Serie 1 - Ripasso

Il matematico, come il pittore e il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee.

G.H.Hardy

1. Risolvi le seguenti equazioni in $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt{3}u^2 - 4u + 2\sqrt{3} = 0$

b) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2(x^2+2)}{x^2-1}$

c) $\sqrt{x + \sqrt{x-3}} = 3$

d) $t^3 + 2t^2 - 5t - 6 = 0$
(aiuto: Regola di Ruffini)

e) $|2x+3| = 3$

f) $|2x+3| = -3$

g) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

h) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

2. Risolvi le seguenti disequazioni in $\mathbb{R}$:

a) $2x + 3 \leq 5x - 7$

b) $-2x^2 + 3x - 5 > 0$

c) $(4x+5)^2 + (5x+4)^2 > 0$

d) $x^2 - 10x + 25 > 0$

e) $\dfrac{2x-3}{x-1} > 0$

f) $\dfrac{2x-1}{5-4x} > 1$

g) $|x+3| < 2$

h) $|x^2 + 2x| > 3$

i) $x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x \geq 0$

3. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni lineari

a) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 5x + 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2y = 7 + 4x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 42x + 41y = 10 \\ 41x + 42y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 7 \\ y = -x + 2 \end{cases}$

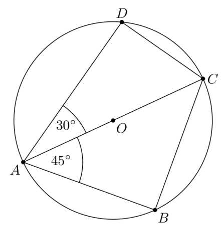
e) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

4. Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio $r = 1$ e centro O, nel modo indicato dalla figura:

a) Perché gli angoli $\widehat{CDA}$ e $\widehat{ABC}$ sono retti?

b) Determina il perimetro del quadrilatero $ABCD$.

c) Determina l'area del quadrilatero $ABCD$.



5. Osservazione: Quando un'uguaglianza è verificata per qualsiasi valore assegnato alle indeterminate (lettere) allora si parla di identità, mentre quando l'uguaglianza è valida solo per particolari valori delle indeterminate si parla d'equazione.

Determina se le seguenti espressioni sono equazioni o identità:

a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

b) $(x+1)^2 = x^2 + 1$

c) $(x-k)^3 = -(k-x)^3$

d) $x^2 + y^2 = 4$

e) $\dfrac{a-b}{x-y} = \dfrac{b-a}{y-x}$

f) $x^3 + y^3 = (x+y)\cdot(x^2 - y^2)$

6. Spezzando in due parti un filo di ferro della lunghezza di 1 metro voglio delimitare una superficie quadrata e una superficie circolare.

a) Quanto deve misurare il lato del quadrato in modo tale che la superficie totale delimitata sia minima? E quanto affinché essa sia massima?

b) Quanto misura la superficie minima delimitata? Quanto misura la superficie massima delimitata?

7. **a)** Per quali valori di a la retta di equazione $y = ax$ è tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 8x - 12$?

b) Determina le equazioni delle rette passanti per $P(2,1)$ e tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 6x + 10$.

8. Semplifica

a) $\dfrac{2}{3}(-a)^{-3}\left(-\dfrac{3}{2}ab\right)^2$

b) $\dfrac{2a^2-2ab}{8ab-8a^2}$

c) $\dfrac{45b^3-9b^2}{27a^2b-15ab^2}$

d) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

e) $\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{a+c}{ac}+\dfrac{b+c}{bc}$

f) $\dfrac{1}{t}-\dfrac{t(t+1)}{1+t}+\dfrac{t^3+3t}{t^2+t}$

9. Calcola e scrivi nella forma più semplice

a) $\dfrac{9x^2+6x+1}{3x+1}$

b) $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25}$

c) $\dfrac{x^4-16}{x+2}$

d) $\dfrac{2k^2-98}{k^2+14k+49}+\dfrac{14}{k+7}$

e) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x^2-1}$

f) $\dfrac{1}{t}+\dfrac{t+4}{t+2}-\dfrac{t^3+2t^2}{t^3+4t^2+4t}$

g) $\dfrac{\dfrac{x}{y}-1}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}-\dfrac{y}{x+y}$

h) $\dfrac{\dfrac{x}{x-a}-1}{\dfrac{x}{x-a}}+\dfrac{\dfrac{a}{x-a}}{\dfrac{x}{x-a}-2}-\dfrac{2}{\dfrac{x^2}{(x-a)^2}-\dfrac{2x}{x-a}}$

