Serie 21 - Prodotti nello spazio e le loro applicazioni

1. **a)** Dati $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

calcola $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}]$, $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{d}]$, $[\vec{b}\,,\,\vec{c}\,,\,\vec{d}]$, $[\vec{c}\,,\,\vec{d}\,,\,\vec{a}]$, $[\vec{a}\,,\,\vec{a}\,,\,\vec{d}]$.

b) Calcola $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}+\vec{d}]$ e $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}] + [\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{d}]$. È un caso che il risultato coincida?

2. Stabilisci i 3 vettori di V_3 dati sono linearmente dipendenti, sfruttando stavolta le proprietà del prodotto misto (questo esercizio era già stato affrontato nella serie 20).

a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$

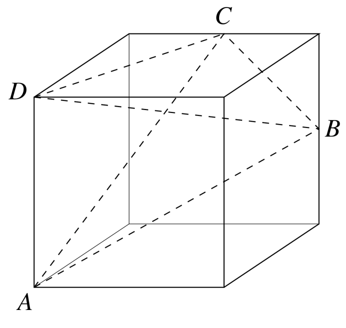
b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. B e C sono i punti medi degli spigoli del cubo raffigurato a lato.

Supponendo che lo spigolo del cubo misuri 2 unità, determina il volume del tetraedro $ABCD$.



4. Scrivi il vettore $\vec{d}$ come combinazione lineare di $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (esercizio già affrontato nella serie 20) utilizzando la regola di Cramer:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Calcola l'area, il perimetro e l'ampiezza degli angoli interni del triangolo ABC, con

a) $A(7,-3,1)$, $B(2,0,5)$, $C(9,-3,1)$;

b) $A(5,2,-8)$, $B(7,8,13)$, $C(11,8,11)$.

c) Per entrambi i triangoli, determina un vettore ortogonale al piano in cui giace il triangolo.

6. Calcola il volume e l'altezza relativa alla faccia ABC del tetraedro $ABCD$, con

a) $A(5,-2,1)$, $B(7,4,3)$, $C(-6,1,0)$, $D(3,1,4)$.

b) $A(0,4,0)$, $B(21,7,0)$, $C(-5,0,13)$, $D(7,2,-3)$.

7. Dimostrare che per qualsiasi $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ vale

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z}$$

e dedurne che il prodotto vettoriale non è associativo.

8. Dimostra la *formula di Dodgson*[1] per il calcolo di un determinante di ordine 3 (il cosiddetto *calcolo per condensazione*):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_2b_3 - a_3b_2 & b_2c_3 - b_3c_2 \end{vmatrix}}{b_2} \qquad (\text{se } b_2 \neq 0).$$

Come si può procedere se $b_2 = 0$?

[1] il reverendo Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), meglio noto con lo pseudonimo di Lewis Carroll, fu scrittore, matematico e pioniere della fotografia; le sue opere più conosciute sono i romanzi *Alice nel paese delle meraviglie* e *Attraverso lo specchio*, ma egli fornì contributi originali anche nei campi dell'algebra e della logica

Soluzioni

1. **a)** • $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 0\cdot(-1)+2\cdot 2\cdot 5+4\cdot 3\cdot(-3)-5\cdot 0\cdot 4-(-3)\cdot 2\cdot(-1)-(-1)\cdot 3\cdot 2 =$
$= 20-36-6+6 = -16$

• Inoltre $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{d}] = -62$, $[\vec{b}\,,\,\vec{c}\,,\,\vec{d}] = 68$, $[\vec{c}\,,\,\vec{d}\,,\,\vec{a}] = -150$, $[\vec{a}\,,\,\vec{a}\,,\,\vec{d}] = 0$ (chiaro, dato che la terna $\left\{\vec{a}, \vec{a}, \vec{d}\right\}$ è linearmente dipendente).

b) $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}+\vec{d}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -78;$

$[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}] + [\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{d}] = (-16) + (-62) = -78.$

Non è un caso che i due risultati coincidano: difatti vale,come abbiamo mostrato,

$$[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}+\vec{d}] = [\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}] + [\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{d}] \quad .$$

2. Ricorda: tre vettori $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ sono linearmente indipendenti se e soltanto se $[\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}] = 0$.

a) Sviluppando rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}}_{6} - 2\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}}_{-5} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}_{-4} = -6+10-4 = 0$$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente dipendenti.

b) Con la Regola di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 0+3\cdot 6\cdot 6+2\cdot(-4)\cdot 3-6\cdot 1\cdot 2-3\cdot 6\cdot 2-0\cdot(-4)\cdot 3 = 108-24-12-36 = 36 \neq 0$$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti.

c) Con la Regola di Dodgson:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \frac{45}{3} = 15 \neq 0$$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti.

d) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ i vettori sono linearmente indipendenti.

