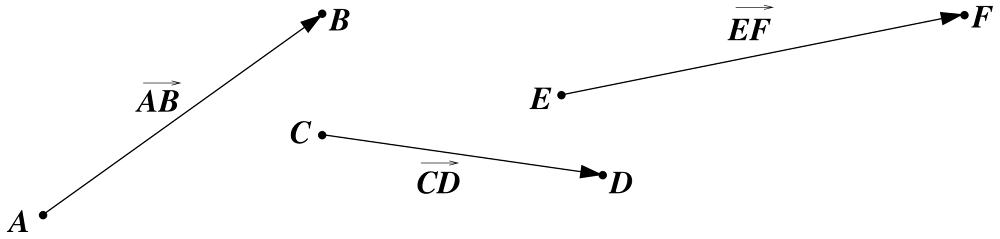
Geometria Vettoriale nello spazio

1 Vettori geometrici in V_3

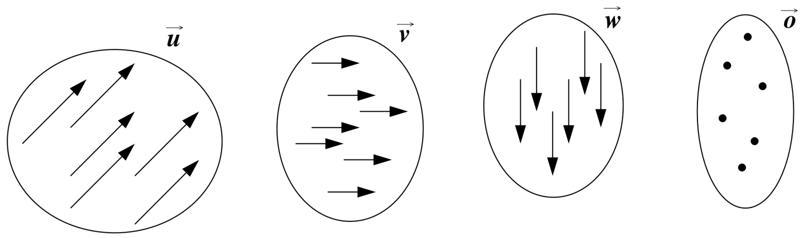
Dal momento che i concetti fondamentali sono già stati approfonditi nel piano, ci limitiamo a fornire un rapido elenco delle nozioni più importanti.

Una coppia ordinata (P, Q) di punti dello spazio determina un **segmento orientato** dello spazio, indicato con $\overrightarrow{PQ}$.



Di un segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ si definiscono il **modulo** $\|\overrightarrow{PQ}\|$ (la distanza tra i punti P e Q), la **direzione** (cioè la direzione della retta PQ) e il **senso** o **verso** ("dal punto P verso il punto Q"). Se $P = Q$, il segmento orientato $\overrightarrow{PP}$ è un **segmento nullo**.

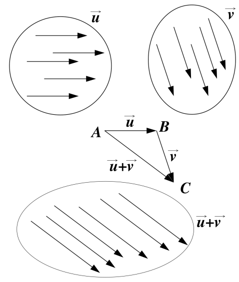
Due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono detti **equipollenti** se possiedono lo stesso modulo (sono cioè *isometrici*), la stessa direzione (sono *collineari*) e lo stesso verso (sono *equiorientati*). In questo caso, scriveremo semplicemente $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. L'insieme (o, meglio, la **classe**) di tutti i segmenti orientati equipollenti ad un dato segmento è un **vettore geometrico** dello spazio. Indichiamo i vettori geometrici con lettere minuscole ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ecc.) e con V_3 l'insieme dei vettori geometrici dello spazio.



La classe contenente tutti i segmenti nulli è detta **vettore nullo**, e si indica con $\vec{o}$. Un segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ nella classe $\vec{v}$ è un **rappresentante** del vettore geometrico $\vec{v}$. In questo caso, scriveremo semplicemente $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Il **modulo** di un vettore $\vec{v}$ è il modulo di un suo rappresentante (qualsiasi!); **direzione** e **verso** si definiscono in maniera analoga.

1.1 Addizione e moltiplicazione con scalari in V_3

Anche per quanto riguarda l'addizione e moltiplicazione con uno scalare i vettori in V_3 si comportano come quelli in V_2. Riassumiamo quindi le principiali caratteristiche qui di seguito:



L' **addizione vettoriale** di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si definisce tramite la "regola della poligonale": si scelgono innanzitutto due rappresentanti $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, e si definisce $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

La **moltiplicazione con scalare** $\lambda \cdot \vec{v}$ (o semplicemente $\lambda\vec{v}$) di un vettore $\vec{v}$ con un numero reale $\lambda \in \mathbb{R}$ (o "*moltiplicazione scalare*") si definisce come segue: $\lambda \cdot \vec{o} = \vec{o}$, $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$ e per $\vec{v} \neq \vec{o}$, $\lambda \neq 0$:

