Serie 3 - Rapporti trigonometrici

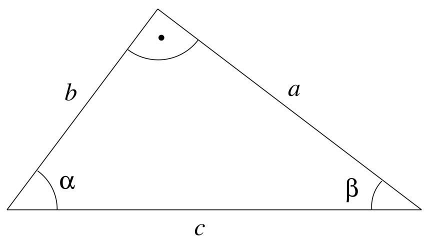
Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato, perché le lingue muoiono ma le idee matematiche no. Immortalità è forse una parola ingenua ma, qualunque cosa significhi, un matematico ha le migliori probabilità di conseguirla.

G. H. Hardy

1. Completa la seguente tabella (senza calcolare i vari angoli):

	α_1	α_2	α_3	α_4
$\sin(\alpha)$	$\frac{5}{13}$			
$\cos(\alpha)$		$\frac{1}{2}$		
$tan(\alpha)$			1	
$cot(\alpha)$				$\sqrt{3}$

2. Completa la tabella con i lati e gli angoli mancanti.



a	b	c	α	β
5	4			
		10	$50°$	
$22,3$		41		
	50			$37°$
21		20		

3. Le diagonali di un rombo misurano 3 risp. 7 unità. Determinane l'ampiezza degli angoli interni.

4. Determina la misura del perimetro di un rettangolo sapendo che la diagonale misura 10 cm e forma con un lato un angolo di $37°35'$.

5. La base di un triangolo isoscele misura 51,8 m e la sua superficie misura 130 m^2. Quanto misurano gli angoli e i 2 lati restanti?

6. * Su una carta topografica (scala 1 : 25000, equidistanza delle curve di livello 10 m) in una certa regione due curve di livello distano 3,5 mm l'una dall'altra. Qual è l'angolo di inclinazione medio del terreno?

7. Il punto più alto di una torre è visto (da terra) con un angolo di elevazione di 63° da una distanza di 40 m. Quanto è alta la torre?

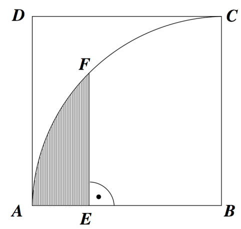
8. **a)** In un triangolo rettangolo, uno degli angoli acuti ha ampiezza doppia rispetto all'altro. Determina la misura dei cateti, sapendo che l'ipotenusa misura 20 cm.

b) In un triangolo rettangolo, un cateto misura i $\dfrac{3}{5}$ dell'ipotenusa. Determina le ampiezze degli angoli acuti.

9. Avanzando di 15 m in direzione della base di un albero, l'angolo di elevazione con cui la cima è vista (da terra) cambia da 20° a 40°. Quanto è alto l'albero?

10. *

$ABCD$ è un quadrato con $|AB| = 9$. Determina l'area della superficie evidenziata sapendo che $|EF| = 6$.



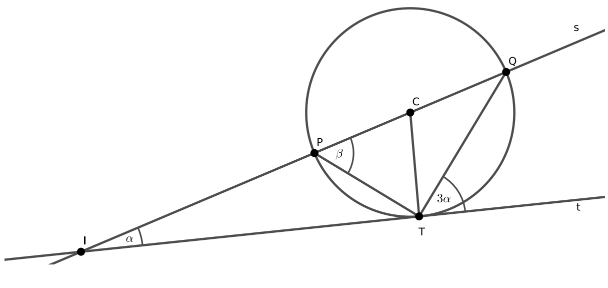
11. * Calcola senza la calcolatrice $\sin(\pi/10)$ e $\cos(\pi/10)$.

(suggerimento: osserva che il lato di un decagono regolare iscritto in un cerchio di raggio unitario vale $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

12. * (dal racconto Upside Down di Isaac Asimov)

Un albergo di 5 piani ha al primo piano le camere dal 100 al 199, al secondo quelle dal 200 al 299, al terzo quelle dal 300 al 399, al quarto quelle dal 400 al 499 e al quinto quelle dal 500 al 599; le porte si aprono con una carta magnetica su cui non è indicato il numero della camera, che viene comunicato al cliente su un foglio a parte. Un cliente ha dimenticato il numero della sua camera, ma ricorda che il portiere gli ha raccomandato: "Attenzione a non leggerlo capovolto!" Quante porte al massimo deve tentare di aprire prima di arrivare in camera sua quel cliente?

13. * Considera la situazione sottostante.



Il punto C è il centro della circonferenza, la retta t è tangente alla circonferenza nel punto T, mentre la retta s è secante, passa per il centro C e interseca la circonferenza nei punti P e Q. Il punto I è l'intersezione tra le due rette. Trova i valori degli angoli α e β.

