Funzioni esponenziali e logaritmiche[1]

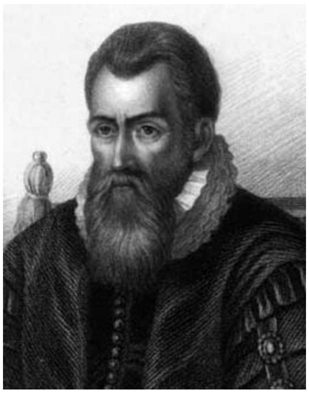
Le formule di matematica finanziaria come pure i calcoli astronomici richiedono operazioni con un gran numero di cifre e nel XVI secolo per poter eseguire questi calcoli occorreva una grande abilità matematica, oltre che un cospicuo investimento di tempo.

Era quindi importante ricorrere a procedimenti e a formule che permettessero di semplificare queste operazioni. Mercanti e banchieri si servivano di proprie tavole manoscritte di interessi, compilate da esperti matematici e custodite gelosamente, lontano da occhi indiscreti; il finanziere competente si trovava così in posizione di vantaggio rispetto al non matematico.
Questo tipo di tavole aveva una lunga tradizione dietro di sé: il *Libro di Divisamenti* del fiorentino **Balduccio Pegolotti**, uno dei primi libri di tavole conosciuti, risale ad esempio a prima del 1350.

"El libro de mercatantie et usanze de' paesi" di Giorgio di Lorenzo Chiarini fu il primo di questo tipo di testi mercantili ad essere pubblicato a stampa.

Sebbene al giorno d'oggi, con l'utilizzo dei computer, questo tipo di semplificazioni sembrano sorpassate, rimangono comunque di centrale importanza. Ad esempio abbiamo già trattato in trigonometria una formula che permette di trasformare una moltiplicazione (operazione più complessa) in somme e sottrazioni:

<u>formula di Werner:</u> $$2 \cdot \sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$



John Napier, anche noto come Giovanni Nepero

Fu grazie **John Napier** (1550-1617, ricco proprietario terriero scozzese) che un potente strumento per semplificare i calcoli venne introdotto: il **logaritmo**. Grazie a questo strumento (e alle tavole ad esso abbinato) è possibile trasformare delle moltiplicazioni in somme e delle elevazioni a potenza a semplici moltiplicazioni.

Raramente una nuova scoperta incontrò una fortuna così rapida come l'invenzione dei logaritmi: tra il 1614 e il 1631 vennero pubblicate più di venti opere su questo oggetto. L'influsso che questa invenzione ebbe sulla matematica fu grande, e moltiplicò le capacità di calcolo di mercanti, astronomi e scienziati in generale.

Studi più moderni indicano che, parallelamente a Napier ma senza conoscere l'opera di quest'ultimo, anche l'astronomo e matematico svizzero **Joost Bürgi** (1552 - 1632) sviluppò delle tavole logaritmiche del tutto simili che pubblicò solamente nel 1620 su insistenza di Keplero (con il quale collaborò in ambito astronomico).

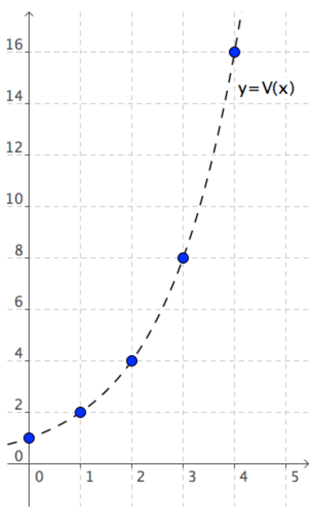
[1] Liberamente adattato dagli appunti del Prof. Rovelli - www.matematica.tk

1 Introduzione

Il volume di un particolare organismo (ad es. un fungo) raddoppia nel giro di un mese. Se il volume iniziale è di 1 mm^3, quanto varrà esso dopo 2, 3, 5 e x mesi? Dopo quanto tempo il volume del fungo raggiungerà i 64 mm^3? E dopo quanto raggiungerà i 1634 mm^3?
Come mai dopo solo mezzo mese il volume del fungo non sarà di 1.5 mm^3?

La cosiddetta *crescita esponenziale* riveste un ruolo fondamentale nella scienze quantitative (fisica, chimica, biologia, matematica finanziaria, ...), dove trova innumerevoli applicazioni pratiche (si pensi ad esempio alla datazione di un reperto archeologico con il metodo del carbonio-14). Spesso confusa con un sinonimo di crescita *veloce*, essa ha invece una connotazione ben precisa nel linguaggio della matematica, che ci proponiamo di studiare in questo capitolo.

Per quanto riguarda il valore $V(x)$ del volume dopo un numero intero di mesi, è chiaro che deve valere $V(x) = 2^x$ mm^3. Ma, in questo caso, è anche lecito chiedersi quanto possa valere $V(x)$ anche dopo 10 minuti, 17 ore oppure 3 settimane. In altre parole, la *variabile indipendente* x non è più confinata al mondo dei numeri naturali: il fenomeno descritto non è più di tipo *discreto*, bensì *continuo*.



Rappresentando graficamente $V(x)$ risulta chiara l'esigenza di costruire una funzione *reale*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 2^x \end{aligned}$$

che "interpoli" i punti a coordinate intere $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 8)$, $(4, 16)$ ecc.

Si tratta quindi di dare un senso a 2^x *per* $x \in \mathbb{R}$ *qualsiasi*; ci occuperemo immediatamente di questa questione, di fondamentale importanza per la costruzione delle *funzioni esponenziali*.

2 Ripasso potenze

2.1 Esponente naturale, intero e razionale

Cerchiamo ora di dare un senso ad espressioni quali 2^{π}, $5^{\sqrt{2}}$ oppure $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ almeno da un punto di vista intuitivo (la loro interpretazione rigorosa richiede una certa dimestichezza con il concetto di *limite*, e dovrà quindi per forza di cose essere rimandata alla III/IV liceo). Iniziamo ripassando le definizioni per potenze ad esponenti *naturali*, *interi* e *razionali*.

