Serie 22 - La retta nel piano

"È bene tenere la mente aperta, ma non così aperta che il cervello caschi per terra."
P. Angela

1. Determina l'equazione parametrica e cartesiana (implicita e se possibile esplicita) delle rette:

- r passante per $A(2;1)$ e $B(3;2)$
- s passante per $C(-1;3)$ e con vettore direzionale $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

e schizza la situazione geometrica.

a) Utilizzando la tua parametrizzazione di r, a quali punti corrispondono i seguenti valori del parametro $\lambda = -2; -1; 0; 1; 2; 5$?

b) I punti $D(0;1), E(-1;0)$ e $F(0;0)$ appartengono a quali delle due rette?

c) Quale punto appartenente alla retta r ha ascissa $x = 7$? Quale ha ordinata $y = -3$?

d) Quale punto della retta s ha il valore dell'ascissa (x) uguale a quello della ordinata (y)?

e) Quali sono le intersezioni delle due rette con gli assi cartesiani?

f) Determina il punto di intersezione e l'angolo acuto tra le due rette.

g) Quanto misura la distanza tra il punto D e le rette?

2. Scrivi le equazioni (parametriche e cartesiane) di una retta...

a) passante per il punto $P(2;5)$ con pendenza $m = 3$;

b) che passa per i punti $A(6;3)$ e $B(1;4)$;

c) che interseca l'asse Ox in un punto di ascissa $x = 12$ e l'asse Oy in un punto di ordinata $y = 5$;

d) che passa per il punto $A(2;3)$ ed è parallela all'asse Oy;

e) che passa per il punto $A(2;3)$ ed è parallela all'asse Ox;

f) parallela alla retta $y = 2x - 1$ ma traslata di due unità verso l'alto.

g) che interseca la retta $y = 5x + 1$ nel punto di ordinata $x = 3$ e passante per l'origine degli assi.

3. Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, considera le rette:

$$r_k : 3x + ky - 8 = 0; \qquad s_k : (k-1)x - 2y + 6 = 0$$

Per quali valori di k le rette r e s:

a) sono parallele?

b) si intersecano in un punto sull'asse Ox?

c) si intersecano in un punto appartenente alla retta $t : x + y = 1$?

d) passano entrambe per il punto $P(1;1)$?

4. Dimostra che le seguenti rette sono perpendicolari tra loro:

$$\text{a) } r : 2x - 5y - 5 = 0, \qquad s : 5x + 2y + 10 = 0$$

$$\text{b) } r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

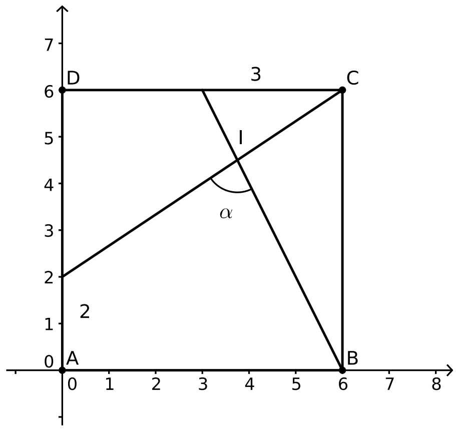
5. Considera il quadrato $ABCD$ di lato 6 rappresentato qui a fianco.

Determina:

a) il punto di intersezione I.

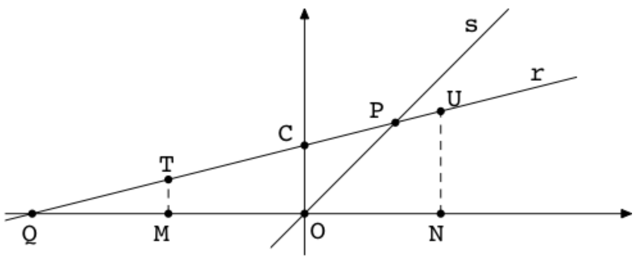
b) l'angolo α.

c) l'area del triangolo BCI.



