# Serie 18 - Il prodotto scalare

*"Se non fosse per ammirare la bellezza dell'armonia, la scienza non sarebbe degna di alcun interesse."*

H. Poincaré

**1.** Determina $\vec{a} \cdot \vec{b}$, se vale ...

**a)** $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$ ;
**b)** $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 9$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$ .

**2.** Siano $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ , $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ , $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Calcola $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , $\vec{a} \cdot \vec{c}$ , $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{d})$ , $\vec{d} \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})$.

**3.** Determina l'ampiezza dell'angolo convesso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$, se vale ...

**a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ ; **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Determina inoltre l'area del parallelogrammo delimitato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

**4.** Per quali valori di $k$ i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono ortogonali tra loro?

**a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} k+1 \\ -3 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ k \end{pmatrix}$ ; **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} k-5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

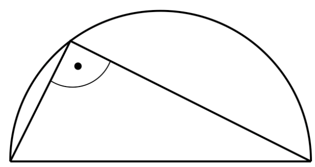
**5.** Sono dati i punti $A(-5; -5), B(8; 1)$ e $C(-1, 7)$. Determina il punto $D(x_D; y_D)$ tale che $ABCD$ sia un parallelogrammo. Calcola poi il perimetro di $ABCD$, e le coordinate del punto dintersezione delle sue diagonali.

**6.** Considera i vettori: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ e $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

a) Per quali valori di $k$ i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ racchiudono un angolo di 60°?
b) Trova un vettore $\vec{v}$ di modulo 1 e per cui vale: $\vec{v} \perp \vec{a}$.
c) Determina per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w} = \lambda\vec{a} + \vec{c}$ è perpendicolare a $\vec{a}$.

**7.** Dimostra:

con l'aiuto del prodotto scalare, che *ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo*.



**8.** * Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori geometrici di $V_2$. Mostra che vale

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=2\|\vec{a}\|^2+2\|\vec{b}\|^2 \quad .$$

Che interpretazione geometrica si può dare di questa relazione?

**9.** **a)** Determina la misura dei lati, l'ampiezza degli angoli, il perimetro e l'area del triangolo $ABC$ con $A(2,1)$, $B(5,4)$, $C(-5,3)$.

**b)** Di quanto occorre spostare *verticalmente* il punto $A$ affiché l'angolo in $A$ diventi retto?

**c)** Di quanto occorre spostare *orizzontalmente* il punto $B$ affiché l'area di $ABC$ misuri 20 $\mathrm{u}^2$?

**10.** * Mostra che è impossibile disegnare su un foglio quadrettato un triangolo equilatero con i 3 vertici sugli incroci dei quadretti[1].

**11.** Determinare l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sapendo che $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 4$ e che i vettori $\vec{c} = 4\vec{a}+6\vec{b}$ e $\vec{d} = 8\vec{a}-3\vec{b}$ sono ortogonali fra loro.

**12.** Con la regola di Cramer risolvi i seguenti sistemi di equazioni lineari:

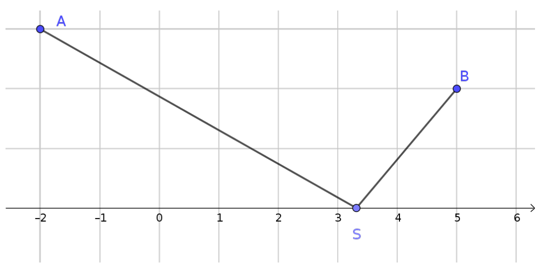
a)
$$\begin{cases} 3x+2y=6 \\ -2x+5y=-4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x-3y=2 \\ -10x+6y=-4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5x-3y=7 \\ -10x+6y=7 \end{cases}$$

**13.** Immagina una cartina del vecchio West: alle coordinate $A(-2;3)$ si trova la cittadina di *Eulercity* mentre in $B(5;2)$ troviamo *Gaussville*. Lungo l'asse $0x$ passa la linea della ferrovia appena completata.