- Potenze ad esponenti naturali: siano $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$; allora

$$\boxed{a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}}$$

  Le proprietà fondamentali sono le seguenti ($a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$):

  (i) $a^n \cdot a^m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **(ii)** $(a^n)^m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  (iii) da i) $a = a^1 = a^{1+0} = a^1 \cdot a^0 = a \cdot a^0$ e quindi: $a^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- Potenze ad esponenti interi: siano $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, per la proprietà **(i)** deve valere $1 = a^0 = a^{(-n)+n} = a^{-n} \cdot a^n$ e quindi bisogna porre

$$\boxed{a^{-n} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

- Potenze ad esponenti razionali: siano $a \in \mathbb{R}^*_+$, $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Allora, per **(ii)** deve valere $a = a^1 = a^{m \cdot \frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^m$, e non ci resta che porre

$$\boxed{a^{\frac{1}{m}} = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots} \quad \text{e} \quad \boxed{a^{\frac{n}{m}} = \ldots\ldots\ldots \quad = \quad \ldots\ldots\ldots}$$

Possiamo riassumere le regole di calcolo nel seguente teorema:

Teorema

- (*Stessa base*) Siano $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $b, c \in \mathbb{R}$;

  (i) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$;

  (ii) $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$;

  (iii) $\dfrac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$.

- (*Stesso esponente*) Siano $a, b \in \mathbb{R}^*_+$ e $c \in \mathbb{R}$;

  (iv) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$;

  (v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^c = \dfrac{a^c}{b^c}$.

Dimostrazione:

ESEMPI:

a) $3^2 \cdot 3^4 = \dots\dots\dots\dots$ b) $(2^2)^3 = \dots\dots\dots\dots$

c) $(2)^{(2^3)} = \dots\dots\dots\dots$ d) $\frac{5^3}{5^{-2}} = \dots\dots\dots\dots$

e) $a^4 \cdot a^{-7} = \dots\dots\dots\dots$ f) $(b^x)^x = \dots\dots\dots\dots$

g) $\left(\frac{z^2}{y^{-1}}\right)^2 = \dots\dots\dots\dots$ h) $\left(\frac{(ab)^4}{b^3}\right)^2 = \dots\dots\dots\dots$

i) $27^{2/3} = \dots\dots\dots\dots$ j) $(b^2)^{5/4} = \dots\dots\dots\dots$

k) $(-27)^{2/3} = \dots\dots\dots\dots$ l) $(-64)^{5/4} = \dots\dots\dots\dots$

m) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots\dots\dots\dots$ n) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dots\dots\dots\dots$

o) $\left(a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}\right)^6 = \dots\dots\dots\dots$ p) $a^3 + a^2 = \dots\dots\dots\dots$

2.2 Esponente reale

Per poter dare un'interpretazione, anche soltanto intuitiva, di una potenza ad esponente irrazionale occorre innanzitutto soffermarsi sul concetto di *numero reale*. Consideriamo ad esempio il numero $\sqrt{2}$: esso è un numero *irrazionale*, cioè non può essere espresso come una frazione di numeri interi (dimostrazione per esercizio). Nonostante questo, esso può essere *approssimato* con precisione crescente da una sequenza di numeri *razionali* $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ con

$$r_0 = 1 \;;\; r_1 = 1,4 = \tfrac{14}{10} \;;\; r_2 = 1,41 = \tfrac{141}{100} \;;\; r_3 = 1,414 = \tfrac{1414}{1000} \;;\; r_4 = 1,4142 = \tfrac{14142}{10000} \;;\; \ldots$$

Utilizzando una terminologia più rigorosa, si dice che $\sqrt{2}$ è il *limite* della *successione* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e si impiega la notazione $\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$

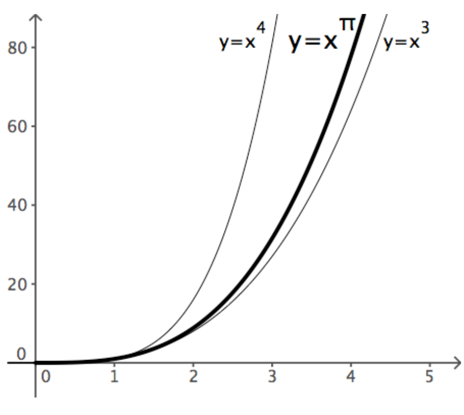
Procedendo in modo analogo, possiamo ora interpretare (e di fatto *definire*) una potenza ad esponente irrazionale: se una successione $x_0, x_1, x_2, ...$ definisce un numero reale x, definiremo a^x per mezzo della successione $a^{x_0}, a^{x_1}, a^{x_2}, ...$

Ad **esempio**, per definire 2^π considereremo la successione di potenze ad esponente *razionale*

$$\begin{aligned}
2^3 &= \mathbf{8}\\
2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}} &= \mathbf{8},5741877...\\
2^{3,14} = 2^{\frac{314}{100}} = \sqrt[100]{2^{314}} &= \mathbf{8},\mathbf{8}1524092...\\
2^{3,141} = 2^{\frac{3141}{1000}} = \sqrt[1000]{2^{3141}} &= \mathbf{8},\mathbf{82}135330...\\
2^{3,1415} &= \mathbf{8},\mathbf{824}41108...\\
2^{3,14159} &= \mathbf{8},\mathbf{8249}6159...\\
2^{3,141592} &= \mathbf{8},\mathbf{82497}382...\\
2^{3,1415926} &= \mathbf{8},\mathbf{824977}49...\\
2^{3,14159265} &= \mathbf{8},\mathbf{8249778}0...\\
2^{3,141592653} &= \mathbf{8},\mathbf{82497782}...\\
2^{3,1415926535} &= \mathbf{8},\mathbf{82497782}...
\end{aligned}$$

la quale *converge* verso un ben determinato numero reale (irrazionale), detto appunto 2^π.

