Serie 4 - Rapporti trigonometrici bis

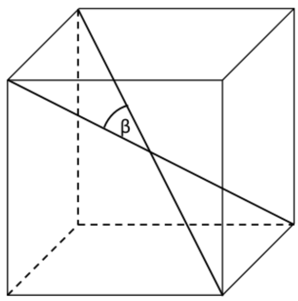
"È bene tenere la mente aperta, ma non così aperta che il cervello caschi per terra."
P. Angela

1. Determina l'altezza di una torre, sapendo che un osservatore posto ad una distanza di 30 metri vede la sua sommità con un angolo *d'elevazione* di 50° e la sua base con un angolo *di depressione* di 20°.

2. Determina, per un cubo qualsiasi, l'ampiezza dell'angolo ....

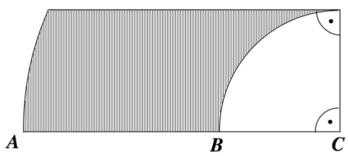
a) ... tra la diagonale interna e uno spigolo.
b) ... tra la diagonale della faccia e uno spigolo.
c) ... tra la diagonale interna e la diagonale della faccia.

3. Calcola l'ampiezza dell'angolo β formato dalle diagonali di un cubo di lato a.

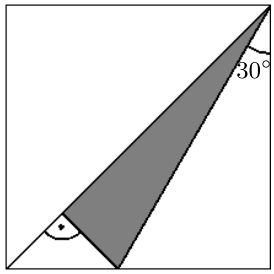


4. Secondo Albrecht Dürer (1471-1528), probabilmente il massimo esponente dell'arte tedesca rinascimentale, il lato dell'ettagono (7 lati) regolare inscritto in un cerchio può essere approssimato con la metà del lato del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio. Verifica tale affermazione con riga e compasso e valuta con il calcolo l'errore percentuale commesso.

5. Sapendo che $|AB| = 8$ e $|BC| = 5$, determina l'area della superficie evidenziata.



6. * Aiutandoti con il disegno a fianco (che rappresenta un quadrato), determina i valori *esatti*

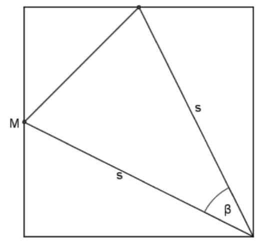


$$\sin(15°) \quad , \quad \cos(15°) \quad \text{e} \quad \tan(15°) \quad .$$

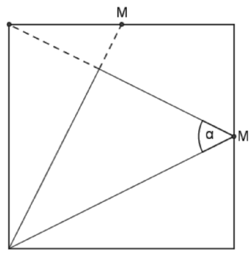
Indicazione: supponi che il lato del quadrato valga 1 unità, e ragiona sul triangolo evidenziato.

7.

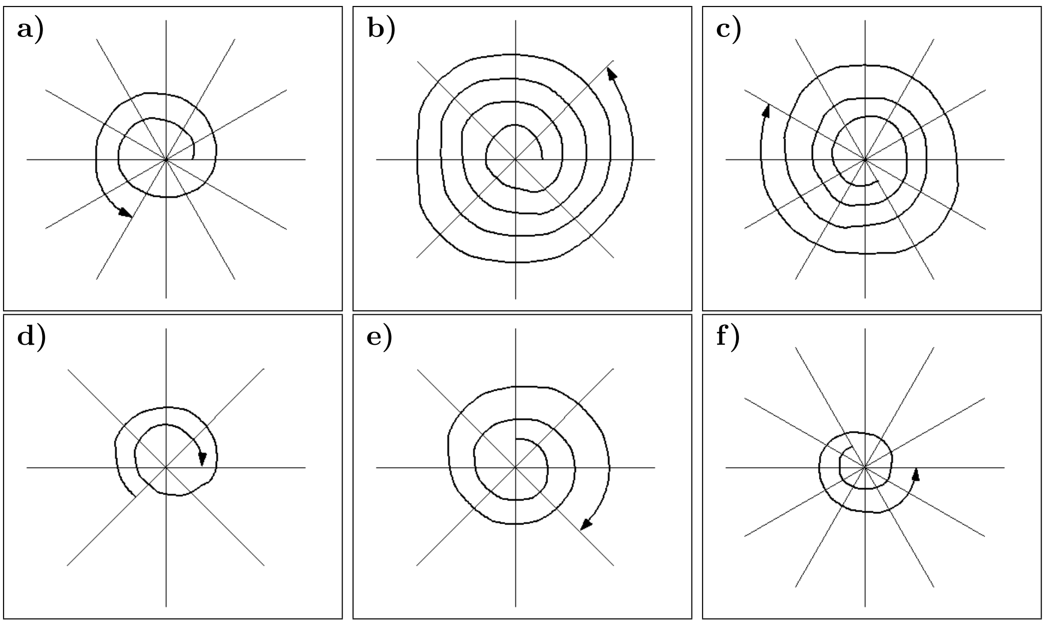
a) Nella figura a fianco è rappresentato un quadrato di lato l. M rappresenta il punto medio. Calcola l'ampiezza dell'angolo β.



b) Nella figura a fianco è rappresentato un quadrato di lato l. M rappresenta il punto medio. Calcola l'ampiezza dell'angolo α.

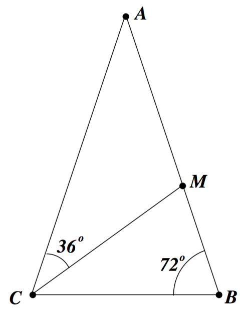


8. Determina l'ampiezza dell'angolo raffigurato, *in gradi ed in radianti*:



9. * Con riferimento alla figura qui accanto.

Un triangolo isoscele ABC la cui ampiezza degli angoli alla base misura $72°$ è detto *triangolo aureo*.



a) Mostra che *la bisettrice dell'angolo in C suddivide il lato AB in sezione aurea*, cioè che vale

$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MB|} = \phi \quad ,$$

con $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Determina i valori *esatti* di $\sin 18°$, $\cos 18°$, $\sin 72°$, $\cos 72°$.

(*Consiglio: considera i triangoli rettangoli ottenuti dimezzando il triangolo BCM*)

10. Trova il congruente in $[0; 360°]$, rispettivamente $[0; 2\pi]$ se l'angolo è espresso in radianti, dei seguenti angoli:

$$\alpha = 500°; \quad \beta = 10\pi; \quad \gamma = 1137°; \quad \delta = \frac{10}{4}\pi; \quad \varepsilon = -534°; \quad \phi = -\frac{17}{3}\pi$$

11. Rappresenta nella circonferenza trigonometrica i seguenti angoli:

$$\alpha = 150°; \qquad \beta = 270°; \qquad \gamma = \frac{5}{3}\pi;$$

e determinane le misure di seno e coseno senza usare la calcolatrice ma utilizzando i valori trigonometrici degli angoli notevoli.

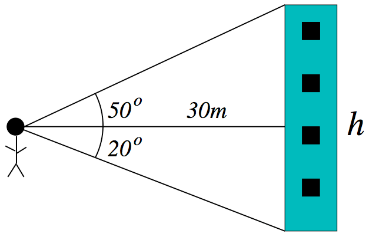
12. Calcola *senza usare la calcolatrice* (ma tenendo presente i valori delle funzioni trigonometriche per i cosiddetti "angoli notevoli" del primo quadrante):

a) $\sin(1500°)$; **b)** $\cos(18405°)$; **c)** $\tan(930°)$;

d) $\sin(3000°)$; **e)** $\cos(3195°)$; **f)** $\tan(1350°)$;

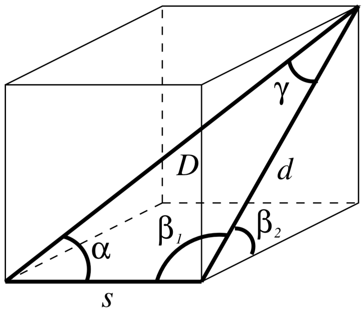
g) $\sin\left(\frac{61}{3}\pi\right)$; **h)** $\cos\left(\frac{27}{2}\pi\right)$; **i)** $\tan\left(-\frac{19}{3}\pi\right)$.

Soluzioni

1. 

Sia h l'altezza della torre. Dal disegno risulta chiaramente che vale

$$h = 30 \cdot \tan 50^\circ + 30 \cdot \tan 20^\circ \cong 46,67 \text{ m} \quad .$$

2. 

Siano s lo spigolo del cubo, d la diagonale della faccia e D la diagonale (spaziale) del cubo. Allora vale $d = s\sqrt{2}$ e $D = \sqrt{s^2 + d^2} = s\sqrt{3}$.

a) $\cos\alpha = \dfrac{s}{s\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,
e quindi $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 54^\circ 44' 8''$.

b) Dal disegno si nota che esistono 2 possibilità: $\beta_1 = 90^\circ$ oppure $\beta_2 = 45^\circ$.

c) $\gamma = 180^\circ - \beta_1 - \alpha = 90^\circ - \alpha \cong 35^\circ 15' 52''$.

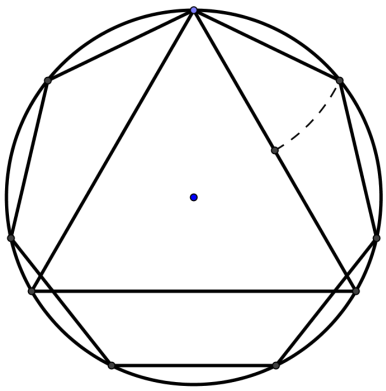
3. $\beta = 70.52^\circ$

4. Soluzione:
In funzione del raggio r del cerchio, i lati ℓ_T del triangolo e ℓ_E dell'ettagono misurano rispettivamente

$$\ell_T = 2r \cdot \sin\frac{2\pi}{6} = 2r \cdot \sin\frac{\pi}{3} \qquad \text{e} \qquad \ell_E = 2r \cdot \sin\frac{2\pi}{14} = 2r \cdot \sin\frac{\pi}{7} \quad ;$$

quindi vale

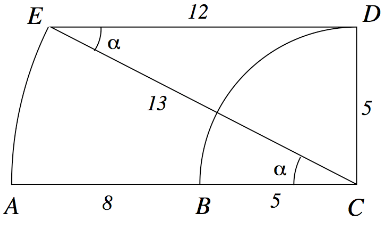
$$\ell_T \cong 2\ell_E \quad \Longleftrightarrow \quad 2r \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cong 2r \cdot \sin\frac{\pi}{7} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cong 2\sin\frac{\pi}{7} \quad .$$



L'errore percentuale vale

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin\frac{\pi}{7}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 100\% \cong 0,2\% \quad .$$

5. Dato che il triangolo CDE è rettangolo, otteniamo immediatamente $|DE| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.



Di conseguenza,

$$\alpha = \arctan\frac{5}{12} \cong 0,395^{\text{rad}} \quad .$$

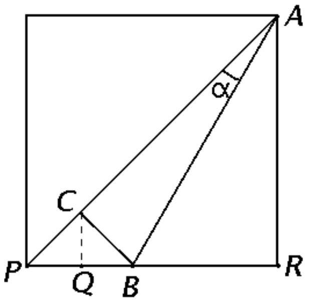
Calcoliamo l'area $\mathcal{A}_{ACDE}$ dell'intera figura $ACDE$: essa è ottenuta sommando l'area $\mathcal{A}_{ACE}$ del settore circolare ACE e l'area $\mathcal{A}_{CDE}$ del triangolo CDE:

$$\mathcal{A}_{ACDE} = \mathcal{A}_{ACE} + \mathcal{A}_{CDE} = \frac{1}{2}\alpha|AC|^2 + \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |DE| \cong \frac{1}{2} \cdot 0,395 \cdot 13^2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cong 63,36 \ (u^2).$$

Sottraendo da $\mathcal{A}_{ACDE}$ l'area $\mathcal{A}_{BCD}$ del settore circolare BCD otteniamo l'area cercata:

$$\mathcal{A}_{ABDE} = \mathcal{A}_{ACDE} - \mathcal{A}_{BCD} \cong 63,36 - \frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi \cong 43,72 \ (u^2).$$

6. Dal momento che $\widehat{PAR} = 45°$ e $\widehat{BAR} = 30°$, vale $\widehat{PAB} = 15°$ e



$$\sin(15°) = \frac{|BC|}{|AB|} \quad , \quad \cos(15°) = \frac{|AC|}{|AB|} \quad , \quad \tan(15°) = \frac{\sin(15°)}{\cos(15°)} \quad .$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che valga $|AR| = 1$, e calcoliamo le misure dei vari segmenti: innanzitutto,

$$|AB| = \frac{|AR|}{\cos 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad |BR| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .$$

Inoltre vale

$$|QB| = \frac{1}{2}(|PR| - |BR|) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad |BC| = \sqrt{2}\,|QB| = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \quad .$$

Di conseguenza,

$$\boxed{\sin(15°)} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad .$$

Inoltre, con

$$|AC| = |AP| - |PC| = |AP| - |BC| = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}$$

ricaviamo

$$\boxed{\cos(15°)} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad .$$

Infine,

$$\boxed{\tan(15°)} = \frac{\sin(15°)}{\cos(15°)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \boxed{2-\sqrt{3}} \quad .$$

7. a) $\beta = 36.87°$. b) $\alpha = 53.13°$

8. **a)** In gradi: $360° + 8 \cdot 30° = 600°$.

In radianti: $2\pi + 8 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{10}{3}\pi$ $\left(\text{oppure } \frac{\pi}{180°} \cdot 600° = \frac{10}{3}\pi\right)$.

b) In gradi: $4 \cdot 360° + 45° = 1485°$.

In radianti: $4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{33}{4}\pi$.

c) In gradi: $-3 \cdot 360° - 5 \cdot 30° = -1230°$.

In radianti: $-3 \cdot 2\pi - 5 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{41}{6}\pi$.

d) In gradi: $-360° - 5 \cdot 45° = -585°$.

In radianti: $-2\pi - 5 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{13}{4}\pi$.

e) In gradi: $-2 \cdot 360° - 3 \cdot 45° = -855°$.

In radianti: $-2 \cdot 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{19}{4}\pi$.

f) In gradi: $360° + 8 \cdot 30° = 600°$.

In radianti: $\frac{10}{3}\pi$ (vedi **a)**).

9. **a)** Notiamo innanzitutto che $|AM| = |MC| = |CB|$, dato che i triangoli AMC e MCD sono entrambi isosceli.

Quindi vale

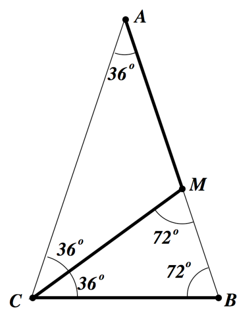
$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad ;$$

dal momento che ABC e CMB sono simili (si confrontino gli angoli!), possiamo inoltre scrivere

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|MB|} \quad .$$

Infine, ricordando nuovamente che $|AM| = |CM|$, concludiamo che

$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MB|} \quad .$$



Per ricavare il valore numerico di tale rapporto, indicato dalla lettera greca ϕ ("fi"), notiamo che vale

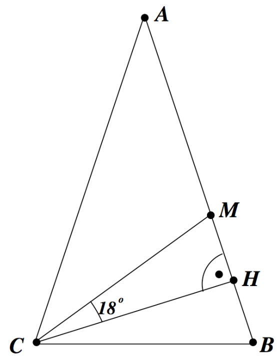
$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MB|} \iff \frac{|AM|+|MB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MB|} \iff 1+\frac{|MB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|MB|} \iff 1+\frac{1}{\phi} = \phi.$$

Il numero ϕ è quindi la soluzione positiva dell'equazione

$$1+\frac{1}{x} = x \iff x^2-x-1=0 \quad ,$$

vale a dire $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Sia H il punto medio di MB. Allora $\widehat{HCM} = 18°$ e il triangolo CHM è rettangolo.



Vale quindi

$$\sin 18° = \frac{|HM|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|MB|}{|AM|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\phi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad .$$

e

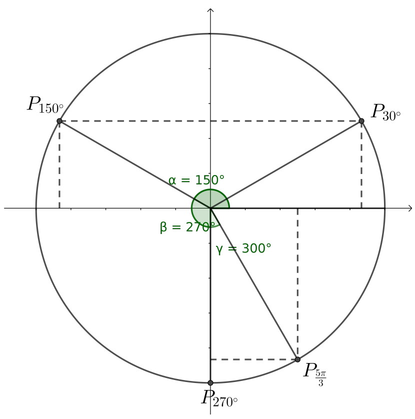
$$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+10}}{4} \quad .$$

Inoltre, $\sin 72° = \cos 18°$ e $\cos 72° = \sin 18°$.

10. Soluzione:

$\alpha = 500° = 140°$; $\beta = 10\pi = 0$; $\gamma = 1137° = 57°$; $\delta = \frac{10}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$; $\varepsilon = -534° = 186°$; $\phi = -\frac{17}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

11. Soluzione



$\sin(150°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$; $\cos(150°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin(270°) = -1$; $\cos(270°) = 0$.

$\sin\frac{5\pi}{3} = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{5\pi}{3} = \sin(30°) = -\frac{1}{2}$.

12. **a)** $\sin(1500°) = \sin(4\cdot 360° + 60°) = \sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

b) $\cos(18405°) = \cos(51\cdot 360° + 45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

c) $\tan(930°) = \tan(5\cdot 180° + 30°) = \tan(30°) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;

d) $\sin(3000°) = \sin(8\cdot 360° + 120°) = \sin(120°) = \sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

e) $\cos(3195°) = \cos(9\cdot 360° - 45°) = \cos(-45°) = \cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

f) $\tan(1350°) = \tan(7\cdot 180° + 90°) = \tan(90°)$ non esiste! ;

g) $\sin\left(\frac{61}{3}\pi\right) = \sin\left(10\cdot 2\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

h) $\cos\left(\frac{27}{2}\pi\right) = \cos\left(7\cdot 2\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$;

i) $\tan\left(-\frac{19}{3}\pi\right) = \tan\left(-6\cdot\pi - \frac{1}{3}\pi\right) = \tan\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = -\tan\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$.