6. Considera la seguente situazione nel piano cartesiano: la retta r è il grafico della funzione affine f, mentre la retta s è il grafico della funzione affine g, con

$f : x \mapsto y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ e $g : x \mapsto y = x$.



M è il punto medio del segmento OQ; N è simmetrico a M rispetto all'origine.

a) Determina le coordinate dei punti Q e C e la distanza fra loro.

b) Determina le coordinate del punto P.

c) Calcola l'area del trapezio $MNUT$.

7. a) Se 4 galline mangiano 4 ciotole di riso in 4 giorni, 2 galline mangeranno 2 ciotole di riso in quanti giorni?

b) Se 4 galline mangiano 4 ciotole di riso in 4 giorni, 8 galline in 8 giorni quante ciotole di riso mangeranno?

c) Se 4 galline mangiano 4 ciotole di riso in 4 giorni, quante galline saranno necessarie per mangiare 16 ciotole di riso in 16 giorni?

Soluzioni

1. Per la retta r:

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - y - 1 = 0.$$

Per la retta s (verticale!):

$$s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 1 = 0.$$

a) Per $\lambda = -2$ otteniamo: $P_{-2}(2 + (-2) \cdot 1; 1 + (-2) \cdot 1) = P_{-2}(0; -1)$. In modo analogo: $P_{-1}(1; 0)$, $P_0(2; 1) = A$, $P_1(3; 2) = B$, $P_2(4; 3)$, $P_5(7; 6)$.

b) Controlliamo se il punto $D(0; 1)$ appartiene alla retta utilizzando l'equazione parametrica:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ 1 = 1 + \lambda \end{cases}$$

Da cui otteniamo due risultati diversi per λ e dunque il punto $D(0; 1)$ non appartiene alla retta r. Si raggiunge lo stesso risultato utilizzando l'equazione cartesiana:

$$1 \neq 0 - 1$$

In modo analogo si può controllare che i punti D, E e F non appartengono a r, i punti D e F non appartengono nemmeno a s mentre il punto E appartiene a s.

c) $(7; 6) \in r$, $(-2; -3) \in r$.

d) $(-1; -1)$

e) Retta r: $(0; -1)$ e $(1; 0)$, retta s: $(-1; 0)$ e non incontra mai l'asse y (ovvero $x = 0$).

f) Intersezione: $(-1; -2)$, angolo acuto:

$$\cos\alpha = \frac{\left| \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = 45^\circ$$

g) La distanza corrisponde all'altezza del parallelogrammo generato dal vettore direzione della retta e il vettore che congiunge un punto della retta al punto esterno ad essa: dovremo dunque dividere l'area (calcolata con il determinante) per la base (modulo del vettore direzione):

$$d = \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

La distanza fra la retta s e il punto D misura invece 1.

2. a) Cartesiana: $y = 3x - 1$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Cartesiana: $y = -\frac{x}{5} + \frac{21}{5}$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Cartesiana: $y = -\frac{5x}{12} + 5$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

d) Cartesiana: $x = 2$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) Cartesiana: $y = 3$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Cartesiana: $y = 2x + 1$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

g) Cartesiana: $y = \frac{16x}{3}$, parametrica: $r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$.

3. a) Le rette (in equazione cartesiana implicita) sono parallele se i relativi vettori normali sono paralleli: $\vec{n}_r = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}, \vec{n}_s = \begin{pmatrix} k-1 \\ -2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & k-1 \\ k & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff -6 - k(k-1) = 0 \iff -k^2 + k - 6 = 0$$

quest'ultima equazione non ha soluzioni ($\Delta = -23$) e dunque non esiste $k \in \mathbb{R}$ che renda le rette parallele.