- (*modulo*) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$;
- (*direzione*) $\lambda\vec{v}$ ha la direzione di $\vec{v}$;
- (*verso*) $\begin{cases} \text{se } \lambda > 0,\ \lambda\vec{v} \text{ ha il verso di } \vec{v} \\ \text{se } \lambda < 0,\ \lambda\vec{v} \text{ ha verso opposto a } \vec{v} \end{cases}$

Per l'addizione valgono le seguenti proprietà:

(A1) È **associativa**: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$

(A2) esiste l'**elemento neutro**, il vettore nullo $\vec{o}$: $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a} \in V_3$;

(A3) esiste l'**elemento simmetrico**: $\forall\ \vec{a} \in V_3\ \exists\ (-\vec{a}) \in V_3$ con $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$
(se $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, allora si sceglie $(-\vec{a}) = \overrightarrow{QP}$);

(A4) è **commutativa**: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V_3$

Per la moltiplicazione valgono le seguenti proprietà:

(M1) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}\ \forall \vec{v} \in V_3$;

(M2) $(\lambda\mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu\vec{v})\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in V_3$;

(M3) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v} \in V_3$;

(M4) $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

Dal punto di vista algebrico, l'addizione in V_3 si comporta quindi come l'addizione in $\mathbb{R}$: si dice che $(V_3, +)$ ha la struttura di **gruppo abeliano** (o **gruppo commutativo**). L'esistenza dell'elemento simmetrico permette di definire anche la **sottrazione vettoriale**, tramite $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$.

Le proprietà **(A1)-(A4)** e **(M1)-(M4)** si riassumono dicendo che $(V_3, +, \cdot)$ è uno **spazio vettoriale** reale. Esse permettono in particolare di *calcolare* con i vettori senza dover ricorrere all'interpretazione geometrica.

2 Dipendenza e indipendenza lineare

Trattiamo un concetto apparentemente molto tecnico ma che avrà molte implicazioni pratiche, ovvero il concetto di dipendenza o indipendenza lineare.

Definizione: dipendenza lineare
I insieme di vettori non nulli $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sono detti **linearmente dipendenti** se è possibile esprimerne uno come combinazione lineare degli altri:

$$\vec{v}_n = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\vec{v}_{n-1}$$

Osservazione: se un insieme di vettori è linearmente dipendente allora è possibile esprimere qualsiasi vettore $\vec{v}_i$ dell'insieme, come combinazione lineare degli altri. Basterà isolare $\vec{v}_i$ dall'equazione indicata qui sopra nella definizione.

Ad esempio: considera i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ e $\vec{v}_4$, linearmente dipendenti poiché:

$$\vec{v}_4 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \frac{1}{3}\vec{v}_3$$

esprimi ora $\vec{v}_2$ come combinazione lineare degli altri:

....

....

Per capire meglio cosa implica la dipendenza e indipendenza lineare occorre trattarla a due e tre dimensioni.

2.1 Indipendenza lineare in V_2

- $\boxed{\text{2 vettori}}$: se due vettori (non nulli) $\vec{v}, \vec{w} \in V_2$ sono linearmente dipendenti, ciò significa che

$$\vec{v} = \lambda\vec{w}$$

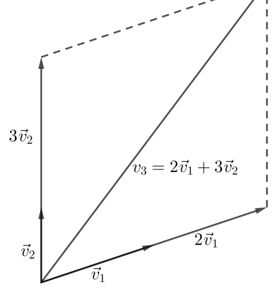
  ciò coincide con l'essere **collineari**.

  Osservazione: come abbiamo visto se il determinante fra i due vettori è nullo:

$$|\vec{v}\ \vec{w}| = v_1w_2 - v_2w_1 = 0$$

  allora i vettori sono collineari, cioè linearmente dipendenti!

- $\boxed{\text{3 vettori}}$ Come abbiamo visto due vettori non nulli e non collineari costituiscono una **base** di V_2 e possono dunque descrivere qualsiasi altro vettore nel piano. Ciò indica che **3 vettori non nulli sono sempre linearmente dipendenti nel piano**. Lo stesso si può affermare anche con 4 o più vettori nel piano: essi saranno sempre linearmente dipendenti.



2.2 Indipendenza lineare in V_3

Gli stessi risultati possono essere generalizzati facilmente nello spazio V_3.

