Serie 16 - Vettori geometrici

"Do not pray for an easy life, pray for the strength to endure a difficult one."
Bruce Lee

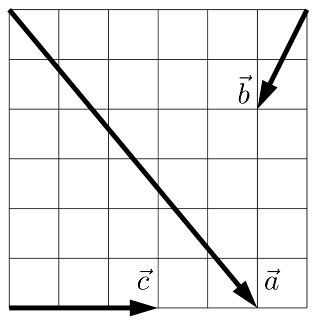
1. Disegna 3 vettori a scelta $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ non nulli del piano.

a) Determina il vettore $\vec{d} = \frac{2}{3}\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + 2\left(\vec{b} - \vec{c}\right) - (\vec{c} - \vec{a})$.

b) Determina il vettore $\vec{e}$ dato da $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{e} = 0$.

c) Disegna due vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ tali che: $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = \|\vec{v} + \vec{w}\|$.

2. Sono dati i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$.



a) Ricopia il disegno su un foglio quadrettato, e rappresenta i vettori

$$\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} \quad , \quad \vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \quad , \quad \vec{w} = \vec{a} + 2\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} \quad .$$

b) Scrivi $\vec{a}$ come combinazione lineare di $\vec{b}$ e $\vec{c}$.

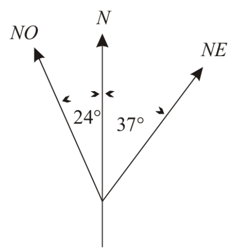
3. Rappresenta un parallelogrammo $ABCD$ su un foglio a parte:

a) Disegna i seguenti vettori: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$

b) Disegna un vettore $\vec{x}$ così che: $\vec{x} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \vec{x}$.

c) esprimi i vettori $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BD}$ come *combinazione lineare* di $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

4. Un aereo viaggia in direzione NO 24° alla velocità costante di 496 km/h.



Ad un certo punto si alza un vento con direzione NE 37° e velocità 84 km/h. Come devono mutare la rotta e la velocità dell'aereo, se si vuole che continui a viaggiare nella stessa direzione e con la stessa velocità rispetto al suolo?

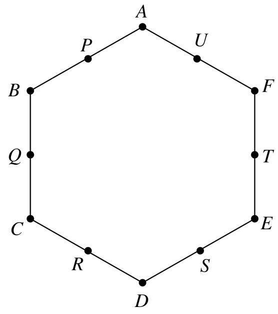
5. Risolvi (rispetto a $\vec{x}$) le seguenti *equazioni vettoriali*:

a) $3\vec{x} - 2\vec{b} + \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{x} + 4\vec{b}) - 3\vec{c}$;

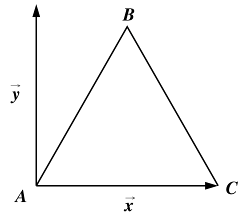
b) $\frac{1}{2}(2\vec{x} + \vec{c}) - \frac{3}{4}(3\vec{b} - \vec{x}) = \frac{1}{4}(4\vec{b} + \vec{c}) + \vec{x}$.

c) $2(\vec{x} - \vec{b}) - 3(2\vec{b} - 5\vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{x} - 2\vec{c})$.

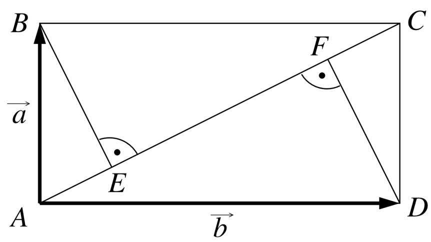
6. $ABCDEF$ è un esagono regolare, e P, Q, R, S, T, U sono i punti medi dei lati. Esprimi come combinazione lineare di $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ i vettori $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{UP}$, $\overrightarrow{CE}$ e $\overrightarrow{DU}$.



