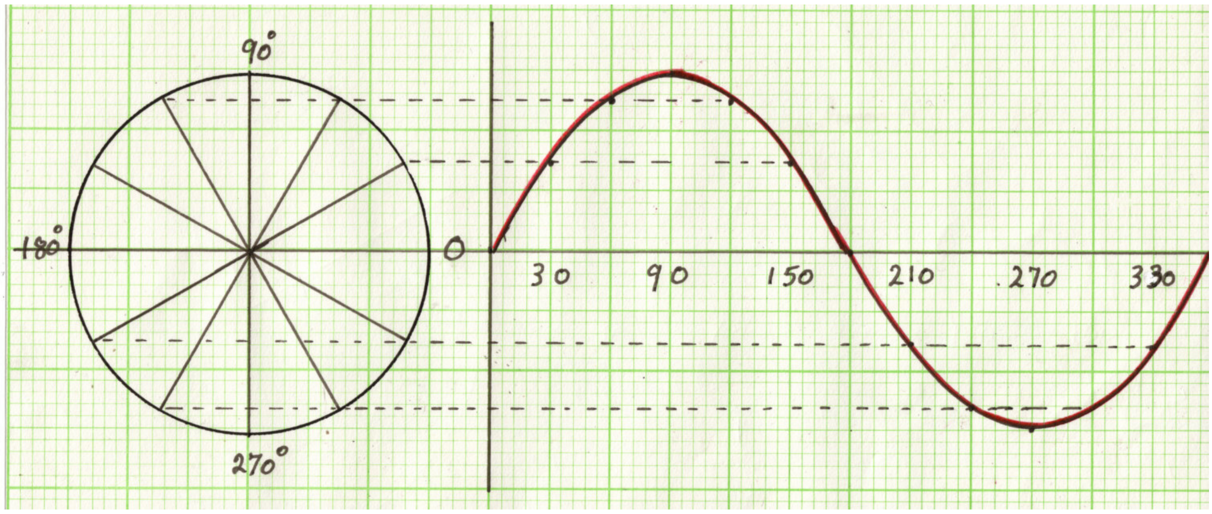
Trigonometria[1]



Da Wikipedia: *"La **trigonometria**, dal greco trigonon (triangolo) e métron (misura), è la parte della matematica che studia i triangoli a partire dai loro angoli. Il compito principale della trigonometria, così come rivela l'etimologia del nome, consiste nel calcolare le misure che caratterizzano gli elementi di un triangolo (lati, angoli, mediane, etc.) partendo da altre misure già note (almeno tre, di cui almeno una lunghezza), per mezzo di speciali funzioni."*

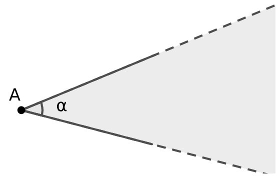
Lo studio della trigonometria, anticamente utilizzata prevalentemente da astronomi e geografi per problemi geometrici, pone le basi per lo studio di moltissimi fenomeni di carattere **oscillatorio** (moto armonico) come ad esempio: pendoli, molle, maree, cicli giorno/notte, eccetera e in generale tutti i fenomeni collegati alle onde (corde di una chitarra, onde radio, onde elettromagnetiche, ...).

[1]Liberamente adattato dagli appunti del Prof. Rovelli - www.matematica.tk

1 L'ampiezza degli angoli: gradi e radianti

In questo paragrafo introduttivo ricorderemo innanzitutto alcune definizioni elementari e procederemo poi alla definizione di una "nuova" unità di misura per l'ampiezza degli angoli.

Definizione: Angolo
Si dice **angolo** una parte di piano compresa tra due semirette aventi l'origine in comune.



1.1 Gradi sessagesimali

Tradizionalmente, per la misura dell'*ampiezza* di un angolo viene utilizzata la *notazione sessagesimale* ("in base 60"), che suddivide l'angolo completo (o **angolo giro**) in 360 *angoli gradi* (o, più comunemente, **gradi**), il grado in 60 **primi** e il primo in 60 **secondi** (come avviene nella misurazione del tempo):

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = 60'' \quad , \quad \text{e quindi} \quad 1^\circ = 3600'' \quad .$$

Ulteriori suddivisioni utilizzano il comune sistema decimale e spesso gli angoli vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto greco ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$).

Definizione: alcuni angoli particolari

Un angolo α è detto

- **nullo**, se $\alpha = 0^\circ$;
- **acuto**, se $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;
- **retto**, se $\alpha = 90^\circ$;
- **ottuso**, se $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
- **piatto**, se $\alpha = 180^\circ$;
- **giro**, se $\alpha = 360^\circ$;
- **convesso**, se $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$;
- **concavo**, se $180^\circ < \alpha \leq 360^\circ$.

A volte, è comodo scrivere *le frazioni* di grado utilizzando il sistema decimale (tale notazione "mista" detta anche *sessadecimale*).

Il passaggio da una notazione all'altra non comporta particolari problemi. Ecco qualche **esempio**:

1) $112^\circ\, 6'\, 33'' = 112^\circ + \frac{6}{60} \cdot 1^\circ + \frac{33}{3600} \cdot 1^\circ \cong 112,11^\circ$

2) $22^\circ\, 15'\, 46'' =$ ....

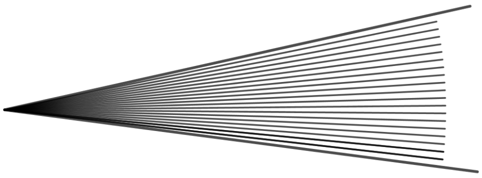
3) $17,22^\circ = 17^\circ + 0,22 \cdot 60' = 17^\circ + 13,2' = 17^\circ + 13' + 0,2 \cdot 60'' = 17^\circ\, 13'\, 12''$.

4) $36,321^\circ =$ ....

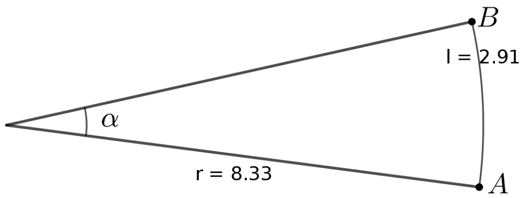
1.2 Radianti

Il sistema sessagesimale si basa su scelte del tutto arbitrarie. In effetti, si tratta di un retaggio della matematica babilonese (ca. 2000 a.C.): la suddivisione dell'angolo giro in 360 parti corrisponde ai circa 360 giorni impiegati dal sole a percorrere l'intera volta celeste e la notazione in primi e secondi deriva dal sistema numerico in base 60 in uso presso i matematici babilonesi. Esistono altri sistemi arbitrai: la misurazione in *permille* usata nell'artiglieria come pure la suddivisione dell'angolo giro in 400 parti in uso nella Francia del '700 (in disuso ma ancora presente su alcune calcolatrici come "grad".).

Fu l'avvento del *calcolo infinitesimale* a motivare l'introduzione di un angolo di riferimento più naturale per la misura dell'ampiezza degli angoli, il *radiante*. Invece di *contare* in quante porzioni da 1° è possibile suddividere un angolo, esso viene misurato aggiungendo un arco di circonferenza e calcolando il **rapporto tra lunghezze dell'arco e il raggio**.



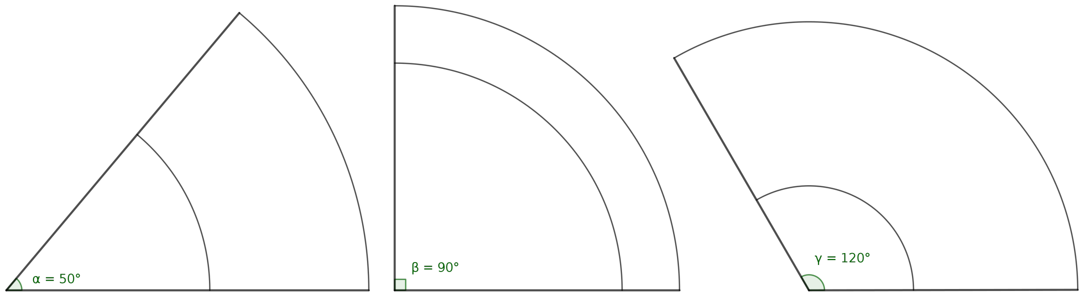
Un angolo misura 20° poiché contiene 20 volte 1°.



Per la misura in radianti dividiamo la lunghezza dell'arco di circonferenza per il raggio: $\frac{2.91}{8.33} \cong$ 0.35 radianti.

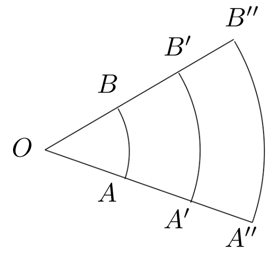
Definizione: Angolo in radianti
L'ampiezza di un angolo in radianti è pari al rapporto tra misura dell'arco e misura del raggio: $\boxed{\alpha = \dfrac{|\widehat{AB}|}{r}}$

Esercizio: determina la misura in radianti dei seguenti angoli, misurando i differenti archi di circonferenza e raggi.



$\alpha_1 =$........ $\alpha_2 =$........; $\beta_1 =$........ $\beta_2 =$........; $\gamma_1 =$........ $\gamma_2 =$........;

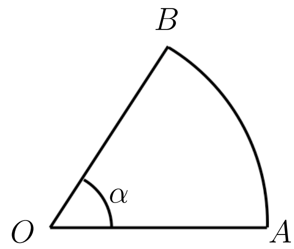
Osservazione: come abbiamo notato nell'esempio qui sopra la misura in radianti non dipende dalla misura del raggio: i settori circolari OAB, $OA'B'$ e $OA''B''$ sono simili (o, meglio, *omotetici*) e dunque il rapporto che determina la misura in radianti dell'angolo rimane invariato:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{\overline{OA'}} = \frac{\overset{\frown}{A''B''}}{\overline{OA''}}$$

Definizione: Un radiante
Il **radiante** (o *angolo radiante*) è l'angolo *sotteso* da un arco di lunghezza pari al suo raggio.

Illustrazione:

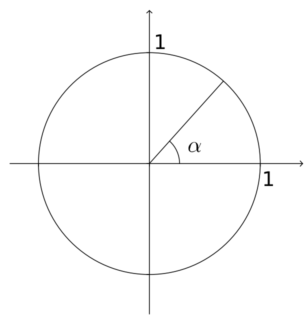


Se $|\overline{OA}| = |\overset{\frown}{AB}|$ (cioè se la misura del *segmento* $\overline{OA}$ è pari alla misura dell'*arco* $\overset{\frown}{AB}$), allora vale $\boxed{\alpha = 1^{\text{rad}}}$.

Esercizio: A quanto corrisponde 1 radiante in gradi? (Aiuto: visto che non dipende dal raggio, considera un arco di circonferenza di lato 1).

Osservazioni:

- Dal momento che si tratta di un *rapporto* tra due lunghezze, l'ampiezza espressa in radianti non possiede unità di misura. A volte, come promemoria, è utile utilizzare la notazione ^{rad}, es: $1,3^{rad}$.
- Per semplicità spesso faremo riferimento alla **circonferenza goniometrica**, ovvero la circonferenza unitaria (cioé di raggio 1) con centro nell'origine degli assi. In questo caso sarà più semplice calcolare i valori degli angoli in radianti che corrispondono alla lunghezza del relativo arco.



Esercizio: con riferimento alla circonferenza trigonometrica possiamo facilmente completare la seguente tabella di conversione da gradi a radianti:

α°	0	18	30	45	60	90	180	270	360
α^{rad}									

... e in generale utilizzando le proporzioni $\boxed{\dfrac{\alpha^{\circ}}{360^{\circ}} = \dfrac{\alpha^{\text{rad}}}{2\pi^{\text{rad}}}}$ ricaviamo:

Formule di conversione

$$\alpha^{\circ} = \frac{\alpha^{\text{rad}} \cdot 360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180\alpha^{\text{rad}}}{\pi}; \qquad \alpha^{\text{rad}} = \frac{\alpha^{\circ} \cdot 2\pi}{360} = \frac{\alpha^{\circ} \cdot \pi}{180}$$

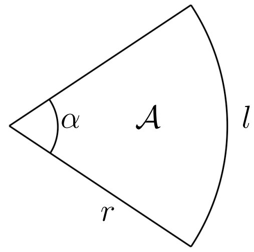
Esercizio: Converti le seguenti misure da gradi a radianti e viceversa

α°	1	27	100	200			
α^{rad}					$\frac{\pi}{7}$	$\frac{7\pi}{5}$	5

Osservazione: Con le calcolatrici scientifiche è possibile lavorare utilizzando i radianti e effettuare le conversioni grad/rad.

1.3 Applicazioni

La conoscenza, in radianti, dell'ampiezza dell'angolo al centro permette di calcolare velocemente la lunghezza di un arco di circonferenza e l'area del settore circolare da esso delimitato.



Sapendo che la misura in radianti è calcolata dal rapporto $\boxed{\alpha = \frac{l}{r}}$ otteniamo:

1) la lunghezza dell'arco vale $\boxed{l = \alpha\, r}$.

2) Sia $\mathcal{A}$ la superficie del settore circolare. Dal momento che $\frac{\mathcal{A}}{r^2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}$, ricaviamo immediatamente $\mathcal{A} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot r^2\pi$ cioè $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\alpha\, r^2}$.