Rappresentiamo ora la funzione $x \mapsto y = x^\pi$ per $x > 0$ (usando convenientemente due diverse scale sugli assi cartesiani):



Nota che, dal momento che $3 < \pi < 4$, vale $x^3 < x^\pi < x^4$ per ogni $x > 1$, e quindi il grafico di $y = x^\pi$ si trova in posizione intermedia rispetto ai grafici di $y = x^3$ e $y = x^4$.

3 La funzione esponenziale

Le osservazioni fatte nel paragrafo precedente ci permettono di definire funzioni nelle quali la variabile indipendente si trova all'esponente:

Definizione: Funzioni esponenziali

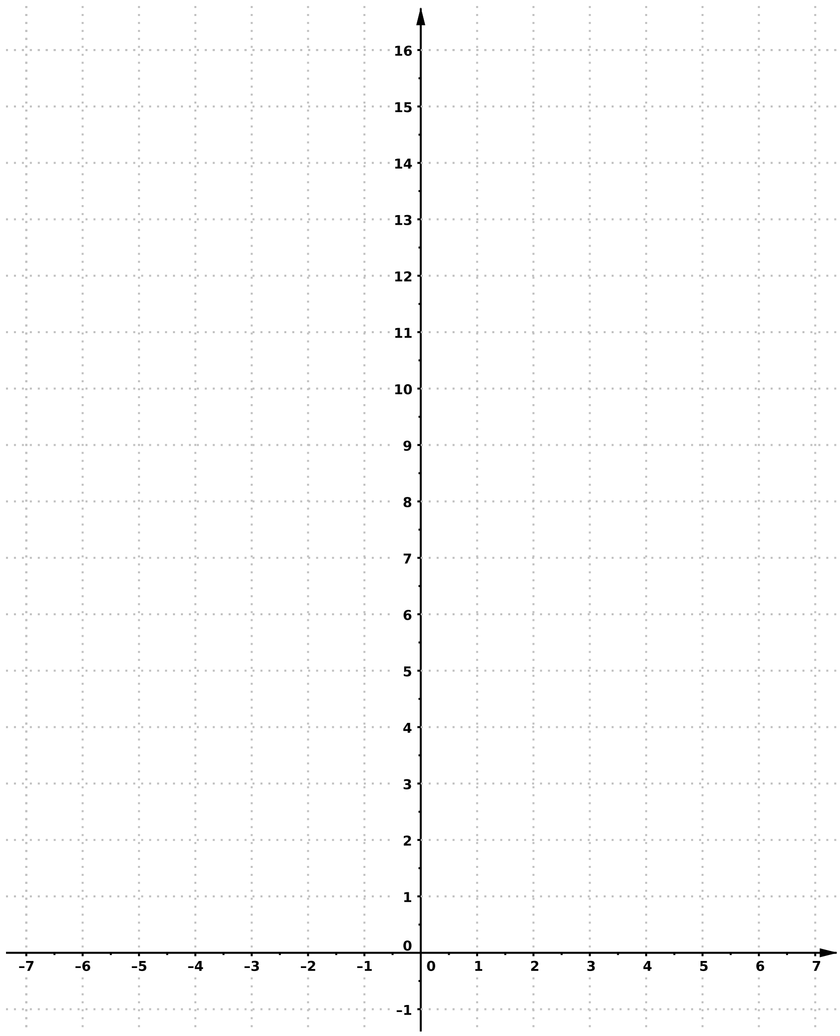
Sia $\boxed{a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}}$ la funzione

$$\begin{array}{rcl} \exp_a : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & y = a^x \end{array}$$

è detta **funzione esponenziale in base** a.

Nota che, oltre alla base 0 e alle basi negative, si esclude a priori la base 1: ciò è dovuto probabilmente al fatto che la funzione $x \mapsto y = 1^x$ è costante e quindi non iniettiva.

Disegna i grafici delle funzioni esponenziali nelle basi 2, $\frac{1}{2}$, 3 e $\frac{1}{3}$:



Il grafico di $y = a^x$ è una cosiddetta **curva esponenziale**.

3.1 Proprietà delle funzioni esponenziali:

1) Insieme di definizione: $D_{\exp_a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

2) Insieme delle immagini: $\mathrm{Im}_{\exp_a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

quindi si tratta di una funzione ....

3) Monotonia: dai grafici delle funzioni $2^x, 3^x, (\frac{1}{2})^x$ e $(\frac{1}{3})^x$ abbiamo notato come le funzioni esponenziali possono essere divise in due famiglie:

- $\boxed{a > 1}$: per $x_1 < x_2$ vale $a^{x_1} \ldots\ldots\ldots a^{x_2}$,

  cioè la funzione è strettamente ....

- $\boxed{0 < a < 1}$: per $x_1 < x_2$ vale $a^{x_1} \ldots\ldots\ldots a^{x_2}$,

  cioè la funzione è strettamente ....

Osservazione: per il caso triviale $a = 1$ avremo una funzione costante.

4) Dalla monotonia segue immediatamente che $\boxed{x_1 \neq x_2 \iff a^{x_1} \neq a^{x_2}}$ (ricorda che $a \neq 1$); quindi la funzione esponenziale è **iniettiva**.

5) Parità: la funzione $\exp_a$ non è né pari né dispari:

$$\exp_a(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x} \neq \pm \exp_a(x) \quad .$$

6) Dal momento che $a^0 = 1$, il punto **P(0,1)** giace sul grafico di $y = \exp_a(x)$ per ogni base $a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$.

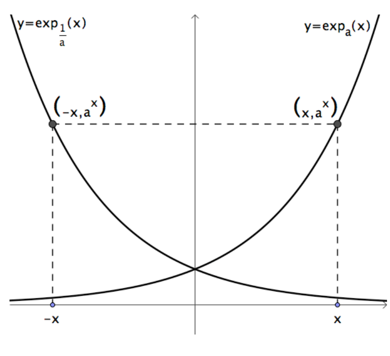
7) L'asse Ox è ....del grafico di $y = \exp_a(x)\ \forall\ a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$.