7. ABC è un triangolo equilatero, e $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono ortogonali tra loro. Inoltre vale $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$. Esprimi $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ come *combinazione lineare* di $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

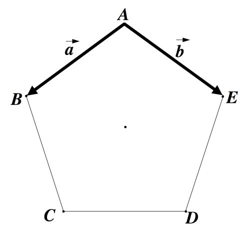


8. * $ABCD$ è un rettangolo con $|AB| = 5$ e $|AD| = 8$.



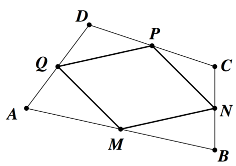
Scrivi i vettori $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{DF}$ come combinazione lineare di $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

9. * $ABCDE$ è un pentagono regolare.



Esprimi i vettori $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DE}$ come combinazione lineare di $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AE}$.

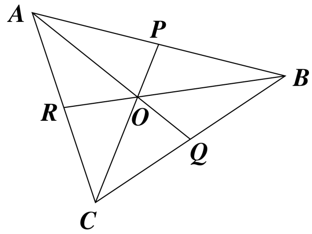
10. Mostra che i punti medi M, N, P e Q dei lati di un quadrilatero *qualsiasi* sono i vertici di un parallelogrammo.



11. Siano P, Q e R i punti medi dei lati AB, BC risp. AC di un triangolo (qualsiasi) ABC. Mostra che i segmenti AQ, BR e CP (cioè le *mediane* del triangolo) si intersecano in un punto O per cui vale

$$\frac{|AO|}{|OQ|} = \frac{|BO|}{|OR|} = \frac{|CO|}{|OP|} = 2 \quad .$$

Il punto O è detto *baricentro* del triangolo ABC.
(*Consiglio: esprimi i vettori* $\overrightarrow{AO} = \lambda \cdot \overrightarrow{AQ}$ *e* $\overrightarrow{OB} = \mu \cdot \overrightarrow{RB}$ *come combinazione lineare di* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *e* $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$*, e sfrutta la relazione* $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{a}$ *assieme all'unicità della scomposizione*).



Soluzioni

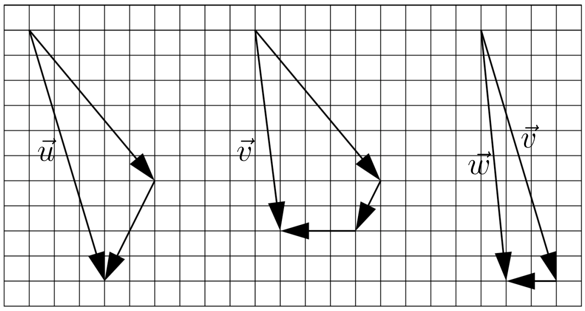
1. Ovviamente ogni scelta dei vettori iniziali genererà una combinazione lineare differente. Ogni soluzione sarà dunque diversa. Algebricamente possiamo però semplificare queste combinazioni come segue.

a) Possiamo semplificare la scrittura di $\vec{d}$ come segue:
$\vec{d} = \frac{2}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) + 2\left(\vec{b}-\vec{c}\right) - (\vec{c}-\vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + 2\vec{b} - 2\vec{c} - \vec{c} + \vec{a} = \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} - 3\vec{c}$

b) Nota che vale $\vec{e} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

c) I due vettori (se debitamente localizzati) formano i lati di un triangolo equilatero, in modo che la punta del primo vettore coincide con la partenza del secondo.

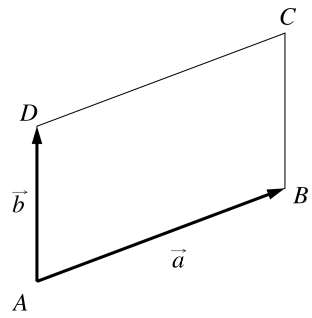
2. **a)**



b) Ricopiando il disegno, si nota che $\vec{a} - 3\vec{b} = \frac{8}{3}\vec{c}$, e quindi $\vec{a} = 3\vec{b} + \frac{8}{3}\vec{c}$.