Osservazione: dato che $\alpha = \frac{l}{r}$, segue che $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\frac{l}{r}\,r^2$ cioè $\boxed{\mathcal{A} = \frac{l \cdot r}{2}}$
(nota la somiglianza con la formula $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2}$ per l'area del triangolo!).

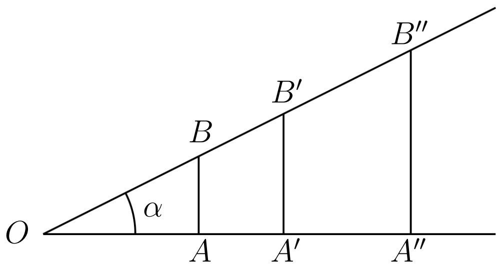
Esercizio: In un orologio, la lancetta dei minuti è lunga 13 mm. Determina:

a) Di quanto si sposta l'estremità di tale lancetta in 35 minuti?

b) Quanto misura *l'area spazzata* dalla lancetta in 35 minuti? (vale a dire la misura del settore circolare corrispondente)

2 Rapporti trigonometrici

Considera i triangoli rettangoli OAB, $OA'B'$, $OA''B''$:

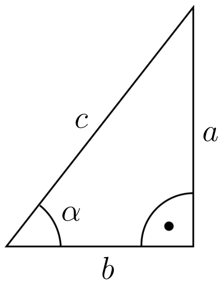


dal momento che i tre triangoli sono simili, osserviamo immediatamente che vale

$$\frac{|AB|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|OB'|} = \frac{|A''B''|}{|OB''|} \quad .$$

In altre parole: *i rapporti tra lati di qualsiasi triangolo rettangolo avente un angolo α sono costanti* e vengono dunque denotati in modo specifico.

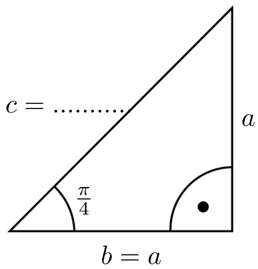
Definizione: Rapporti trigonometrici



$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} \\
\cos(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{ipotenusa}} \\
\tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opposto ad } \alpha}{\text{cateto adiacente ad } \alpha} \\
\operatorname{cotan}(\alpha) &= \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adiacente ad } \alpha}{\text{cateto opposto ad } \alpha}
\end{aligned}$$

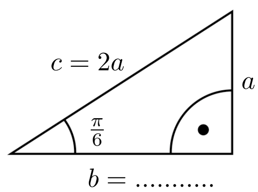
Esempi: calcoliamo i rapporti trigonometrici per qualche *angolo notevole*:

1) $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}^{\text{rad}}$ (c è la diagonale di un quadrato di lato $a = b$):



- $\sin(\frac{\pi}{4}) =$ ....
- $\cos(\frac{\pi}{4}) =$ ....
- $\tan(\frac{\pi}{4}) =$ ....

2) $\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}^{\text{rad}}$ (c è il lato e b l'altezza di un triangolo equilatero, a è la metà di c); osservando che $c = 2a$ e $b =$ .... otteniamo:



- $\sin(\frac{\pi}{6}) =$ ....
- $\cos(\frac{\pi}{6}) =$ ....
- $\tan(\frac{\pi}{6}) =$ ....

Osservazione: notiamo come questi rapporti **non** dipendano dalla lunghezza dei lati!

Esercizio: con riferimento alla figura della pagina precedente, completa (tralascia per ora la colonna α):

	a (cat. opp.)	b (cat. adiac.)	c (ipotenusa)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	α
i)	3	4					
ii)	2		5				
iii)		10	100				

Proprietà importanti (fai riferimento al disegno sulla pagina precedente) :

(i) Dal momento che a e b sono entrambi positivi e $a < c$, vale $\sin\alpha = \frac{a}{c} > 0$ e $\sin\alpha = \frac{a}{c} < 1$, cioè $\boxed{\sin\alpha \in]0,1[\text{ per } \alpha \in]0°, 90°[=]0, \frac{\pi}{2}[}$.

(ii) Analogamente: $0 < b < c \Rightarrow \boxed{\cos\alpha \in]0,1[\text{ per } \alpha \in]0°, 90°[=]0, \frac{\pi}{2}[}$.

(iii) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; quindi $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\quad}{\quad}}$.

(iv) $\text{cotan}\,\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; quindi $\boxed{\text{cotan}\,\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$.

Dal momento che la cotangente è semplicemente il reciproco della tangente, il suo studio non è di particolare interesse. Per questo motivo essa non viene quasi mai menzionata.

(v) $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \quad .$$

Osservazione: Spesso annoteremo $\sin^2\alpha$ al posto di $(\sin(\alpha))^2$ (dunque $\sin^2\alpha = (\sin(\alpha))^2$) per non confondere con $\sin(\alpha^2)$.

Riassumiamo: in questa tabella i valori dei rapporti trigonometrici per i cosiddetti *angoli notevoli*:

	$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$	$\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$	$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{cotan}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

2.1 Inversa

I rapporti trigonometrici sin, cos e tan definiscono *funzioni reali* iniettive $]0°, 90°[\to \mathbb{R}$ (risp. $]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$). Le rispettive inverse sono definite come segue:

- l'**arcoseno**: $\arcsin x = y \iff x = \sin y$;
  ad esempio $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$ (oppure $= \frac{\pi}{4}$) perché $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- l'**arcocoseno**: $\arccos x = y \iff x = \cos y$;
  ad esempio $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$ (oppure $= \frac{\pi}{6}$) perché $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- l'**arcotangente**: $\arctan x = y \iff x = \tan y$;
  ad esempio $\arctan 1 = 45°$ (oppure $= \frac{\pi}{4}$) perché $\tan 45° = 1$.

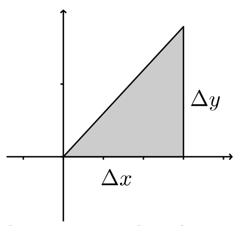
Osservazione: Grazie alle calcolatrici scientifiche è possibile calcolare il valore delle funzioni trigonometriche (e le loro inverse) per qualsiasi angolo. Attenzione però ad impostare l'unità di misura appropriata (gradi o radianti). Da notare inoltre che le funzioni inverse sono simboleggiate da $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$.

Esercizio 1: determina l'angolo α relativo a ognuna delle tre situazioni (i-iii) della tabella alla pagina precedente. Utilizza arcoseno, arcocoseno e arcotangente: ottieni un angolo diverso?

Esercizio 2: Completa la seguente tabella:

$\alpha°$	10	30					
α^{rad}			$\frac{\pi}{5}$				
$\sin(\alpha)$				$\frac{1}{3}$			
$\cos(\alpha)$					$\frac{1}{2}$		
$\tan(\alpha)$						1	$\frac{1}{2}$

Osservazione 2: Il concetto di tangente è ben conosciuto: rappresenta la **pendenza dell'ipotenusa** (nel caso in cui un cateto è posto orizzontalmente) con il ben noto rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Conoscendo la pendenza la funzione arcotangente ci permette di calcolare l'angolo che la genera.



Ad esempio una strada con una pendenza del 20% corrisponde ad un angolo di:

....

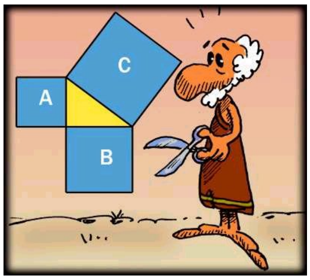
3 Trigonometria del triangolo rettangolo

3.1 Esistenza di un triangolo rettangolo

Se di un triangolo rettangolo si conosce la lunghezza di 2 lati è ben nota la formula che permette di calcolarne il terzo lato:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

il celeberrimo teorema di Pitagora, dove a e b rappresentano la lunghezza dei cateti mentre c la lunghezza dell'ipotenusa.

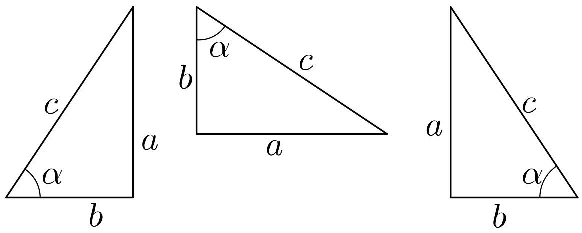


Questo teorema può essere letto da un'altra prospettiva: *dati tre lati, se le loro lunghezze verificano la formula qui sopra, allora il triangolo formato sarà rettangolo.*

Esempio: la terna (pitagorica) $(3; 4; 5)$ rappresenta le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo poiché $3^2 + 4^2 = 5^5$. Invece $(4; 5; 6)$ non rispetta la regola $(4^2 + 5^2 = 41 \neq 36 = 6^2)$: non esiste dunque un triangolo rettangolo con lati di lunghezza $4, 5$ e 6.

Abbiamo dunque trovato una **condizione di esistenza** per un triangolo rettangolo.

Inoltre bisogna notare come la conoscenza della lunghezza di tre elementi (i due lati e un angolo: quello rettangolo) ci permette di definire in modo **univoco** il triangolo: qualsiasi altro triangolo con queste tre caratteristiche sarà lo stesso identico, solamente "traslato" e/o ruotato e/o specchiato.
Le sue misure (lati e angoli) sono però identiche e verrà chiamato **congruente**.



Osservazione: Allo stesso modo, se si conosce un angolo (oltre all'angolo rettangolo) e un lato, anche in questo caso è facile verificare che il triangolo è *univocamente* determinato. Ad esempio prova a costruire un triangolo rettangolo con un cateto lungo 5 cm e un angolo adiacente di 20 gradi:

Misura i lati e angoli mancanti e confronta quanto ottenuto dai compagni: cosa noti?

Lemma: Se di un triangolo rettangolo si conoscono due ulteriori misure[a], per un totale di 3 elementi, allora il triangolo è determinato univocamente.

[a] eccezione: se di un triangolo si conoscono solamente i 3 angoli interni allora è possibile generare infiniti triangoli *simili* ma non *congruenti*.

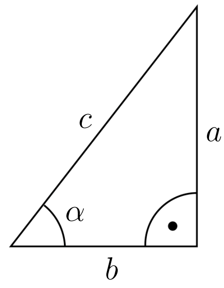
3.2 Risoluzione dei triangoli rettangoli

Dopo l'introduzione generale concentriamoci ora sui triangoli rettangoli. Come abbiamo visto se si conoscono almeno 2 elementi del triangolo rettangolo (oltre all'angolo retto), di cui almeno una lunghezza di un lato, allora è possibile determinare univocamente questo triangolo.
È ovvio quindi chiedersi come è possibile determinare le misure mancanti, ovvero come è possibile *risolvere* un triangolo rettangolo. Ciò avviene grazie alle funzioni trigonometriche, le loro inverse e il Teorema di Pitagora.

Nelle uguaglianze

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

intervengono 3 variabili: due lati ed un angolo. Note 2 di esse, è quindi possibile determinare le grandezze restanti.



Esempi:

1. *Dati* $c = 3,42$ *m e* $\alpha = 20°\,22'$, *determina* a *e* b.

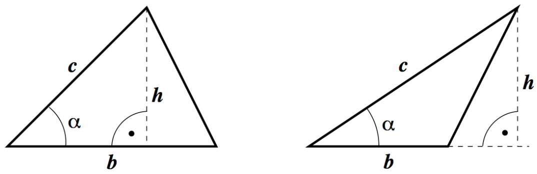
2. *Dati* $a = 5,7$ *cm e* $c = 12,3$ *cm, determina* α.

3. *Dati* $b = 132,7$ *cm e* $\alpha = \frac{\pi}{7}$, *determina* a *e* c.

3.3 Applicazioni:

Ecco alcune semplici applicazioni di quanto visto fin'ora:

1) Area di un triangolo: se h è l'altezza (interna o esterna) relativa al lato b di un triangolo qualsiasi, allora per la sua area vale $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh$;

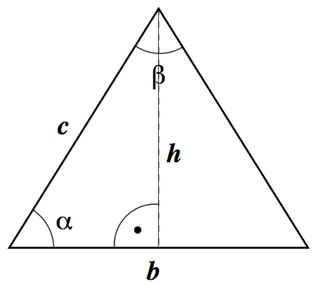


dal momento che, per quanto visto sopra, vale $h = c \sin\alpha$ dove α è l'angolo compreso tra b e c, ricaviamo l'utile formula

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, bc\, \sin\alpha} \quad ,$$

cioè: *l'area di un triangolo è pari a metà del prodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso tra essi.*

2) Risoluzione di un triangolo isoscele: se b è la base e c il lato obliquo di un triangolo isoscele, allora la sua risoluzione è equivalente alla risoluzione di due triangoli rettangoli aventi ipotenusa c e cateti $\frac{1}{2}b$ e $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2}$. Inoltre, se α è l'angolo alla base e β l'angolo tra i lati obliqui, vale la relazione $2\alpha + \beta = 180°$.



Osservazione: il ragionamento dell'Appl. **2)** è generalizzabile, dal momento che ogni triangolo è scomponibile con l'aiuto di triangoli rettangoli. Ciò mostra che la trigonometria permette anche di risolvere triangoli *qualsiasi*. Ci occuperemo più tardi di questo fatto, enunciando i cosiddetti *teoremi del seno e del coseno*.

