Serie 13 - Il Logaritmo

"Il più grande nemico della conoscenza non è l'ignoranza, ma l'illusione di conoscenza."
STEPHEN HAWKING, FISICO E MATEMATICO (8.1.1942 – 14.3.2008)

1. Calcola:

a) $\log_3 81$ **b)** $\log_5 1$ **c)** $\log_{12} 144$ **d)** $\log_7 343$
e) $\log_{11} \frac{1}{11}$ **f)** $\log_8 \frac{1}{512}$ **g)** $\log_{13} \frac{1}{169}$ **h)** $\log_2 8^{12}$
i) $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^\pi$ **j)** $\log_{10} 100^7$ **k)** $\log_{16} 2$ **l)** $\log_3 \sqrt{3}$
m) $\log_a a^2$ **n)** $\log_a \sqrt[3]{a}$ **o)** $\log_a \sqrt[5]{\frac{1}{a^3}}$ **p)** $\log_a \sqrt[5]{a^4}$

2. Determina la base a, sapendo che...

a) $\log_a 64 = 3$ **b)** $\log_a 1024 = 10$ **c)** $\log_a 8 = -3$ **d)** $\log_a 7 = 5$
e) $\log_a 2 = 1$ **f)** $\log_a 10 = -\frac{1}{2}$ **g)** $\log_a 5 = 7$ **h)** $\log_a \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$

3. Determina x, sapendo che...

a) $\log_6 x = 2$ **b)** $\log_4 x = -\frac{3}{2}$ **c)** $\log_{10}(3x^2 + 2x - 4) = 0$

4. Risolvi le seguenti equazioni (senza approssimare il risultato):

a) $2^x = 11$ **b)** $e^x = \pi$ **c)** $10^{\frac{1}{x}} = 20$
d) $4^{1-x} = 5$ **e)** $7^{\sqrt{x}} = 3$ **f)** $5^{3x+1} - 5^{3x-1} = 48$
g) $8 \cdot 3^{-x} = 5$ **h)** $e^{-\ln x} = 3$ **i)** $9^x - 2 \cdot 3^x - 11 = 0$

5. Calcola:

a) $3^{2\log_3 5}$ **b)** $4^{\frac{1}{3}\log_2 3}$ **c)** $27^{5\log_3 \pi}$ **d)** $\sqrt{7}^{\log_2 3 \cdot \log_7 2}$ **e)** $\log_{10}\left(\left(\log_{10}\left(\frac{0{,}01^5 \cdot 10000^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{10} \cdot \frac{1}{0{,}1}}\right)\right)^2\right)$

6. Scrivi sotto forma di somma o sottrazione[1]:

a) $\log \frac{bc}{d}$ **b)** $\log \frac{b+c}{d+e}$ **c)** $\log(a^2 b^3 \sqrt{c})$ **d)** $\log \frac{1}{\sqrt[3]{r}}$
e) $\log \frac{12bd^n}{5cf^r}$ **f)** $\log \sqrt{\frac{bc}{d}}$ **g)** $\log \frac{4\sqrt{b}}{5\sqrt{c^3}}$ **h)** $\log \sqrt{ab\sqrt{cd}}$

7. Scrivi come logaritmo di un solo termine:

a) $\log 2 + \log 3 - \log 5 - \log 7$ **b)** $2\log 3 + 4\log 2$
c) $\log 5 - 1$ **d)** $\frac{1}{2}\log 25 - \frac{1}{3}\log 64 + \frac{2}{3}\log 27$
e) $\log a + \log b - \log c$ **f)** $3\log b + 2\log c - 4\log d$
g) $-\log x - \log y - \log z$ **h)** $\log a^{\frac{1}{2}} + \log a^{\frac{3}{2}} - \log \sqrt{a}$
i) $\frac{1}{3}(\log b + 2\log c) - \frac{1}{2}(5\log d + \log f)$ **j)** $\frac{1}{2}\log a^{2n} - (n+2)\log a$

[1] In questo esercizio e nel seguente scriveremo semplicemente log invece di $\log_a$, per comodità; i risultati valgono comunque per una base qualsiasi e non soltanto per il logaritmo decimale

8. * Sapendo che

$$\log 2 \cong 0,30103 \quad , \quad \log 3 \cong 0,47712 \quad , \quad \log 5 \cong 0,69897 \quad , \quad \log 7 \cong 0,84510 \quad ,$$

calcola un'approssimazione di $\log 105$, $\log 108$ e $\log \sqrt{70}$ *ricorrendo soltanto a somme e sottrazioni.*