8) I grafici di $\exp_a$ e $\exp_{\frac{1}{a}}$ sono simmetrici ....:

$$\exp_{\frac{1}{a}}(-x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = a^x = \exp_a(x)$$

(confronta con i grafici alla pagina precedente).

Quindi: (x, a^x) giace sul grafico di $y = \exp_a(x)$, e $(-x, a^x)$ giace sul grafico di $y = \exp_{\frac{1}{a}}(x)$.



9) Proprietà caratteristica (detta anche *equazione funzionale*): $\forall\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $\forall\ x, x' \in \mathbb{R}$ vale

$$\boxed{\exp_a(x + x') = \exp_a(x) \cdot \exp_a(x')}$$

Nella notazione abituale, si tratta della proprietà: $a^{x+x'} = a^x a^{x'}$. In altre parole, *la funzione esponenziale trasforma una somma in un prodotto*: come vedremo, il comportamento della sua funzione inversa (il già menzionato *logaritmo*) è ben più utile nella pratica.

3.2 Conseguenze

a) Dalla **suriettività** consegue che per ogni $y \in \mathbb{R}_+^*$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $a^x = y$. Ad **esempio**, con $a = 2$ e $y = 3$ deve esistere una soluzione dell'equazione $2^x = 3$: essa può essere costruita per mezzo di un "incapsulamento":

$$\begin{array}{rcll} 2^1 < 3 < 2^2 & \Rightarrow & x \in [1; 2] & \\ 2^{1,5} < 3 < 2^{1,6} & \Rightarrow & x \in [1,5; 1,6] & \\ 2^{1,58} < 3 < 2^{1,59} & \Rightarrow & x \in [1,58; 1,59] & \\ 2^{1,584} < 3 < 2^{1,585} & \Rightarrow & x \in [1,584; 1,585] & \text{ecc.} \end{array}$$

Le successioni $\ell_0 = 1; \ell_1 = 1,5; \ell_2 = 1,58; \ell_3 = 1,584; \ldots$ e $u_0 = 2; u_1 = 1,6; u_2 = 1,59; u_3 = 1,585; \ldots$ definiscono entrambe la stessa soluzione dell'equazione (nel primo caso si tratta di approssimazioni per difetto, nel secondo per eccesso).

b) Dalla **iniettività** consegue che, se $a > 0$ e $b > 0$, l'equazione $a^x = b$ possiede un'unica soluzione (il cosiddetto *logaritmo di b in base a*, denotato $\log_a b$), e quindi ad esempio che il valore $x = \log_2 3 \cong 1,584$ (vedi sopra) è l'unica soluzione dell'equazione $2^x = 3$.
Nota che l'iniettività di $\exp_a$ permette a volte di risolvere rapidamente particolari equazioni esponenziali: da $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ si può passare direttamente all'equazione $f(x) = g(x)$: ad **esempio**, per risolvere $625^{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{5}$ scriviamo

$$625^{\frac{1}{x-2}} = \frac{1}{5} \iff \left(5^4\right)^{\frac{1}{x-2}} = 5^{-1} \iff 5^{\frac{4}{x-2}} = 5^{-1} \iff \frac{4}{x-2} = -1 \iff 4 = 2 - x \iff x = -2 \quad .$$

c) Dalla **proprietà caratteristica** consegue che grazie alla funzione esponenziale possiamo "trasformare" una somma in un prodotto, nel linguaggio dell'algebra, si dice che $\exp_a$ è un *isomorfismo* tra il *gruppo additivo* $(\mathbb{R}, +)$ (l'insieme $\mathbb{R}$ provvisto dell'addizione) e il *gruppo moltiplicativo* $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ ($\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ provvisto della moltiplicazione): si tratta di un'applicazione biiettiva che identifica la struttura additiva di $\mathbb{R}$ con la struttura moltiplicativa di $\mathbb{R}_+^*$.

Ricorda: in matematica un **gruppo** $(G, *)$ è un insieme su cui agisce un'operazione e per cui vale:

- L'operazione è **interna**: $\forall a, b \in G : a * b$ è un nuovo elemento che appartiene all'insieme stesso.
- Esiste un elemento $e \in G$ per cui vale: $a * e = e * a = a \ \ \forall a \in G$. Questo elemento è detto **neutro rispetto a** $*$.
- Per ogni elemento $a \in G$ esiste un elemento $b \in G$, così che $a * b = b * a = e$ (dove $e \in G$ è l'elemento neutro). b è detto **inverso** di a rispetto a $*$.
- Vale l'associatività: $a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$.

Classici esempi di gruppo sono $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{R}, \cdot)$, ("Insieme delle funzioni invertibili", $\circ$), ecc. Non è un gruppo $(\mathbb{N}, \cdot)$ poiché non esistono gli inversi per tutti gli elementi.

4 Crescita esponenziale

Esempio 1: considera due diversi processi di crescita:

1) *Una determinata alga, lunga inizialmente 3 cm, cresce di 2 cm alla settimana. Qual è la sua lunghezza dopo t settimane? Quanto cresce nella prima settimana? Nella quinta e nella ventesima?*

2) *Un determinato fungo, il cui volume vale inizialmente 3 cm*^{3}*, cresce del* 20% *alla settimana. Qual è la suo volume dopo t settimane? Quanto cresce nella prima settimana? Nella quinta e nella ventesima?*

Si tratta di due processi di crescita **molto diversi**: nel primo caso, l'aumento è costante in intervalli di tempo della stessa durata:

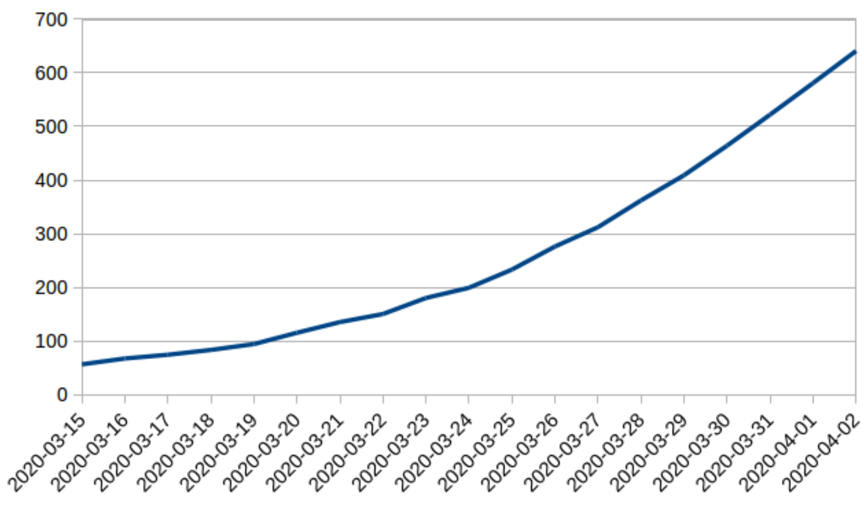
$L(t + \Delta t) - L(t) =$ ....

mentre nel secondo caso esso dipende dal tempo trascorso.
Nella crescita del fungo (crescita di tipo *esponenziale*) ciò che resta costante è il **rapporto** tra il volume in intervalli di tempo della stessa durata:

$\dfrac{V(t + \Delta t)}{V(t)} =$ ....

Esempio 2: La crescita esponenziale è osservabile in molti fenomeni naturali. Ad esempio, analizzando i dati dei decessi legati al Covid-19 in Svizzera nella seconda metà di marzo (fonte dati: corona-data.ch), possiamo osservare come essi non crescano in modo costante di giorno in giorno ma vi è un'accelerazione dei decessi col passare del tempo. Ciò che però resta pressoché costante è il rapporto dei decessi tra un giorno e il giorno precedente: chiara indicazione di un fenomeno esponenziale!

data	numero decessi	differenza	rapporto
$2020-03-15$	56		
$2020-03-16$	67	11	1.20
$2020-03-17$	74	7	1.10
$2020-03-18$	83	9	1.12
$2020-03-19$	94	11	1.13
$2020-03-20$	115	21	1.22
$2020-03-21$	135	20	1.17
$2020-03-22$	150	15	1.11
$2020-03-23$	180	30	1.20
$2020-03-24$	199	19	1.11
$2020-03-25$	233	34	1.17
$2020-03-26$	276	43	1.18
$2020-03-27$	312	36	1.13
$2020-03-28$	362	50	1.16
$2020-03-29$	409	47	1.13
$2020-03-30$	464	55	1.13
$2020-03-31$	522	58	1.13
$2020-04-01$	581	59	1.11
$2020-04-02$	641	60	1.10



Numero di decessi per Covid in Svizzera (fonte: corona-data.ch)

4.1 Definizione

- **Definizione: crescita lineare**
  Un processo di crescita (o decrescita) descritto da una funzione reale f per cui vale
  $$f(t+\Delta t) - f(t) = k_{\Delta t}$$
  dove $k_{\Delta t}$ è una costante (dipendente solo da Δt), è detto **processo di crescita** (o decrescita) **lineare**.

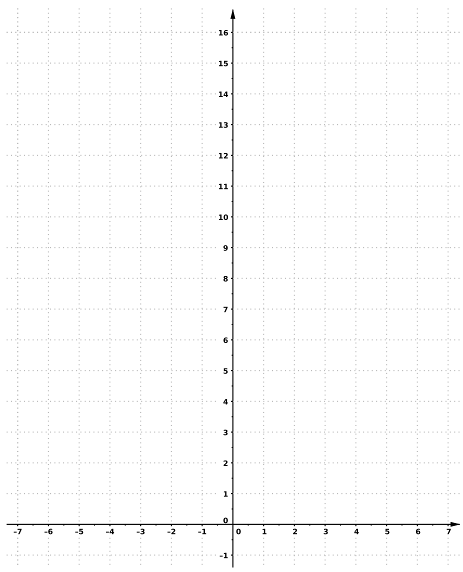
  Si può mostrare che è descritto da una funzione affine, dunque:
  $$f(t) = at + b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- **Definizione: crescita esponenziale**
  Un processo di crescita (o decrescita) descritto da una funzione reale f per cui vale
  $$\frac{f(t+\Delta t)}{f(t)} = k_{\Delta t}$$
  dove $k_{\Delta t}$ è una costante (dipendente solo da Δt), è detto **processo di crescita** (o decrescita) **esponenziale**.

  Si può mostrare che esso è descritto da una funzione esponenziale:
  $$f(t) = b \cdot a^t \qquad a \in \mathbb{R}^*_+ \text{ e } b \in \mathbb{R}^*$$

Si riscontra una crescita esponenziale, quindi, nel caso in cui allo stesso intervallo di tempo Δt (cioè della variabile indipendente) corrisponde sempre lo stesso fattore di crescita della grandezza in questione (cioè della variabile dipendente).

Esercizio: Rappresenta la crescita dell'alga e del fungo nello stesso diagramma.



Osservazione: Si può notare come la crescita esponenziale sia inizialmente più lenta, mentre diventa sempre più rapida al passare del tempo: in particolare una curva esponenziale **diventa più rapida di qualsiasi parabola (es: $y = x^2$) dopo un certo tempo**.

4.2 Applicazioni della crescita esponenziale

(i) Sia $f(t) = b \cdot a^t$ una funzione di crescita esponenziale. Come osservato la crescita **assoluta** $f(t+\Delta t) - f(t)$ non è costante al passare dei giorni. È però costante la crescita **relativa** (o percentuale) in un determinato intervallo di tempo:

$$\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{f(t)} \cdot 100\%$$

Ad esempio: calcola la crescita percentuale giornaliera nel primo e nell'ottavo giorno del fungo dell' es. **2)** a pag. 9:

Attenzione: esso non equivale a $\frac{20\%}{7}$!