Si è deciso di costruire una stazione del treno per poter servire le due cittadine ma, per ottimizzare gli spostamenti, si è deciso di piazzarla così che la somma delle distanze Eulercity-stazione e Gausville-stazione sia minima. Dove si dovrà posizionare la stazione?




[1] una formulazione più rigorosa: *nel piano cartesiano, non può esistere un triangolo equilatero con tutti e 3 i vertici a coordinate intere*

# Soluzioni

**1.** **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 5\cdot\cos 60^\circ = 15\cdot\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$ ;

**b)** $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 2\cdot 9\cdot\cos 150^\circ = 18\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -9\sqrt{3}$ .

**2.**
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} = 4\cdot(-1)+3\cdot 7 = -4+21 = 17$ ;
- $\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = 4\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{3} = 0$ (quindi $\vec{a}\perp\vec{c}$) ;
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{d}) = \begin{pmatrix}4-1\\3+7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4}-5\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{19}{4}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = -\frac{57}{4} - \frac{10}{3} = -\frac{211}{12}$ ;
- $\vec{d}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}) = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\cdot 4+3\cdot(-1)+4\cdot\frac{1}{4}\\ \ldots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ \ldots\end{pmatrix} = 30$ .

**3.** **a)** $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{-7-56}{\sqrt{113\cdot 50}} = -\dfrac{63}{\sqrt{5650}}$ ; $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{63}{\sqrt{5650}}\right) \cong 146,94^\circ$ ;

$$\mathcal{A} = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|\begin{vmatrix}-7 & 1\\ 8 & -7\end{vmatrix}\right| = |(-7)\cdot(-7) - 8\cdot 1| = |49-8| = 41 \quad .$$

**b)** $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \dfrac{10+36}{\sqrt{41\cdot 85}} = \dfrac{46}{\sqrt{3485}}$ ; $\alpha = \arccos\left(\dfrac{46}{\sqrt{3485}}\right) \cong 38,81^\circ$ ;

$$\mathcal{A} = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 9\end{vmatrix}\right| = |5\cdot 9 - 2\cdot 4| = |45-8| = 37 \quad .$$

**4.** **a)** $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \begin{pmatrix}k+1\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\k\end{pmatrix} = 0 \iff 5k+5-3k = 0 \iff 2k = -5 \iff \boxed{k = -\frac{5}{2}}$;

**b)** $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k-5\\3\end{pmatrix} = 0 \iff k^2-5k+6 = 0 \iff (k-2)(k-3) = 0$

$\iff \boxed{k = 2 \text{ opp. } k = 3}$.

**5.** Per ottenere un parallelogrammo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Dunque per trovare il punto $D$ basta calcolare:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5-8\\-5-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\1\end{pmatrix}$$

Dunque $\boxed{D(-14;1)}$. Osservazione: occorre prestare attenzione alla sequenza dei vertici del parallelogrammo ($ABCD$). Invertendo l'ordine (ad esempio $ABDC$) si ottiene un risultato differente. (Nota: otteniamo lo stesso risultato con $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$)

- Perimetro: $\mathcal{P}_{ABCD} = 2\left(\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|\right) = 2(\sqrt{205}+\sqrt{117}) \cong 50.27$.
- L'intersezione è il punto medio del segmento $AC$ (o del segmento $BD$): $M\left(\frac{1}{2}(-5-1); \frac{1}{2}(-5+7)\right) = M(-3;1)$.