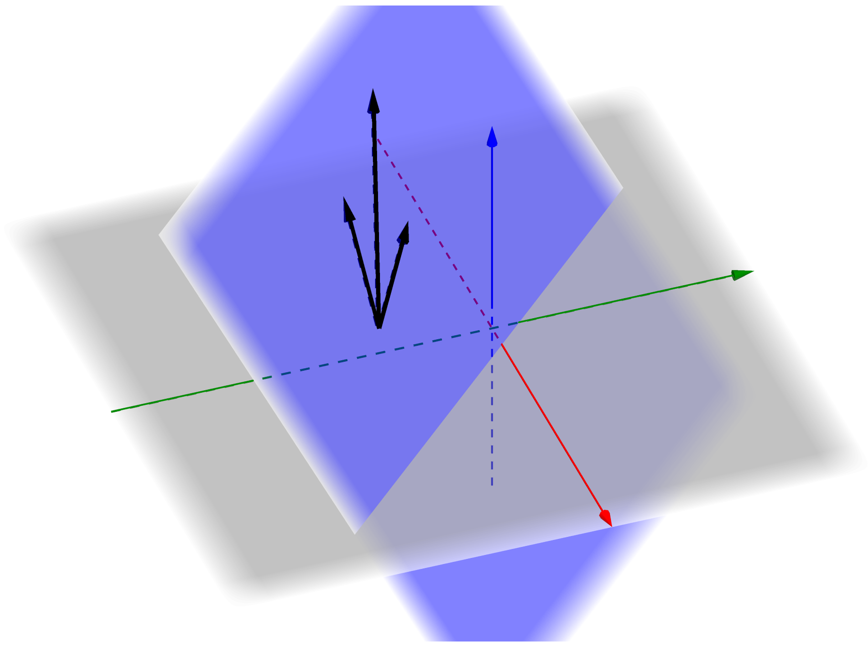
- $\boxed{\text{2 vettori}}$ Due vettori sono linearmente dipendenti se essi sono collineari: $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

  Osservazione: due vettori (non nulli) e non collineari definiscono il piano: ogni terzo vettore appartenente allo stesso piano può essere descritto dai primi due.

- $\boxed{\text{3 vettori}}$ Se tre vettori sono linearmente dipendenti, allora uno dei tre può essere definito come combinazione lineare degli altri due:

  $$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2 v_2$$

  ciò indica che essi sono **complanari**, cioè appartenenti allo stesso piano.



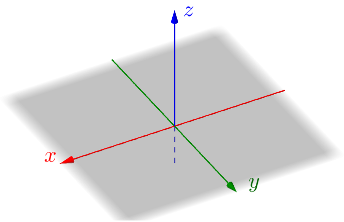
- $\boxed{\text{4 vettori}}$ Come è facilmente intuibile tre vettori nello spazio ne costituiscono una base e possono definire qualsiasi altro vettore come combinazione lineare:

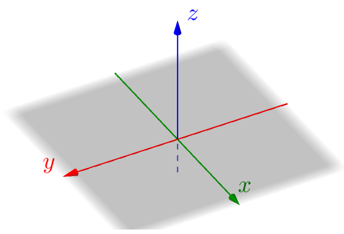
  Siano $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ tre vettori non complanari di V_3. Allora il quarto vettore $\vec{v} \in V_3$ è esprimibile come combinazione lineare

  $$\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} \quad \text{con} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

3 Vettori aritmetici dello spazio

Anche nello spazio possiamo scegliere una base standard così da poter identificare un vettore con le sue componenti x, y, z ottenendo dunque un vettore **aritmetico**.
Ovviamente questa base standard sarà composta da vettori unitari e perpendicolari tra loro. È inoltre abbastanza intuitivo capire come la componente z sarà quella che normalmente indichiamo come "altezza" (o componente verticale). Bisogna invece trovare una convenzione per chiarire sul piano xy (piano orizzontale), quale sia la direzione x e quale la y.

a) 

OPPURE b) 

?

3.1 Base ortonormata

Definizione: Base ortonormata
Una base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ di V_3 è detta **base ortonormata orientata positivamente** se vale quanto segue:

(i) $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$;

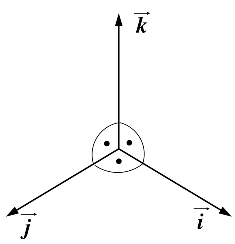
(ii) $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$;

(iii) la terna ordinata $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forma un *sistema destro* (o *terna positiva*) di vettori, cioè l'angolo convesso e orientato tra $\vec{i}$ e $\vec{j}$ è positivo se osservato dal semispazio indicato da $\vec{k}$.