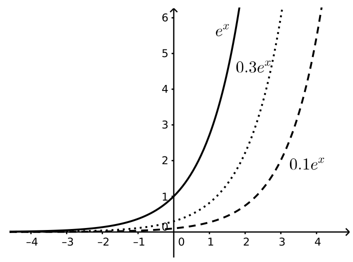
9. Il logaritmo in base 10 ($\log_{10}$) ci permette di sapere quante cifre avremo bisogno per scrivere un determinato numero. Ad esempio $\log_{10}(100) = 2$, quindi avremo bisogno di $2 + 1 = 3$ cifre per scrivere il numero 100; allo stesso modo $\log_{10}(37654) \cong 4.58$, quindi necessitiamo di $4+1 = 5$ cifre per scrivere il numero 37'654.

a) Determina il numero di cifre necessarie a rappresentare (in base 10) i numeri 34^{74} e $3.56 \cdot 10^{13}$.

b) Un *Googol* è il numero intero costituito da un 1 seguito da 100 zeri ed equivale a 10^{100}. Questo numero è creato per indicare un numero enormemente grande e può essere approssimato con 70! (fattoriale di 70). Esso viene utilizzato come termine di paragone con altri numeri enormemente grandi (ad esempio: il numero di particelle elementari nell'universo visibile viene stimato tra i 10^{72} e i 10^{84} mentre il numero di possibile partite di scacchi si aggira attorno al 10^{120}).
Determina se un *Googol* è maggiore o minore a $5^{(6^7)}$.

10. Considera le funzioni rappresentate qui accanto:
La funzione e^x è rappresentata con la linea intera mentre la funzione $0.3e^x$ è puntinata e la funzione $0.1e^x$ è tratteggiata.

Come noti si tratta della stessa curva ma traslata verso destra; le traslazioni verso destra avvengono con una modifica della funzione del tipo: $f(x) \to f(x-k)$. Come puoi spiegare questa situazione?

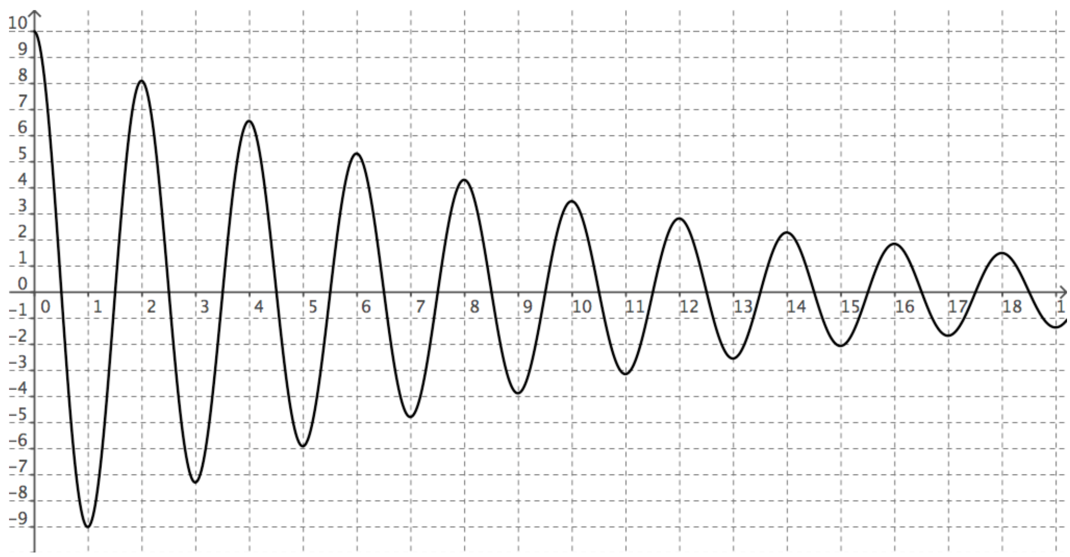


11. * Un'*oscillazione smorzata* (ad esempio di un pendolo immerso in un fluido viscoso) può essere descritta da una funzione del tipo

$$f(t) = A \cdot b^t \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad .$$

a) Un'oscillazione sinusoidale $y = \sin(t)$ viene smorzata del 30% ogni periodo. Determinane l'ampiezza $f(t)$ in funzione del tempo, ed esegui uno schizzo del grafico della funzione f.

b) Determina $f(t)$ per l'oscillazione rappresentata:



Soluzioni

1. Ricorda: $\log_a a^n = n$.

a) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

b) $\log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$

c) $\log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$

d) $\log_7 343 = \log_7 7^3 = 3$

e) $\log_{11} \frac{1}{11} = \log_{11} 11^{-1} = -1$

f) $\log_8 \frac{1}{512} = \log_8 8^{-3} = -3$

g) $\log_{13} \frac{1}{169} = \log_{13} 13^{-2} = -2$

h) $\log_2 8^{12} = \log_2 (2^3)^{12} = \log_2 2^{36} = 36$

i) $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)^{\pi} = \log_2 2^{-2\pi} = -2\pi$

j) $\log_{10} 100^7 = \log_{10} 10^{14} = 14$

k) $\log_{16} 2 = \log_{16} \sqrt[4]{16} = \log_{16} 16^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

l) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

m) $\log_a a^2 = 2$

n) $\log_a \sqrt[3]{a} = \log_a a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

o) $\log_a \sqrt[5]{\frac{1}{a^3}} = \log_a a^{-\frac{3}{5}} = -\frac{3}{5}$

p) $\log_a \sqrt[5]{a^4} = \log_a a^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5}$

2. Nota: $\log_a N = b \iff a^b = N \iff a = N^{\frac{1}{b}}$.

a) $a = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

b) $a = 1024^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{1024} = 2$

c) $a = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

d) $a = 7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7}$

e) $a = 2$

f) $a = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

g) $a = 5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$

h) $a = (4^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

3. Ricorda: $\log_a x = b \iff x = a^b$.

a) $x = 6^2 = 36$

b) $x = 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$

c) $\log_{10}(3x^2 + 2x - 4) = 0 \iff 3x^2 + 2x - 4 = 1 \iff 3x^2 + 2x - 5 = 0$;
risolviamo l'equazione quadratica:

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{3}$$

Quindi: $x = 1$ oppure $x = -\frac{5}{3}$.

4. **a)** $2^x = 11 \iff x = \log_2 11$; $\mathcal{S} = \{\log_2 11\}$.

b) $e^x = \pi \iff x = \ln \pi$; $\mathcal{S} = \{\ln \pi\}$.

c) $10^{\frac{1}{x}} = 20 \iff \frac{1}{x} = \log 20 \iff x = \frac{1}{\log 20}$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{\log 20}\right\}$.

d) $4^{1-x} = 5 \iff 1 - x = \log_4 5 \iff x = 1 - \log_4 5$; $\mathcal{S} = \{1 - \log_4 5\}$.

e) $7^{\sqrt{x}} = 3 \iff \sqrt{x} = \log_7 3 \iff x = (\log_7 3)^2$; $\mathcal{S} = \left\{(\log_7 3)^2\right\}$.

f) $5^{3x+1} - 5^{3x-1} = 48 \iff 5^{3x}\left(5^1 - 5^{-1}\right) = 48 \iff 5^{3x} \cdot \frac{24}{5} = 48 \iff 5^{3x} = 10 \iff 3x = \log_5 10 \iff x = \frac{1}{3}\log_5 10$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\log_5 10\right\}$.

g) $8 \cdot 3^{-x} = 5 \iff 3^{-x} = \frac{5}{8} \iff -x = \log_3 \frac{5}{8} \iff x = -\log_3 \frac{5}{8}$; $\mathcal{S} = \left\{-\log_3 \frac{5}{8}\right\}$.

h) $e^{-\ln x} = 3 \iff e^{\ln x} = 3^{-1} \iff x = \frac{1}{3}$; $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

i) $9^x - 2 \cdot 3^x - 11 = 0 \iff (3^x)^2 - 2 \cdot (3^x) - 11 = 0$; sostituendo $t = 3^x$ otteniamo l'equazione quadratica $t^2 - 2t - 11 = 0$ in t; applichiamo la formula risolutiva:

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 44}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{3} \quad ;$$

ciò ci conduce alle equazioni esponenziali $t_1 = 3^{x_1}$ e $t_2 = 3^{x_2}$; dal momento che $t_2 = 1 - 2\sqrt{3} < 0$, la seconda equazione è impossibile, e l'unica soluzione è data da $x = x_1 = \log_3 t_1 = \log_3 \left(1 + 2\sqrt{3}\right)$. Quindi, $\mathcal{S} = \left\{\log_3 \left(1 + 2\sqrt{3}\right)\right\}$.