In generale: il tasso di crescita (o di decrescita) *percentuale* per un intervallo Δt può essere facilmente calcolato:

$$\boxed{c(\Delta t) = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{f(t)} \cdot 100\% = \frac{b \cdot a^{t+\Delta t} - b \cdot a^t}{b \cdot a^t} = \frac{\cancel{b \cdot a^t}(a^{\Delta t} - 1)}{\cancel{b \cdot a^t}} \cdot 100\% = (a^{\Delta t} - 1) \cdot 100\%} \quad .$$

(ii) Un processo di crescita esponenziale, descritto da una funzione $f(t) = b \cdot a^t$ possiede un ben determinato *tempo di raddoppiamento* t_2, in cui la quantità descritta da f raddoppia. In effetti, deve valere

$$\boxed{f(t_2) = 2 \cdot f(0) \iff \cancel{b} \cdot a^{t_2} = 2\cancel{b} \cdot a^0 \iff \cancel{a^t} a^{t_2} = 2\cancel{a^t} \iff a^{t_2} = 2 \quad .}$$

Come abbiamo già osservato, l'equazione $a^{t_2} = 2$ possiede per $a > 0$ e $a \neq 1$ esattamente una soluzione (denotata con $\log_a 2$).

Analogamente, per un processo di decrescita esponenziale esiste un ben determinato *tempo di dimezzamento* $t_{\frac{1}{2}}$, soluzione dell'equazione $a^{t_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Esercizio: prova a stimare il tempo di raddoppiamento del volume del fungo dell'esercizio **2)**:

. . . .

Osservazione: In una crescita esponenziale descritta dalla funzione $f(x) = b \cdot a^t$, il coefficiente b corrisponde a $f(0)$; si tratta dunque dell'ordinata all'origine del grafico ovvero il "valore di partenza" della crescita.

5 Il numero di Eulero (e)

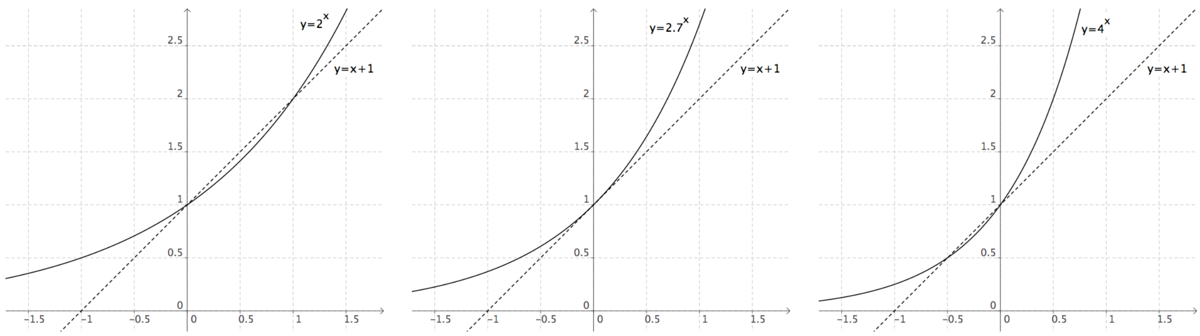
Introduciamo ora una delle costanti più note ed importanti in matematica, denotata semplicemente con e da Leonhard Euler. Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783) è considerato il più importante matematico dell'illuminismo, autore di moltissimi contributi fondamentali in svariati campi della matematica pura ed applicata. Da notare che la scelta della lettera "e" è stata scelta quale iniziale della parola *esponenziale* e non del suo cognome (Eulero fu una persona estremamente modesta).

La banconota svizzera da 10 franchi (in uso dal 1976 al 1995) che onora Eulero, il più famoso matematico svizzero

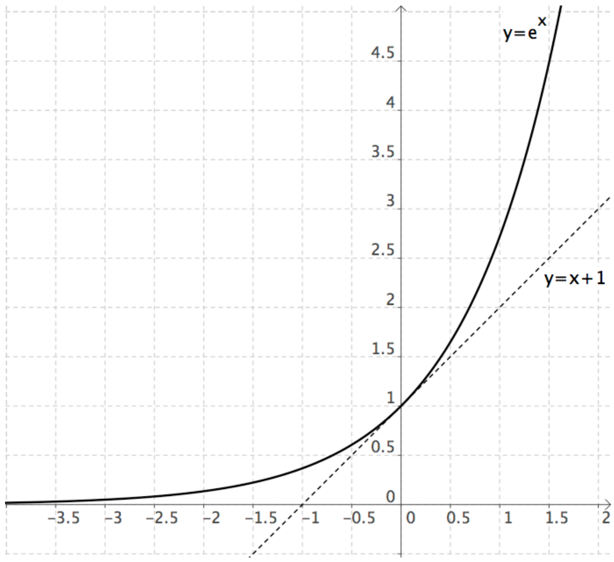
Il valore di e può essere ottenuto in diversi modi: in questo paragrafo ne daremo una definizione *geometrica*; una definizione più "sintetica" potrà essere fornita soltanto dopo aver approfondito il concetto di *derivata*.

5.1 Introduzione geometrica

Iniziamo osservando quanto segue: ogni curva esponenziale, di equazione $y = a^x$ (con $a \in \mathbb{R}^*_+$) possiede almeno un'intersezione con la retta $y = x + 1$: si tratta del punto $P(0; 1)$. Studiando (ad esempio con Geogebra) il comportamento reciproco delle due curve al variare di a, si intuisce che *per un solo valore di a*, prossimo a 2.7, non vi è nessun altro punto di intersezione e quindi la retta $y = x+1$ e la curva esponenziale sono tangenti:



Definizione: il numero e
La costante e è l'*unica* base per cui la curva esponenziale $y = e^x$ è tangente alla retta di equazione $y = x + 1$.