b) Si intersecano sull'asse Ox nel punto $P(x; 0)$. Ovvero:

$$\begin{cases} 3x + k \cdot 0 - 8 = 0 \\ (k-1)x - 2 \cdot 0 + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 8 \\ kx - x = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ k = \frac{-6+x}{x} = \frac{-5}{4} \end{cases}$$

c) Si intersecano in un punto appartenente alla retta $t : x + y = 1$ in $P(x, y = 1 - x) = P(x, 1.x)$, dunque:

$$\begin{cases} 3x + k \cdot (1-x) - 8 = 0 \\ (k-1)x - 2 \cdot (1-x) + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{89}}{8} \\ k = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{89}}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{89}}{8} \\ k = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{89}}{2} \end{cases}$$

d) Otteniamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + k \cdot 1 - 8 = 0 \\ (k-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k = 5 \\ k = -3 \end{cases}$$

dunque non è possibile trovare k per cui entrambe le rette passino per il punto $P(1; 1)$.

4. Per la parte a) basta dimostrare che i vettori normali $\vec{n}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{n}_s = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono perpendicolari. Questo è facilmente verificabile con il prodotto scalare.

Per la parte b) si procederà con lo stesso procedimento ma utilizzando i vettori direzione: $\vec{v}_r = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \vec{v}_s = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

5. a) Le rette hanno equazione $y = \frac{2x}{3} + 2$ e $y = -2x + 12$, da cui il punto di intersezione: $I(15/4; 9/2)$.

b) $\alpha \cong 82.87$.

c) $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot (6 - 15/4)}{2} = \frac{27}{4} = 6.75$

6. **a)**

- $Q(x, y)$ è il punto d'intersezione del grafico di f con l'asse delle ascisse ("delle x"); vale quindi $y = 0$, cioè
$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \iff \frac{1}{4}x = -\frac{1}{2} \iff x = -2 \quad ,$$
quindi $\boxed{Q(-2, 0)}$.
- $C(x, y)$ è il punto d'intersezione del grafico di f con l'asse delle ordinate ("delle y"); vale quindi $x = 0$, cioè
$$y = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad ,$$
quindi $\boxed{C\left(0, \frac{1}{2}\right)}$.
- La distanza fra loro è facilmente calcolabile con il teorema di Pitagora (v. grafico) oppure tramite la formula:
$$|\overline{QC}| = \sqrt{(x_C - x_Q)^2 + (y_C - y_Q)^2} = \sqrt{\left(0 - (-2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

b) $P(x, y)$ è il punto d'intersezione dei grafici di f e g; vale quindi $f(x) = g(x)$, cioè

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x + 2 = 4x \quad \Longleftrightarrow \quad 3x = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\,(=y) \quad ,$$

quindi $\boxed{P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$.

c) Ricaviamo immediatamente $M(-1, 0)$ e quindi $N(1, 0)$; dato che $f(-1) = \frac{1}{4}$ e $f(1) = \frac{3}{4}$ ricaviamo infine $T(-1, \frac{1}{4})$ e $U(1, \frac{3}{4})$. Per l'area di $MNUT$ vale quindi

$$\mathcal{A}_{MNUT} = \frac{1}{2}\left(|MT| + |NU|\right) \cdot |MN| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \cdot 2 = 1 \quad (\text{unità}^2) \quad .$$

7. a) 4 galline, 4 ciotole $\rightarrow$ 4 giorni
4 galline, 2 ciotole $\rightarrow$ 2 giorni
2 galline, 2 ciotole $\rightarrow$ 4 giorni

b) 4 galline, 4 giorni $\rightarrow$ 4 ciotole
8 galline, 4 giorni $\rightarrow$ 8 ciotole
8 galline, 8 giorni $\rightarrow$ 16 ciotole

c) 4 ciotole, 4 giorni $\rightarrow$ 4 galline
4 ciotole, 16 giorni $\rightarrow$ 1 galline
16 ciotole, 16 giorni $\rightarrow$ 4 galline