**6.** a)

$$\begin{aligned}
\angle(\vec{a},\vec{b}) = 60^\circ \quad &\iff \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \iff \quad \frac{10+k}{\sqrt{26(4+k^2)}} = \frac{1}{2}\\
&\iff \quad 20+2k = \sqrt{104+26k^2} \quad \Rightarrow \quad 400+80k+4k^2 = 104+26k^2\\
&\iff \quad 22k^2-80k-296 = 0 \quad \iff \quad 11k^2-40k-148 = 0\\
&\iff \quad k = \frac{20\pm 26\sqrt{3}}{11}\\
&\iff \quad \boxed{k \cong -2.28 \text{ opp. } k \cong 5.91} \quad .
\end{aligned}$$

b) Per trovare un vettore perpendicolare basta invertire le componenti $x$ e $y$, cambiando il segno ad una di esse ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = xy - xy = 0$ e dunque perpendicolari). Per renderlo unitario mi basta dividere per il suo modulo, dunque otteniamo:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{-5}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}$$

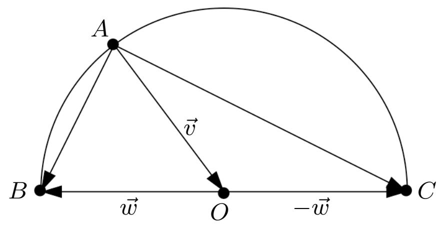
c) $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5\lambda + 3 \\ \lambda + 7 \end{pmatrix}$, quindi:

$$\vec{w} \perp \vec{a} \iff \begin{pmatrix} 5\lambda + 3 \\ \lambda + 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff (5\lambda + 3)5 + (\lambda + 7)1 = 0 \iff \lambda = \frac{-11}{13}.$$

**7.** Siano $A, B, C$ i vertici del triangolo, $O$ il centro della semicirconferenza, $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ e $r = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$ il raggio della semicirconferenza. Allora vale $\overrightarrow{OC} = -\vec{w}$ e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}^2 \cancel{-\vec{v} \cdot \vec{w}} \cancel{+\vec{v} \cdot \vec{w}} - \vec{w}^2 \\ &= \vec{v}^2 - \vec{w}^2 = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 = r^2 - r^2 = 0 \quad . \end{aligned}$$

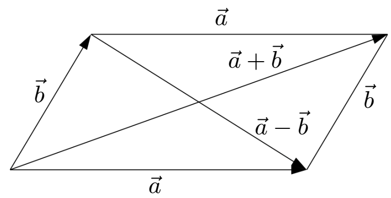
Quindi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ e di conseguenza $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ .




**8.** Calcoliamo

$$\begin{aligned} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a}^2 \cancel{+2\vec{a} \cdot \vec{b}} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 \cancel{-2\vec{a} \cdot \vec{b}} + \vec{b}^2 \\ &= 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2 \quad . \end{aligned}$$

Interpretazione geometrica: *in un parallelogrammo, la somma dei quadrati delle diagonali è pari alla somma dei quadrati dei lati.*




**9.** **a)** Determiniamo dapprima i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Quindi, per le misure dei lati vale

$$a = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-10)^2 + (-1)^2} = \sqrt{101} \quad , \quad b = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{53} \quad , \quad c = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad .$$

Ampiezze degli angoli: siano (come sempre) $\alpha$ l'angolo in $A$, $\beta$ l'angolo in $B$ e $\gamma$ l'angolo in $C$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left( \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} \right) = \arccos\left( -\frac{15}{3\sqrt{106}} \right) \cong 119,05^\circ \\ \beta &= \arccos\left( \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BA}\|} \right) = \arccos\left( \frac{33}{3\sqrt{202}} \right) \cong 38,29^\circ \\ \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta \cong 21,66^\circ \quad . \end{aligned}$$

Perimetro:

$$\mathcal{P} = a + b + c = \sqrt{101} + \sqrt{53} + 3\sqrt{2} \cong 21,57 \quad .$$

Area:

$$\mathcal{A} = \left| \frac{1}{2} \det\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - 3 \cdot (-7)) \right| = \frac{27}{2} \quad .$$

**b)** Sia $t$ la lunghezza dello spostamento verticale necessario. Quindi, le "nuove" coordinate del punto $A$ sono $A(2, 1+t)$. La condizione $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ si traduce in $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, con