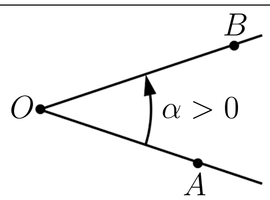
Esercizio: Un triangolo ha lati che misurano rispettivamente 4, 5 e 6 $[u]$. Sapendo che l'area è di 9.92 $[u^2]$, determina la misura degli angoli interni.

4 Funzioni trigonometriche

Come abbiamo già notato, i rapporti trigonometrici definiscono *funzioni* soltanto nell'intervallo compreso tra l'angolo nullo e l'angolo retto. Per estenderle all'intero insieme $\mathbb{R}$ (o quasi, nel caso di tan e cotan) occorre innanzitutto dare un senso ad angoli di ampiezza α (in gradi o radianti) per $\alpha \in \mathbb{R}$ qualsiasi.

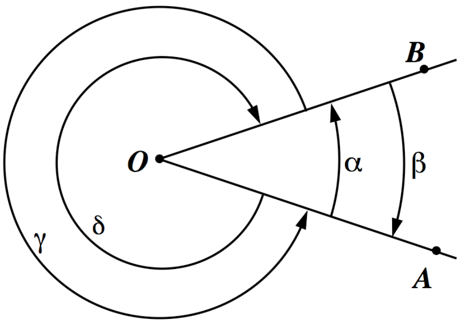
4.1 angoli orientati

Ci occupiamo innanzitutto del *segno*: occorre semplicemente *orientare* un angolo, e quindi scegliere un verso positivo.



Convenzione: siano OA e OB due semirette. L'angolo orientato *positivo* $\alpha = \widehat{AOB}$ è quello descritto dalla rotazione della semiretta OA in senso *antiorario* sulla semiretta OB.

Illustrazione:



$$\begin{aligned}\alpha &= \widehat{AOB} > 0\\ \beta &= -\widehat{AOB} = -\alpha < 0\\ \gamma &= \widehat{BOA} = 2\pi - \alpha > 0\\ \delta &= -\widehat{BOA} = \alpha - 2\pi < 0 \quad .\end{aligned}$$

Esempi:

1) $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$

$\beta =$ ....

2) $\alpha = \frac{3\pi}{4} = 135°$

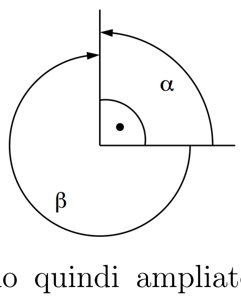
$\beta =$..................

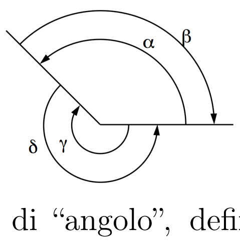
$\gamma =$..................

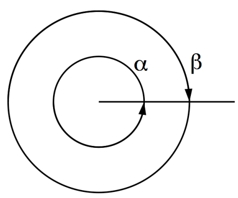
$\delta =$..................

3) $\alpha = 360° = 2\pi$

$\beta =$..................







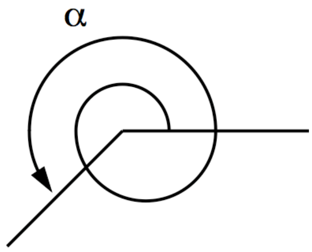
Abbiamo quindi ampliato la nozione di "angolo", definendo angoli la cui ampiezza è compresa nell'intervallo $[-360°, 360°]$ risp. $[-2\pi, 2\pi]$.

4.2 Oltre l'angolo giro

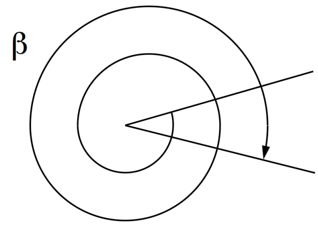
Possiamo estendere la definizione di angolo oltre l'angolo giro, basterà continuare con i *movimenti rotatori* oltre il 2π (o 360 gradi), rispettivamente -2π (-360 gradi).

Esempi:

1) $\alpha = 225° + 360° = 585°$
risp. $\alpha = \frac{5}{4}\pi + 2\pi = \frac{13}{4}\pi$



2) $\beta = -30° - 2 \cdot 360° = -750°$
risp. $\beta = -\frac{\pi}{6} - 2 \cdot 2\pi = -\frac{25}{6}\pi$

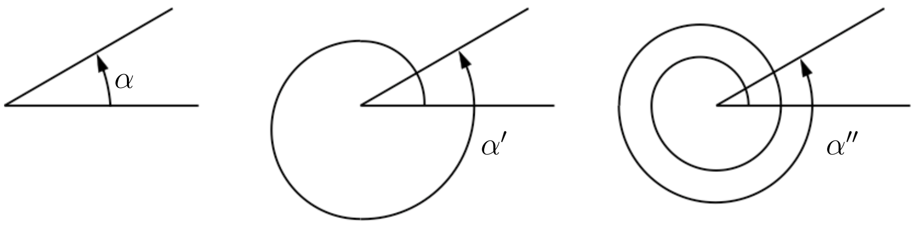


Osservazioni:

(i) Scelta l'unità di misura, ad ogni numero reale corrisponde *esattamente un* angolo orientato.

(ii) Due angoli α e $\overline{\alpha}$ definiscono la stessa *rotazione*[2] se essi differiscono per un multiplo dell'angolo giro, cioè se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\overline{\alpha} = \alpha + k \cdot 360°$ (risp. $\overline{\alpha} = \alpha + k \cdot 2\pi$).

Esempi:



$\alpha' = \alpha + 2\pi$ $\qquad$ $\alpha'' = \alpha' + 2\pi = \alpha + 4\pi$

(iii) Per semplicità è meglio riferirsi ad un angolo con il suo congruente nell'intervallo $[0, 2\pi] = [0, 360°]$.

Esercizio: trova il congruente in $[0°; 360°]$ risp. $[0; 2\pi]$ dei seguenti angoli:

a) $3\pi = \pi + 2\pi \equiv \pi$

b) $-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 2\pi \equiv \frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{5\pi}{2} =$ ....

d) $-\frac{6\pi}{5} =$ ....

e) $520° =$ ....

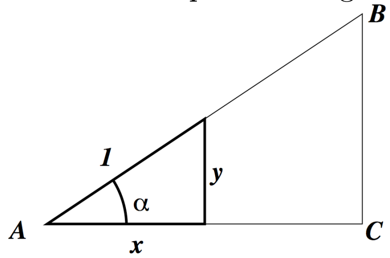
f) $-100° =$ ....

[2] qui si considera solo l'immagine di una figura e non il "movimento" che essa compie, distinguendo quindi *rotazione* da *movimento rotatorio*; a volte, due angoli che definiscono la stessa rotazione vengono detti *congruenti*

4.3 Circonferenza goniometrica

Il prossimo passo è la generalizzazione delle funzioni trigonometriche a qualsiasi angolo.

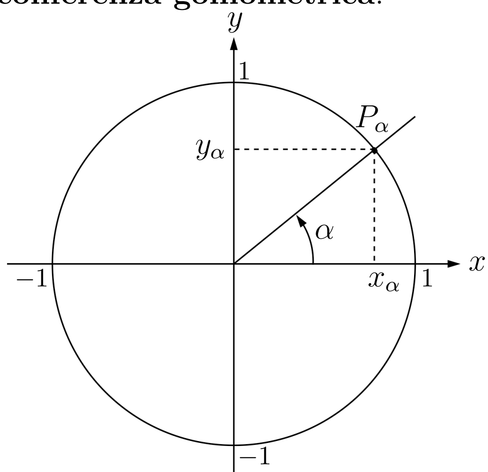
Come abbiamo visto i rapporti trigonometrici non variano tra triangoli *simili*, per semplicità prendiamo quindi in considerazione il triangolo con ipotenusa di lunghezza 1 (come raffigurato qui a fianco).



È dunque possibile inserire questo triangolo in una **circonferenza goniometrica**.

Sia $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ il punto d'intersezione della circonferenza trigonometrica con la semiretta uscente dall'origine che forma con l'asse delle ascisse l'angolo di ampiezza α. Allora vale, per $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= y_\alpha = \text{l'ordinata di } P_\alpha \\ \cos\alpha &= x_\alpha = \text{l'ascissa di } P_\alpha \quad . \end{aligned}$$



Osservazione: il punto P_α può essere associato *a qualsiasi* $\alpha \in]-\infty, +\infty[$.

Definizione: Funzioni trigonometriche
Sia $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ l'intersezione della circonferenza trigonometrica con la semiretta passante per l'origine che forma con l'asse Ox l'angolo di ampiezza α (v. sopra).

- La funzione **seno**:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \sin\alpha = y_\alpha \quad (\text{l'ordinata di } P_\alpha); \end{aligned}$$

- La funzione **coseno**:

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \cos\alpha = x_\alpha \quad (\text{l'ascissa di } P_\alpha); \end{aligned}$$

- La funzione **tangente**:

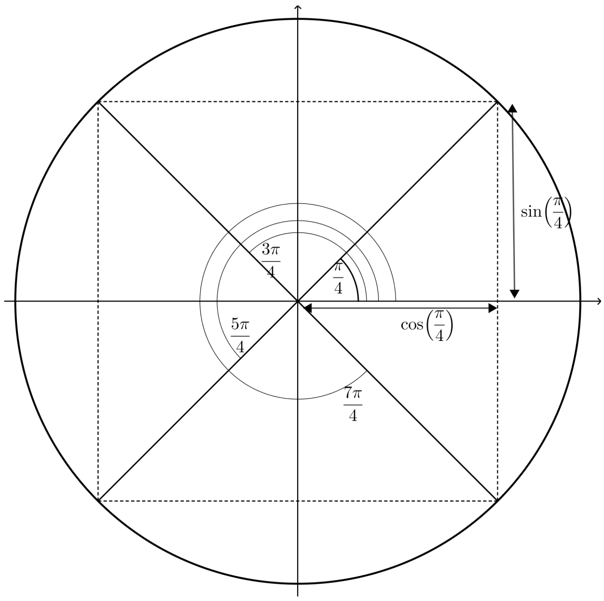
$$\begin{aligned} \tan : \mathrm{D}_{\tan} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \tan\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}; \end{aligned}$$

- La funzione **cotangente**:

$$\begin{aligned} \text{cotan} : \mathrm{D}_{\text{cotan}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \text{cotan}\,\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha} \quad . \end{aligned}$$

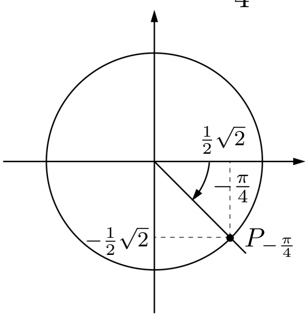
Esempio 1: Per $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ è facile calcolare il valore delle funzioni trigonometriche per gli angoli cosiddetti *associati* (v. prossima sezione).

α^{rad}	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$			
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$			
$\tan(\alpha)$	1			



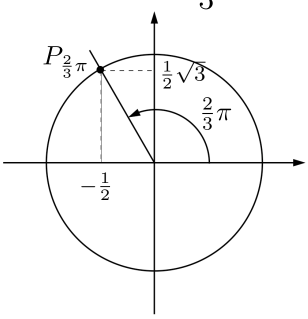
Esempio 2:

1) $\boxed{-45°}$ $\alpha = -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{4}$: grazie al Teorema di Pitagora ricaviamo $P_{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$:



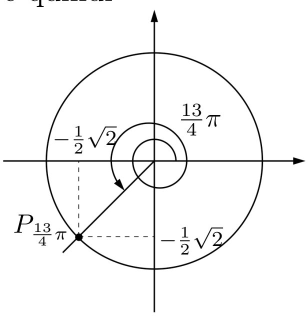
- $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) =$ ....
- $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) =$ ....
- $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) =$ ....

2) $\boxed{120°}$ $\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$: grazie al Teorema di Pitagora ricaviamo $P_{\frac{2}{3}\pi}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ e quindi



- $\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) =$ ....
- $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) =$ ....
- $\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right) =$ ....

3) $\boxed{585°}$ $\alpha = \dfrac{13}{4}\pi = \dfrac{5}{4}\pi = \pi + \dfrac{\pi}{4}$: grazie al Teorema di Pitagora ricaviamo $P_{\frac{13}{4}\pi}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ e quindi



- $\sin\left(\frac{13}{4}\pi\right) =$ ....
- $\cos\left(\frac{13}{4}\pi\right) =$ ....
- $\tan\left(\frac{13}{4}\pi\right) =$ ....

Esempio 3: sempre con riferimento alla circonferenza trigonometrica determina:

$\sin(0) =$ .... $\sin(180) =$ .... $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ ....

$\cos(0) =$ .... $\cos(180) =$ .... $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$ ....

Osservazioni:

(i) È facile ricordare i valori delle funzioni trigonometriche per gli angoli "notevoli":

α^{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α°	0	30	45	60	90
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Il seno *cresce*

α^{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α°	0	30	45	60	90
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0

Il coseno *decresce*

(ii) sin e cos sono definiti ovunque, mentre tan e cotan *non* sono definite per i valori di α che rendono nulli i denominatori. Ad esempio $\tan(\pi/2)$ non esiste.