10. Completa in modo che le uguaglianze siano vere:

(i) $(3\cdot 5)^{30} = \ldots \cdot 5^{30}$

(ii) $(4x^2t^{\cdots}) - (x^{\cdots}t^{-1}) = \ldots x^{\cdots}t^{\cdots}$

(iii) $\left(\dfrac{3}{b}\right)^{-12} : \left[\left(\dfrac{b}{3}\right)^{-1}\right]^{20} = \left(\dfrac{3}{b}\right)^{\cdots}$

(iv) $\dfrac{15^{3m}\cdot 5^2\cdot 2^{4m}}{10^{4m}\cdot 3^{2m}} = 2^{\cdots}\cdot 3^{\cdots}\cdot 5^{\cdots}$

Soluzioni

1. a) $\mathcal{S}=\emptyset$; b) $\mathcal{S}=\emptyset$ (nota che $1\notin D_e$, cioè non è una soluzione accettabile);
c) $\mathcal{S}=\{7\}$ (verifica le soluzioni nel caso di equazioni irrazionali);
d) $\mathcal{S}=\{-3;-1;2\}$ (è facile verificare che il polinomio si annulla per $t=2$, dopodiché basta utilizzare la divisione polinomiale);
e) $\mathcal{S}=\{-3;0\}$ nota che per $k>0$ da $(|f(x)|=k)$ segue $(f(x)=k)$ ma anche $(-f(x)=k)$;
f) $\mathcal{S}=\emptyset$; (il valore assoluto prende valori strettamente positivi);
g) $\mathcal{S}=\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\}$ (si tratta di un'equazione biquadratica: per la risoluzione applica la sostituzione $t=x^2$ ottenendo $t_1=2$, $t_2=1$);
h) $\mathcal{S}=\{\pm\sqrt{2}\}$ (come sopra ottenendo $t_1=2$ e $t_2=-3$ che però non è accettabile).

2. a) $\mathcal{S}=[\frac{10}{3};+\infty[$; b) $\mathcal{S}=\emptyset$; c) $\mathcal{S}=\mathbb{R}$; d) $\mathcal{S}=\mathbb{R}\setminus\{5\}$;
e) $\mathcal{S}=]-\infty;1[\cup]\frac{3}{2};+\infty[$; f) $\mathcal{S}=]1;\frac{5}{4}[$; g) $\mathcal{S}=]-5;-1[$; h) $\mathcal{S}=]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$;
i) scomponendo con il teorema di Ruffini si ottiene: $(-2+x)(-1+x)x(2+x)\geq 0$ e con l'aiuto della tabella dei segni: $\mathcal{S}=]-\infty;-2]\cup[0;1]\cup[2;+\infty[$.

Nota: per le disequazioni con valore assoluto ricorda che (per $k>0$):

- $(|f(x)|<k)$ equivale a $\boxed{f(x)<k\ \wedge\ f(x)>-k}$ (intersechiamo gli insiemi delle soluzioni),
- $(|f(x)|>k)$ equivale a $\boxed{f(x)>k\ \vee\ f(x)>-k}$ (uniamo gli insiemi delle soluzioni).

(queste regole sono facilmente verificabili con esempi molto semplici: $|x|>1$ o $|x|<1$).

3. a) $\mathcal{S}=\{(2/3;-1/3)\}$; b) $\mathcal{S}=\emptyset$; c) $\mathcal{S}=\{(10/83;10/83)\}$; d) $\mathcal{S}=\{(-20/7;34/7)\}$; e) $\mathcal{S}=\{(1;2;3)\}$

4. **a)** Si tratta di triangoli inscritti in semicirconferenze: l'angolo alla circonferenza è la metà di quello al centro che in questo caso è di 180 gradi.

b) Dato che $|AO|=|OC|=1$, vale $|AC|=2$. Le ampiezze del triangolo ADC misurano 30°, 60° e 90° : si tratta di metà triangolo equilatero, e quindi vale $|DC|=\frac{1}{2}|AC|=1$, e per il Teorema di Pitagora

$$|AD|=\sqrt{|AC|^2-|DC|^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\quad .$$