5. **a)** $3^{2\log_3 5} = 3^{\log_3(5^2)} = 5^2 = 25$

b) $4^{\frac{1}{3}\log_2 3} = (2^2)^{\frac{1}{3}\log_2 3} = 2^{\frac{2}{3}\log_2 3} = 2^{\log_2(3^{\frac{2}{3}})} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$

c) $27^{5\log_3 \pi} = (3^3)^{5\log_3 \pi} = 3^{15\log_3 \pi} = 3^{\log_3(\pi^{15})} = \pi^{15}$

d) $\sqrt{7}^{\log_2 3\cdot\log_7 2} = 7^{(\frac{1}{2}\log_2 3)\cdot\log_7 2} = 7^{\log_7\left(2^{\frac{1}{2}\log_2 3}\right)} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 3} = 2^{\log_2(3^{\frac{1}{2}})} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

e) $\log_{10}\left(\left(\log_{10}\left(\frac{0{,}01^5\cdot 10000^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{10}\cdot\frac{1}{0{,}1}}\right)\right)^2\right) = \log_{10}\left(\left(\log_{10}\left(\frac{10^{-2\cdot 5}\cdot 10^{4\cdot\frac{1}{3}}}{10^{1/3}\cdot 10^{-(-1)}}\right)\right)^2\right) = \log_{10}\left(\log_{10}\left(10^{\overbrace{-10+4/3-1/3-1}^{=-10}}\right)^2\right) =$
$\log_{10}\left((-10)^2\right) = \log_{10}(100) = 2$

6. **a)** $\log\frac{bc}{d} = \log b + \log c - \log d$

b) $\log\frac{b+c}{d+e} = \log(b+c) - \log(d+e)$

c) $\log\left(a^2 b^3\sqrt{c}\right) = 2\log a + 3\log b + \dfrac{1}{2}\log c$

d) $\log\frac{1}{\sqrt[3]{r}} = -\log\sqrt[3]{r} = -\dfrac{1}{3}\log r$

e) $\log\frac{12bd^n}{5cf^r} = \log 12 + \log b + n\log d - \log 5 - \log c - r\log f$

f) $\log\sqrt{\frac{bc}{d}} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{bc}{d} = \dfrac{1}{2}\log b + \dfrac{1}{2}\log c - \dfrac{1}{2}\log d$

g) $\log\frac{4\sqrt{b}}{5\sqrt{c^3}} = \log 4 + \dfrac{1}{2}\log b - \log 5 - \dfrac{3}{2}\log c$

h) $\log\sqrt{ab\sqrt{cd}} = \dfrac{1}{2}\log ab\sqrt{cd} = \dfrac{1}{2}\log a + \dfrac{1}{2}\log b + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\log(cd) = \dfrac{1}{2}\log a + \dfrac{1}{2}\log b + \dfrac{1}{4}\log c + \dfrac{1}{4}\log d$

7. **a)** $\log 2 + \log 3 - \log 5 - \log 7 = \log\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7} = \log\frac{6}{35}$

b) $2\log 3 + 4\log 2 = \log 3^2 + \log 2^4 = \log(3^2\cdot 2^4) = \log 144$

c) $\log 5 - 1 = \log 5 - \log 10 = \log\frac{5}{10} = \log\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}\log 25 - \frac{1}{3}\log 64 + \frac{2}{3}\log 27 = \log\left(25^{\frac{1}{2}}64^{-\frac{1}{3}}27^{\frac{2}{3}}\right) = \log\frac{5\cdot 9}{4} = \log\frac{45}{4}$

e) $\log a + \log b - \log c = \log\frac{ab}{c}$

f) $3\log b + 2\log c - 4\log d = \log\frac{b^3c^2}{d^4}$

g) $-\log x - \log y - \log z = \log\frac{1}{xyz}$

h) $\log a^{\frac{1}{2}} + \log a^{\frac{3}{2}} - \log\sqrt{a} = \log\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}\right) = \log a^{\frac{3}{2}}$

i) $\frac{1}{3}(\log b + 2\log c) - \frac{1}{2}(5\log d + \log f) = \log\frac{b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}}{d^{\frac{5}{2}}f^{\frac{1}{2}}}$

j) $\frac{1}{2}\log a^{2n} - (n+2)\log a = n\log a - (n+2)\log a = -2\log a = \log\frac{1}{a^2}$

8.
- $105 = 3\cdot 5\cdot 7$
  quindi: $\log 105 = \log(3\cdot 5\cdot 7) = \log 3 + \log 5 + \log 7 \cong 0{,}47712 + 0{,}69897 + 0{,}84510 \cong 2{,}02119$;
- $108 = 2^2\cdot 3^3$
  quindi: $\log 108 = 2\log 2 + 3\log 3 \cong 2\cdot 0{,}30103 + 3\cdot 0{,}47712 \cong 2{,}03342$;
- $70 = 2\cdot 5\cdot 7$
  quindi: $\log\sqrt{70} = \dfrac{1}{2}(\log 2 + \log 5 + \log 7) \cong \dfrac{1}{2}\underbrace{(0{,}30103 + 0{,}69897 + 0{,}84510)}_{1{,}8451} = 0{,}92255$.