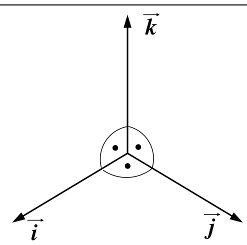
La condizione **(iii)** può essere sostituita dalla seguente, detta *regola della mano destra*:

(iii)' la terna ordinata $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forma un *sistema destro* (o *terna positiva*) di vettori, possiamo cioè sovrapporre ai vettori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ rispettivamente il pollice, l'indice e il medio della mano destra.

Illustrazione:



sistema sinistro
(terna negativa)

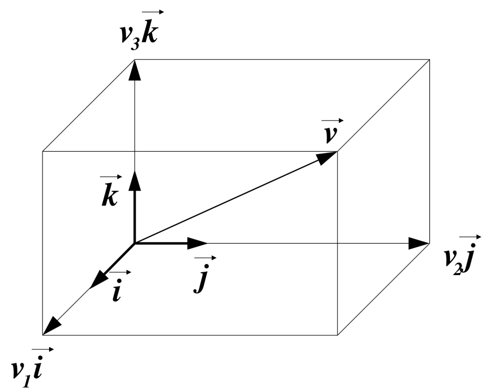


sistema destro
(terna positiva)

Domanda: sfruttando la base standard introdotta qui sopra, quale dei due sistemi di riferimento illustrati qui sopra è corretto? ....

3.2 Vettori aritmetici

Sia quindi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormata di V_3. Ogni vettore $\vec{v} \in V_3$ si lascia scomporre *in un unico modo* come combinazione lineare di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:



$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}$$

Il vettore $\vec{v}$ è determinato in maniera univoca dai numeri reali v_1, v_2, v_3. In particolare, la"legge"

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k} \quad \longmapsto \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

permette di identificare l'insieme V_3 dei vettori geometrici con l'insieme dei **vettori aritmetici** dello spazio (che indichiamo con $\mathbb{R}^3$):

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad .$$

È facile mostrare che l'insieme dei vettori aritmetici munito dell'*addizione vettoriale*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

e della *moltiplicazione* con un numero reale

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$$

possiede una struttura di spazio vettoriale, compatibile con le corrispondenti operazioni tra i vettori geometrici.

ESEMPIO: Dati i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ calcola il vettore

$\vec{x} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3.3 Applicazioni

a) **Condizione di collinearità** tra 2 vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ con} \\ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ con} \\ \begin{cases} w_1 = \lambda v_1 \\ w_2 = \lambda v_2 \\ w_3 = \lambda v_3 \end{cases} \end{array}$$

Esercizio: Verifica la collinearità dei vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

b) **Condizione di complanarità** tra 3 vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{c} \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \\ \text{sono} \\ \text{complanari} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ con} \\ \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ con} \\ \begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 = w_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 = w_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 = w_3 \end{cases} \end{array}$$

I tre vettori sono quindi complanari (cioè linearmente dipendenti) se e soltanto se il sistema di *3 equazioni*

$$\begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 = w_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 = w_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 = w_3 \end{cases}$$

nelle *2 incognite* λ, μ possiede (almeno) una soluzione[1].

[1] più tardi impareremo a studiare la dipendenza lineare di tre vettori in modo più efficiente grazie al *determinante*

ESERCIZIO: I vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *sono complanari?*

c) Scomposizione di un vettore $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di tre vettori (non complanari) $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$: dobbiamo ricavare tre numeri reali λ, μ, ν tali che

$$\vec{a} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} \quad ,$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 = a_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 = a_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 = a_3 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite λ, μ, ν; se i vettori $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ formano una base di V_3 esiste sempre una e una sola soluzione.

ESERCIZIO: *scrivi il vettore* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 19 \end{pmatrix}$ *come combinazione lineare dei vettori* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *dell'esempio in* **b**).

Soluzione: $\vec{a} = 3\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w}$

4 Il prodotto scalare nello spazio

Definizione: Prodotto scalare
Siano $\vec{v}$, $\vec{w}$ due vettori geometrici di V_3; il loro **prodotto scalare** $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è il numero reale definito come segue:

- se $\vec{v} = \vec{o}$ oppure $\vec{w} = \vec{o}$, allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$;
- se $\vec{v} \neq \vec{o}$ e $\vec{w} \neq \vec{o}$, allora si definisce

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha \quad ,$$

dove α è l'angolo (solitamente positivo e convesso) tra due rappresentanti di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ uscenti da uno stesso punto.