(iii) Alcuni valori particolari delle funzioni trigonometriche sono evidenti. Ad esempio, sia $k \in \mathbb{Z}$ un numero intero *qualsiasi* (cioè $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$); allora vale

a) $\sin(k \cdot \pi) = 0;$ $\quad \sin(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = 1;$ $\quad \sin(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) = -1.$
$\sin(k \cdot 180^{\circ}) = 0;$ $\quad \sin(90^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}) = 1;$ $\quad \sin(-90^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}) = -1.$

b) $\cos(k \cdot 2\pi) = 1;$ $\quad \cos(\pi + k \cdot 2\pi) = -1;$ $\quad \cos(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi) = 0.$
$\cos(k \cdot 360^{\circ}) = 1;$ $\quad \cos(180^{\circ} + k \cdot 360^{\circ}) = -1;$ $\quad \cos(90^{\circ} + k \cdot 180^{\circ}) = 0.$

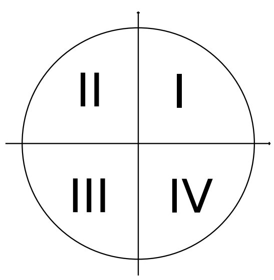
c) $\tan(k \cdot \pi) = 0;$ $\quad \tan(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi)$ non è definito.
$\tan(k \cdot 180^{\circ}) = 0;$ $\quad \tan(90^{\circ} + k \cdot 180^{\circ})$ non è definito.

(iv) Le funzioni trigonometriche sono **periodiche** con un periodo di 2π (o π per la tangente).

Sia $k \in \mathbb{Z}$, allora vale:

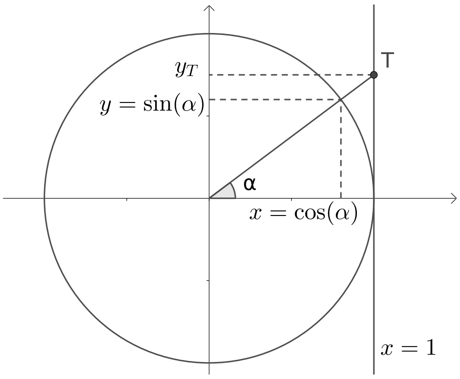
$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin(\alpha);$ $\quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos(\alpha);$ $\quad \tan(\alpha + \pi k) = \tan(\alpha);$

(v) Il cerchio goniometrico viene suddiviso normalmente in quattro quadranti: gli angoli tra 0 e $\pi/2$ sono nel primo quadrante, quelli tra $\pi/2$ e π nel secondo, quelli tra *pi* e $3\pi/2$ nel terzo mentre quelli tra $3\pi/2$ e 2π sono nel quarto. Completa la tabella seguente indicando il segno delle funzioni trigonometriche nei vari quadranti



	sin	cos	tan
I			
II			
III			
IV			

4.4 Interpretazione geometrica della tangente

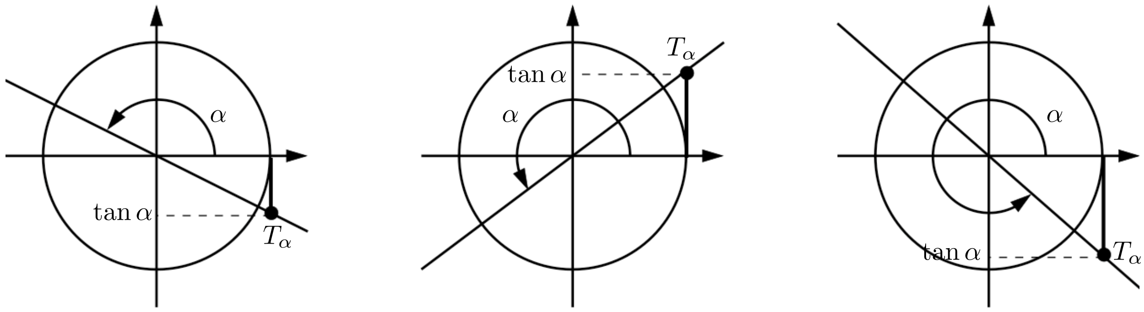


Sia $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, e sia $T(1, y_T)$ il punto d'intersezione della *retta* passante per l'origine che forma con l'asse Ox l'angolo α con la retta verticale passante per il punto $(1,0)$. Avendo dei **triangoli simili** si ottiene:

$$\tan\alpha = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y_T}{1} = y_T \quad .$$

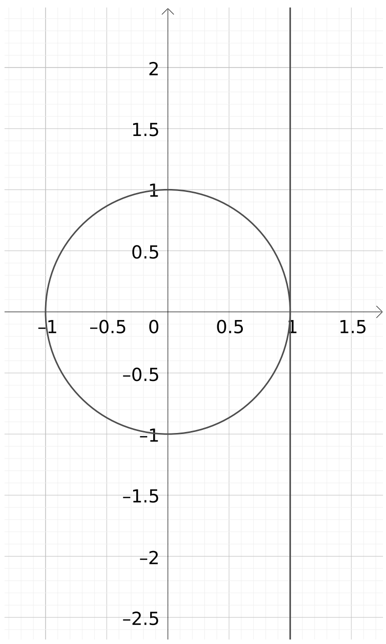
In altre parole: $\tan\alpha$ *è l'ordinata di* T.

Nota che si considera la *retta* relativa all'angolo α e non la *semiretta* allo scopo di preservare il segno di $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. In particolare, il punto T_α giace sempre nel I o nel IV quadrante:



Osservazione: per $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ la tangente è positiva mentre per $\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ la tangente è negativa.

Esercizio: Rappresenta e misura il valore di $\tan(70°), \tan(135°), \tan(3\pi/2)$ e $\tan(85°)$. Cosa osservi?

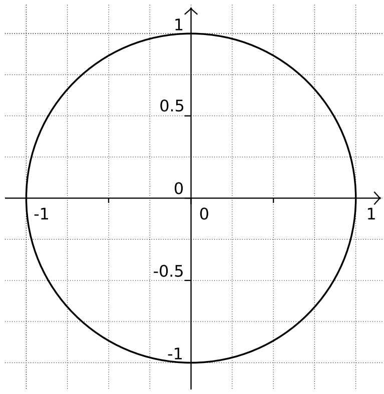


Osservazione: avvicinando α a $\pm\frac{\pi}{2}$, il punto T può essere allontanato a piacere dall'asse delle ascisse; si dice che *per* α *tendente a* $+\frac{\pi}{2}$ *da sinistra (risp. a* $-\frac{\pi}{2}$ *da destra) il valore di* $\tan\alpha$ *tende a* $+\infty$ *(risp.* $-\infty$*).*

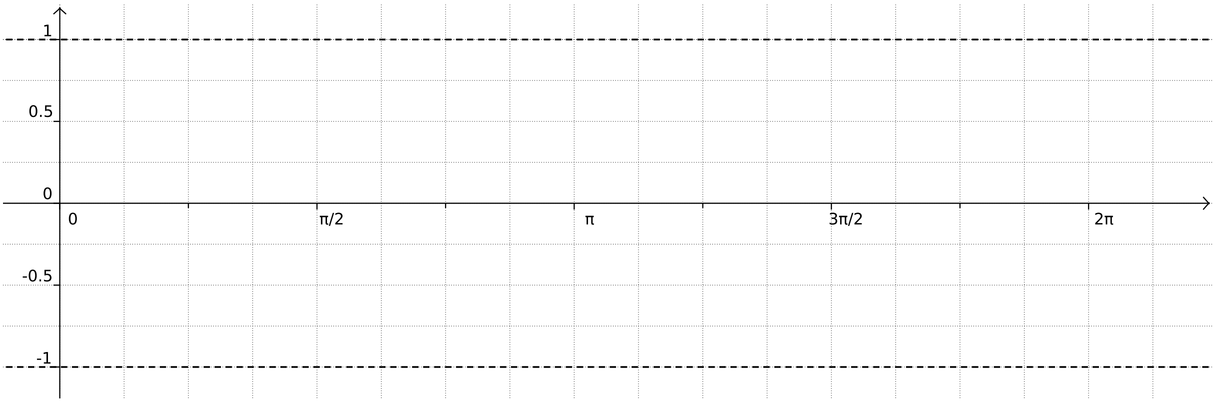
4.5 Studio delle funzioni trigonometriche

Con l'aiuto della circonferenza trigonometrica completa la seguente tabella:

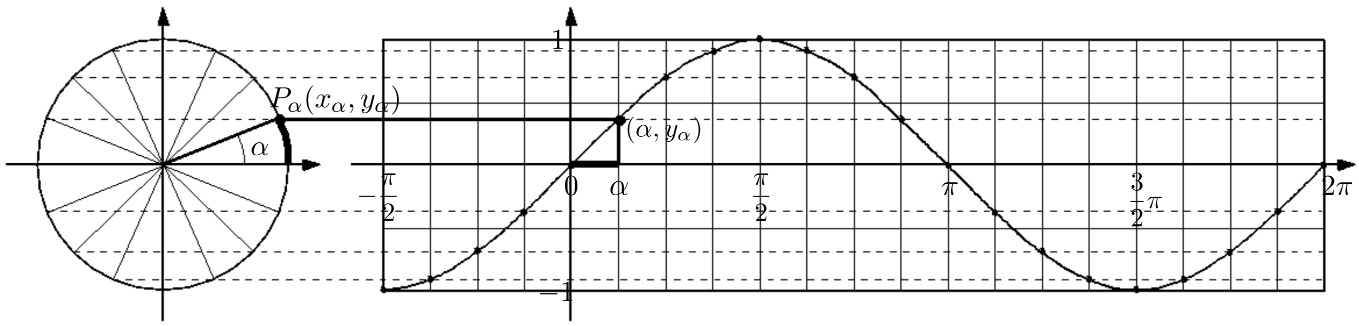
α^{rad}	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin(\alpha)$									
$\cos(\alpha)$									
$\tan(\alpha)$									



Utilizza ora la tabella qui sopra per tracciare il grafico per le funzioni seno e coseno:



La funzione seno



- **Insieme di definizione:** $\mathrm{D}_{\sin} =$ ....
- **Insieme delle immagini:** $\mathrm{Im}_{\sin} =$..
- **Periodicità:** la funzione seno è **periodica**, di **periodo** 2π (risp. 360°):
  $\sin\alpha =$ ....
- **Zeri:** notiamo che vale $\sin\alpha = 0 \iff \alpha =$ ....
- **Massimi e minimi:** la funzione seno assume il **valore massimo** $\sin\alpha = 1$ per:

  ....

  e il **valore minimo** $\sin\alpha = -1$ per :

  ....
- **Parità:** il seno è una funzione **dispari**, vale a dire: $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Inversa: nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione sin è iniettiva, e si può pertanto definirne l'inversa, detta **arcoseno**:

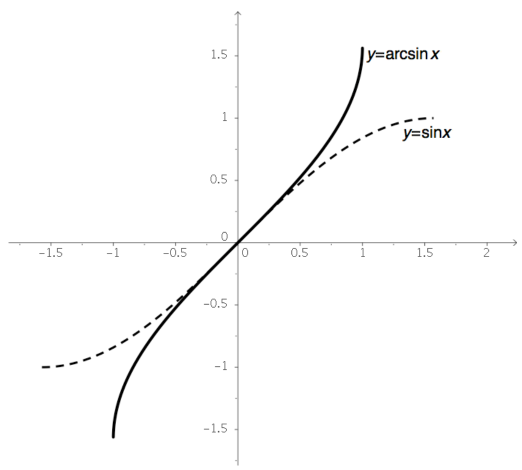
$$\begin{aligned} \arcsin : [-1\,,\,1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto y = \arcsin x \end{aligned}$$

dove $\arcsin x = y \iff \sin y = x$.

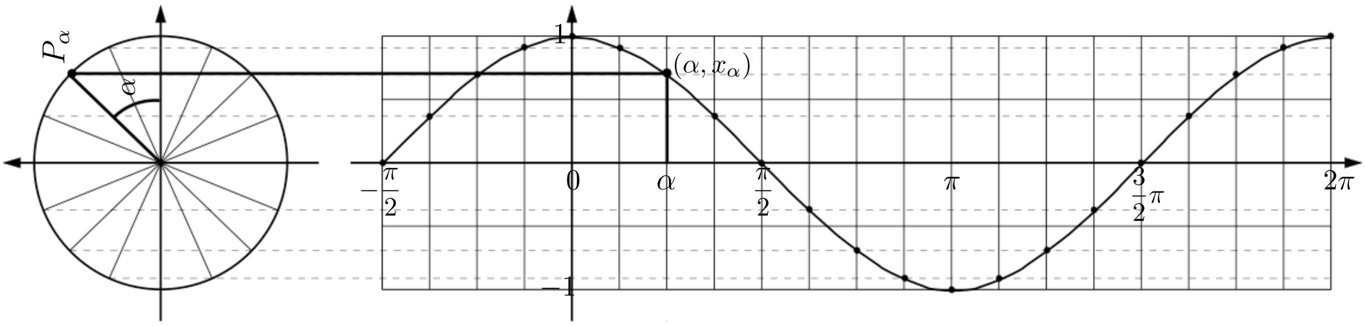
Per disegnare il grafico della funzione arcoseno, si può sfruttare la simmetria esistente tra una funzione e la sua inversa rispetto alla prima bisettrice (cioè la retta di equazione $y = x$).