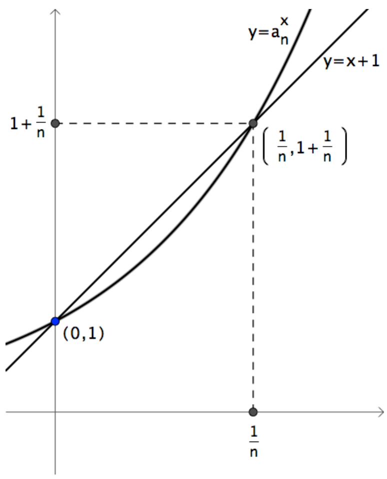


Osservazione: Alternativamente si può definire e come l'unico numero, la cui curva esponenziale $y = e^x$ ha pendenza 1 all'incrocio con l'asse $0y$ (punto $P(0;1)$).

La funzione esponenziale in base e viene anche denotata semplicemente con $y = \exp(x)$ (tralasciando quindi l'indice e).

5.2 Introduzione algebrica

Per calcolare, almeno approssimativamente, il valore di e procediamo costruendo una "sequenza" (cioè una *successione*) di numeri reali a_n. Similarmente a quanto visto nell'introduzione geometrica vogliamo intersecare la retta $y = x + 1$ con una curva esponenziale $y = (a_n)^x$.
Il primo punto di intersezione è $P(0;1)$, mentre il secondo punto vogliamo che si avvicini sempre di più a P. Per questo è utile utilizzare il punto con $x = \frac{1}{n}$: per n molto grande (o, meglio, "per n tendente a infinito", denotato $n \to \infty$) $\frac{1}{n}$ si avvicinerà sempre di più a zero.
Dato che il punto deve appartenere alla retta $y = x + 1$ avremo il punto:



$$P_n = \left(\frac{1}{n}; \ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Questo punto appartiene anche alla curva di equazione $y = (a_n)^x$, quindi:

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pertanto, per n molto grande (*tendente a* ∞), la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ assumerà valori sempre più prossimi ad e : si dice che *e è il limite della successione per $n \to \infty$*, e si usa la notazione

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad .$$

Calcolando $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ per $n = 1, 2, 3, ...$ si ottengono approssimazioni sempre più precise di e:

- $a_1 = (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$
- $a_2 = (1 + \frac{1}{2})^2 =$ ....
- $a_3 =$ ....
- $a_5 =$ ....
- $a_{10} =$...............................

Oppure per n più grandi:

n	a_n
20	$\left(\frac{21}{20}\right)^{20} \cong 2,653$
50	$\left(\frac{51}{50}\right)^{50} \cong 2,692$
100	$\left(\frac{101}{100}\right)^{10} \cong 2,701$
1000	$\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cong 2,717$
2000	$\left(\frac{2001}{2000}\right)^{2000} \cong 2,718$

Per $n \to \infty$ si ottiene quindi il **numero di Eulero**

$$e = 2,718281828459045235360287471 35...$$

Osservazioni:

- si tratta di un numero **irrazionale**, cioè non esprimibile per mezzo di una frazione, e quindi il suo sviluppo decimale è illimitato e non periodico.
- Si tratta inoltre di un numero **trascendente**, cioè che non può essere ottenuto come soluzione di un'equazione polinomiale $p(x) = 0$ a coefficienti interi (ad esempio $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale ma è radice del polinomio $p(x) = x^2 - 1$). La dimostrazione di questo fatto, opera del francese Charles Hermite (1822-1901), rappresenta uno dei risultati più celebri della matematica del XIX secolo.
- Vi sono altri modi per calcolare il numero di Eulero in modo sempre più approssimato. Le più conosciute sono:

$$e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}}$$

6 Il concetto di logaritmo (ricerca degli esponenti)

6.1 Esempio introduttivo

Ricollegandoci al primo esempio introdotto (un fungo il cui volume raddoppiava ogni mese: $V(n) = 2^n$) abbiamo determinato il tempo necessario ad avere 64 volte il volume iniziale *solamente a tentativi*. Mentre abbiamo potuto solamente approssimare il tempo necessario a centuplicare il volume iniziale.

Algebraicamente, se $V(n)$ indica il volume del fungo dopo n mesi, vogliamo risolvere le seguenti equazioni:

$$V(n) = 64 \iff n = \dots\dots\dots \quad \text{rispettivamente} \quad V(n) = 100 \iff n = \dots\dots\dots$$

vale a dire che cerchiamo la funzione **inversa** dell'esponenziale.

6.2 Introduzione

Come abbiamo già mostrato, la funzione $\exp_a : x \mapsto y = a^x$ rappresenta per $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ una biiezione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, e possiede quindi un'inversa.

Definizione: Logaritmi

L'inversa della funzione $\exp_a$, denotata

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log_a(x) \end{aligned}$$

viene chiamata **funzione logaritmica in base** a. Il numero reale $\log_a(x)$ è il **logaritmo in base** a di x. Il logaritmo dunque è la **ricerca dell'esponente**.

Vale quindi

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x :$$

il logaritmo di un numero reale x in base a è **il numero a cui dev'essere elevato** a **per ottenere** x. In altre parole,

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{e} \qquad \log_a(a^x) = x \qquad .$$

Nota: a volte, come già per le funzioni trigonometriche, la parentesi può essere tralasciata: $\log_a x$ è un'abbreviazione per $\log_a(x)$.

Esempi:

1) $\log_5 25 = 2$ perché $5^2 = 25$;

2) $\log_3 81 = \dots\dots$ perché $\dots\dots = \dots\dots$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = \dots\dots$ perché $\dots\dots = \dots\dots$;

4) $\log_{81} \frac{1}{3} = \dots\dots$ perché $\dots\dots = \dots\dots$;

5) $\log_2 0.125 = \dots\dots$ perché $\dots\dots = \dots\dots$;

6) $\log_3 \sqrt{3} = \dots\dots$ perché $\dots\dots = \dots\dots$.

Casi particolari: sia $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;

(i) $\log_a a =$.................... perché ....=.................... ;

(ii) $\log_a 1 =$.................... perchè ....=.................... ;

(iii) $\log_a \frac{1}{a} =$.................... perché ....=.................... ;

(iv) $\log_a N$ non esiste se $N \leq 0$.

