Serie 9 - Moto armonico

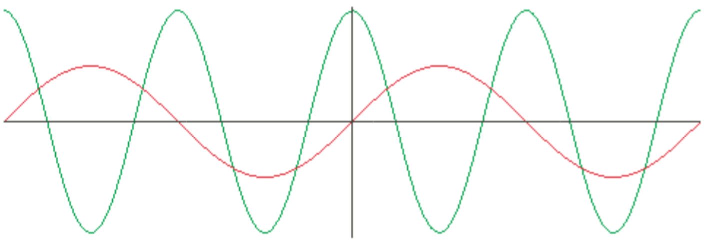
"Se l'uomo non sapesse di Matematica non si eleverebbe di un sol palmo da terra."
Galileo Galilei

1. Determina il periodo, i massimi, i minimi e gli zeri delle funzioni reali

$$\textbf{a)}\ f: x \mapsto y = 2 + \frac{3}{4}\sin(2x-3) \qquad \textbf{b)}\ g: x \mapsto y = 1 - 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x + 1\right) \quad .$$

Esegui inoltre uno schizzo dei loro grafici.

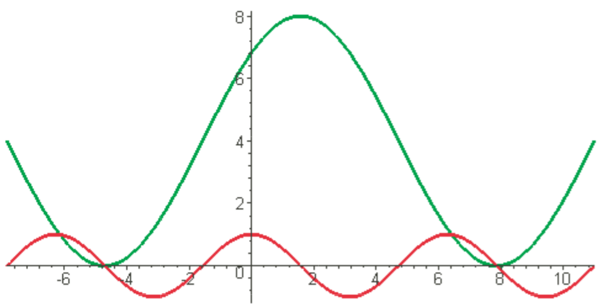
2. Nel grafico seguente sono disegnate le funzioni $y = \sin(x)$ e la funzione $f(x) := a \cdot \sin(bx+c)$ con $a, b, c \in \mathbb{R}_+^* =]0; \infty[$. Dove possiamo leggere sul grafico i parametri a, b, c?



3. Nel grafico seguente sono disegnate le funzioni $y = \cos(x)$ e la funzione

$$\begin{array}{rcl} \varphi : D(\varphi) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \cdot \cos(bx - c) + d \end{array}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. Determinare l'insieme di definizione $D(\varphi)$ e il valore di a, b, c, d.



Sull'ultima pagina troverai altri grafici di questo tipo da cui *leggere* la funzione corrispondente.

4. La pressione del sangue di un individuo sia data dalla funzione

$$P(t) = 105 + 22\,\sin(5t) \qquad (t \text{ in secondi, } P \text{ in mm Hg}) \quad .$$

Determina la sua pressione sistolica (la "massima"), la sua pressione diastolica (la "minima") e la sua frequenza cardiaca (in battiti al minuto).

5. Le ore di sole giornaliere di una certa città variano stagionalmente secondo la legge

$$L(t) = 12 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\,t - \frac{5\pi}{12}\right) \qquad (t \text{ in mesi, a partire dall'inizio di gennaio}) \quad .$$

a) Quante ore di sole sono attese per il 15 marzo, il 15 giugno e il 15 dicembre?

b) In quale giorno il numero di ore di sole è massimo?

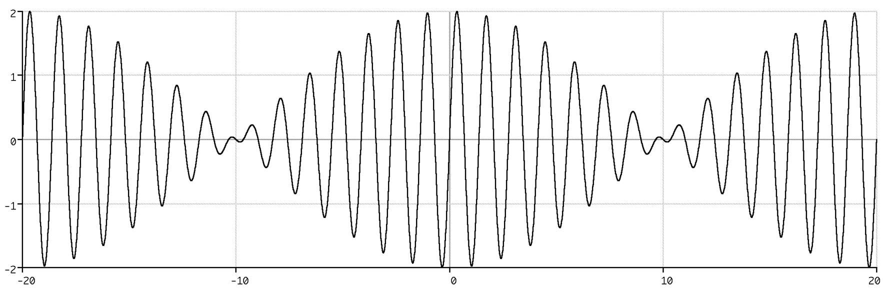
6. * Una tra le più popolari teorie pseudoscientifiche è senz'altro quella dei cosiddetti *bioritmi*. Essa afferma che la nostra vita è influenzata da tre cicli (emotivo, fisico e intellettuale) che iniziano con la nostra nascita e, partendo da zero, salgono in maniera positiva per poi ridiscendere verso valori negativi con un andamento sinusoidale. La durata di ogni ciclo è di 23 giorni per la sfera fisica, 28 per quella emotiva e 33 per quella intellettuale.

a) Supponendo che il valore dei bioritmi oscilli tra -100 (il minimo) e 100 (il massimo), descrivi per mezzo di tre funzioni reali $F(t)$, $E(t)$ e $I(t)$ (t in giorni) l'andamento del bioritmo nella vita di un individuo.

b) Calcola il valore dei tuoi bioritmi odierni (l'età in giorni può essere ottenuta ad esempio inserendo la data di nascita nel cosiddetto *motore computazionale di conoscenza* `www.wolframalpha.com`).