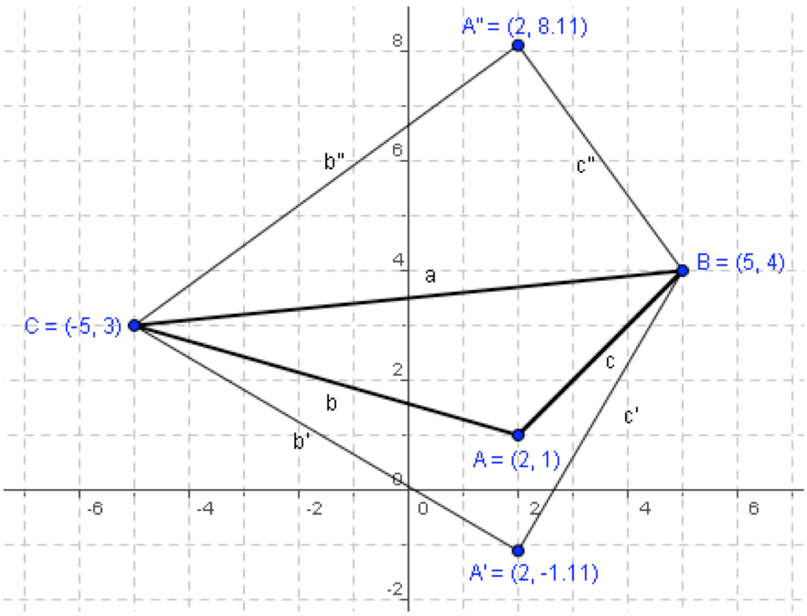
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-(1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3-t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5-2 \\ 3-(1+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2-t \end{pmatrix} \quad .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2-t \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -21 + (3-t)(2-t) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad t^2 - 5t - 15 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{85}}{2} \end{aligned}$$

Quindi: per $t = \dfrac{5+\sqrt{85}}{2} \cong 7,11$ (spostamento verso l'alto) oppure per $t = \dfrac{5-\sqrt{85}}{2} \cong -2,11$ (spostamento verso il basso) l'angolo in $A$ è retto. I "nuovi" vertici sono all'incirca $A'(2\,;\,8,11)$ e $A''(2\,;\,-1,11)$.

Disegno per la parte **a)** e la parte **b)** (con GeoGebra, disponibile gratuitamente all'indirizzo `www.geogebra.com`)




**c)** Deve valere $\left|\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = 20$, cioè $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm 40$. Sia $B(5+t, 4)$ il "nuovo" punto $B$ (dove $t$ rappresenta quindi lo spostamento orizzontale); calcoliamo

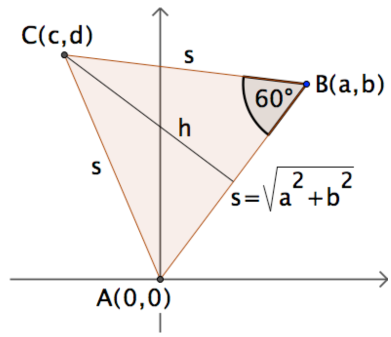
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 5+t-2 & -7 \\ 4-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+t & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2t + 21 = 2t + 27 \quad .$$

Le equazioni da risolvere sono quindi

$$2t + 27 = 40 \qquad \text{e} \qquad 2t + 27 = -40$$

e le soluzioni sono rispettivamente $\boxed{t = \frac{13}{2}}$ e $\boxed{t = -\frac{67}{2}}$.

**10. Tesi:** nel piano cartesiano, non esiste un triangolo equilatero i cui vertici hanno coordinate intere.




**Dimostrazione:** procediamo *per assurdo*, supponendo esistere un triangolo equilatero $ABC$ di vertici $A(0,0)$, $B(a,b)$ e $C(c,d)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ (nota che possiamo supporre che $A$ coincida con l'origine degli assi senza perdita di generalità). Calcoliamo in due modi l'area $\mathcal{A}$ del triangolo:

- con la formula del determinante, ricaviamo

$$\mathcal{A} = \left|\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|ad - bc| \quad ;$$

- con la formula elementare, invece,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}sh = \frac{1}{2}s \cdot s\sin 60° = \frac{1}{2}s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}\underbrace{(a^2+b^2)}_{s^2}\sqrt{3} \quad .$$

Cadiamo quindi in contraddizione:

$$\mathcal{A} = \underbrace{\frac{1}{2}|ad-bc|}_{\in\mathbb{Q}} = \underbrace{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\sqrt{3}}_{\notin\mathbb{Q}} \quad :$$

supponendo che $a, b, c$ e $d$ siano interi, otteniamo un valore dell'area che è sia razionale che irrazionale!