Nota che vale

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= x \;,\; x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(\arcsin x) &= x \;,\; x \in [-1\,,\,1] \quad . \end{aligned}$$



La funzione coseno



- **Insieme di definizione:** $\mathrm{D}_{\cos} =$ ....
- **Insieme delle immagini:** $\mathrm{Im}_{\cos} =$ ....
- **Periodicità:** la funzione coseno è **periodica**, di **periodo** 2π (risp. 360°):
  $\cos\alpha =$ ....
- **Zeri:** notiamo che vale $\cos\alpha = 0 \iff \alpha =$ ....
- **Massimi e minimi:** la funzione coseno assume il **valore massimo** $\cos\alpha = 1$ per:

  ....

  e il **valore minimo** $\cos\alpha = -1$ per:

  ....
- **Parità:** il coseno è una funzione **pari**, vale a dire: $\cos(-x) = \cos(x)$.

Inversa: nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione cos è iniettiva, e si può pertanto definirne l'inversa, detta **arcocoseno**:

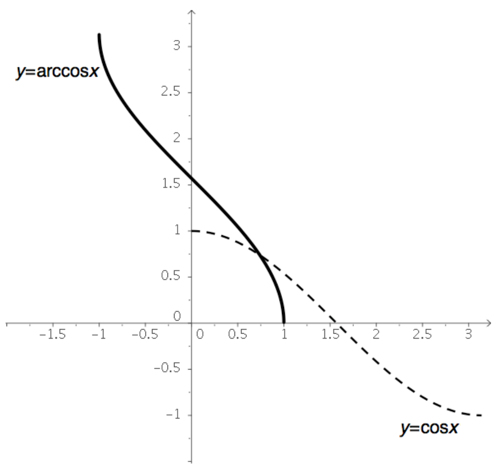
$$\begin{aligned} \arccos : [-1\,,\,1] &\longrightarrow [0\,,\,\pi] \\ x &\longmapsto y = \arccos x \end{aligned}$$

dove $\arccos x = y \iff \cos y = x$.

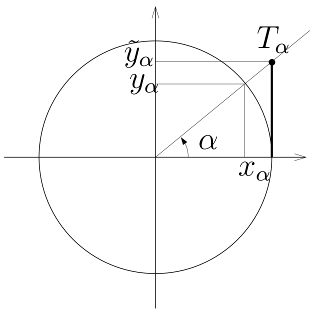
Per disegnare il grafico della funzione arcoseno, si può sfruttare nuovamente la simmetria esistente tra una funzione e la sua inversa rispetto alla prima bisettrice.

Nota che vale

$$\begin{aligned} \arccos(\cos x) &= x \;,\; x \in [0\,,\,\pi] \\ \cos(\arccos x) &= x \;,\; x \in [-1\,,\,1] \quad . \end{aligned}$$



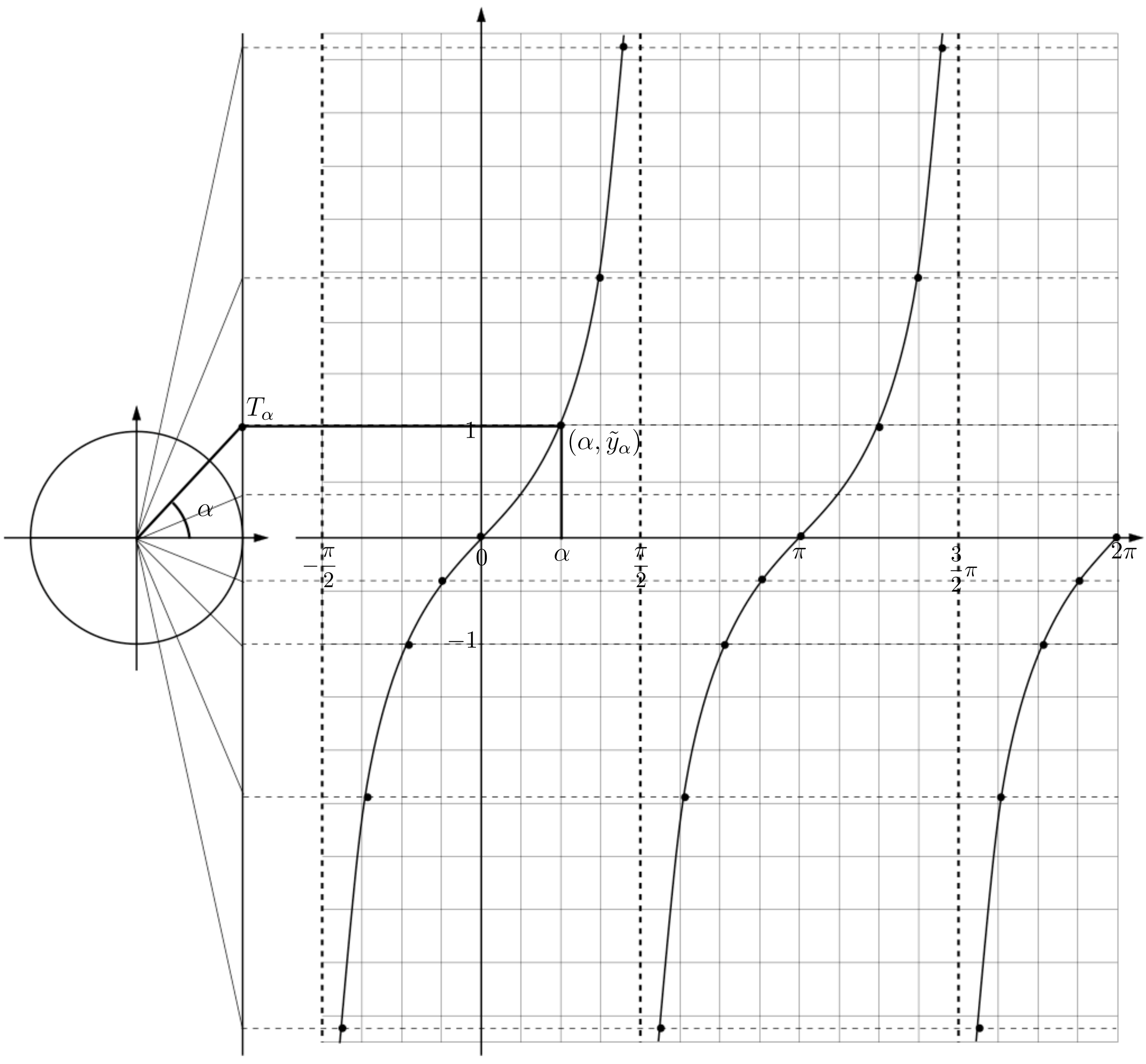
La funzione tangente



Ricorda: la **tangente** dell'angolo orientato α è l'ordinata $\tilde{y}_\alpha$ del punto T_α:

$$\begin{aligned} \tan : \mathrm{D}_{\tan} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \tan\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \tilde{y}_\alpha \end{aligned}$$

Disegniamo il **grafico** della funzione tangente nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$:



- **Insieme di definizione:**

- **Insieme delle immagini:** $\text{Im}_{\tan} =$ ....
- **Periodicità:** la funzione tangente è **periodica**, di **periodo** π (risp. $180°$):
  $\tan\alpha =$ ....
- **Zeri:** come abbiamo già notato, vale $\tan\alpha = 0 \iff$ ....
- **Parità:** la tangente è una funzione **dispari**, vale a dire: $\tan(-x) = -\tan(x)$.
  Dimostrazione: $\tan(-x) =$ ....

Inversa: nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la funzione tan è iniettiva, e si può pertanto definirne l'inversa, detta **arcotangente**:

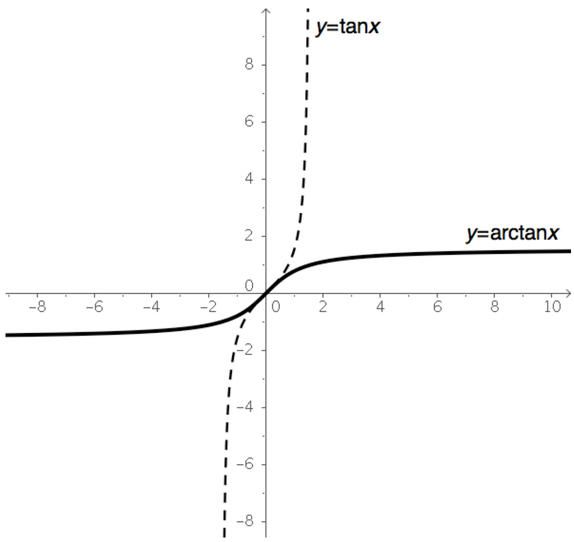
$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto y = \arctan x \end{aligned}$$

ove $\arctan x = y \iff \tan y = x$.

Sfruttiamo nuovamente la simmetria assiale rispetto alla retta $y = x$ per disegnare il grafico di arctan.

Nota che vale

$$\begin{aligned} \arctan(\tan x) &= x \ , \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \tan(\arctan x) &= x \ , \ x \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned}$$



5 Formule Trigonometriche

Come abbiamo potuto intuire i valori di seno, coseno e tangente sono in un qualche modo legati fra loro. È inoltre possibile "passare" da un quadrante all'altro senza stravolgere i valori delle funzioni trigonometriche e pure all'interno dello stesso quadrante ci sono delle regole di calcolo interessanti. È dunque importante analizzare (e dimostrare) in dettaglio queste formule (che potrai trovare sul formulario).

5.1 Alcune identità fondamentali

(i) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

(iii) $\operatorname{cotan}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \}$;

(iv) $\operatorname{cotan}\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k\dfrac{\pi}{2} \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Osservazione: si tratta di identità già incontrate nell'intervallo $]0, \frac{\pi}{2}[$. Per la dimostrazione (tralasciata) basta analizzare la situazione nel cerchio trigonometrico.

Applicazioni:

1) *Verifica le seguenti identità, e stabilisci per quali valori di α esse hanno senso:*

a) $\boxed{\cos^2\alpha = \dfrac{1}{\tan^2\alpha + 1}}$;

b) $\boxed{\tan\alpha + \operatorname{cotan}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\,\cos\alpha}}$.

2) *Descrivere le funzioni trigonometriche con il valore delle altre funzioni trigonometriche.*

a) $\boxed{\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$

b) $\boxed{\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$

c) $\boxed{\tan\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}}$

Dimostrazione:

Osservazione: Per determinare il segno delle formule viste qui sopra è necessario analizzare in quale quadrante si trova l'angolo α.

Esempio: sapendo che $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ e che $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, determina $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$

5.2 Argomenti opposti, complementari e supplementari

Calcolando qualche valore delle funzioni trigonometriche è facile intuire come esistano delle relazioni tra di esse:

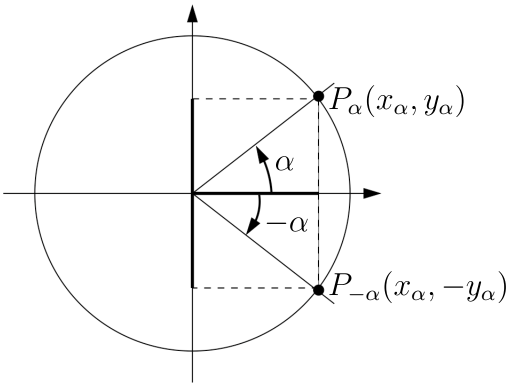
$\sin(30°) =$ .... $\sin(60°) =$ .... $\sin(10°) \cong$ .... $\sin(80°) \cong$ ....

$\cos(30°) =$ .... $\cos(60°) =$ .... $\cos(10°) \cong$ .... $\cos(80°) \cong$ ....

$\sin(-30°) =$ .... $\sin(150°) =$ .... $\sin(190°) \cong$ .... $\sin(100°) \cong$ ....

$\cos(-30°) =$ .... $\cos(150°) =$ .... $\cos(190°) \cong$ .... $\cos(100°) \cong$ ....

Argomenti opposti ($-\alpha$): rappresentiamo P_α e $P_{-\alpha}$ sul cerchio trigonometrico (per P_α nel I quadrante; nei rimanenti il disegno è del tutto analogo).



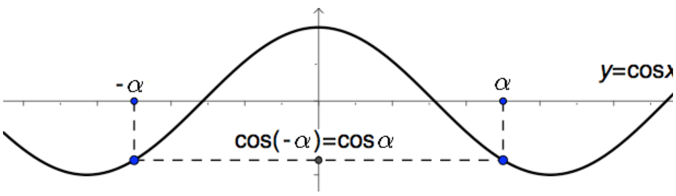
Ricaviamo immediatamente

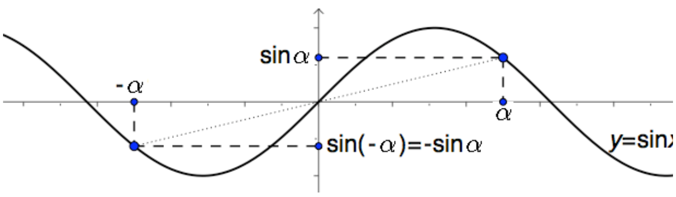
$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$, $\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$

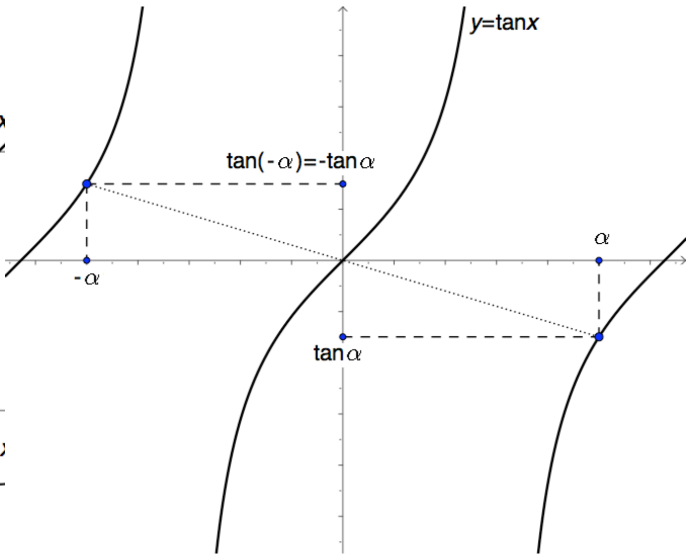
e da $\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ segue

$\boxed{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha}$ (per $\alpha \in \mathrm{D}_{\tan}$).