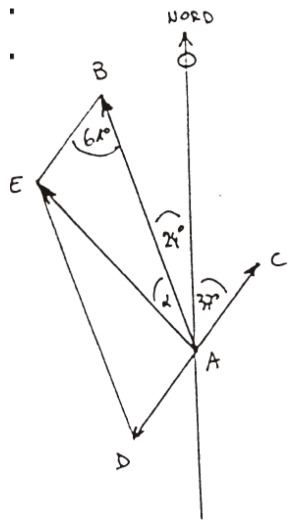
3. a) Diverse soluzioni possibili. Nota che: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \vec{o}$ (il vettore nullo).

b) Nota che risolvendo l'equazione si ottiene: $\vec{x} = \dfrac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}}{2}$.



c)
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$
- $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}$

4. Considera la figura accanto:



Siano: $\overrightarrow{AB}$ il vettore che esprime la velocità dell'aereo, $\overrightarrow{AC}$ quello che indica la velocità del vento e $\overrightarrow{AE}$ il vettore da trovare (nuova velocità dell'aereo).

Utilizzando il teorema del coseno sul triangolo ABE:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cos 61^\circ \quad \rightarrow \overline{AE} \cong 461.16$$

Utilizzando il teorema del seno sul triangolo ABE:

$$\frac{\overline{AE}}{\sin 61^\circ} = \frac{\overline{EB}}{\sin \alpha} \quad \rightarrow \alpha \cong 9.17 \text{ (sicuramente acuto)}$$

Nuova direzione: NO 33.17° (=24+9.17). Nuova velocità: 461.16 km/h.

5. Si tratta di semplicemente di applicare le consuete regole algebriche per "isolare" il vettore incognito $\vec{x}$.

a) $3\vec{x} - 2\vec{b} + \vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{x} + 4\vec{b}) - 3\vec{c} \iff 3\vec{x} - 2\vec{b} + \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{b} - 3\vec{c} \iff \dfrac{5}{2}\vec{x} = 4\vec{b} - 4\vec{c} \iff \vec{x} = \dfrac{8}{5}\vec{b} - \dfrac{8}{5}\vec{c}$

b) $\frac{1}{2}(2\vec{x} + \vec{c}) - \frac{3}{4}(3\vec{b} - \vec{x}) = \frac{1}{4}(4\vec{b} + \vec{c}) + \vec{x} \iff \cancel{\vec{x}} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{9}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{x} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \cancel{\vec{x}} \iff \frac{3}{4}\vec{x} = \frac{13}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$
$\iff \vec{x} = \frac{13}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$

c) $2(\vec{x} - \vec{b}) - 3(2\vec{b} - 5\vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{x} - 2\vec{c}) \iff 2\vec{x} - 2\vec{b} - 6\vec{b} + 15\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{c} \iff \frac{3}{2}\vec{x} = 8\vec{b} - 16\vec{c}$
$\iff \vec{x} = \frac{16}{3}\vec{b} - \frac{32}{3}\vec{c}$

6. Soluzioni:

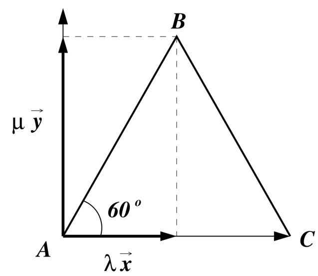
- $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$
- $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$
- $\overrightarrow{DE} = -\vec{a}$
- $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$
- $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
- $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$
- $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
- $\overrightarrow{ST} = -\overrightarrow{PQ} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
- $\overrightarrow{TU} = -\overrightarrow{QR} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$
- $\overrightarrow{UP} = -\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \vec{b} - \vec{a}$
- $\overrightarrow{DU} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FU} = -\vec{a} - \vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}b =$
  $= -2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$

7. Sia $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$. Ricaviamo immediatamente

$$\lambda = \frac{\cos 60° \cdot \|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \cos 60° = \frac{1}{2} \quad , \quad \mu = \frac{\sin 60° \cdot \|\vec{y}\|}{\|\vec{y}\|} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \dfrac{1}{2}\vec{x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}$.
Inoltre,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \vec{x} = -\lambda\vec{x} - \mu\vec{y} + \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y} \quad .$$



8. Cerchiamo innanzitutto di scrivere $\overrightarrow{AE}$ come combinazione lineare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, di ricavare cioè due numeri reali λ e μ tali che $\overrightarrow{AE} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Dal momento che vale

$$\overrightarrow{AE} = \frac{|AE|}{|AC|}\overrightarrow{AC} = \frac{|AE|}{|AC|}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{|AE|}{|AC|}\vec{a} + \frac{|AE|}{|AC|}\vec{b}$$

otteniamo $\lambda = \mu = \frac{|AE|}{|AC|}$.

- Con il Teorema di Pitagora, otteniamo $|AC| = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$.
- Per ricavare $|AE|$, ci sono almeno 2 modi:
  - dalla similitudine tra i triangoli ABE e ACB si ricava
    $$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \iff \quad |AB|^2 = |AE| \cdot |AC|$$
    (si tratta del cosiddetto *Primo Teorema di Euclide*, e quindi $|AE| = \frac{|AB|^2}{|AC|} = \frac{25}{\sqrt{89}}$
  - oppure, con la trigonometria, $\alpha = \widehat{DAC} = \arctan\frac{5}{8}$ e $|AE| = |AB| \sin\alpha$ dato che $\widehat{DAC} = \widehat{ABE}$ (i triangoli ABE e ADC sono simili).

Otteniamo $\lambda = \mu = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{25}{\sqrt{89}} \cdot \frac{1}{\sqrt{89}} = \frac{25}{89}$ e quindi

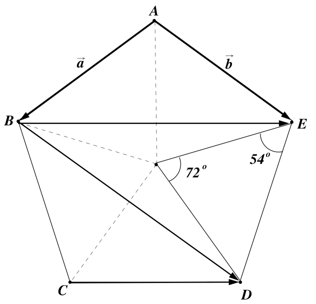
$$\overrightarrow{AE} = \frac{25}{89}\vec{a} + \frac{25}{89}\vec{b} \quad .$$

Per ricavare i vettori rimanenti possiamo ragionare come segue:

- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} - \dfrac{25}{89}(\vec{a} + \vec{b}) = \dfrac{64}{89}\vec{a} + \dfrac{64}{89}\vec{b}$.

- $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{AE} + \vec{a} = -\frac{25}{89}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} = \frac{64}{89}\vec{a} - \frac{25}{89}\vec{b}.$
- $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} - 2\frac{25}{89}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{39}{89}\vec{a} + \frac{39}{89}\vec{b}.$
- $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{EB} = -\frac{64}{89}\vec{a} + \frac{25}{89}\vec{b}.$
- $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB} = \frac{64}{89}\vec{a} - \frac{25}{89}\vec{b}.$

9.



Per semplificare la scrittura, chiamiamo ℓ la lunghezza del lato. Quindi, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \ell$. Dal momento che $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{BE} = -\vec{a} + \vec{b}$ sono collineari, deve valere $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{BE} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; per ricavare il valore di λ, determiniamo il rapporto tra i moduli di $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{BE}$:

$$\lambda = \frac{\|\overrightarrow{CD}\|}{\|\overrightarrow{BE}\|} = \frac{\ell}{2\ell \sin 54^\circ} = \frac{1}{2 \sin 54^\circ} \quad .$$

Quindi,

$$\overrightarrow{CD} = -\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} = \frac{-1}{2\sin 54^\circ}\vec{a} + \frac{1}{2\sin 54^\circ}\vec{b} \quad .$$

In maniera analoga, ricaviamo $\overrightarrow{BD} = 2\sin 54^\circ \cdot \overrightarrow{AE} = 2\sin 54^\circ \cdot \vec{b}$, e quindi

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = 2\sin 54^\circ \vec{b} + \frac{1}{2\sin 54^\circ}\vec{a} - \frac{1}{2\sin 54^\circ}\vec{b} = \frac{1}{2\sin 54^\circ} \cdot \vec{a} + \underbrace{\left(\frac{4\sin^2 54^\circ - 1}{2\sin 54^\circ}\right)}_{1 \text{ (v. sotto)}} \cdot \vec{b}$$

ed infine

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -2\sin 54^\circ \vec{b} - \vec{a} + \vec{b} = -\vec{a} + (1 - 2\sin 54^\circ)\vec{b} \quad .$$

Osservazione: il rapporto tra diagonale e lato di un pentagono è pari alla cosiddetta *sezione aurea* $\phi = 2\sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; essa soddisfa, fra le altre cose, le relazioni $\phi^2 = \phi + 1$ e $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$. Dal momento che $\lambda = \frac{1}{\phi}$, Potremmo quindi anche scrivere

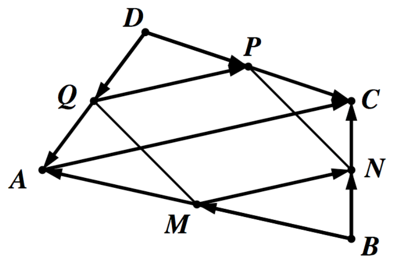
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= -\frac{1}{\phi}\,\vec{a} + \frac{1}{\phi}\,\vec{b} = (1-\phi)\,\vec{a} + (\phi - 1)\,\vec{b} \\
\overrightarrow{BD} &= \phi\,\vec{b} \\
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \phi\,\vec{b} - (1-\phi)\,\vec{a} - (\phi-1)\,\vec{b} = (\phi-1)\vec{a} + \vec{b} \\
\overrightarrow{DE} &= \ldots = -\vec{a} + (1-\phi)\vec{b} \quad .
\end{aligned}$$

Nota che dal fatto che $\phi = 2\sin 54^\circ$ segue

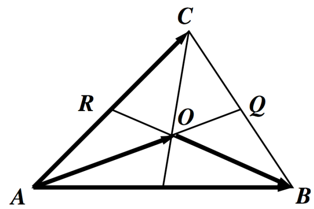
$$\frac{4\sin^2 54^\circ - 1}{2\sin 54^\circ} = \frac{\phi^2 - 1}{\phi} = \frac{\phi + 1 - 1}{\phi} = 1 \quad .$$

10. Notiamo che vale

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QP} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \\
\overrightarrow{MN} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad .
\end{aligned}$$



Ciò dimostra che $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MN}$, e quindi che i lati opposti QP e MN sono paralleli e congruenti. Di conseguenza, $MNPQ$ non può che essere un parallelogrammo.



11. Sia innanzitutto O l'intersezione delle mediane AQ e BR, e siano $\lambda = \frac{|AO|}{|AQ|}$ e $\mu = \frac{|BO|}{|BR|}$. Dimostriamo la $\boxed{\textbf{Tesi: } \lambda = \mu = \frac{2}{3}}$.
In maniera analoga si potrà poi procedere, ad esempio, con AO e CO.

Esprimiamo in due modi $\overrightarrow{AB}$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$:

- Il primo modo è banale:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} \quad ; \tag{1}$$

- inoltre vale

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \lambda\, \overrightarrow{AQ} = \lambda \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} \right) = \lambda \left(\vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \right) = \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \quad ; \\ \overrightarrow{OB} &= \mu\, \overrightarrow{RB} = \mu \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \right) \quad . \end{aligned}$$

Di conseguenza, vale

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \lambda \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) + \mu \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \right) = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu \right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu \right) \vec{b} \quad . \tag{2}$$

Abbiamo, apparentemente, scomposto $\overrightarrow{AB}$ in due modi. Ma la scomposizione di un vettore di V_2 come combinazione lineare di due vettori non collineari è <u>unica</u>: le scomposizioni (1) e (2) devono essere identiche, e deve quindi valere

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \mu = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu = 0 \end{cases} \quad .$$

Dalla seconda equazione ricaviamo subito $\lambda = \mu$, e sostituendo nella prima $\frac{3}{2}\lambda = 1$, $\lambda = \frac{2}{3}$.

Come volevasi dimostrare, vale quindi $\boxed{\lambda = \mu = \frac{2}{3}}$: le mediane si intersecano in un punto che le divide con rapporto 2 : 1 ■