Serie 8 - Equazioni Trigonometriche

"Il pensiero costituisce la grandezza dell'uomo."

B. Pascal

1. Risolvi le seguenti equazioni:

a) $\sin(x) = 0.5$

b) $\sin x = -0.4321$

c) $\cos(x) = 2$

d) $\tan(x) = -0.4321$

e) $\cot(x) = 2.411$

f) $\sin(x + 40°) = \frac{3}{4}$

g) $\sin^2(x) - 1 = 0$

h) $2\cos(x) - 3\cos(x) = 0$

2. Risolvi le seguenti equazioni trigonometriche (x in radianti, dove non è specificato):

a) $\cos\, x = \frac{1}{2}$;

b) $\tan(2x) = -1$;

c) $\sin\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\sin(5x + 3°) = \sin(6x + 45°)$;

e) $\cos\left(2x - \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$;

f) $\sin\, 2x + \cos\, x = 0$;

g) $\text{cotan}(2x) = -\text{cotan}(4x + 220°)$;

h) $\sin(50° - x) = \sqrt{3} \cdot \cos(50° - x)$;

i) $2\sin(x) = \tan(x)$;

j) $3\sin^2(x) + 2\sin(x) = 5$;

k) $5\sin x + 7 = 11 - 3\sin x$;

l) $\sin(3x + 70°) = \cos(x - 40°)$;

m) $\sin x \cdot (\sin x + 1) = \cos^2 x$;

n) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1$;

o) $\tan x - \sin^2 x - \sqrt{3} = \cos^2 x - 1$.

p) $2\sin x + 3\cos x = 2$

q) $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$

3. * Come abbiamo visto l'equazione

$$\cos(x) = x$$

non è risolvibile con metodi algebrici ma è possibile approssimare la sua soluzione con degli algoritmi. Oltre all'algoritmo di bisezione un'ulteriore possibilità è la seguente: sia x_0 un valore qualsiasi nell'intervallo $\left]\, 0\, ,\, \frac{\pi}{2}\, \right[$; calcola

$$x_1 = \cos(x_0) \quad , \quad x_2 = \cos(x_1) \quad , \quad x_3 = \cos(x_2) \quad \ldots$$

(l'iterazione può essere ottenuta premendo ripetutamente il tasto `cos` della calcolatrice). I valori x_1, x_2, x_3, ... rappresentano approssimazioni sempre più precise della soluzione.
Perché questo metodo funziona? (Prova a ragionare graficamente...)

4. Risolvi, in radianti, le seguenti equazioni utilizzando le formule di duplicazione e triplicazione:

a) $2\sin x + \sin(2x) = 0$;

b) $\cos(2x) + \sin^2 x = 0$;

c) $\sin(3x) + \sin x = 0$;

d) $\cos(3x) + \cos x = 0$.

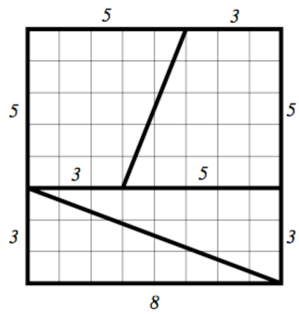
5. Risolvere il seguente sistema di equazioni trigonometriche

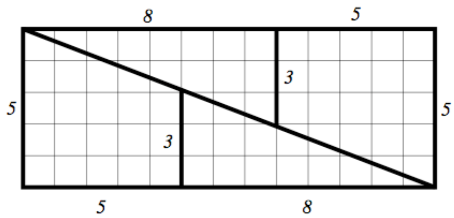
$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

6. * Risolvere le seguenti disequazioni

a) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$,
b) $2\sin^2 x - 4\cos x - 2 > 0$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

7. * Un quadrato di lato 8 unità viene scomposto in 2 trapezi rettangoli e 2 triangoli rettangoli come nella figura a sinistra. Essi vengono poi ricomposti per formare la figura a destra:





Determina le aree del quadrato a sinistra e del rettangolo a destra. Noti qualcosa di strano? Come te lo spieghi?