Per quanto riguarda ABC, notiamo che si tratta di metà quadrato: vale quindi $|AB|=|BC|$, e quindi

$$|AB|^2+|AB|^2=2^2 \iff \cancel{2}|AB|^2=\cancelto{2}{4} \iff |AB|=\sqrt{2}$$

Per il perimetro si ricava

$$\mathcal{P}_{ABCD}=2|AB|+|CD|+|DA|=2\sqrt{2}+1+\sqrt{3}=1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}\quad [\text{unità}]\quad .$$

c) Sommiamo l'area dei triangoli ABC e CDA:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}|AB|^2+\frac{1}{2}|AD|\cdot|DC|=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=1+\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\quad [\text{unità}^2]\quad .$$

5. Sol:

a) identità
b) equazione
c) identità
d) equazione
e) identità
f) equazione

6. Sia x il lato del quadrato. Allora le due parti del filo di ferro misurano rispettivamente $4x$ e $1-4x$. Ricaviamo innanzitutto le aree $\mathcal{A}_q(x)$ risp. $\mathcal{A}_c(x)$ del quadrato risp. del cerchio in funzione di x:

- chiaramente, $\mathcal{A}_q(x) = x^2$;
- sia r il raggio del cerchio; allora da $1-4x = 2\pi r$ segue $r = \frac{1-4x}{2\pi}$ e quindi

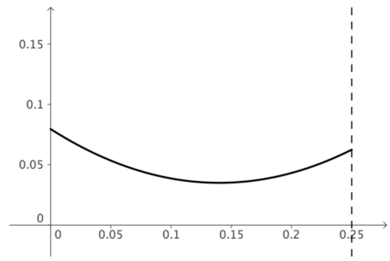
$$\mathcal{A}_c(x) = r^2\pi = \left(\frac{1-4x}{2\pi}\right)^2 \pi = \frac{16x^2-8x+1}{4\pi\cancel{^2}}\cancel{\pi} = \frac{4}{\pi}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{4\pi} \quad .$$

L'area totale (cerchio + quadrato) vale quindi

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_c(x) + \mathcal{A}_q(x) = \left(1+\frac{4}{\pi}\right)x^2 - \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi+4}{\pi}\cdot x^2 - \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{4\pi} \quad .$$

Si tratta di una funzione quadratica il cui grafico è una parabola aperta verso l'alto.

Rappresentiamola per $0 < x < \frac{1}{4}$ (si tratta dei valori che può assumere il lato del quadrato):



a) Calcoliamo l'ascissa x_0 del vertice:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{2}{\pi}}{2\frac{\pi+4}{\pi}} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{\pi+4} = \frac{1}{\pi+4} \cong 0,14 \quad .$$

Per tale valore, l'area delimitata è minima.

Visto che il grafico di $\mathcal{A}(x)$ è una parabola, l'area delimitata è massima per uno dei due valori "estremi" di x; calcolando le aree $\mathcal{A}(0) \cong 0,08$ e $\mathcal{A}(\frac{1}{4}) \cong 0,06$ vediamo che *l'area è massima per $x = 0$, cioè se tutto il filo viene usato per delimitare una circonferenza.*

b) per l'area massima vedi sopra, per quella minima calcoliamo $\mathcal{A}(\frac{1}{\pi+4}) \cong 0,035$.

7. Soluzione

a) Uguagliando le equazioni otteniamo:

$$-x^2+8x-12 = ax \quad \iff \quad -x^2+(8-a)x-12 = 0$$

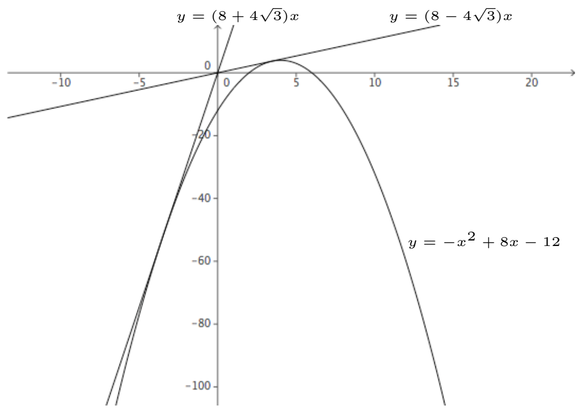
Il determinante di questa equazione quadratica dovrà essere uguale a zero, dunque:

$$(8-a)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-12) = 0$$
$$\iff \quad 64-16a+a^2-48 = 0$$
$$\iff \quad a^2-16a+16 = 0 \quad ;$$

le soluzioni dell'equazione quadratica sono

$$a = \frac{16+\sqrt{256-4\cdot16}}{2} = \frac{16+8\sqrt{3}}{2} = 8+4\sqrt{3}$$
$$\text{e} \quad a = 8-4\sqrt{3} \quad .$$