Conseguenze: Come abbiamo già notato dal grafico la funzione coseno è **pari**: vi è una simmetria rispetto all'asse Oy.
Le funzioni seno e tangente sono invece **dispari** e in questo caso abbiamo una simmetria rispetto all'origine degli assi cartesiano O.





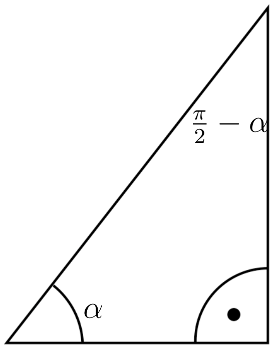


Esempio:
$\sin(-\frac{\pi}{3}) + 2\sin(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4}) + 3\cos(-\frac{\pi}{4}) =$ ....

....

Argomenti complementari ($\frac{\pi}{2} - \alpha$):

Per semplicità possiamo di nuovo fare riferimento al triangolo rettangolo (ma queste identità valgono per angoli qualsiasi). Facilmente notiamo come il *cateto adiacente* ad α è allo stesso tempo il *cateto opposto* dell'angolo complementare $\frac{\pi}{2} - \alpha$ e viceversa.



Ricaviamo immediatamente

$$\boxed{\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha} \quad , \quad \boxed{\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha}$$

e da $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ segue

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \text{cotan } \alpha} \quad (\text{per } \alpha \in \mathrm{D}_{\text{cotan}}).$$

Esempio: sapendo che $\cos(15°) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (v. serie di esercizi), determina:

$\sin(75°) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\cos(75°) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(Nota: per l'ultimo calcolo sfrutta le identità dimostrate nelle pagine precedenti).

Argomenti anticomplementari ($\frac{\pi}{2} + \alpha$):

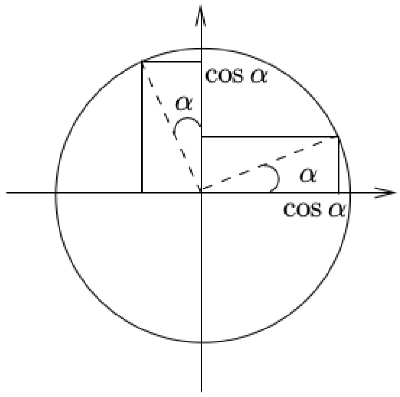
Ragionando sulla circonferenza trigonometrica possiamo ricavare le seguenti formule:

$$\boxed{\cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

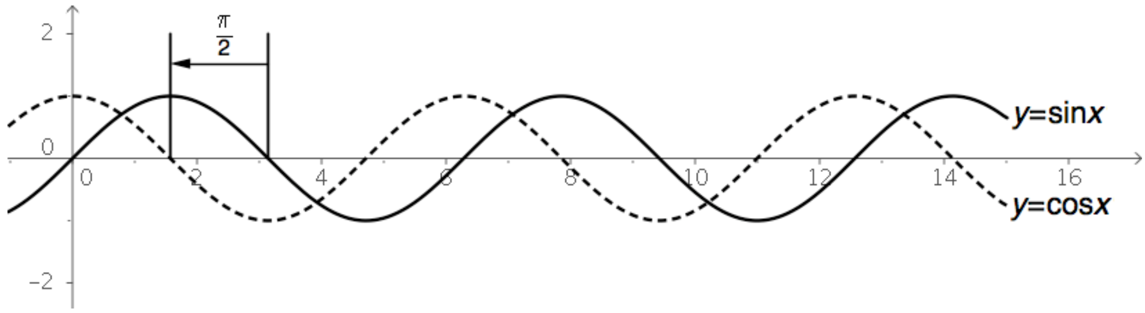
$$\boxed{\sin(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

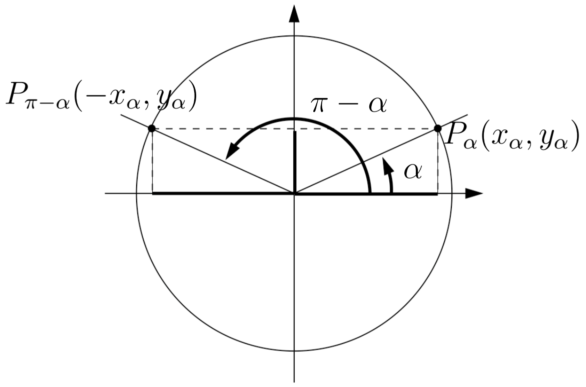
$$\boxed{cot(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$



La prima delle tre, $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, ha come conseguenza il fatto che *il grafico di $y = \cos x$ può essere ottenuto dal grafico di $y = \sin x$ grazie ad una traslazione di $\frac{\pi}{2}$ unità verso sinistra*:



Argomenti supplementari($\pi - \alpha$): rappresentiamo P_α e $P_{\pi-\alpha}$ sul cerchio trigonometrico (per P_α nel I quadrante; nei rimanenti il disegno è del tutto analogo).



Ricaviamo immediatamente

$\sin(\pi - \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\cos(\pi - \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e da $\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ segue

$\boxed{\tan(\pi - \alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ (per $\alpha \in \mathrm{D}_{\tan}$).

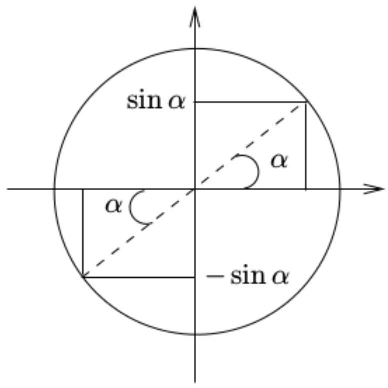
Argomenti antisupplementari ($\pi + \alpha$): ragionando ancora sulla circonferenza trigonometrica possiamo ricavare le seguenti formule:

$\boxed{\cos(\pi + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$\boxed{\sin(\pi + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$\boxed{\tan(\pi + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

$\boxed{cot(\pi + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$



Osservazioni:

i) È possibile dimostrare le formule degli angoli antisupplementari utilizzando gli angoli anticomplementari, ad esempio:
$\sin(\pi + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
e in modo analogo:
$\sin(\alpha + \frac{3}{2}\pi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(\alpha + \frac{3}{2}\pi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ii) Dalle ultime due formule abbiamo ancora ricavato che le funzioni tangente e cotangente hanno un periodo di π (seno e coseno hanno invece un periodo doppio: 2π).

iii) Combinando le formule possiamo ottenerne ulteriori:
$\cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sin(\alpha - \pi) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Applicazioni:

a) (**Riduzione al primo quadrante**): le relazioni appena studiate, assieme alla periodicità, permettono di ridurre il calcolo delle funzioni trigonometriche all'intervallo $[0°, 90°]$ risp. $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Esempi:

1) $\cos(6600°) =$ ....

2) $\sin(\frac{53}{2}\pi) =$ ....

3) $\sin(\frac{16}{3}\pi) =$ ....

b) *Semplifica:*

1) $\sin 750° + 2\,\sin 120° - \tan(-120°)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\,\cos\alpha + \sin\alpha\,\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\tan(\alpha + \pi)\,\cos(-\alpha)$;

4) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)}$.

Soluzioni:

5.3 Formule di addizione e sottrazione

Spesso siamo tenuti a ragionare come se tutti le funzioni si comportano in modo *lineare*, vale a dire che rispettano la regola $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Spesso però questo non è vero! Le funzioni trigonometriche rispettano questa regola? Puoi trovare dei contro-esempi?

Teorema

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$;

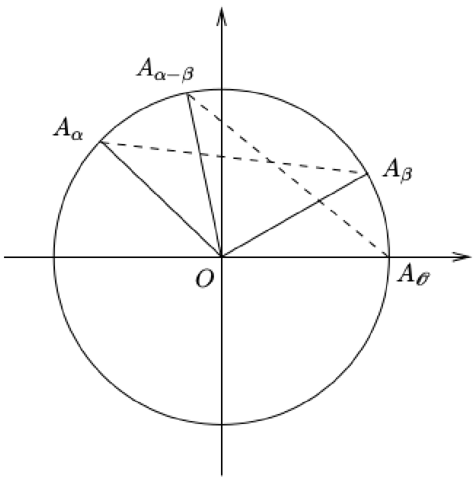
b) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Dimostrazione: iniziamo dalla formula di sottrazione (b).

Con riferimento alla figura qui accanto notiamo

$A_\alpha(\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots)$, $A_\beta(\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots)$,

$A_{\alpha-\beta}(\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots)$, $A_{\mathcal{O}}(\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots)$.



È facile notare che i triangoli $OA_\alpha A_\beta$ e $OA_{\alpha-\beta}A_{\mathcal{O}}$ sono uguali: in effetti due lati sono uguali (raggi della circonferenza) e l'angolo in O vale per entrambi $\alpha-\beta$. Dunque i lati tratteggiati hanno la stessa lunghezza, da cui segue:

Applicazione: determiniamo il valore *esatto* di:

$\cos 15° = \cos(45° - 30°) =$ ....

$\cos(75°) = \cos(45° + 30°) =$ ....

oppure $\cos(75°) = \cos(90° - 15°) =$ ....

Corollario

a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$;

b) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Dimostrazione: ricorda che: $\sin(\gamma) = \cos(\frac{\pi}{2}-\gamma)$. dunque:

Applicazione: calcoliamo il valore esatto di:

$\sin 15°=$ ....

Corollario:

a) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$;

b) $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$.

Dimostrazione:

Applicazione: calcoliamo:

$\tan 15° =$ ....

$\tan 75° =$ ....

5.4 Altre formule utili

Ponendo $\alpha = \beta$ nelle formule di addizione si ottengono immediatamente le **formule di duplicazione**:

$\sin(\alpha + \alpha) =$ ....

Duplicazione: 2α

a) $\sin(2\alpha) = 2\,\sin\alpha\,\cos\alpha$;

b) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\,\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

c) $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\,\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

Esempio: sapendo che $\sin(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e $\cos(18°) = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$:

$\sin(36°) = \sin(2 \cdot 18°) =$ ....

$\cos(120°) = \cos(2 \cdot 60°) =$ ....

Bisezione: $\frac{\alpha}{2}$

a) $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$;

b) $\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$;

c) $\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Dimostrazione: per la seconda identità osserva come $\cos\alpha = \cos\left(2 \cdot \dfrac{\alpha}{2}\right)$ e dunque possiamo applicare la formula di duplicazione. Per la seconda è comodo utilizzare la prima (**a**) e l'identità fondamentale. La terza segue dalle prime due.

Applicazione: calcoliamo $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ e $\sin\left(\frac{-\pi}{8}\right)$.

Osservazione: come visto nell'ultimo esempio, nell'estrarre la radice, occorre prestare attenzione al segno a seconda del quadrante in cui si trova l'angolo.

Concludiamo con due famiglie di formule che permettono di modificare la somma o moltiplicazione tra funzioni trigonometriche.

Prostaferesi: $\alpha \pm \beta$

a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\,\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$;

d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\,\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Dimostrazione: tralasciata

Werner: $\alpha \cdot \beta$

a) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big)$;

b) $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big)$;

c) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big)$.

Dimostrazione: tralasciata.

Esempio:

$\sin 60 + \sin 30 =$ ....

6 Teoremi del seno e del coseno

6.1 Esistenza e congruenza dei triangoli

Già nel caso di un triangolo rettangolo ci siamo soffermati sulle **condizioni di esistenza**, ovvero quali regole devono rispettare le misure interne (lati e angoli) per garantire l'esistenza di un triangolo rettangolo così come le **condizioni di congruenza**, vale a dire le regole che permettono di capire come due triangoli siano *lo stesso* solamente ruotato, specchiato o spostato.
Possiamo estendere questo concetto anche ai triangoli qualsiasi.

Esempio introduttivo: Utilizzando riga, compasso e goniometro prova a costruire dei triangoli che rispettano le seguenti misure. Misura in seguito le misure (lati e angoli) mancanti. Cosa puoi osservare?

a) Un angolo interno è rettangolo, un secondo angolo misura 20 gradi e il cateto adiacente a questo angolo misura 10 [q].

b) I tre lati misurano 6, 8 e 9 [q].

c) Due angoli misurano 45 e 60 gradi e il lato opposto all'angolo di 45 gradi misura 7 [q].

d) I lati misurano 6, 10 e 20 [q].

e) Gli angoli interni misurano 30, 60 e 90 gradi.

f) Un angolo misura 20 gradi, il lato adiacente a questo angolo misura 10 [q] mentre il lato opposto all'angolo dato misura 5 [q].

g) Un lato misura 10 [q] e l'angolo opposto misura 20 gradi.

h) Un lato misura 10 [q], un lato 8 [q] e l'angolo opposto a quest'ultimo è di 40 gradi.