7. * Il diapason comune emette un'onda sonora che si trasmette nell'aria con una frequenza $\nu = \frac{1}{T} = 440\,\mathrm{s}^{-1}$ (cioè Hz), corrispondente alla nota la$_3$. Supponiamo che tale suono causi, in un dato punto, una variazione sinusoidale della pressione dell'aria di ampiezza pari a $0,03\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. Utilizzando la fase iniziale $\varphi = 0$, scrivi l'equazione della funzione $P(t)$ che esprime la pressione dell'aria in tale punto in funzione del tempo t, sapendo che in condizioni normali la pressione atmosferica vale $10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.

8. * Il grafico rappresenta la funzione $f(t) = \sin(1,4\,\pi\,t) + \sin(1,5\,\pi\,t)$ nell'intervallo $[-20, 20]$:



Spiega perché il grafico della funzione[1] f è compreso tra i grafici delle funzioni

$$g_1(t) = 2\,\cos(0,05\,\pi\,t) \qquad \text{e} \qquad g_2(t) = -2\,\cos(0,05\,\pi\,t) \quad .$$

[1] Il fenomeno illustrato viene chiamato *battimento*, e si genera dalla sovrapposizione di due note le cui frequenze $\nu_1 = \frac{1}{T_1}$ e $\nu_2 = \frac{1}{T_2}$ differiscono leggermente tra loro. Esso può essere udito sotto forma di variazione periodica del volume sonoro suonando contemporaneamente due strumenti musicali leggermente stonati.

Soluzioni

1. **a)** Con $f(x) = 2 + \dfrac{3}{4}\sin(2x-3)$, otteniamo quanto segue:

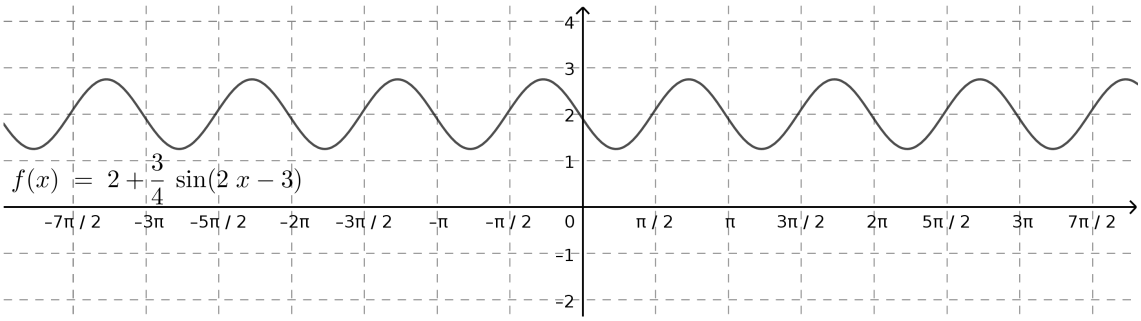
- periodo: $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi \cong 3,14$;
- massimi: $y = 2 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4} = 2,75$ per

$$\sin(2x-3) = 1 \iff 2x-3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

  cioè per $x \,\tilde{\in}\, \{\ldots\,;\,-4,00\,;\,-0,86\,;\,2,29\,;\,5,43\,;\,\ldots\}$.
- minimi: $y = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4} = 1,25$ per

$$\sin(2x-3) = -1 \iff 2x-3 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

  cioè per $x \,\tilde{\in}\, \{\ldots\,;\,-5,56\,;\,-2,43\,;\,0,71\,;\,3,86\,;\,\ldots\}$
- zeri: non ve ne sono, dal momento che $\mathrm{Im}_f = \left[\frac{5}{4}, \frac{11}{4}\right]$.



b) Con $f(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x + 1\right)$, otteniamo quanto segue

- periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$;
- massimi: $y = 1 - (-2) = 3$ per

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi x + 1\right) = -1 \iff \frac{1}{3}\pi x + 1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = -\frac{3}{\pi} - \frac{3}{2} + 6k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

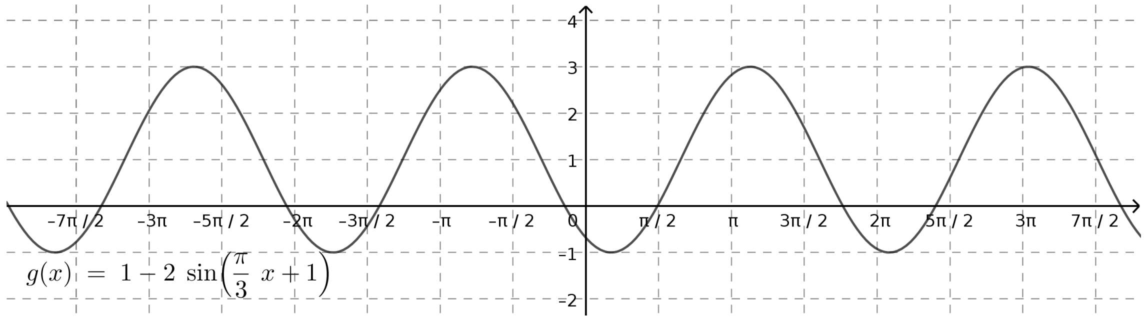
  cioè per $x \,\tilde{\in}\, \{\ldots\,;\,-8,45\,;\,-2,45\,;\,3,54\,;\,9,54\,;\,\ldots\}$.
- minimi: $y = 1 + (-2) = -1$ per

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi x + 1\right) = 1 \iff \frac{1}{3}\pi x + 1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = -\frac{3}{\pi} + \frac{3}{2} + 6k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

  cioè per $x \,\tilde{\in}\, \{\ldots\,;\,-5,45\,;\,0,54\,;\,6,54\,;\,12,54\,;\,\ldots\}$.
- zeri: $f(x) = 0 \iff 1 - 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x + 1\right) = 0 \iff \sin\left(\frac{1}{3}\pi x + 1\right) = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6})$, quindi

$$\frac{\pi}{3}x + 1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad \frac{\pi}{3}x + 1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\iff x = \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} + 6k \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{2} - \frac{3}{\pi} + 6k \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

cioè $x \,\tilde{\in}\, \{\ldots\,;\,-0,45\,;\,1,54\,;\,5,54\,;\,7,54\,;\,\ldots\}$.



2. Come abbiamo visto:

- a rappresenta "l'altezza" massima della funzione, quindi sull'asse delle y in corrispondenza dei massimi.
- b determina il periodo della funzione (e come abbiamo visto nella serie 5 per il periodo vale: $p = \frac{2\pi}{b}$). Bisognerà dunque misurare dopo quanto tempo la "funzione si ripete" (asse x).
- c è la fase: vale a dire di quanto la funzione viene spostata verso sinistra ($c > 0$). Ovviamente $f(0) = a\sin(c)$, quindi $c = \arcsin(f(0)/a)$.

3.
- $D(\varphi) = \mathbb{R}$ dato che è definita per ogni angolo (ogni x).
- La funzione oscilla tra $y = 0$ e $y = 8$, dunque $\boxed{d = 4}$ e $\boxed{a = 4}$
  (massimo: $4 \cdot \overbrace{\cos(0)}^{=1} + 4 = 8$ e minimo: $4 \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{=-1} + 4 = 0$)
- La funzione in $x = -5$ si ripete in $x = 8$, dunque il periodo sarà 13. Quindi: $p = 13 = \frac{2\pi}{b} \iff b = \frac{2\pi}{13}$.
- $\varphi(0) = 7 \iff 4\cos(-c) + 4 = 7 \iff -c = \pm\arccos(\frac{3}{4}) \cong \pm 0.72$. Dato che $c >$ allora $c = 0.72$.