(Nota che il disegno non è in scala!)



b) Sia $y = mx+q$ l'equazione di una retta tangente; allora, dal momento che $P(2,1)$ giace su di essa deve valere

$$1 = 2m+q \quad \iff \quad q = 1-2m$$

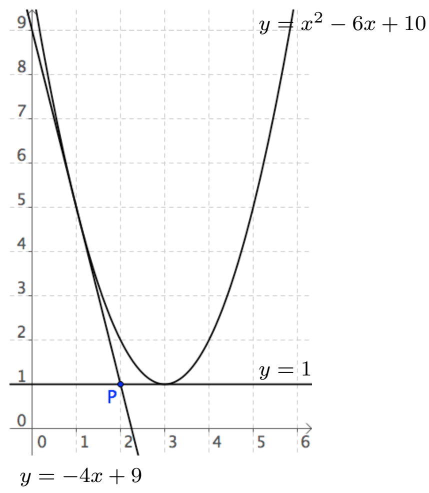
e quindi l'equazione avrà la forma $y = mx+1-2m$. Uguagliando le equazioni otteniamo $x^2-6x+10 = mx+1-2m$, la cui forma canonica è: $x^2+(-6-m)x+9+2m$. Imponendo il determinante uguale a zero otteniamo:

$$(-6-m)^2 - 4(9+2m) = 0$$
$$\iff \quad m^2+12m+36-36-8m = 0$$
$$\iff \quad m^2+4m = 0$$

e le soluzioni sono $m = 0$ (quindi $q = 1$) e $m = -4$ (quindi $q = 9$).

Le rette tangenti sono quindi

$$t_1 : y = 1 \quad , \quad t_2 : y = -4x+9 \quad .$$



8. Soluzione:

a) Ricordando che $(-a)^{-3} = \dfrac{1}{(-a)^3} = -\dfrac{1}{a^3}$, otteniamo

$$\frac{2}{3}(-a)^{-3}\left(-\frac{3}{2}ab\right)^2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\frac{1}{(-a)^3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\cancel{2}} a^2b^2 = -\frac{3}{2}\frac{1}{a^{\cancel{3}}}\cancel{a^2}b^2 = -\frac{3b^2}{2a} \quad .$$

b) Mettendo in evidenza $-2a$ nel numeratore e $8a$ nel denominatore, e ricordando che $-(a-b) = -a+b = b-a$, otteniamo

$$\frac{2a^2-2ab}{8ab-8a^2} = \frac{-2\cancel{a(b-a)}}{8\cancel{a(b-a)}} = -\frac{1}{4} \quad .$$

c) Di nuovo utilizzando la messa in evidenza, otteniamo

$$\frac{45b^3-9b^2}{27a^2b-15ab^2} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}b^{\cancel{2}}(5b-1)}{\cancel{3}a\cancel{b}(9a-5b)} = \frac{3b(5b-1)}{a(9a-5b)} \quad .$$

d) Utilizzando due ben noti prodotti notevoli, otteniamo

$$\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} = \frac{(x+y)\cancel{(x-y)}}{(x-y)^{\cancel{2}}} = \frac{x+y}{x-y} \quad .$$

e) Siccome abc è multiplo di ab, ac e bc, possiamo utilizzarlo come denominatore comune:

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+c}{ac}+\frac{b+c}{bc} = \frac{c(a+b)+b(a+c)+a(b+c)}{abc} = \frac{ac+bc+ab+bc+ab+ac}{abc} = \frac{2ab+2ac+2bc}{abc} = \frac{2(ab+ac+bc)}{abc} \quad .$$

Volendo, potremmo continuare "spezzando" la somma:

$$\frac{2(ab+ac+bc)}{abc} = 2\left(\frac{ab}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{bc}{abc}\right) = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad .$$

Oppure, direttamente

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+c}{ac}+\frac{b+c}{bc} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}b}+\frac{\cancel{b}}{a\cancel{b}}+\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}c}+\frac{\cancel{c}}{a\cancel{c}}+\frac{\cancel{b}}{\cancel{b}c}+\frac{\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{b} = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad .$$

f) Scriviamo dapprima

$$\frac{1}{t}-\frac{t(t+1)}{1+t}+\frac{t^3+3t}{t^2+t} = \frac{1}{t}-\frac{t(t+1)}{t+1}+\frac{t^3+3t}{t(t+1)} \quad .$$