8. * La circonferenza della terra all'equatore misura $40'080$ km (circa). Immagina di cingere l'equatore con una cintura d'acciaio perfettamente aderente; supponi che questa cintura sia perfettamente circolare.
Supponi ora di allungare questa cintura di 3 m, e di disporla ancora a cerchio attorno all'equatore: questa volta non sarà più così aderente come prima!
Sarà possibile strisciarvi sotto?

Soluzioni

1. Soluzioni:

a) $\mathcal{S} = \{30° + k \cdot 360° | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{150° + k \cdot 360° | k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\mathcal{S} = \{334.4° + k \cdot 360° | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{205.6° + k \cdot 360° | k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\mathcal{S} = \emptyset$

d) $\mathcal{S} = \{336.6° + k \cdot 180° | k \in \mathbb{Z}\}$

e) $\mathcal{S} = \{22.5° + k \cdot 180° | k \in \mathbb{Z}\}$

f) $\mathcal{S} = \{8.6° + k \cdot 360° | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{91.4° + k \cdot 360° | k \in \mathbb{Z}\}$

g) $\sin^2(x) - 1 = 0 \iff \sin(x) = \pm 1 \iff \mathcal{S} = \{90° + k \cdot 180° | k \in \mathbb{Z}\}$

h) $2\cos(x) - 3\cos(x) = 0 \iff 2\cos(x) = 3\cos(x) \iff \cos(x) = 0 \iff \mathcal{S} = \{90° + k \cdot 180° | k \in \mathbb{Z}\}$

2. **a)** $\cos x = \dfrac{1}{2} \iff \cos x = \cos \dfrac{\pi}{3}$. Quindi $\mathcal{S} = \left\{ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $\tan(2x) = -1 \iff \tan(2x) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \iff 2x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi = \dfrac{3}{4}\pi + k\pi \iff x = \dfrac{3}{8}\pi + k\dfrac{\pi}{2}$. Quindi $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{3}{8}\pi + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\iff x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi$.

Quindi $\mathcal{S} = \left\{ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) $\sin(5x + 3°) = \sin(6x + 45°)$

$\iff 5x + 3° = 6x + 45° + k \cdot 360°$ oppure $5x + 3° = 180° - (6x + 45°) + k \cdot 360°$

$\iff -x = 42° + k \cdot 360°$ oppure $11x = 132° + k \cdot 360°$

$\iff x = -42° + k \cdot 360°$ oppure $x = 12° + k \cdot \frac{360°}{11}$.

Quindi $\mathcal{S} = \{-42° + k \cdot 360° \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ 12° + k \cdot \frac{360°}{11} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

e) $\cos\left(2x - \dfrac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(x + \dfrac{1}{2}\pi\right) \iff 2x - \dfrac{3}{4}\pi = \pm\left(x + \dfrac{1}{2}\pi\right) + 2k\pi$

$\iff 2x - \dfrac{3}{4}\pi = x + \dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi$ oppure $2x - \dfrac{3}{4}\pi = -x - \dfrac{1}{2}\pi + 2k\pi$

$\iff x = \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi$ oppure $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}k\pi$.

Quindi $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{5}{4}\pi + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2}{3}k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

f) $\sin 2x + \cos x = 0 \iff \sin 2x = -\cos x \iff \sin 2x = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$\iff \sin 2x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

$\iff 2x = -\dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi$ oppure $2x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi$

$\iff x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ oppure $x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}k\pi$.

Quindi $\mathcal{S} = \left\{ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

g) $\text{cotan}(2x) = -\text{cotan}(4x + 220°) \iff \text{cotan}(2x) = \text{cotan}(-4x - 220°) \iff 2x = -4x - 220° + k \cdot 180° \iff 6x = -220° + k \cdot 180° \iff x = -36°40' + k \cdot 30°$;
$\mathcal{S} = \{-36°40' + k \cdot 30° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

h) $\sin(50° - x) = \sqrt{3} \cdot \cos(50° - x) \iff \dfrac{\sin(50° - x)}{\cos(50° - x)} = \sqrt{3} \iff \tan(50° - x) = \sqrt{3} \iff \tan(50° - x) = \tan(60°) \iff 50° - x = 60° + k \cdot 180° \iff x = -10° + k \cdot 180°$;
$\mathcal{S} = \{-10° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

i) $2\sin(x) = \tan(x) \iff \dfrac{\sin(x)}{\tan(x)} = \dfrac{1}{2} \iff \cos(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi;$

$\mathcal{S} = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Qui occorre anche controllare che le soluzioni abbiano senso se inserite nell'equazione di partenza: dal momento che $\mathcal{S} \subseteq D_{\tan}$ (cioè: l'insieme S è contenuto nell'insieme di definizione della funzione tangente), non ci sono problemi di sorta.

j) $3\sin^2(x) + 2\sin(x) = 5 \iff 3\sin^2(x) + 2\sin(x) - 5 = 0$; si tratta di un'equazione quadratica in $\sin(x)$ con discriminante $\Delta = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64$; le soluzioni sono quindi

- $\sin(x) = \dfrac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = -\dfrac{5}{3}$; impossibile, dato che $-\frac{5}{3} < -1$;
- $\sin(x) = \dfrac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = 1 \iff \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \iff x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi.$

Quindi, $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

k) $5\sin x + 7 = 11 - 3\sin x \iff 8\sin x = 4 \iff \sin x = \frac{1}{2}$,

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

l) $\sin(3x + 70^\circ) = \cos(x - 40^\circ) \iff \cos(90^\circ - 3x - 70^\circ) = \cos(x - 40^\circ)$

$\iff 20^\circ - 3x = x - 40^\circ + k\,360^\circ$ oppure $20^\circ - 3x = -x + 40^\circ + k\,360^\circ$

$\iff -4x = -60^\circ + k\,360^\circ$ oppure $-2x = 20^\circ + k\,360^\circ$

$\iff x = 15^\circ + k\,90^\circ$ oppure $x = -10^\circ + k\,180^\circ$,

$\mathcal{S} = \{15^\circ + k\,90^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-10^\circ + k\,180^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

m) $\sin x \cdot (\sin x + 1) = \cos^2 x \iff \sin^2 x + \sin x = \cos^2 x \iff \sin^2 x + \sin x = 1 - \sin^2 x$

$\iff 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \iff (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\iff \sin x = \frac{1}{2}$ oppure $\sin x = -1$,

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

n) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 \iff (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{\cancel{(\sin^2 x + \cos^2 x)}}_{1} = 1$

$\iff \cancel{1} - \cos^2 x - \cos^2 x = \cancel{1} \iff -2\cos^2 x = 0 \iff \cos x = 0$,

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

o) $\tan x - \sin^2 x - \sqrt{3} = \cos^2 x - 1 \iff \tan x \cancel{- \sin^2 x} - \sqrt{3} = \cancel{1} \cancel{- \sin^2 x} \cancel{- 1} \iff \tan x = \sqrt{3}$,

$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

p) Risolviamo in gradi. Per questo tipo di equazioni dobbiamo utilizzare il cambio di variabile: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ottenendo:

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Come visto un'equazione del tipo $a\sin x + b\cos x = c$ viene trasformata in $-(b+c)t^2 + 2at + b - c = 0$. Dunque:

$$2\sin x + 3\cos x = 2 \iff -(3+2)t^2 + 2\cdot 2t + 3 - 2 = 0 \iff -5t^2 + 4t + 1 = 0 \iff t_1 = -\frac{1}{5},\ t_2 = 1$$

Facendo il cambio inverso di variabile otteniamo:

$t_1 = -\frac{1}{5} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff x \cong 2 \cdot (-11.31^\circ + k \cdot 180^\circ) = -22.32^\circ + 360^\circ\pi, k \in \mathbb{Z}$ e

$t_2 = 1 = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \iff x = 2 \cdot (45^\circ + k \cdot 180^\circ) = 90^\circ + 360^\circ\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\mathcal{S} = \{-22.32^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{90^\circ + k \cdot 360^\circ \mid k \in \mathbb{Z}\}$

q) Per questo tipo di equazione bisogna dividere per $\cos^2 x$. Ricordando che $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$ otteniamo:

$\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x = 1 \iff \tan^2 x - \tan x + 1 - (\tan^2 x + 1) = 0 \iff \tan x = 0$

Dunque otteniamo facilmente le soluzioni $x = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

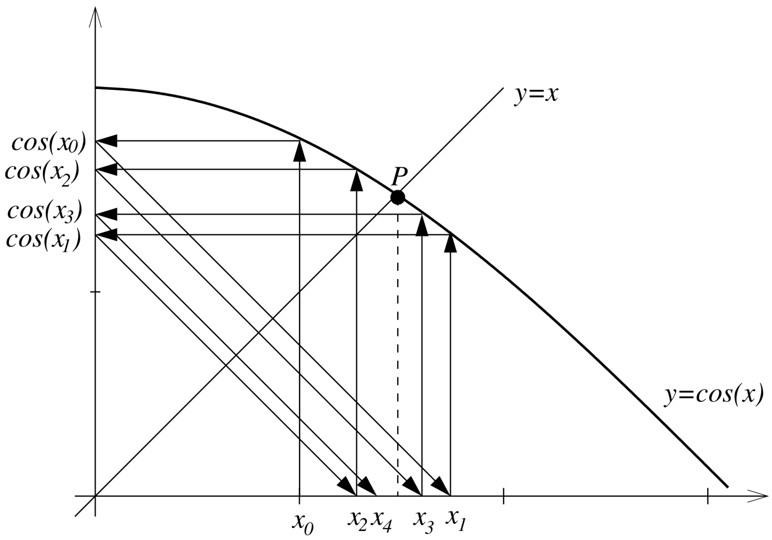
Avendo diviso per $\cos^2 x$, dobbiamo valutare se $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ è una possibile soluzione. Per $\cos x = 0$ otteniamo $\sin^2 x = 1$ che coincide con le soluzioni aggiuntive $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dunque otteniamo:

$\mathcal{S} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. Ponendo $x_0 = 0.5$, si ottiene con l'aiuto di una calcolatrice scientifica:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos(x_0) \cong 0.877582561 \\
x_2 &= \cos(x_1) \cong 0.639012494 \\
x_3 &= \cos(x_2) \cong 0.8026851 \\
x_4 &= \cos(x_3) \cong 0.694778026 \\
x_5 &= \cos(x_4) \cong 0.768195831 \\
x_{10} &= \cos(x_9) \cong 0.735006309 \\
x_{15} &= \cos(x_{14}) \cong 0.739649962 \\
x_{20} &= \cos(x_{19}) \cong 0.739006779 \\
x_{51} &= \cos(x_{50}) \cong 0.739085133 \\
x_{52} &= \cos(x_{51}) \cong 0.739085133
\end{aligned}$$

e da $n = 53$ in poi, il valore di x_n non cambia più (dato che viene raggiunta la precisione massima della calcolatrice). Quindi, $x = 0.739085133$ rappresenta un'approssimazione della soluzione dell'equazione $\cos(x) = x$. La spiegazione può essere fornita con l'auto del disegno riportato di seguito.



L'iterazione $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to \ldots$ può essere compresa seguendo il senso delle frecce a partire da $x_0 = 0.5$: è ben visibile il fatto che x_n "oscilla" attorno all'ascissa del punto P d'intersezione delle curve di equazione $y = x$ e $y = \cos(x)$.

4. **a)** $2\sin x + \sin(2x) = 0 \iff 2\sin x + 2\sin x\cos x = 0 \iff 2\sin x(1+\cos x) = 0$

$\iff \sin x = 0$ oppure $\cos x = -1 \iff x = k\pi$ oppure $x = -\pi + 2k\pi = (2k-1)\pi$.

Quindi: $\mathcal{S} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $\cos(2x) + \sin^2 x = 0 \iff 1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x = 0 \iff \sin^2 x = 1 \iff \sin x = \pm 1$.

Quindi: $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $\sin(3x) + \sin x = 0 \iff \sin x(4\cos^2 x - 1) + \sin x = 0 \iff 4\cos^2 x \sin x = 0$

$\iff \sin x = 0$ oppure $\cos x = 0$.

Quindi: $\mathcal{S} = \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\cos(3x) + \cos x = 0 \iff \cos x(4\cos^2 x - 3) + \cos x = 0 \iff \cos x(4\cos^2 x - 2) = 0$

$\iff \cos x = 0$ oppure $\cos^2 x = \frac{1}{2} \iff \cos x = 0$ oppure $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ oppure $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Quindi: $\mathcal{S} = \{k\frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

5.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos y = 1 - \sin x \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

inserendo la prima equazione nella seconda otteniamo:

$\sin^2 x + (1-\sin x)^2 = 1 \iff \sin^2 x + 1 - 2\sin x + \sin^2 x = 1 \iff 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \iff \sin x(\sin x - 1) = 0$

Quindi avremo delle soluzioni per $\sin x = 0$ e per $\sin x - 1 = 0$.

- $\boxed{\sin x = 0} \iff x = k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \cos y = 1 \iff y = 0 + 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$
- $\boxed{\sin x = 1} \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \qquad \Rightarrow \cos y = 1 - 1 = 0 \iff y = \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z}$

6. **a)** Considera l'equazione corrispondente ($\cos x = -\frac{1}{2}$), le sue soluzioni tra 0 e 2π sono:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \iff x_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ e } x_2 = \frac{4\pi}{3}$$

Ragionando sulla circonferenza trigonometrica (oppure sul grafico della funzione coseno) è facile capire come per $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ e per $\frac{4\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$: $\cos x \geq -\frac{1}{2}$. Quindi i primi intervalli di soluzione sono:

$$\mathcal{S} = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$$

Ovviamente poi questi intervalli si ripetono con periodo di 2π.

b) Possiamo sostituire $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ nella disequazione e otteniamo:

$$2(1-\cos^2 x) - 4\cos x - 2 > 0 \iff \cos^2 x + 2\cos x < 0$$

Sostituiamo $y = \cos x$ e otteniamo: $y^2 + 2y < 0 \iff y(y+2) < 0$ Si tratta di una disequazione di secondo grado (parabola "aperta verso l'alto" con zeri per $y = 0$ e $y = -2$).

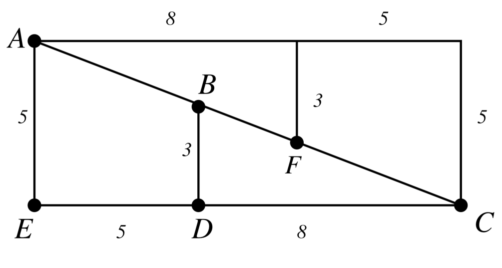
La parabola è negativa tra i due zeri, cioè per $-2 < y < 0$.
$y = \cos x > -1$ e quindi sicuramente $y > -2$. Dobbiamo dunque solamente garantire che $\cos x < 0$, cioè

$$\mathcal{S} = \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$$

7. I punti A, B e C *non sono allineati*, dal momento che i triangoli AEC e BDC non sono simili:

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{5}{13} \qquad \text{mentre} \qquad \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{3}{8} \neq \frac{5}{13} \quad .$$

Analogamente, i punti A, F e C non sono allineati. In effetti, $ABCF$ è un sottilissimo parallelogrammo di superficie 1 unità^2: ecco dove "si nasconde" l'area mancante!



8. Circonferenza della terra: $C = 2\pi r$ con $r = 40'080'000$ m raggio della terra.
Cintura "allungata": $C' = 2\pi r + 3$
Raggio della cintura allungata:

$$r' = \frac{C'}{2\pi} = \frac{2\pi r + 3}{2\pi} = r + \frac{3}{2\pi}$$

Distanza fra la nuova cintura e la terra: $r - r' = \frac{3}{2\pi} \approx 0.48$ m. Si può dunque strisciarvi sotto e il risultato <u>non dipende dal raggio!</u>