Soluzioni

1.

	α_1	α_2	α_3	α_4
$\sin(\alpha)$	$\frac{5}{13}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$tan(\alpha)$	$\frac{5}{12}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$cot(\alpha)$	$\frac{12}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.

- $\boxed{a = 5; b = 4}$

  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{41}$, $\alpha = \arctan \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \cong 51°2'25''$, $\beta = \arctan \frac{b}{a} \cong 38°39'35''$.

- $\boxed{c = 10; \alpha = 50°}$

  $a = 10 \cdot \sin 50° \cong 7,66$, $b = 10 \cdot \cos 50° \cong 6,43$, $\beta = 90° - \alpha = 40°$.

- $\boxed{a = 22,3; c = 41}$

  $b = \sqrt{c^2 - a^2} \cong 34,41$, $\alpha = \arcsin \frac{a}{c} \cong 32°56'59''$, $\beta = \arccos \frac{a}{c} \cong 57°3'1''$.

- $\boxed{b = 50; \beta = 37°}$

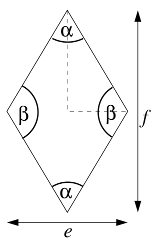
  $a = \frac{b}{\tan \beta} \cong 66,35$, $c = \frac{b}{\sin \beta} \cong 83,08$, $\alpha = 90° - \beta = 53°$.

- $\boxed{a = 21; c = 20}$

  Un tale triangolo non esiste, dal momento che la misura di un cateto non può superare la misura dell'ipotenusa.

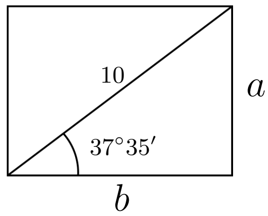
a	b	c	α	β
5	4	$\sqrt{41}$	$51,34°$	$38,66°$
$7,66$	$6,43$	10	$50°$	$40°$
$22,3$	$34,41$	41	$32°56'59''$	$57°3'1''$
$66,35$	50	$83,08$	$53°$	$37°$
21	NE	20	NE	NE

3.



- $\beta = 2 \cdot \arctan \frac{\frac{1}{2} f}{\frac{1}{2} e} = 2 \cdot \arctan \frac{f}{e} \cong 133°\,36'\,10''$
- $\alpha = \frac{1}{2}(360° - 2\alpha) \cong 46°\,23'\,50''$.

4. La diagonale è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti i lati a e b del rettangolo. Quindi vale



$$a = 10 \cdot \sin 37°35' \cong 6,01 \text{ cm} \quad , \quad b = 10 \cdot \cos 37°35' \cong 7,92 \text{ cm}.$$

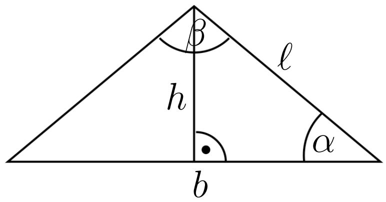
E quindi il perimetro misura

$$\mathcal{P} = 2a + 2b \cong 27,86 \text{ cm} \quad .$$

5. Il lato obliquo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti l'altezza e metà della base. Siano $\mathcal{A}$ l'area, b la base, h l'altezza e ℓ il lato obliquo. Allora vale

$$\mathcal{A} = \frac{bh}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad h = \frac{2\mathcal{A}}{b} = \frac{260}{51,8} \cong 5,02 \text{ m}$$

e il lato obliquo misura

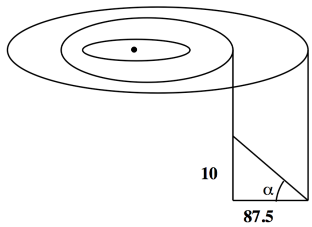


$$\ell = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2} \cong 26,38 \text{ m} \quad .$$

Gli angoli adiacenti alla base misurano

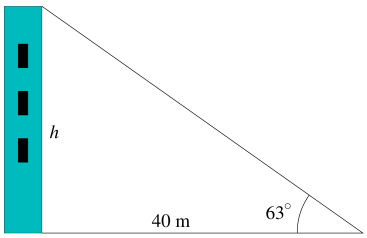
$$\alpha = \arctan \frac{h}{\frac{1}{2}b} \cong \arctan \frac{5,02}{25,9} \cong 10°58'9''$$

e il restante angolo $\beta = 180° - 2\alpha \cong 158°3'42''$.