9. **a)** $\log_{10}(34^{74}) = 74\cdot\log_{10}(34) \cong 113.33$, quindi avremo bisogno di 114 cifre. $\log_{10}(3.56\cdot 10^{13}) = \log_{10}(3.56) + 13\cdot\underbrace{\log_{10}(10)}_{=1} \cong 0.55 + 13 = 13.55$, quindi avremo bisogno di 14 cifre.

b) $\log_{10}\left(5^{(6^7)}\right) = 6^7\cdot\log_{10}(5) \cong 195'666.9$ Quindi per scrivere $5^{(6^7)}$ avremo bisogno di 195'667 cifre, mentre per scrivere un *Googol* avremo bisogno “solo” di 101 cifre. Ovviamente $5^{(6^7)}$ è maggiore di 10^{100}.

10. Vogliamo dimostrare che una funzione $k \cdot e^x$ può essere espressa come e^{x-p} dove k e p sono delle costanti in relazione fra loro. Dalla definizione di logaritmo possiamo ottenere:

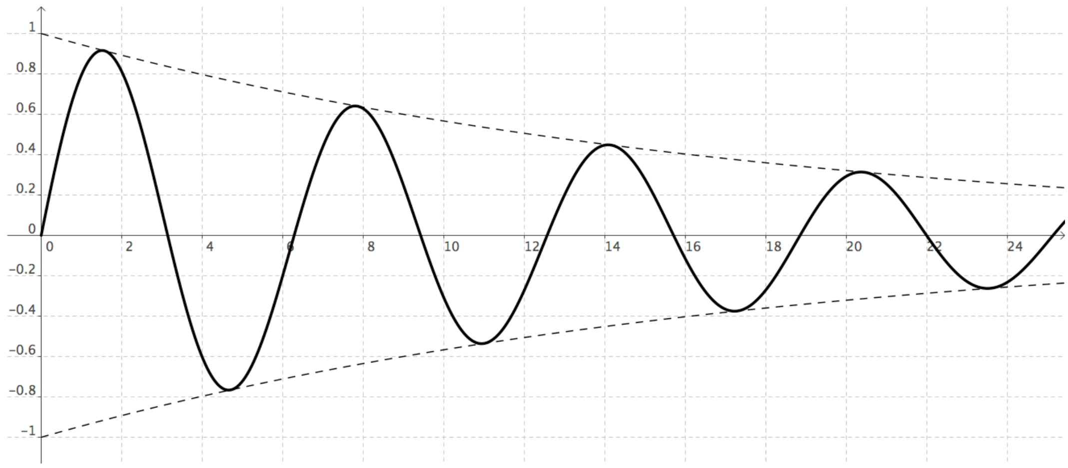
$$0.3 \cdot e^x = e^{\ln(0.3)} \cdot e^x = e^{x+\ln(0.3)}.$$

Da notare che $\ln(0.3) \cong -1.2$ e dunque negativo: si tratta di una traslazione verso destra!

11. **a)** Il periodo è $T = 2\pi$; dal momento che deve valere $b^{2\pi} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$, ricaviamo immediatamente

$$b = \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{2\pi}} \qquad \text{e quindi} \qquad f(t) = b^t \sin(t) = \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{t}{2\pi}} \sin(t) \quad .$$

Schizzo (*la curva tratteggiata rappresenta* $y = \left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{t}{2\pi}}$):



b) Rileviamo immediatamente l'ampiezza iniziale $A = 10$, il periodo $T = 2$ per l'oscillazione così come la traslazione verso sinistra di $\frac{1}{4}$ del periodo, cioè $\frac{1}{2}$ unità. Con $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, ricaviamo quindi immediatamente la funzione che descrive l'oscillazione "libera":

$$g(t) = 10 \sin\left(\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = 10 \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Big(= 10\cos(\pi x)\Big) \quad ;$$

dal momento che nell'intervallo $[0, 1]$ l'ampiezza si riduce a 9, ricaviamo immediatamente $b = \left(\frac{9}{10}\right)^t$, e quindi

$$f(t) = \left(\frac{9}{10}\right)^t g(t) = 10 \left(\frac{9}{10}\right)^t \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) \quad .$$