Teorema: Esistenza e congruenza dei triangoli

Condizioni di esistenza: date tre misure interne è possibile costruire un triangolo se valgono le seguenti regole:

- Se si conoscono i tre lati: a, b e c: ....
- Se si conoscono due lati e un angolo α: ....
- Se si conoscono un lato e due angoli α, β: ....

Condizione di congruenza: in generale se di un triangolo si conoscono tre misure interne, di cui almeno un lato, esso è **univocamente determinato**. Ciò vuol dire che ogni altro triangolo con le stesse misure interne sarà congruente ad esso.

L'unica eccezione a questa regola è data dal caso: ....

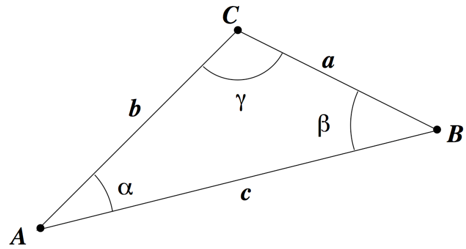
....

6.2 Il Teorema del coseno

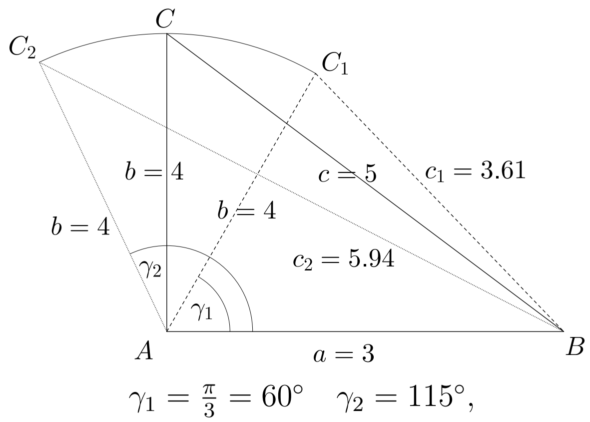
Nel caso del triangolo rettangolo, grazie alle funzioni trigonometriche, era possibile *completare* il triangolo cioè trovare le misure (angoli, lati) mancanti. La domanda spontanea è se questo è possibile anche nel caso di un triangolo non rettangolo.

Notazione standard per i vertici, i lati e gli angoli di un triangolo:

- α è l'angolo in A, a il lato opposto ad α;
- β è l'angolo in B, b il lato opposto a β;
- γ è l'angolo in C, c il lato opposto a γ.



Esempio introduttivo
Considera il triangolo rettangolo ABC di misure $a = 3, b = 4$ e $c = 5$ $(3^2 + 4^2 = 5^2)$. Manteniamo invariate le misure dei due lati a e b.

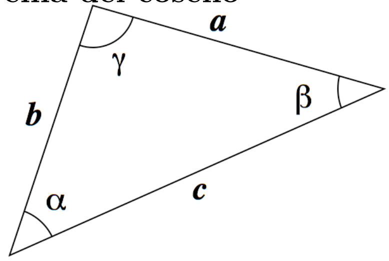


- Se l'angolo in A viene diminuito (come nel caso $\gamma_1 < \frac{\pi}{2}$ del triangolo tratteggiato ABC_1) anche il terzo lato diminuirà (in questo caso misura 3.61).
- Se l'angolo in A viene aumentato (come nel caso $\gamma_2 > \frac{\pi}{2}$ del triangolo puntinato ABC_2) allora il terzo lato sarà più grande (in questo caso misura 5.94).

Osservazione: si intuisce come vi sia un rapporto tra l'ampiezza dell'angolo compreso tra i lati e la misura del lato opposto, ma è da notare che non è un rapporto "lineare" (vale a dire: *dimezzando l'angolo la lunghezza del lato non viene dimezzata*).

Per poter "aggiustare" dunque il teorema di Pitagora (e completare un triangolo in determinati casi) introduciamo il:

Teorema del coseno

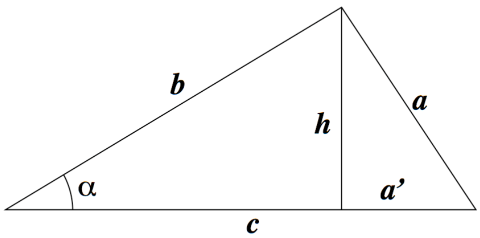


$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad .
\end{aligned}
$$

Esempio: Calcola la lunghezza di c_1 e c_2 dell'esempio introduttivo:

....

Dimostrazione: ci occupiamo della prima delle tre formule (le altre sono analoghe) per il caso in cui α è un angolo acuto e l'altezza relativa a c si trova all'interno del triangolo. Gli alri casi sono analoghi.



Con la trigonometria possiamo facilmente ottenere:

$h =$ ....

$a' =$ ....

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo interno destro:

$$a^2 = h^2 + (a')^2$$

e applicando quanto visto sopra otteniamo:

Esempio 2: Con riferimento al triangolo alla pagina precedente, risolvi il triangolo per

a) $a = 10$, $b = 7$, $c = 15$

b) b, c e γ generici

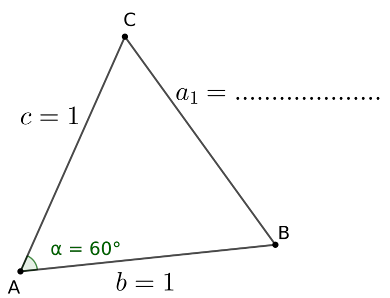
c) $b = 10$, $c = 20$, $\alpha = 150°$

d) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ e $c = 5$

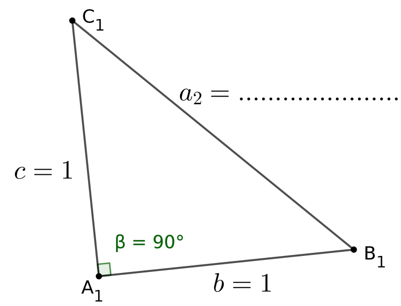
6.3 Il Teorema dei seni

Con il teorema del coseno siamo in grado di risolvere molti triangoli ma esso necessita la conoscenza di **almeno 2 lati** (v. esempio b) della pagina precedente).

Esempio introduttivo:
Di un triangolo vengono fissate le misure di due lati e viene fatto variare l'angolo tra questi due lati. Ovviamente la misura del terzo lato (opposto all'angolo) è *in relazione all'angolo*: se l'angolo aumenta allora aumenterà anche la misura del lato. Facilmente possiamo verificare se questa è una proporzionalità diretta (lineare), cioè se per un angolo doppio si ottiene un lato doppio e così via.
Completa la figura qui sotto:



$\Rightarrow$



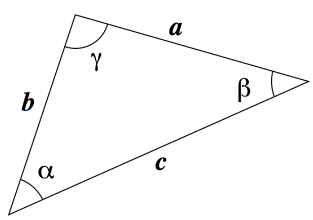
$\alpha = 60^\circ \ \Rightarrow \ \beta = 90^\circ = \ldots\ldots\ldots \ \cdot\alpha$ $\qquad a_1 = \ldots\ldots\ldots \ \Rightarrow \ a_2 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots \ \cdot a_1$

Cosa puoi concludere?

. . . .

Per descrivere correttamente questa relazione (angolo-lato opposto) dobbiamo utilizzare la funzione seno come segue:

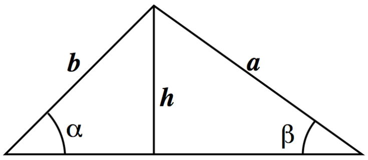
Il teorema del seno
In un triangolo qualsiasi le misure dei lati sono direttamente proporzionali ai seni degli angoli opposti ad essi:



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad .$$

Dimostrazione: nota che il Teorema è espresso da 3 uguaglianze. Ci occupiamo della prima, mostriamo cioè che $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Occupiamoci del caso in cui α e β sono acuti; sia h l'altezza relativa a c:



Facendo riferimento ai due triangoli interni possiamo calcolare h in due modi:

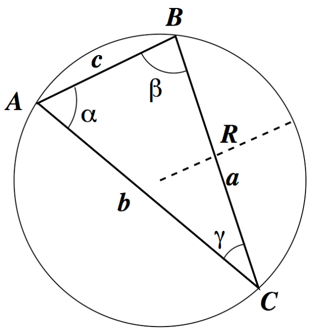
$h =$............. $h =$.............

Eguagliando queste due formulazioni otteniamo:

.... ■

Il Teorema del seno può essere precisato esplicitando il valore della costante di proporzionalità:

Teorema



In un triangolo ABC vale

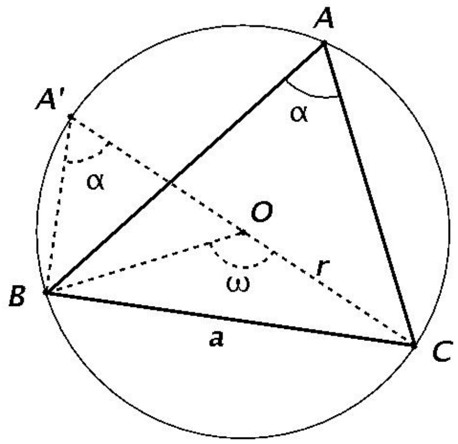
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

ove r è il raggio del cerchio *circoscritto* ad ABC.

Dimostrazione: se il vertice A del triangolo e il centro O della circonferenza circoscritta si trovano *dalla stessa parte di a* (cfr. figura a destra) vale

$$\widehat{BAC} = \widehat{BA'C} = \alpha = \frac{1}{2}\omega$$

(dal momento che si tratta di angoli alla circonferenza relativi all'angolo al centro $\omega = \widehat{BOC}$); inoltre l'angolo $\widehat{A'BC}$ è retto (dal momento che è inscritto in una semicirconferenza).



Vale quindi

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|A'C|} = \frac{a}{2r} \qquad \text{e quindi} \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

Analogamente si dimostra che vale

$$\sin\beta = \frac{b}{2r} \qquad \text{e} \qquad \sin\gamma = \frac{c}{2r} \qquad ■$$

Esempi Completa il triangolo sapendo che ...

a) ... $\alpha = 27°$, $\beta = 130°$, $c = 17$.

b) ... $b = 10$, $c = 15$, $\gamma = 40°$.

c) ... $b = 10$, $c = 8$, $\gamma = 40°$.

Rappresenta la situazione relativa al punto c), cosa osservi?

Attenzione: come già visto geometricamente, anche a livello algebrico il caso "LlA" genera due differenti soluzioni.

7 Equazioni trigonometriche

Un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di funzioni trigonometriche è detta **equazione trigonometrica**. Abbiamo già incontrato alcuni semplici esempi:

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \text{..........}$$

ma questa è l'unica soluzione se consideriamo solamente il primo quadrante. In realtà una seconda soluzione sarebbe: $x =$ .... Sapendo inoltre che la funzione seno ha un periodo di 2π possiamo concludere che l'insieme delle soluzioni comprende:

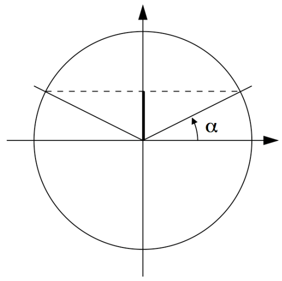
$\mathcal{S} =$ . . . .

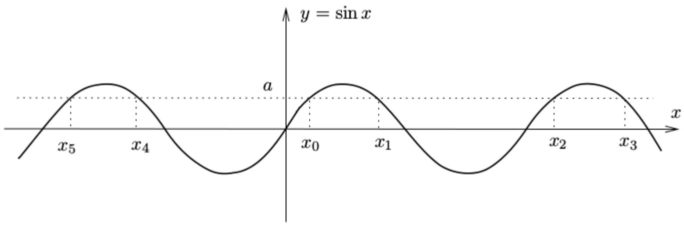
$=$ . . . .

7.1 Equazioni elementari

Come abbiamo visto nell'esempio introduttivo qui sopra per la risoluzione di un'equazione trigonometrica si utilizzano le inverse delle funzioni trigonometriche (arcoseno, arcseno e arctangente).
Bisogna però fare attenzione poichè, data la periodicità di seno, coseno e tangente, avremo un numero **infinito** di soluzioni.

(i) $\boxed{\sin x = a}$

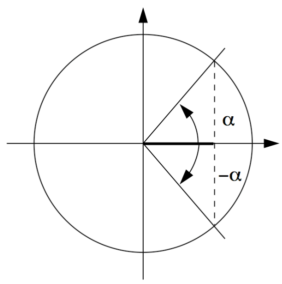




Esempio: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

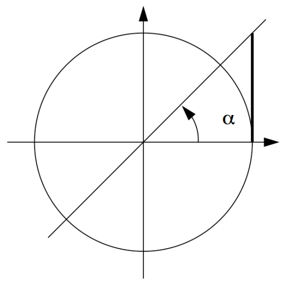
Osservazione: l'equazione $\sin x = a$ (come pure nel caso $\cos x = a$) ha soluzioni solamente se $a \in [-1; 1]$).