3. Rispetto ad una base ortonormata opportuna possiamo ad esempio scrivere

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Il volume del tetraedro $ABCD$ misura quindi

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}(8-4) = \frac{2}{3} \quad \text{unità}^3 \quad .$$

4. **a)** Occorre ricavare tre numeri reali λ, μ e ν tali che $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{d}$. Ciò conduce a

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + 2\mu + 2\nu = -8 \\ -\lambda + \mu - 2\nu = -13 \\ \lambda - \mu + \nu = 12 \end{cases}$$

Calcoliamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad , \quad D_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 2 \\ -13 & 1 & -2 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 \\ -1 & -13 & -2 \\ 1 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 21 \quad , \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -8 \\ -1 & 1 & -13 \\ 1 & -1 & 12 \end{vmatrix} = -3 \quad .$$

La soluzione è data da $\lambda = \dfrac{D_1}{D} = 4$, $\mu = \dfrac{D_2}{D} = -7$, $\nu = \dfrac{D_3}{D} = 1$, e quindi vale $\vec{d} = 4\vec{a} - 7\vec{b} + \vec{c}$.

b) Per il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4\lambda - 2\mu + \nu = 2 \\ -2\lambda + 3\mu + \nu = -12 \\ 0\lambda + 7\mu - 4\nu = -20 \end{cases}$$

vale $D = -74$, $D_1 = 74$, $D_2 = 296$, $D_3 = 148$ e quindi $\vec{d} = -\vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

c) Analogo: $D = 81$, $D_1 = 243$, $D_2 = -81$, $D_3 = 0$ e quindi $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

5. **a)** Calcoliamo innanzitutto $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$,

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4+0+0} = 2$, $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{49+9+16} = \sqrt{74}$.

- Perimetro: $\mathcal{P}_{ABC} = |AC| + |AB| + |BC| = 2 + \sqrt{50} + \sqrt{74}$.
- Angoli: $\alpha = \widehat{BAC} = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{-10}{2\sqrt{50}}\right) = \arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ$;

  $\beta = \widehat{ABC} = \arccos\left(\dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|}\right) = \arccos\left(\dfrac{60}{\sqrt{50 \cdot 74}}\right) \cong 9,46^\circ$;

  $\gamma = \widehat{BCA} = 180^\circ - \alpha - \beta = 45^\circ - \beta \cong 35,54^\circ$.
- Area: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{64+36} = 5$,

  oppure direttamente $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}|AB|\,|AC| \sin\alpha = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{50} \cdot \cancel{2} \cdot \sin(135^\circ) = \sqrt{50} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5$.

b) Analogo; calcoliamo soltanto l'area:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 88 \\ -24 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2} \cdot 92 = 46 \quad .$$

c) Li abbiamo già ricavati sopra: sono i vettori $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

6. **a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Il volume misura quindi $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & -11 & -2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{matrix}\right\| = \dfrac{1}{6} \cdot 180 = 30$ unità^3.

Inoltre, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ 72 \end{pmatrix}$, $\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{5728}$ e per l'altezza h vale

$$h = \left|\frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|}\right| = \frac{180}{\sqrt{5728}} \cong 2,38 \quad \text{unità}.$$

b) Analogo: $\mathcal{V} = \dfrac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 21 & -5 & 7 \\ 3 & -4 & -2 \\ 0 & 13 & -3 \end{matrix} \right\| = \dfrac{1026}{6} = 171$ unità^3 , $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 39 \\ -273 \\ -69 \end{pmatrix}$,

$\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{80811}$, $h = \left| \dfrac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]}{\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|} \right| = \dfrac{1026}{\sqrt{80811}} \cong 3,6$ unità.

7. Per la dimostrazione basta utilizzare le componenti e sviluppare la parte sinistra della formula:

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ -(y_1 z_3 - y_3 z_1) \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} = \cdots$$

... e la parte destra della formula:

$$(\vec{x} \cdot \vec{z}) \cdot \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \cdot \vec{z} = (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \cdots$$

In entrambi i casi otterremo lo stesso risultato:

$$\begin{pmatrix} -x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_2 y_1 z_2 + x_3 y_1 z_3 \\ x_1 y_2 z_1 - x_1 y_1 z_2 - x_3 y_3 z_2 + x_3 y_2 z_3 \\ x_1 y_3 z_1 + x_2 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 \end{pmatrix}$$

Calcolando poi: $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ si otterrà invece un risultato diverso: ciò indica che il prodotto vettoriale non è associativo.

8. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 & b_2 c_3 - b_3 c_2 \end{vmatrix}}{b_2} &= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (b_2 c_3 - b_3 c_2) - (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot (b_1 c_2 - b_2 c_1)}{b_2} \\
&= \frac{a_1 b_2^2 c_3 - a_1 b_2 b_3 c_2 - a_2 b_1 b_2 c_3 \cancel{+ a_2 b_1 b_3 c_2} \cancel{- a_2 b_3 b_1 c_2} + a_2 b_3 b_2 c_1 + a_3 b_2 b_1 c_2 - a_3 b_2^2 c_1}{b_2} \\
&= \frac{\cancel{b_2}(a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1)}{\cancel{b_2}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Se $b_2 = a_2 = c_2 = 0$, il determinante è nullo. Se, invece, $a_2 \neq 0$ oppure $c_2 \neq 0$ possiamo sfruttare la proprietà **(i)** per permutare ciclicamente le colonne.