Serie 2 - Gradi e Radianti

O studianti, studiate le matematiche, e non edificate sanza fondamenti.

Leonardo da Vinci

1. Esegui le seguenti operazioni:

(i) Esprimere in gradi (DEG) l'angolo $\alpha = 28°17'39''$.

(ii) Esprimere in gradi sessagesimali ($°,',''$) l'angolo $\beta = 17°,39$.

(iii) Effettuare le seguenti operazioni

a) $25°40'52'' + 30°27'28'' + 15°20''$,

b) $36°36'' + 50'40'' + 72°18' + 20°50'44''$,

2. Completa la seguente tabella (senza approssimazioni)

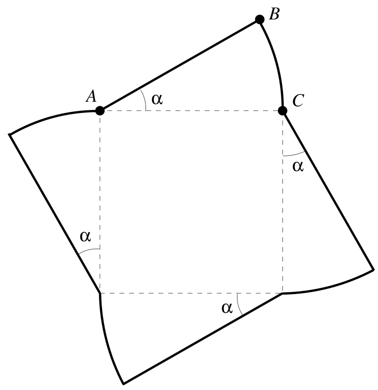
$\alpha°$	$9°$		$39°$	$135°$		$330°$	
α^{rad}		$\frac{\pi}{10}$			$\frac{5}{3}\pi$		2π

3. Il miglio marino (o *miglio nautico internazionale*) corrisponde alla lunghezza dell'arco terrestre corrispondente all'angolo di $1'$ (sul parallelo medio di $44°12'$, per la precisione). Calcola il suo valore in metri, utilizzando per il raggio terrestre il valore $r_T = 6\,367\,650$m.

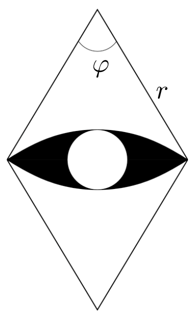
4. Nella figura a fianco, vale $|AB| = |AC| = \ell$ e lo stesso vale per i rimanenti lati del quadrato.

a) Determina, in funzione di α (in radianti) e di ℓ, il perimetro e l'area della figura evidenziata.

b) Per quale ampiezza α (in gradi) l'area della figura evidenziata è doppia rispetto all'area del quadrato di lato ℓ?



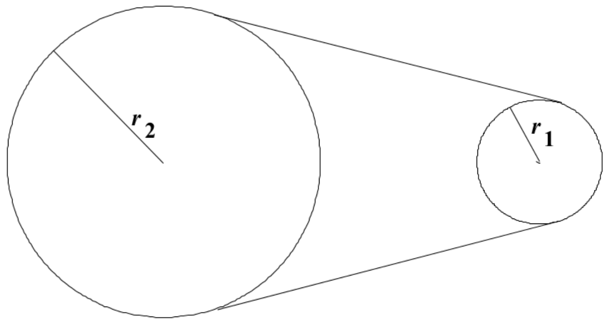
5. La figura qui accanto è formata dalla sovrapposizione di due triangoli isosceli con $\varphi = \frac{\pi}{3}^{\text{rad}} = 60°$ e $r = 10$. Determina l'area della superficie annerita.



6. * Due ruote hanno rispettivamente raggi $r_1 = 4$cm e $r_2 = 17$cm e sono collegate tra di loro per mezzo di una cinghia di trasmissione (che *non slitta*).

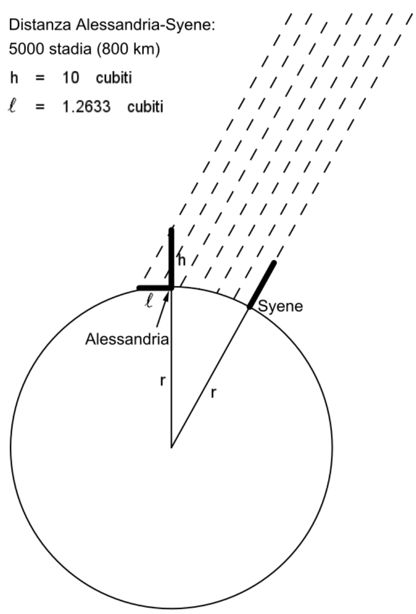
a) Se la prima ruota fa 500 giri al minuto, quanti ne farà la seconda (al minuto)?. E con quale velocità si muoverà un punto sulla cinghia?

b) Rispondi alle domande poste in a) nel caso generale: r_1 e r_2 sono i raggi delle ruote, n_1 è il numero di giri al minuto compiuto dalla prima ruota.



7. La misura del raggio della terra: Eratostene di Cirene (276 a.C. – 194 a.C) è stato un matematico, astronomo, geografo e poeta greco antico, bibliotecario della grande Biblioteca di Alessandria e fu il primo a stimare le dimensioni della Terra. Dai suoi studi, Eratostene era venuto a conoscenza del fatto che a *Syene* (l'attuale città di Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate, il Sole si trovava proprio sullo zenit, perciò un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra in terra.

Invece ad Alessandria questo non succedeva: gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno. Eratostene, basandosi sui trasferimenti delle carovane, conosceva la distanza tra le città di Alessandria e di Syene, che era stimata in 5000 stadia (uno *stadium*, misura utilizzata a quell'epoca ad Alessandria, equivale a 160 m circa).
A mezzogiorno del solstizio d'estate misurò quindi ad Alessandria l'ombra proiettata su un terreno perfettamente pianeggiante da un obelisco alto 10 cubiti (il cubito era la misura di lunghezza più comune dell'antichità e corrispondeva idealmente alla lunghezza dell'avambraccio, a partire dal gomito fino alla punta del dito medio). L'ombra misurava 1.2633 cubiti: ciò indicava che l'angolo tra i raggi del sole e l'obelisco era di circa 7.2° (potremo calcolare in modo preciso questo angolo proprio grazie alla trigonometria).
Con questi dati a disposizione (riassunti nella figura) e supponendo tra l'altro che la Terra fosse perfettamente sferica, Eratostene riuscì a calcolare un'approssimazione della misura del raggio della Terra.
Come? Quanto misurava, secondo Eratostene, il raggio della Terra? Quanto accurata era la sua stima?



Soluzioni

1. i) $28,29°$; ii) $17°23'24''$; iii) a) $71°8'40'' = 71°.14$; b) $130°$.

2. Soluzione:

$\alpha°$	$9°$	$18°$	$39°$	$135°$	$300°$	$330°$	$360°$
α^{rad}	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{13}{60}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

3. Un primo sessagesimale corrisponde a $\frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}^{\text{ rad}} \cong 2,908882087 \cdot 10^{-4 \text{ rad}}$. Quindi, un miglio marino corrisponde all'incirca a

$$2,908882087 \cdot 10^{-4} \cdot 6\,367\,650 \cong 1852,27 \text{ m} \quad .$$

4. Soluzione:

a) Per il perimetro $\mathcal{P}$ vale

$$\mathcal{P} = 4 \cdot |\overline{AB}| + 4 \cdot |\widehat{BC}| = 4\ell + 4\ell\alpha = 4\ell(1+\alpha) \quad ,$$

e per l'area $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \ell^2 + \cancelto{2}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\alpha\ell^2 = \ell^2 + 2\alpha\ell^2 = \ell^2(1+2\alpha) \quad .$$

b) In radianti deve valere

$$\ell^2(1+2\alpha) = 2\ell^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 1+2\alpha = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad ;$$

in gradi: $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} \cong 28,65° \quad .$

5. La figura è formata da 2 triangoli equilateri sovrapposti, di altezza

$$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3} \quad u$$

e di superficie

$$\mathcal{A}_{tr} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3} \quad u^2 \quad .$$

Calcoliamo l'area $\mathcal{A}_{sett}$ del settore circolare di ampiezza φ e raggio 10:

$$\mathcal{A}_{sett} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 10^2 = \frac{50}{3}\pi \quad u^2 \quad ,$$

e l'area del segmento circolare di ampiezza φ

$$\mathcal{A}_{seg} = \mathcal{A}_{sett} - \mathcal{A}_{tri} = \frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3} = 25\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \quad u^2 \quad .$$

L'area $\mathcal{A}_f$ del 'fuso" è il doppio dell'area del segmento circolare, cioè

$$\mathcal{A}_f = 2 \cdot 25\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) = 50\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \quad u^2 \quad .$$

Da quest'area dobbiamo ancora sottrarre la superficie del "cerchietto", il quale ha raggio

$$r_c = r - h = 10 - 5\sqrt{3} = 5(2 - \sqrt{3}) \quad u$$

e area

$$\mathcal{A}_c = r_c^2\pi = 5^2(2-\sqrt{3})^2\pi = 25(4 - 4\sqrt{3} + 3) = 25(7 - 4\sqrt{3})\pi \quad .$$

In conclusione, l'area cercata è

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_f - \mathcal{A}_c = 50\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right) - 25(7 - 4\sqrt{3})\pi = \frac{100}{3}\pi - 50\sqrt{3} - 175\pi + 100\sqrt{3}\pi = \\ &= \left(100\sqrt{3} - \frac{425}{3}\right)\pi - 50\sqrt{3} \cong 12,5 \quad u^2 \quad . \end{aligned}$$

6. Un giro di ruota (1) sposta la cinghia di $2\pi r_1$ cm. Sia x il numero di giri della ruota (2) effettuati con questi spostamento. Allora vale:

$$2\pi r_2 x = 2\pi r_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{r_1}{r_2},$$

quindi 1 giro della prima ruota fa compiere $\frac{r_1}{r_2}$ giri della seconda ruota

a) 500 giri di (1) equivalgono a $500 \cdot \frac{4}{17} = 117,65$ giri al minuto di (2).

   Velocità della cinghia (considerando (1)): $2\pi 4 \frac{500}{60}\,[\frac{cm}{s}] = 2.09[\frac{m}{s}]$.

b) La seconda cinghia compie $n_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}$ giri al minuto.

   Velocità della cinghia: $2\pi\frac{n_1 r_1}{60} = \frac{\pi}{30}n_1 r_1[\frac{m}{s}]$.

7. Dapprima notiamo come l'angolo $\alpha = 7.2°$ tra i raggi del sole e l'obelisco corrisponde all'angolo tra le città di Syene e Alessandria (misurato nel centro della Terra). Indichiamo con s la distanza tra le due città (ovvero 800 chilometri) e con una semplice proporzione otteniamo:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{s}{2\pi r} \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{360 \cdot s}{2\pi\alpha} \cong 6366\,\text{chilometri}$$

La misura reale del raggio della Terra è di 6378 chilometri (all'equatore): dunque l'approssimazione di Eratostene era molto precisa.