(ii) $\boxed{\cos x = a}$



Esempio: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) $\boxed{\tan x = a}$



Esempio: $\tan x = 1 \iff$ ....

(iv) $\boxed{\operatorname{cotan} x = a}$: simile a **(iii)**.

Esempi:

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$

2) $\sin x = \sin 20°$

3) $5\,\sin x + 1 = 2\sin x$

4) $\cos x = 1$

5) $\cos x = \dfrac{3}{2}$

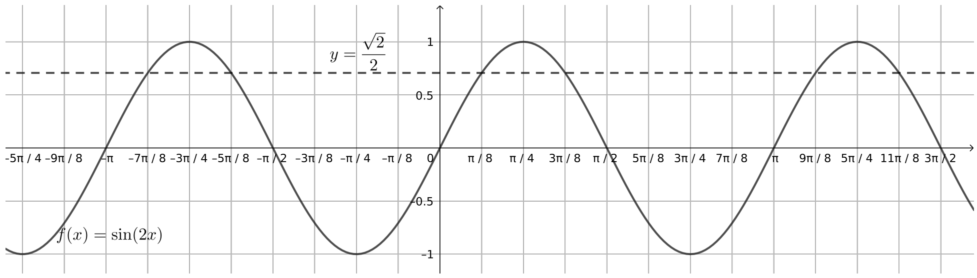
6) $\tan x = \sqrt{3}$

7) $\operatorname{cotan} x = \sqrt{3}$

7.2 Altri tipi di equazioni elementari

Prova a risolvere l'equazione: $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e indica l'insieme delle soluzioni elencando almeno 4 possibili soluzioni.

Confronta ora i tuoi risultati con la risoluzione geometrica seguente:



Cosa noti? Risolvi nuovamente l'equazione.

In generale, la **strategia** per risolvere un'equazione trigonometrica consiste nello sfruttare opportunamente le forme **(i)-(iv)**, riconducendosi ad esse grazie ad opportune trasformazioni algebriche.
Ad esempio si possono affrontare come segue le seguenti forme generali:

- $\sin\Big(f(x)\Big) = \sin\Big(g(x)\Big) \iff f(x) = g(x) + 2k\pi$
- $\cos\Big(f(x)\Big) = \cos\Big(g(x)\Big) \iff f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$ ecc.
- $\tan\Big(f(x)\Big) = \tan\Big(g(x)\Big) \iff f(x) = g(x) + k\pi$ ecc.

Esempi: 1) $\tan(3x) = \tan 81°$ **2)** $\sin(nx) = \sin(mx)$ **3)** $\cos(5x - 20°) = \cos(x + 30°)$

Equazioni della forma $\boxed{\sin\Big(f(x)\Big) = \cos\Big(g(x)\Big)}$: si possono sfruttare le formule per gli argomenti *complementari* ovvero:

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{oppure anche} \quad \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad .$$

Esempi: **1)** $\sin(2x) = \cos(3x)$ **2)** $\sin x + \cos x = 0$ **3)** $\sin(2x) = \cos(x)$

Attenzione: risolvi nuovamente l'ultima equazione sfruttando la formula di *duplicazione del seno*: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

7.3 Equazioni lineari in seno e coseno:

Un'equazione trigonometrica si dice **lineare** in $\sin x$ e $\cos x$ se è della forma

$$a\sin\Big(f(x)\Big) + b\cos\Big(f(x)\Big) = c$$

con a, b e c numeri reali.

(i) $\boxed{a\sin\Big(f(x)\Big) + b\cos\Big(f(x)\Big) = 0}$ (omogenea, cioè con $c = 0$)

Esempio: $\sin x + \cos x = 0 \iff \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \iff \tan x = -1$
$\iff \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ e quindi $\mathcal{S} = \{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) $\boxed{a\sin x + b\cos x = c}$ (con $c \neq 0$)

Questo tipo di equazioni risultano più complesse e bisogna utilizzare un risultato già visto in precedenza, ovvero scrivere le funzioni seno e coseno in relazione di $t = \tan(\frac{x}{2})$. Ricordando che:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

otteniamo:

$$a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - c = 0 \iff 2at + b - bt^2 - c - ct^2 = 0 \iff -(b+c)t^2 + 2at + b - c = 0.$$

Abbiamo quindi un'equazione di secondo grado nell'incognita t. Trovare le due relative soluzioni t_1 e t_2 con la funzione arctangente possibile trovare le soluzioni del problema originale.

Esempio: risolvi $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$

7.4 Equazioni quadratiche

Anche nel caso in cui le funzioni trigonometriche compaiano al quadrato, è possibile risolverle utilizzando alcune tecniche.

(i) $\boxed{a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) = c}$ (con $f(x)$ una funzione trigonometrica).

Grazie ad opportune sostituzioni ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$) esse vengono ricondotte a comuni equazioni quadratiche, le quali possono essere risolte mediante scomposizione o con la *formula risolutiva*.

Esempi: 1) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ **2)** $\tan x + \sqrt{3}\,\mathrm{cotan}\, x = 1 + \sqrt{3}$

3) $\sin^2 x - 7\cos x = 7$

(ii) $\boxed{a \cdot \sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + c\cos^2(x) = d}$

Si parla in questo caso di **equazione non omogenea di secondo grado**. Per la risoluzione bisogna dividere per $\cos^2(x)$. Otteniamo dunque:

$$a\tan^2(x) + b\tan(x) + c - \frac{d}{\cos^2(x)} = 0.$$

Notando che $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+1 = \tan^2(x)+1$ e sostituendo $t = \tan(x)$ otteniamo:

$$a\tan^2(x) + b\tan(x) + c - d\tan^2(x) - d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-d)t^2 + bt + c - d = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita t.

Esempio: risolvi $\sin^2(x) - (1+\sqrt{3})\sin(x)\cos(x) + \sqrt{3}\cos^2(x) = 0$.

Osservazione: Per risolvere l'ultima equazione abbiamo diviso per $\cos^2(x)$, ciò implica che abbiamo escluso $\cos(x) = 0$ come una possibile soluzione. È però necessario verificare questa soluzione e se è il caso aggiungere le soluzioni $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ all'insieme delle soluzioni.

Esempio: risolvi $\sqrt{3}\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) = 0$.

7.5 Equazioni trascendenti

Alcune equazioni non sono risolvibili algebricamente: ad esempio l'equazione $\boxed{\cos(x) = x}$ possiede una soluzione (basta schizzare il grafico di $y = \cos(x)$ e $y = x$ e vedere che vi è un'intersezione) ma il suo valore non può essere calcolato direttamente.
Sapendo che una soluzione esiste[3] è però possibile *approssimarla* tramite degli **algoritmi iterativi** (come ad esempio l'algoritmo di bisezione): utilizzando più volte lo stesso schema di calcolo è possibile avvicinarsi sempre meglio alla soluzione cercata.

[3] questo risultato verrà spiegato in dettaglio con il concetto di "continuità" di una funzione trattato in III

8 Il modello armonico semplice

Molti fenomeni fisici possono essere descritti (o approssimati) con l'utilizzo delle funzioni trigonometriche: le maree, l'alternanza tra dì e notte (cioè ore di sole e ore di oscurità), il comportamento delle onde radio, eccetera. Per poter sfruttare quanto visto fin'ora occupiamoci ora di funzioni reali del tipo

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = y_0 + A\,\sin\left(\omega\, x + \varphi\right) \quad , \end{aligned}$$

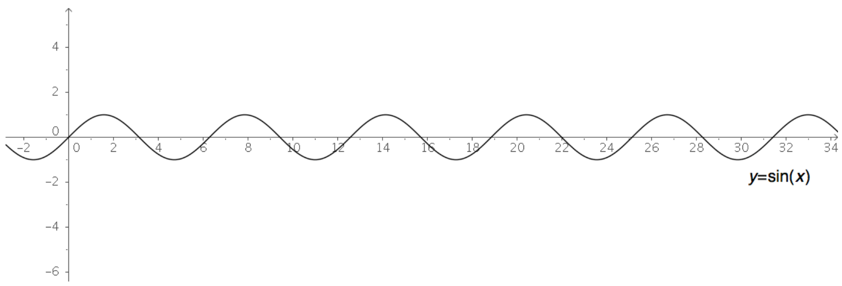
studiando l'influsso dei parametri y_0, A, ω e φ.

Esempio introduttivo: *rappresentiamo il grafico della funzione reale*

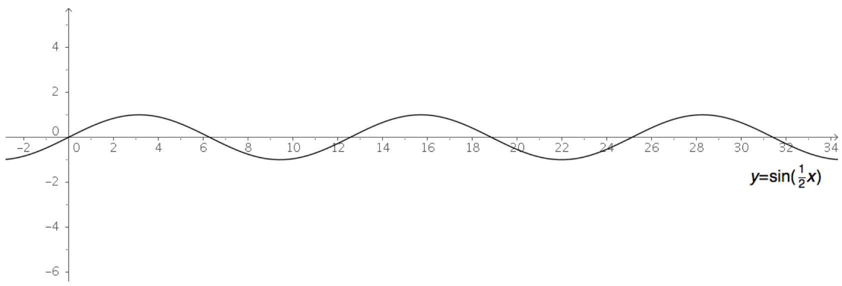
$$f : x \longmapsto y = 5 + 3\,\sin\left(\frac{1}{2}\,x - 1\right)$$

nell'intervallo $[0, 8\pi]$.

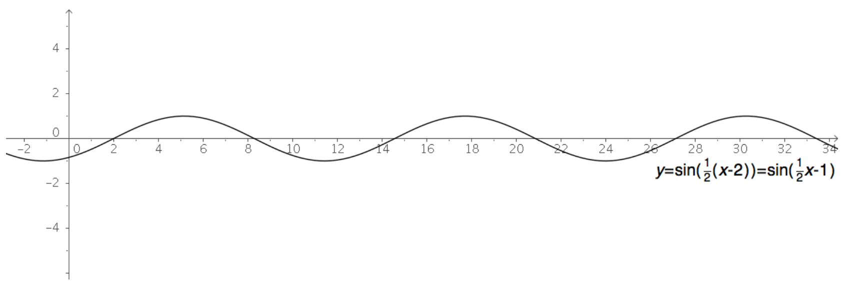
Osservando che vale $5 + 3\,\sin\left(\frac{1}{2}\,x - 1\right) = 5 + 3\,\sin\left(\frac{1}{2}(x-2)\right)$, possiamo "ricostruire" il grafico di f a partire dal grafico della funzione seno come segue:
ll grafico della funzione $y = \sin x$ ...



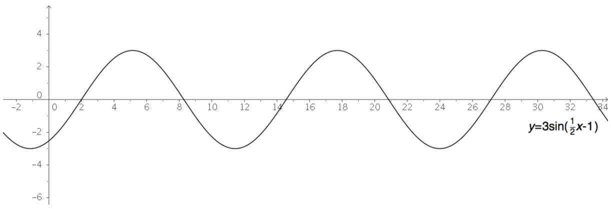
... viene dapprima dilatato *orizzontalmente* di un fattore 2 ...

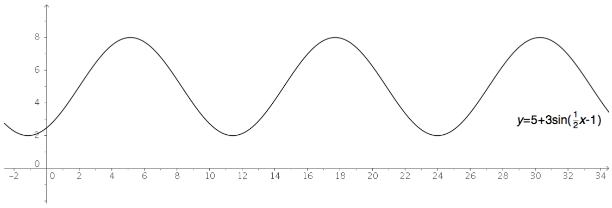


... in seguito traslato *verso destra* di 2 unità ...



... poi dilatato *verticalmente* di un fattore 3 ... e infine traslato *verso l'alto* di 5 unità.





Una funzione del tipo

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) \end{array} \quad ,$$

può essere chiamata "**funzione armonica semplice**"; y_0 è lo **spostamento verticale**, $|A|$ è l'**ampiezza**, ω è la **pulsazione** e φ è la **fase iniziale**.

Proprietà della funzione f:

- **Insieme di definizione:** $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$.
- **Insieme delle immagini:** $\mathrm{Im}_f = \big[y_0 - |A|\,,\, y_0 + |A|\big]$.
- **Massimi:** se $A > 0$, la funzione f assume il valore massimo $y = y_0 + A$ se

  $$y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) = y_0 + A \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\omega\,x+\varphi) = +1 \quad ,$$

  se $A < 0$, la funzione f assume il valore massimo $y = y_0 - A$ se

  $$y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) = y_0 - A \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\omega\,x+\varphi) = -1 \quad .$$

- **Minimi:** se $A > 0$, la funzione f assume il valore minimo $y = y_0 - A$ se

  $$y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) = y_0 - A \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\omega\,x+\varphi) = -1 \quad ,$$

  se $A < 0$, la funzione f assume il valore minimo $y = y_0 + A$ se

  $$y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) = y_0 + A \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\omega\,x+\varphi) = +1 \quad .$$

- **Zeri:** vale $f(x) = 0$ se

  $$y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\omega\,x+\varphi) = -\frac{y_0}{A} \quad .$$

  In particolare, se $|y_0| > |A|$ la funzione non possiede zeri.

- **Periodicità:** f è periodica, di *periodo* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

  Dimostrazione:

  $$\begin{aligned} f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right) &= y_0 + A\,\sin\left(\omega\,\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi+2\pi) = \\ &= y_0 + A\,\sin(\omega\,x+\varphi) = f(x) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio: studia la funzione $f(x) = 3 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ e rappresentala nel diagramma cartesiano: