 10^{11185271,31} \cong 2,04 \cdot 10^{11185271}$;
- $2^{42643801} - 1 \cong 10^{42643801 \log 2} \cong 10^{12837063,23} \cong 1,70 \cdot 10^{12837063}$.
- $2^{74207281} - 1 \cong 10^{74207281 \log 2} \cong 10^{22338617,48} \cong 3,02 \cdot 10^{22338617}$.
- $2^{77232917} - 1 \cong 10^{77232917 \log 2} \cong 10^{53533778,664} \cong 4,62 \cdot 10^{53533778}$.

Per avere un'idea di quanto sia grande il numero primo più grande conosciuto basti pensare che si tratta di un numero di $23'249'425$ di cifre (23 miliardi). Se lo si scrivesse nella sua totalità riempirebbe un libro di 9'000 pagine. Se lo si volesse scrivere su di un rotolo di carta allora sarebbero necessari 118 km di foglio!

b) In ordine di tempo, il primo a scoprire un numero primo con più di 10 milioni di cifre è stato Edson Smith (gennaio 2013); il "suo" numero primo di Mersenne, $2^{43112609} - 1$ conta 12'978'189 cifre.

c) Dimostrazione per assurdo. Ammettiamo che n non sia primo, allora esso è scomponibile in $n = ab$. Otteniamo dunque:

$$p_n = p_{ab} = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(1 + 2^a + 2^{2a} + 2^{3a} + \cdots + 2^{(b-1)a})$$

È dunque possibile trovare una scomposizione in fattori di p_n: ciò vuol dire che esso non è primo!

d) Questa proprietà era già stata dimostrata da Euclide nel IV secolo avanti Cristo... non ti sarà dunque difficile ricostruirne la dimostrazione!

7. Sia $P(t)$ la percentuale di C_{14} dopo t anni. Dal momento che il decadimento radioattivo è un processo esponenziale, possiamo supporre che valga $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$. Sapendo che $P(5730) = P_0 e^{5730\lambda} = \frac{1}{2} P_0$, possiamo ricavare immediatamente λ:

$$e^{5730\lambda} = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 5730\lambda = \ln \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} = -\frac{\ln 2}{5730} \cong -1,21 \cdot 10^{-4} \quad .$$

<u>Oss.</u> la formula si può anche scrivere nella forma $P(t) = P_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$.

a)
- In 100 anni:

$$\frac{P_0 - P(100)}{P_0} \cdot 100\,\% = \frac{P_0 - P_0 e^{100\lambda}}{P_0} \cdot 100\,\% = (1 - e^{100\lambda}) \cdot 100\,\% \cong 1,2\%$$

- In 1000 anni:

$$\frac{P_0 - P(1000)}{P_0} \cdot 100\,\% = \frac{P_0 - P_0 e^{1000\lambda}}{P_0} \cdot 100\,\% = (1 - e^{1000\lambda}) \cdot 100\,\% \cong 11,4\%$$

b) Dato $P = P(t)$, dobbiamo ricavare t:

$$P = P_0 e^{\lambda t} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{P}{P_0} = e^{\lambda t} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{P}{P_0}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\ln P - \ln P_0) \cong 8266 \cdot (\ln P_0 - \ln P) \quad .$$

Con $P_0 = 15,3$, sostituendo a P i valori dati otteniamo approssimativamente:

$P(t)$	1,9	8	9,5
t (anni)	17243	5359	3940

8. **a)** Sia M_S la magnitudo del terremoto standard; allora vale $M_S = \log\frac{S}{S} = \log 1 = 0$.

b) Da $M = \log\frac{I}{S}$ segue $I = S \cdot 10^M$; il rapporto tra le intensità considerate è quindi

$$\frac{I_{Cile}}{I_{Iran}} = \frac{S \cdot 10^{9,5}}{S \cdot 10^6} = 10^{9,5-6} = 10^{3,5} \cong 3162 \quad .$$

c) Siano I_1 l'intensità del primo terremoto, I_2 l'intensità del secondo e M_1, M_2 le magnitudo corrispondenti. Allora vale

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{3} = \frac{S \cdot 10^{M_2}}{S \cdot 10^{M_1}} = 10^{M_2-M_1} \quad \text{e quindi} \quad M_2 - M_1 = \log\frac{1}{3} = -\log 3$$

e $M_2 = M_1 - \log 3 = 8,1 - \log 3 \cong 7,6$.

9. **a)** Vero: $a \circledcirc b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)} = e^{\ln(b)\cdot\ln(a)} = b \circledcirc a$

b) Vero: $a \circledcirc e = e^{\ln(a)\cdot\ln(e)} = e^{\ln(a)} = a$ (stesso risultato per $e \circledcirc a$).

c) Vero: $a \circledcirc x = e^{\ln(a)\cdot\ln(x)} = b$. Applicando il logaritmo naturale da entrambe le parti otteniamo:

$$\ln a \cdot \ln x = \ln b \iff \ln x = \frac{\ln b}{\ln a} = \log_a b \iff x = e^{\log_a b}$$

d) Vero: $a \circledcirc (b \cdot c) = e^{\ln(a)\cdot\ln(b\cdot c)} = e^{\ln(a)\cdot(\ln(b)+\ln(c))} = e^{\ln(a)\cdot(\ln(b)} \cdot e^{\ln(a)\cdot(\ln(c)} = (a \circledcirc b)\cdot(a \circledcirc c)$ ■

Sia $\tilde{a}$ l'inverso di a rispetto all'operazione $\circledcirc$. Allora deve valere (ricorda che e è l'elemento neutro di $\circledcirc$):

$$a \circledcirc \tilde{a} = e \iff e^{\ln a \ln \tilde{a}} = e^1 \iff \ln(a)\ln\tilde{a} = 1 \iff \ln\tilde{a} = \frac{1}{\ln a} \iff \tilde{a} = e^{\frac{1}{\ln a}}$$

Dato che l'operazione è commutativa segue ovviamente anche che $\tilde{a} \circledcirc a = e$ e dunque $\tilde{a} = e^{\frac{1}{\ln a}}$ è l'invero di a.