Utilizzando ora $t(t+1)$ come denominatore comune, otteniamo

$$\frac{1}{t}-\frac{t(t+1)}{t+1}+\frac{t^3+3t}{t(t+1)} = \frac{1+t-t^2(t+1)+t^3+3t}{t(t+1)} = \frac{-t^2+4t+1}{t(t+1)} \quad .$$

9. **a)** $\dfrac{9x^2+6x+1}{3x+1} = \dfrac{(3x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{3x+1}} = 3x+1$

b) $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-25} = \dfrac{(x-5)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \dfrac{x-5}{x+5}$

c) $\dfrac{x^4-16}{x+2} = \dfrac{(x^2+4)(x^2-4)}{x+2} = \dfrac{(x^2+4)\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} = (x^2+4)(x-2) = x^3-2x^2+4x-8$

d) $\dfrac{2k^2-98}{k^2+14k+49}+\dfrac{14}{k+7} = \dfrac{2k^2-98}{(k+7)^2}+\dfrac{14}{k+7} = \dfrac{2k^2-98+14(k+7)}{(k+7)^2} =$

$\dfrac{2k^2\cancel{-98}+14k\cancel{+98}}{(k+7)^2} = \dfrac{2k\cancel{(k+7)}}{(k+7)^{\cancel{2}}} = \dfrac{2k}{k+7}$

e) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1+2x+2+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{3x+4}{x^2-1}$

f) $\frac{1}{t}+\frac{t+4}{t+2}-\frac{t^3+2t^2}{t^3+4t^2+4t}=\frac{1}{t}+\frac{t+4}{t+2}-\frac{t^2\cancel{(t+2)}}{t(t+2)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{t}+\frac{t+4}{t+2}-\frac{t^2}{t(t+2)}=$

$\frac{t+2\cancel{+t^2}+4t\cancel{-t^2}}{t(t+2)}=\frac{5t+2}{t(t+2)}$

g) $\frac{\frac{x}{y}-1}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}-\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{x-y}{y}}{\frac{x^2-y^2}{x^2}}-\frac{y}{x+y}=\frac{\cancel{x-y}}{y}\cdot\frac{x^2}{(x+y)\cancel{(x-y)}}-\frac{y}{x+y}=$

$\frac{x^2}{y(x+y)}-\frac{y}{x+y}=\frac{x^2-y^2}{y(x+y)}=\frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{y\cancel{(x+y)}}=\frac{x-y}{y}$

h) $\frac{\frac{x}{x-a}-1}{\frac{x}{x-a}}+\frac{\frac{a}{x-a}}{\frac{x}{x-a}-2}-\frac{2}{\frac{x^2}{(x-a)^2}-\frac{2x}{x-a}}=\frac{\frac{\cancel{x}\cancel{-x}+a}{x-a}}{\frac{x}{x-a}}+\frac{\frac{a}{x-a}}{\frac{x-2x+2a}{x-a}}-\frac{2}{\frac{x^2-2x^2+2ax}{(x-a)^2}}=$

$\frac{a}{\cancel{x-a}}\cdot\frac{\cancel{x-a}}{x}+\frac{a}{\cancel{x-a}}\cdot\frac{\cancel{x-a}}{-x+2a}-2\frac{(x-a)^2}{-x^2+2ax}=\frac{a}{x}+\frac{a}{2a-x}-\frac{2(x-a)^2}{x(2a-x)}=\frac{2a^2\cancel{-ax}\cancel{+ax}-2(x-a)^2}{x(2a-x)}=$

$\frac{\cancel{2a^2}-2x^2+4ax\cancel{-2a^2}}{x(2a-x)}=\frac{2\cancel{x}\cancel{(2a-x)}}{\cancel{x}\cancel{(2a-x)}}=2$

10.

(i) $(3\cdot 5)^{30}=3^{30}\cdot 5^{30}$ (ii) $(4x^2t^{-1})-(x^2t^{-1})=3x^2t^{-1}$

(iii) $\left(\frac{3}{b}\right)^{-12}:\left[\left(\frac{b}{3}\right)^{-1}\right]^{20}=\left(\frac{3}{b}\right)^{-32}$ (iv) $\frac{15^{3m}\cdot 5^2\cdot 2^{4m}}{10^{4m}\cdot 3^{2m}}=2^0\cdot 3^m\cdot 5^{2-m}$