Serie 14 - La funzione logaritmica e le sue applicazioni

Quando Albert Einstein incontrò Charlie Chaplin, gli disse: "Ciò che ammiro di più della tua arte è l'universalità. Non dici una parola eppure il mondo intero ti capisce." Chaplin rispose: "Già, ma la tua gloria è ancora più grande: il mondo intero ti ammira, nonostante non capisca quello che dici."

1. Il numero di batteri presenti in un insalata di pollo, a temperatura ambiente raddoppia in 3 ore. Se la crescita è esponenziale, in quante ore il numero dei batteri aumenta di un fattore 10?

2. Per proteggere il personale degli ospedali, le radiografie vengono eseguite in locali rivestiti con placche di alluminio. Sapendo che una placca dello spessore di 1 mm assorbe il 75% delle radiazioni, determina quale dev'essere lo spessore delle placche affinchè esse assorbano il 99% delle radiazioni.

3. Per un'automobile si calcola un deprezzamento medio del 15% annuale. Quanti anni sono passati dall'acquisto di una certa auto, se il valore si è ridotto al 10%?

4. Disegna i grafici delle 6 funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$ con $a = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ per $x \in]0, 8]$ nello stesso sistema di riferimento cartesiano (scegli 4 "quadretti" come unità).

5. Al liceo di Lugano 2 uno studente ha messo in circolazione un pettegolezzo che si sta diffondendo tra tutti i 600 allievi del liceo secondo il *modello logistico*. Il numero di studenti a conoscenza del pettegolezzo dopo t giorni è quindi dato dalla formula

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot N_{max}}{N_0 + (N_{max} - N_0)e^{-kt}},$$

dove $N_0 = 1$, N_{max} è il numero totale di studenti del liceo e k è una costante.

a) Sapendo che dopo 2 giorni già 300 studenti sono a conoscenza del pettegolezzo determinare il valore di k.

b) Quanto tempo è necessario per far si che 590 studenti siano raggiunti dal pettegolezzo?

6. * Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $2\log_{10} x - \log_{10} \frac{3}{5} = \log_{10} 60,$

b) $2\log_{10} x = 3\log_{10} 4,$

c) $2\log_{10} x + \frac{1}{2}\log_{10} 16 = \log_{10}(x + 4),$

d) $\log_{10}(7-x) - \log_{10}(2x^2 - 11x) = -\log_{10} x,$

e) $\frac{1}{3}\log_{10} x = 2\log_{10} a,$

f) $\log_{100}(2x - 1) = \log_{10}(x).$

7. **a)** Rappresenta nello stesso sistema di riferimento il grafici delle funzioni $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_2(4x)$. In quale relazione stanno i due grafici?

b) Come si ottiene il grafico della funzione $g(x) = \log_a(k \cdot x)$ (ove $k \in \mathbb{R}$) dal grafico di $f(x) = \log_a x$? Enuncia una tesi e dimostrala.

8. Dimostrare le seguenti proprietà dei logaritmi.

a) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$,

b) $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$,

c) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

d) $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$

9. *

a) Il numero reale log 7 è *irrazionale*, non può cioè essere scritto come frazione avente numeratore e denominatore *interi*. Ciò può essere dimostrato *per assurdo*: supponendo che $\log 7 \in \mathbb{Q}$ si ottiene

$$\log 7 \in \mathbb{Q} \iff \log 7 = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{N}$$
$$\iff 10^{\frac{p}{q}} = 7 \Rightarrow \left(10^{\frac{p}{q}}\right)^q = 7^q \iff 10^p = 7^q \quad .$$

Spiega perché si tratta di una contraddizione.

b) Mostra che vale anche $\log_3 10 \notin \mathbb{Q}$.

c) Cosa si osserva cercando di dimostrare che $\log_{25} 125 \notin \mathbb{Q}$?

d) Dimostra che se a e b $(a, b \neq 1)$ sono due numeri naturali *primi tra loro* (cioè senza divisori comuni a parte l'unità), allora vale $\log_a b \notin \mathbb{Q}$. È possibile generalizzare tale affermazione, sostituendo l'ipotesi "a, b primi tra loro" con un'ipotesi più debole?

Soluzioni

1. Sia b_0 il numero di batteri all'istante zero. Dato che la crescita è esponenziale, la funzione che indica il numero di batteri dopo t ore sarà del tipo $N(t) = b_0 \cdot a^t$. Sapendo che dopo 3 ore il numero di batteri raddoppia avremo: $N(3) = b_0 \cdot a^3 = b_0 \cdot 2$ da cui otteniamo: $a = \sqrt[3]{2}$. Per trovare dopo quanto tempo avremo 10 volte il numero di batteri iniziali risolviamo:

$$N(t) = b_0 \cdot 10 \iff \cancel{b_0}\sqrt[3]{2}^t = \cancel{b_0} \cdot 10 \iff t = \log_{\sqrt[3]{2}}(10) \cong 9.97 \text{ ore.}$$

2. Attraverso una placca dello spessore di s mm soltanto il $100\% - 75\% = 25\%$ delle radiazioni può penetrare; di conseguenza, attraverso una placca dello spessore di s mm penetra $\left(\frac{25}{100}\right)^s = \left(\frac{1}{4}\right)^s$ delle radiazioni; affinché l'assorbimento sia pari al 99%, solo l'uno per cento può penetrare. Deve quindi valere

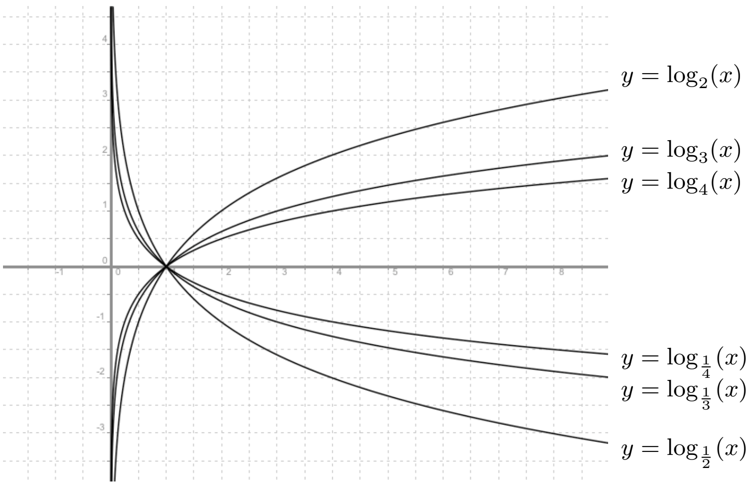
$$\left(\frac{1}{4}\right)^s = \frac{1}{100} \iff s = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\log \frac{1}{100}}{\log \frac{1}{4}} = \frac{-2}{-\log 4} \cong 3,32 \quad \text{(mm)}$$

3. Ogni anno, il valore dell'automobile si riduce all'85%, cioè ai $\frac{17}{20}$. Se V_0 è il valore iniziale dell'automobile, dopo n anni esso sarà di $V(n) = V_0 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^n$ franchi. Affinchè esso si riduca al 10%, deve valere $V(n) = \frac{1}{10}V_0$, cioè

$$V_0 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^n = \frac{1}{10}V_0 \iff \left(\frac{17}{20}\right)^n = \frac{1}{10} \iff n = \log_{\frac{17}{20}}\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\log \frac{1}{10}}{\log \frac{17}{20}} = \frac{-1}{\log 17 - \log 20} \cong 14,17 \quad .$$

Dall'acquisto sono quindi passati circa 14 anni.

4. Soluzione:



5. **a)** Inserendo i dati otteniamo:

$$N(2) = \frac{1 \cdot 600}{1 + 599e^{-2k}} = 300 \iff \frac{600}{300} = 1 + 599e^{-2k} \iff \frac{1}{599} = e^{-2k} \iff k = -\frac{-\ln(\frac{1}{599})}{2} \cong 3.20$$

b) con $k = 3.2$ calcoliamo:

$$N(t) = \frac{1 \cdot 600}{1 + 599e^{-3.2t}} = 590 \iff \left(\frac{600}{590} - 1\right)\frac{1}{599} = e^{-3.2t} \iff t = \frac{-\ln(\frac{1}{35341})}{3.2} \cong 3.27 \text{ giorni}$$

6. **a)** $\iff \log_{10}\frac{x^2}{\frac{3}{5}} = \log_{10}(60) \iff \frac{5x^2}{3} = 60 \iff x = \pm 6$. La soluzione $x = -6$ non è accettabile dunque $\mathcal{S} = \{6\}$.

b) $\iff \log_{10}(x^2) = \log_{10}(4^3) \iff x^2 = 64 \iff x = \pm 8$. La soluzione $x = -8$ non è accettabile dunque $\mathcal{S} = \{8\}$.

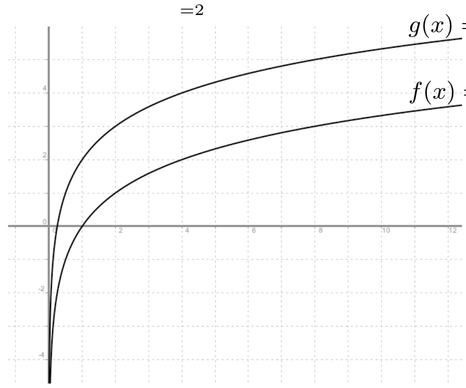
c) $\iff \log_{10}(x^2 \cdot 4) = \log_{10}(x+4) \iff 4x^2 = x + 4 \iff 4x^2 - x - 4 = 0$, utilizzando la formula risolutiva otteniamo: $x = \frac{1\pm\sqrt{65)}}{8}$. Da notare che solamente la soluzione $x = \frac{1+\sqrt{65)}}{8}$ è accettabile.

d) $\iff \log_{10}\left(\frac{7-x}{2x^2-11x}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{x}\right) \iff 7x - x^2 = 2x^2 - 11x \iff x(-3x+18) = 0$. La soluzione $x = 0$ non è accettabile, quindi $\mathcal{S} = \{6\}$.

e) $\sqrt[3]{x} = a^2 \iff x = a^6$.

f) $\iff \frac{\log_{10}(2x-1)}{\underbrace{\log_{10}(100)}_{=2}} = \log_{10}(x) \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$.

7.



a) Il grafico di g è ottenuto *traslando verticalmente* di $2 = \log_2(4)$ unità il grafico di f.

b) **Tesi:** il grafico di $y = \log_a(kx)$ è ottenuto traslando verticalmente di $\log_a(k)$ unità il grafico di $y = \log_a(x)$.

Dim.: $\log_a(kx) = \log_a(k) + \log_a(x)$ ■

8. *Ricorda che* $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ (cambio di base):

a) $\log_{a^n}(b^n) = \frac{\log_a(b^n)}{\log_a(a^n)} = \frac{\cancel{n}\log_a(b)}{\cancel{n}\log_a(a)} = \log_a(b)$,

b) $\log_{a^n} b^m = \frac{\log_a(b^m)}{\log_a(a^n)} = \frac{m\log_a(b)}{n\log_a(a)} = \frac{m}{n}\log_a b$,

c) $\log_a b = \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}$, da cui segue $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

d) $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = \frac{\cancel{\log_a x}}{\frac{\cancel{\log_a x}}{\log_a(ab)}} = \log_a(a) + \log_a(b) = 1 + \log_a(b)$

9. **a)** $10^p = 2^p \cdot 5^p$, e quindi ogni potenza di 10 ammette quali fattori primi esclusivamente 2 e 5. D'altro canto, ogni potenza di 7 ammette soltanto 7 come fattore primo. Quindi, un potenza di 10 e una potenza di 7 (con esponenti diversi da 0) non possono coincidere.

b) Analogamente supponendo per assurdo che $\log_3 10$ sia razionale otteniamo

$$\log_3 10 \in \mathbb{Q} \iff \log_3 10 = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{N}$$
$$\iff 3^{\frac{p}{q}} = 10 \Rightarrow \left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 10^q \iff 3^p = 10^q$$

e questa è di nuovo una contraddizione.

c) Procedendo come sopra, si ottiene $125^q = 25^p$, e questo è verificato ad esempio per $q = 2$ e $p = 3$. Difatti, $\log_{25} 125 = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$.

d) Ipotesi: a e b sono primi tra loro.
Tesi: $\log_a b \notin \mathbb{Q}$.
Dimostrazione: supponendo per assurdo $\log_a b \in \mathbb{Q}$, si ottiene di nuovo

$$\log_a b \in \mathbb{Q} \iff \log_a b = \frac{p}{q} \quad \text{con } p, q \in \mathbb{N}$$
$$\iff a^{\frac{p}{q}} = b \Rightarrow \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = b^q \iff a^p = b^q$$

e questo è impossibile, dato che se a e b sono primi tra loro nemmeno a^p e b^q possono ammettere divisori primi comuni. La contraddizione dimostra che la negazione dell'ipotesi è falsa, e quindi che l'ipotesi è vera ■

Come si evince dalla dimostrazione, l'ipotesi "a e b sono primi tra loro" non è "minima": in effetti, affinchè valga $a^p \neq b^q$ $\forall p, q \neq 0$ è sufficiente che *a e b abbiano almeno un fattore primo non comune.*