Analogamente a quanto visto in V_2, il prodotto scalare di due vettori aritmetici possiede una semplice espressione:

Teorema: Prodotto scalare di 2 vettori aritmetici

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \quad .$$

4.1 Applicazioni

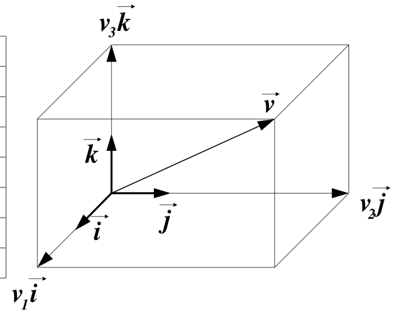
a) **Modulo di un vettore aritmetico**: dal momento che $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \underbrace{\cos 0°}_{1} = \|\vec{v}\|^2$,

$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad .$$

ESEMPIO:, Calcola il modulo del vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$:

$\|\vec{v}\| =$ ....

Osservazione: È possibile derivare questa formula per il calcolo del modulo di un vettore in V_3 anche utilizzando il teorema di Pitagora: si tratta di calcolare la lunghezza della diagonale interna di un parallelogrammo avente lati lunghi v_1, v_2, v_3.



b) Angolo tra 2 vettori aritmetici: dalla definizione ricaviamo immediatamente

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} = \frac{v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}} \quad .$$

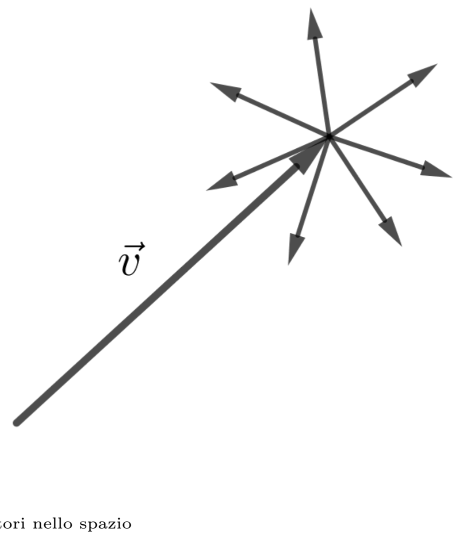
ESERCIZIO: calcola l'angolo tra i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$.

c) Condizione di ortogonalità: se due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali, allora vale $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\underbrace{\cos 90^\circ}_{0}$, cioè

$$\vec{v}\perp\vec{w} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=0 \quad .$$

Ad **esempio**, è facile mostrare che $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}$:

Osservazione: a differenza di quanto avviene a due dimensioni, in V_3 non è possibile trovare una direzione ortogonale univoca a un vettore dato. Vi sono infatti infinite direzioni ortogonali che si dispongono come dei "raggi di un ombrello".



5 Il prodotto vettoriale

Introduciamo una nuova operazione tra vettori di V_3, fondamentale per le applicazioni geometriche.

Definizione Prodotto vettoriale Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori in V_3. Il loro **prodotto vettoriale** $\vec{v} \times \vec{w}$ (leggi "$\vec{v}$ cross $\vec{w}$") è il *vettore* in V_3 che soddisfa le seguenti condizioni:

- se $\vec{v} = \vec{o}$ oppure $\vec{w} = \vec{o}$, allora $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{o}$;
- siano $\vec{v} \neq \vec{o}$ e $\vec{w} \neq \vec{o}$; allora

  1) (*modulo*) $\boxed{\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin \alpha|}$ ove α è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

  2) (*direzione*) $\boxed{\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v} \text{ e } \vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}}$;

  3) (*verso*) la terna ordinata $\boxed{(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}) \text{ è una terna positiva}}$.

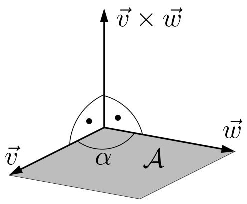
In altre parole:

1) il modulo di $\vec{v} \times \vec{w}$ è uguale all'area di un parallelogrammo avente lati equipollenti a $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

2) $\vec{v} \times \vec{w}$ è perpendicolare a un piano parallelo a due rappresentanti di $\vec{v}$ e $\vec{w}$;

3) i vettori $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ (considerati in questo ordine) soddisfano la "regola della mano destra": $\vec{v} \leftrightarrow$ pollice, $\vec{w} \leftrightarrow$ indice, $\vec{v} \times \vec{w} \leftrightarrow$ medio (della mano destra!).