Dunque: $\varphi(x) = 4 \cdot \cos(\frac{2\pi}{13}x - 0.72) + 4$

4. Possiamo affermare immediatamente che la pressione sistolica è $P_{\max} = 105 + 22 = 127$ e la diastolica è $P_{\min} = 105 - 22 = 83$. Per quanto riguarda la frequenza cardiaca, calcoliamo innanzitutto il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \quad ;$$

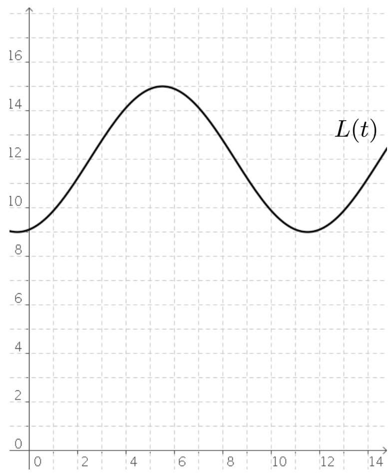
si tratta della durata di un battito (in secondi); quindi otteniamo la frequenza cardiaca (i battiti in un minuto)

$$f = \frac{60}{T} = \frac{60}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{150}{\pi} \cong 48\ \frac{\text{battiti}}{\text{minuto}} \quad .$$

5. Soluzione:

a)
- 15 marzo ($t = \frac{5}{2}$) :
  $L(\frac{5}{2}) = 12 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{5}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = 12$;
- 15 giugno ($t = \frac{11}{2}$) :
  $L(\frac{11}{2}) = 12 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{11}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = 15$;
- 15 dicembre ($t = \frac{23}{2}$) :
  $L(\frac{23}{2}) = 12 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{23}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = 9$.

b) In corrispondenza del valore massimo di $\sin x$, cioè quando $L(t) = 15$. Come abbiamo visto sopra, quindi, per $t = \frac{11}{2}$ (15 giugno).



6. **a)** Si tratta di 3 oscillazioni armoniche con fase nulla, ampiezza pari a 100 e periodi 23, 28 e 33:

$$F(t) = 100 \sin\left(\frac{2\pi}{23}t\right), \quad E(t) = 100 \sin\left(\frac{2\pi}{28}t\right), \quad I(t) = 100 \sin\left(\frac{2\pi}{33}t\right).$$

b) Calcoliamo, ad esempio, i bioritmi per il capodanno 2013 di una persona nata il 2 agosto 1971 (con $t = 15128$):

$$F(15128) = 100 \sin\left(\frac{2\pi}{23} \cdot 15128\right) \cong -100,\ E(15128) = 100 \sin\left(\frac{2\pi}{28} \cdot 15128\right) \cong 97,\ I(15128) = 100 \sin\left(\frac{2\pi}{33} \cdot 15128\right) \cong 46.$$

7. Ricaviamo immediatamente

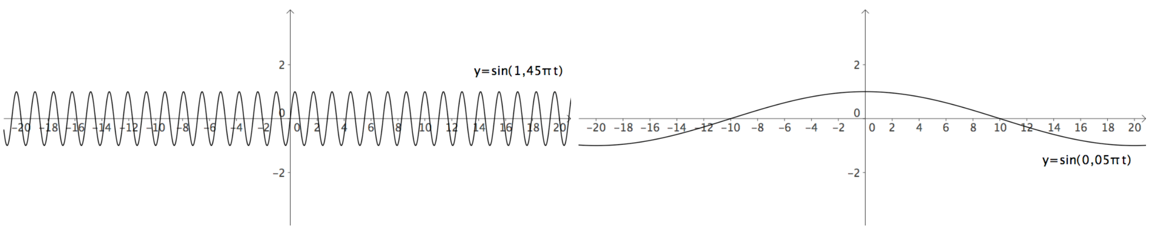
$$P(t) = 10^5 + 0,03 \cdot \sin(880\pi \cdot t)$$

(nota che $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu = 2\pi \cdot 440 = 880\pi\ \mathrm{s}^{-1}$).

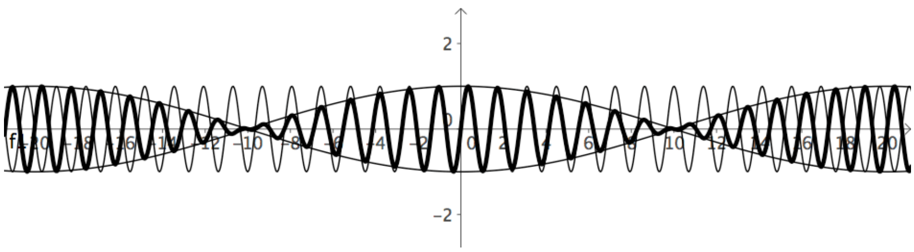
8. Applichiamo la *formula di prostaferesi* per la somma di due seni:

$$f(t) = \sin(1,4\,\pi\, t) + \sin(1,5\,\pi\, t) = 2 \sin\left(\frac{1,4t + 1,5t}{2}\right) \cos\left(\frac{1,4t - 1,5t}{2}\right) = 2\sin(1,45\pi\, t) \cdot \cos(0,05\pi\, t) \quad ;$$

si tratta del doppio prodotto delle funzioni $h_1(t) = \sin(1,45\pi\, t)$ (che rappresenta un'oscillazione "veloce", avente pulsazione intermedia rispetto alle frequenze degli addendi) e $h_2(t) = \cos(0,05\pi\, t)$ (che rappresenta un'oscillazione "lenta"):