**Osservazione:** con $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$, lo stesso ragionamento mostra che il triangolo non esiste nemmeno se le coordinate sono supposte *razionali*!

**11.** Ricorda che il prodotto scalare oltre ad essere commutativo ($\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$) è anche distributivo ($(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$). Inoltre: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{a}\| \cdot \cos(0) = \|\vec{a}\|^2$.

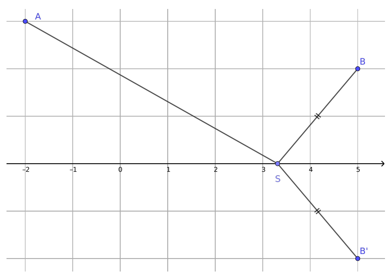
Dato che $\vec{c}$ e $\vec{d}$ sono ortogonali tra loro otteniamo:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = \underbrace{\left(4\vec{a} + 6\vec{b}\right) \cdot \left(8\vec{a} - 3\vec{b}\right)}_{=32\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 48\vec{b}\vec{a} - 18\vec{b}^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 32 \cdot \underbrace{\vec{a}^2}_{=3^2} + 36 \cdot \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=3\cdot4\cdot\cos\alpha} - 18 \cdot \underbrace{\vec{b}^2}_{=4^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 12\cos\alpha = 0$$

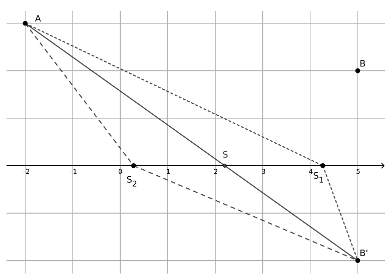
Da cui si ottiene: $\alpha = 90°$.

**12.** Soluzioni: a) $x = 2; y = 0$; b) Sistema indeterminato, soluzione generale: $y = \frac{5x-2}{3}$; c) Sistema impossibile.

**13.** Soluzione:



Notiamo inizialmente come la stazione avrà coordinate $S(x,0)$ e dovremo ottenere il valore minimo di $\|\overrightarrow{AS}\| + \|\overrightarrow{SB}\|$.
La risoluzione di questo problema è però molto più semplice con un'osservazione di tipo geometrico: innanzitutto alle coordinate $B'(5;-2)$ troviamo la posizione simmetrica di Gausville rispetto all'asse $0x$. Per simmetria la distanza stazione-Gausville ($\|\overrightarrow{SB}\|$) è identica alla distanza stazione-posizione simmetrica di Gausville ($\|\overrightarrow{SB'}\|$).



Concentriamoci ora solo su $A$, $S$ e $B'$. Se spostiamo in vari punti la stazione ci accorgiamo che in generale otteniamo una linea spezzata ($ASB'$). Solo nel caso in cui $A$, $S$ e $B'$ sono allineati avremo una linea non spezzata: è ovvio che in questo caso avremo una lunghezza (sommata) minima! La stazione dovrà dunque trovarsi all'intersezione tra $AB'$ e l'asse $0x$.

Per trovare la posizione di $S$ troviamo innanzitutto l'equazione della retta passante per $AB'$: pendenza $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{7}$, equazione:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad y - 3 = \frac{-5}{7}(x+2) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{-5}{7}x + \frac{11}{7}$$

E dunque l'intersezione dell'asse $0x$: $\frac{-5}{7}x + \frac{11}{7} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{11}{5} \quad \Rightarrow S(11/5; 0)$.