6. 3,5 mm sulla cartina corrispondono a $3,5 \cdot 25000$ mm $= 87,5$ m. Sia α l'angolo cercato; dal momento che $\tan\alpha = \frac{10}{87,5}$, avremo $\alpha = \arctan\frac{10}{87,5} \cong 6,52°$.

7.



$\dfrac{h}{40} = \tan 63°$, quindi $h = 40 \cdot \tan 63° \cong 78,5$ m.

8. **a)** Sia x l'ampiezza del minore degli angoli acuti (espressa in radianti). Dal momento che deve valere $x + 2x = \dfrac{\pi}{2}$, segue che $x = \dfrac{\pi}{6}$ (cioè 30°). Quindi, per i cateti a e b vale

$$a = 20 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \qquad \text{e} \qquad b = 20 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \quad .$$

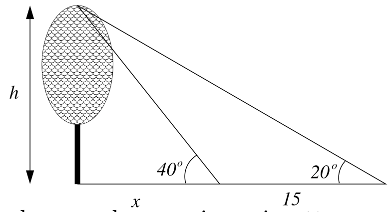
b) Sia c la misura dell'ipotenusa, e quindi $\dfrac{3}{5}c$ la misura del cateto. L'angolo opposto a tale cateto misura

$$\alpha = \arcsin\frac{\frac{3}{5}c}{c} = \arcsin\frac{3}{5} \cong 36°52'12''$$

e per l'angolo adiacente vale

$$\beta = 90° - \alpha \cong 53°7'48'' \quad .$$

9. Sia h l'altezza dell'albero, e x la mia distanza dall'albero dopo che sono avanzato di 15 m.



Otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} h = (15+x)\cdot \tan 20^\circ \\ h = x \cdot \tan 40^\circ \end{cases}$$

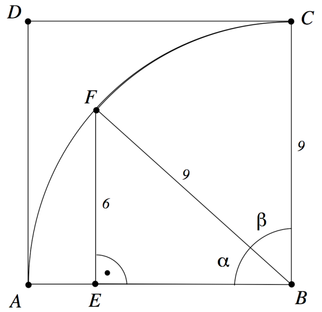
Dal momento che ci interessa soltanto il valore di h, eliminiamo x risolvendo la seconda equazione rispetto a x: $x = \frac{h}{\tan 40^\circ}$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$h = 15 \cdot \tan 20^\circ + h \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\tan 40^\circ}$$

e quindi

$$h = \frac{15 \cdot \tan 20^\circ}{1 - \frac{\tan 20^\circ}{\tan 40^\circ}} = \frac{15 \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 20^\circ} \cong 9,64 \quad \text{(m)} \quad .$$

10.



L'area $\mathcal{A}$ della superficie AEF si ottiene ad esempio sottraendo l'area $\mathcal{A}_{EBF}$ del triangolo EBF dall'area $\mathcal{A}_{ABF}$ del settore ABF. Calcoliamo dapprima $|EB|$:

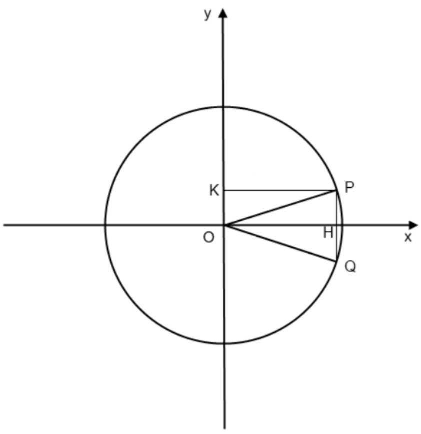
$$|EB| = \sqrt{|BF|^2 - |EF|^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad .$$

Calcoliamo l'ampiezza di α:

$$\alpha \quad = \quad \arcsin\frac{6}{9} = \arcsin\frac{2}{3} \cong 0,7297^{\text{rad}}$$

Quindi: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABF} - \mathcal{A}_{EBF} = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot 9^2 - \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 3\sqrt{5} \cong 9,43\ (u^2)$.

11. Riportiamo l'angolo sulla circonferenza goniometrica e ne creiamo un secondo "specchiato" al di sotto dell'asse Ox come raffigurato qui sotto.



In questo modo otteniamo un angolo di $\pi/5$ ovvero un decimo dell'angolo giro: la corda PQ è dunque un lato del decagono regolare e misura $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$\sin(\pi/10)$ è dunque la metà di PQ e quindi misurerà $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo PHO possiamo ricavare: $\cos(\pi/10) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

12. Deve provare le porte 191 e 161 (ammettendo che l'uno venga scritto come linea).

13. Dispongo di una meravigliosa soluzione di questo problema, che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.