Moltiplicando, l'ampiezza delle oscillazioni di h_1 viene *modulata* dal valore di h_2:

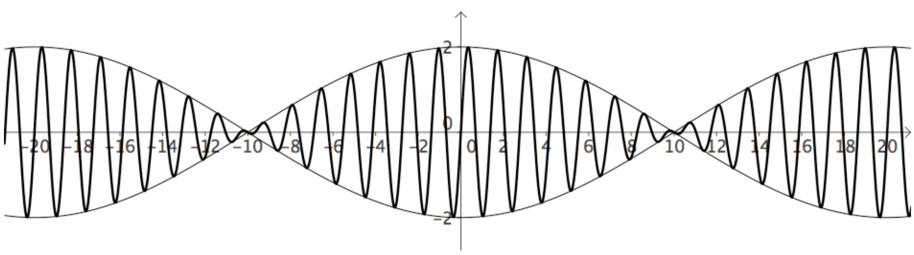


La funzione $h_1 \cdot h_2$ deve ancora essere raddoppiata, dal momento che

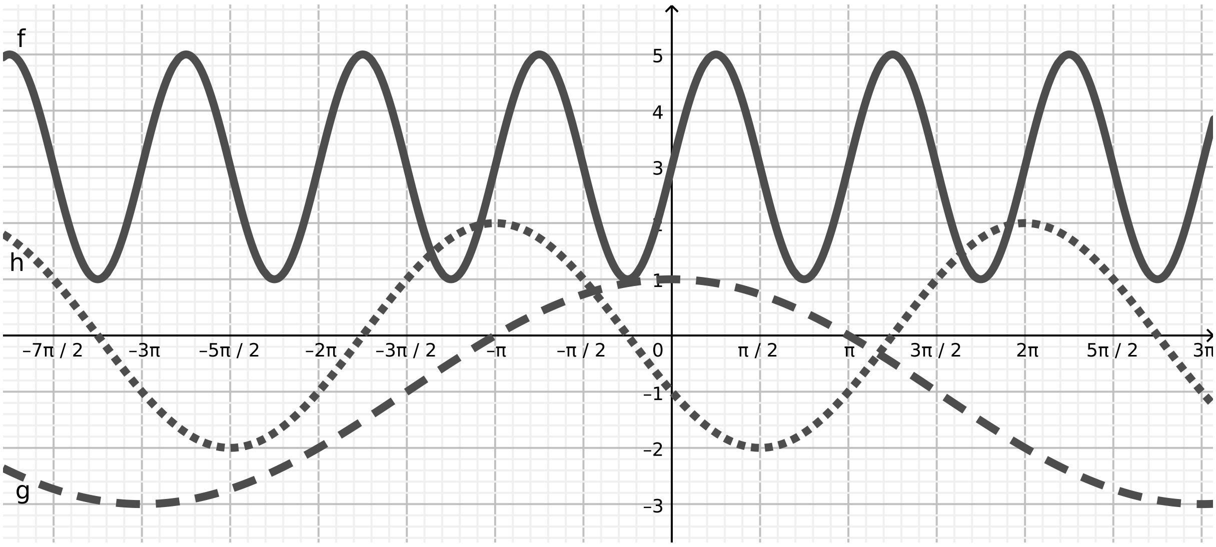
$$f(t) = 2\sin(1,45\pi\, t) \cdot \cos(0,05\pi\, t) = 2\, h_1(t)\, h_2(t) \qquad ;$$

è quindi chiaro che il grafico di f è compreso tra

$$g_1(t) = 2h_2(t) \qquad \text{e} \qquad g_2(t) = -2h_2(t) \quad :$$



Esercizio 3 bis: ricava dal grafico qui sotto le funzioni corrispondenti (soluzione alla fine della pagina):



$f(x) = 3 - 2sin(2x + \pi)$

$g(x) = -1 + 2sin(x/3 + \pi/2)$

$h(x) = 2sin(2x/3 + 7\pi/6)$