Illustrazione:



1) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin \alpha| = \mathcal{A}$

2) $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

3) $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ è una terna positiva.

ESERCIZIO: Considerando come spazio vettoriale la nostra classe (per semplicità immagina che si tratti di un cubo) e i vettori:

- $\vec{a}$ ha modulo $\|\vec{a}\| = 3$, è parallelo al pavimento e alla lavagna e punta verso le finestre.
- $\vec{b}$ ha modulo $\|\vec{b}\| = 2$, è perpendicolare alla lavagna e punta verso il fondo dell'aula.

Descrivi i vettori $\vec{a} \times \vec{b}$ e $\vec{b} \times \vec{a}$.

5.1 Proprietà del prodotto vettoriale

(i) $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}\ \ \forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ (il prodotto vettoriale è cioè *anticommutativo*).

Dimostrazione: ovvia.

(ii) Due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono collineari $\iff\ \vec{v} \times \vec{w} = \vec{o}$.

Dimostrazione:

(iii) Per due vettori non nulli e ortogonali $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vale

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \quad .$$

(iv) Per due vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:

$$\lambda(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \times (\lambda\vec{w}) = (\lambda\vec{v}) \times \vec{w}$$

(v) Per tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vale:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \qquad \text{e} \qquad (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

Per il calcolo del prodotto vettoriale di due vettori aritmetici vale il

Teorema: Prodotto vettoriale di 2 vettori aritmetici
Siano $\vec{v}, \vec{w} \in V_3$; allora

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \quad .$$

Esempio calcola:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Osservazione: questa formula di calcolo risulta apparentemente complessa. Prima di dimostrarla possiamo però confermare che quanto ottenuto nell'esempio qui sopra è compatibile con la definizione data a inizio sezione, vale a dire che vale:

1) *modulo*: $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\sin\alpha|$

3) *direzione*: $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{w}$

3) *verso*: la terna ordinata $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ è una terna positiva: tralasciato.

Dimostrazione:
Innanzitutto possiamo notare che per i vettori della base ortonormata $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vale:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

e inoltre:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \ldots\ldots \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \ldots\ldots \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \ldots\ldots$$

ovviamente se l'ordine dei vettori viene invertito otteniamo un vettore di verso opposto.
Ricordando che

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3 \qquad \vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3$$

e che vale la proprietà "distributiva" otteniamo:

Calcolo con il determinante: utilizzando l'abbreviazione $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (*determinante* di ordine 2), è possibile riformulare il calcolo del prodotto vettoriale in un modo più semplice da ricordare:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \\ - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \\ + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} .$$

In particolare per il calcolo di ogni componente viene "esclusa" dal determinante la stessa componente dei vettori di partenza: per la x viene "tolta" la prima riga dai due vettori, per la y la seconda e per la z la terza. Inoltre bisogna ricordarsi di invertire il segno nella componente y.

ESERCIZIO: *siano* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Calcola*

$$\vec{u} \times \vec{v} \quad , \quad \vec{v} \times \vec{u} \quad , \quad \vec{v} \times \vec{w} \quad , \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \quad , \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad .$$

Osservazione: come mostra l'esempio, in generale vale $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Il prodotto vettoriale **non** soddisfa la proprietà associativa; non ha quindi senso scrivere semplicemente $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$.

5.2 Applicazioni del prodotto vettoriale

a) **Direzione ortogonale** a due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

Risulta immediatamente chiaro che qualsiasi vettore collineare al vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ soddisfa questa condizione.

Esercizio: se $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determina 3 vettori ortogonali a $\vec{v}$ e $\vec{w}$

b) **Area $\mathcal{A}(\vec{v}, \vec{w})$ del parallelogrammo definito da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.**

È chiaro che vale, per definizione, $\mathcal{A}(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} \times \vec{w}\|$.

Esercizio: siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come sopra; calcola l'area del parallelogrammo definito da $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

6 Il prodotto misto

Infine introduciamo un terzo tipo di prodotto tra due vettori, che combina il prodotto scalare e quello vettoriale.

Definizione: Prodotto misto
Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori di V_3. Il loro **prodotto misto** $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ è il *numero reale*

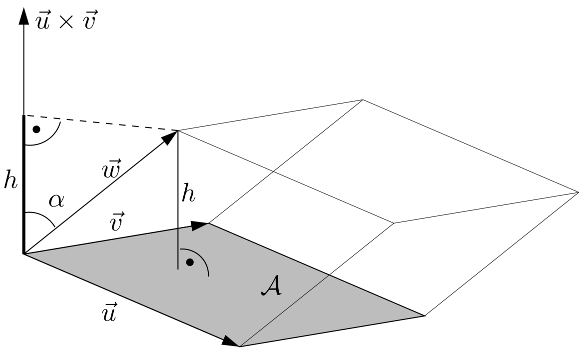
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad .$$

Esempio: Calcola il prodotto misto $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$:

Interpretazione geometrica: innanzitutto notiamo che

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha$$

dove α è l'angolo convesso e positivo tra $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{w}$.



Nota che $\|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha = \pm h$, dove h è l'altezza del parallelepipedo avente $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come spigoli, e $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{w})$ è l'area del parallelogrammo avente per lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nota inoltre che vale $\cos\alpha > 0$ se e soltanto se α è acuto, cioè se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è una terna *positiva* (soddisfa cioè la "regola della mano destra").

Sia $\mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ il volume del parallelepipedo avente $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come spigoli; otteniamo

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha = \pm\mathcal{A} \cdot \ h \quad .$$

Quindi

- $\big| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \big| = \mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è il volume del parallelepipedo;
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0 \iff (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è una terna positiva.

In altre parole: $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \pm\mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ è il *volume orientato* di un parallelepipedo determinato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

6.1 Proprietà del prodotto misto

(i) Scambiando due vettori di una terna:

$$\left[\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right] = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In generale scambiando due vettori nel prodotto misto si ottiene lo stesso risultato ma con segno invertito. Questo perché cambia l'orientamento della terna ma non il parallelepipedo che viene definito e dunque nemmeno il suo volume.

Permutando ciclicamente i vettori di una terna, non cambiano né il volume, né l'orientamento. Ovvero:

(ii) Vale anche $\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \quad \text{ovvero} \quad (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}$

Dimostrazione:

(iii) $\boxed{\text{Tre vettori } \vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ sono linearmente dipendenti (complanari)} \iff [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0.}$

Dimostrazione:

(iv) $\boxed{\text{Se due dei Tre vettori } \vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ sono collineari fra loro, allora} \Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0.}$

Dimostrazione:

6.2 Prodotto misto di vettori aritmetici

Per il **prodotto misto di tre vettori aritmetici** $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ si utilizza la notazione

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad .$$

Tale numero è anche detto **determinante** dei vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (si parla di *determinante di ordine 3*). Invece di $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ si scrive anche $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Per il calcolo del determinante, sfruttiamo ad es. l'osservazione **(ii)**:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \\ - \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \\ + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = u_1 \cdot \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \cdot \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

(si tratta dello "sviluppo di Laplace del determinante rispetto alla prima colonna").

ESERCIZIO: *calcola* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ *con* $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

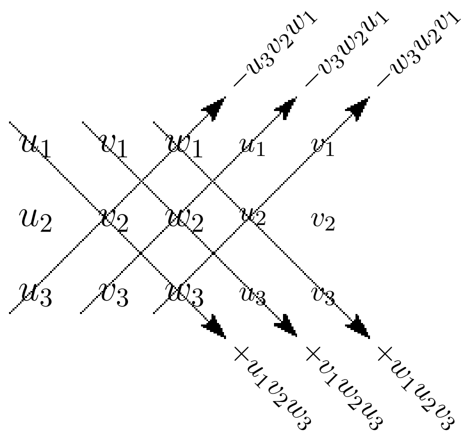
Un'altra formula utile per il calcolo di un determinante *di ordine 3* è la seguente:

Teorema: Regola di Sarrus

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3 - u_3v_2w_1 - v_3w_2u_1 - w_3u_2v_1 \quad .$$

Dimostrazione: semplice verifica.

Schema mnemonico:



Esercizio: calcoliamo di nuovo il determinante dell'es. precedente.

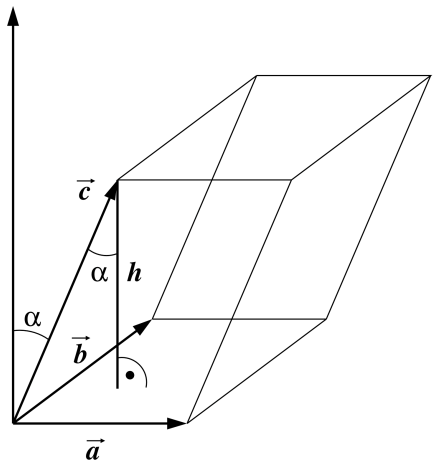
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} \qquad = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

6.3 Applicazioni del prodotto misto:

a) Volume $\mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ del parallelepipedo avente $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ quali spigoli: come abbiamo già notato,

$$\boxed{\mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \big| [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \big|}$$

b) Altezza h del parallelepipedo avente $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ quali spigoli (relativa alla faccia $\vec{u}$, $\vec{v}$):



Dal momento che vale

$$\mathcal{V} = \big|\,[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,\big| = \underbrace{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}_{\mathcal{A}_{base}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\|\cdot|\cos\alpha|}_{h} \quad ,$$

otteniamo

$$\boxed{h = \frac{\big|\,[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,\big|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}}$$

c) dall'osservazione **(iii)** a pagina 17 segue che il determinante permette una verifica immediata della dipendenza (o dell'indipendenza) lineare:

Teorema: Criterio per la dipendenza lineare

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} \text{ sono linearmente dipendenti } \iff \begin{vmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\u_2 & v_2 & w_2\\u_3 & v_3 & w_3\end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Esercizio: Per $k \in \mathbb{R}$ Considera i vettori: $\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\5\\k\end{pmatrix}$.

Per quali k questi tre vettori sono dipendenti linearmente e quindi complanari?

6.4 Riassunto

Possiamo riassumere in modo schematico le importanti proprietà degli strumenti sviluppati fin'ora. In due e tre dimensioni.

1. $\boxed{\text{Prodotto scalare } \vec{v} \cdot \vec{w}}$ il cui risultato è un ....

- **Definizione:** ....
- **Vettori aritmetici:** ....
- **Condizione di ortogonalità:** ....
- **Angolo tra vettori:** ....

2. $\boxed{\text{Prodotto vettoriale } \vec{v} \times \vec{w}}$ il cui risultato è un .... ed è definito solo in ...

- **Definizione:** ....
  ....
- **Vettori aritmetici:** ....
- **Interpretazione geometrica:** ....
- **Condizione di collinearità:** ....
- **Direzione ortogonale:** ....

3. $\boxed{\text{Determinante di ordine 2}}$ definito solamente in .... e tra .... vettori.

- **Definizione:** ....
- **Interpretazione geometrica:** ....
- **Condizione di dipendenza lineare:** ....

4. $\boxed{\text{Determinante di ordine 3 (prodotto misto)}}$ definito solamente in . e tra . vettori.

- **Definizione:** ....
- **Interpretazione geometrica:** ....
- **Condizione di dipendenza lineare:** ....

7 La regola di Cramer

Consideriamo un sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} .$$

e riscriviamolo nella *forma vettoriale* $\quad x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d} \quad$, con

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad .$$

Sia

$$D = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad .$$

Per quanto visto nei paragrafi precedenti, sappiamo già che il sistema possiede un'unica soluzione per ogni scelta di $\vec{d}$ se e soltanto se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ è una base di V_3, e che ciò è equivalente a $D \neq 0$. In questo caso, grazie al determinante è possibile esprimere x, y e z per mezzo di formule nei coefficienti del sistema.

Teorema: La regola di Cramer
Se vale

$$D = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad ,$$

il sistema possiede l'unica soluzione (x, y, z), con

$$x = \frac{D_1}{D} \quad , \quad y = \frac{D_2}{D} \quad , \quad z = \frac{D_3}{D} \quad ,$$

dove

$$D_1 = [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \; D_2 = [\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} , \; D_3 = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} .$$

Dimostrazione: tralasciata.

Osservazione: se $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ (cioè se il sistema è *omogeneo*) e $D \neq 0$, vale $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ e l'unica soluzione del sistema è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, in accordo con la definizione di *indipendenza lineare* ("l'unico modo di esprimere $\vec{o}$ come combinazione lineare di $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ è per mezzo di coefficienti nulli").

ESERCIZIO: risolviamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = -14 \\ 3x + 2y - 3z = -9 \\ 2x - y + 4z = 11 \end{cases}$$

Risultato: $(-1; 3; 4)$