Osservazione: Nelle applicazioni, le basi più utilizzati sono la base 10, la base e e la base 2:

- $\log x = \log_{10} x$ (si omette la base) è il **logaritmo decimale**.

  Questa base è particolarmente utile perchè ci indica direttamente l'ordine di grandezza del numero. Ad esempio $\log(0.001) = -3$ visto che $10^{-3} = 0.001$ oppure $\log(61'000) \cong 4.78$ vale a dire che il numero all'incirca 10^4 e quindi di 4 cifre.

- $\ln x = \log_e x$ è il **logaritmo naturale**, con base il numero di Eulero: $e = 2.71828\cdots$

- $\operatorname{lb} x = \log_2 x$ è il **logaritmo** in base 2, utilizzato spesso in informatica.

La maggior parte delle calcolatrici scientifiche danno la possibilità di calcolare i logaritmi in base 10 e base e (tasti `log` e `ln`). In seguito vedremo come utilizzarli per calcolare logaritmi in basi qualsiasi.

6.3 Applicazioni

L'**applicazione** principale dei logaritmi, come vedremo, riguarda la risoluzione di *equazioni esponenziali*. Per il momento, ci limitiamo a fornire alcuni **esempi**:

a) $7^x = 13$ b) $5^{x-1} = 3$ c) $7^{x^2-2} = 4$ d) $3^x = 0$

7 Proprietà dei logaritmi

7.1 Introduzione

Completa i seguenti calcoli:

$\log_2(2\cdot 4) = \log_2(8) = \dots\dots\dots$ mentre $\log_2(2) = \dots\dots\dots$; $\log_2(4) = \dots\dots\dots$.

$\log_3(3\cdot 27) = \log_3(81) = \dots\dots\dots$ mentre $\log_3(3) = \dots\dots\dots$; $\log_3(27) = \dots\dots\dots$.

$\log_2(1\cdot 16) = \log_2(16) = \dots\dots\dots$ mentre $\log_2(1) = \dots\dots\dots$; $\log_2(16) = \dots\dots\dots$.

$\log_2(32/4) = \log_2(8) = \dots\dots\dots$ mentre $\log_2(32) = \dots\dots\dots$; $\log_2(4) = \dots\dots\dots$.

... quindi ...

$\log_2(2\cdot 4) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$; $\log_3(3\cdot 27) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\log_2(1\cdot 16) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\log_2(32/4) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Intuitivamente il logaritmo semplifica le operazioni di calcolo *trasformando* una moltiplicazione in una somma, ovvero $\log(a\cdot b) = \log(a) + \log(b)$.

Inoltre possiamo ipotizzare che:

$$\log_b(a^n) = \log_b(\underbrace{a\cdot a\cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

7.2 Regole di calcolo

Teorema

Sia $a \in \mathbb{R}^*_+ \setminus \{1\}$;

(i) $\boxed{\log_a(u\cdot v) = \log_a u + \log_a v}$ $(u, v > 0)$;

si tratta della **proprietà caratteristica** (o *equazione funzionale*) del logaritmo;

(ii) $\boxed{\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a u - \log_a v}$ $(u, v > 0)$;

(iii) $\boxed{\log_a(u^\alpha) = \alpha \cdot \log_a u}$ $(u > 0, \alpha \in \mathbb{R})$;

(iv) $\boxed{\log_a \sqrt[n]{u} = \dfrac{\log_a u}{n}}$ $(u > 0, n \in \mathbb{N})$.

Nota che i logaritmi non sono né additivi né moltiplicativi:

$$\begin{aligned} \log_a(u\cdot v) &\neq \log_a u \cdot \log_a v \\ \log_a(u+v) &\neq \log_a u + \log_a v \quad . \end{aligned}$$

Esercizi: Trasforma le seguenti formulazioni in combinazioni lineari tra logaritmi:

a) $\log\left(xy^2z^3\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\log\left(\dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2+b^2}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\log\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Viceversa, riduci le seguenti combinazioni lineari ad un unico logaritmo:

d) $\dfrac{3}{4}\log a - \dfrac{1}{2}\log b + 2\log 3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) $2\log\dfrac{a}{b^2} - \log\dfrac{a^2}{c^3} - 3\log\dfrac{c^2}{b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Infine possiamo notare che dalla definizione di logaritmo e dalle sue regole di calcolo vale:

f) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g) $\log_a(a^x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad a^{\log_a x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dimostrazione del teorema:

Per la parte **a)** poniamo $x = \log_a u \iff u = \ldots\ldots\ldots$, $y = \log_a v \iff v = \ldots\ldots\ldots$

Se ora moltiplichiamo $u \cdot v$ possiamo osservare che...

7.3 Cambio di base

Come abbiamo già visto, con le calcolatrici scientifiche è possibile calcolare solamente i logaritmi in base e e 10. Fortunatamente dalle regole di calcolo è possibile derivare una regola molto utile che ci permette di calcolare il logaritmo di qualsiasi base:

Teorema: Cambiamento della base

Siano $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; allora vale

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Il fattore $M = \frac{1}{\log_a b}$ è detto *modulo di passaggio*.

Esempi:

1) $\log_2 100 = \dfrac{\log 100}{\log 2} = \dfrac{2}{\log 2} \cong 6,644$, oppure anche $\log_2 100 = \dfrac{\ln 100}{\ln 2} \cong 6,644$

2) $\log_7 16807 =$ ....

3) $\log_5 3542.4 =$ ....

4) Dimostra che $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$ ....

Dimostrazione:

Poniamo $y = \log_b x \iff x = \ldots\ldots\ldots$..

Se ora applichiamo $\log_a$ da entrambe le parti dell'ultima uguaglianza otteniamo:

7.4 Applicazioni:

1) Tempo di raddoppiamento: di un processo di crescita (risp. decrescita) esponenziale possiamo ora calcolarne il tempo di raddoppiamento (risp dimezzamento). Ad **esempio**, facendo riferimento al secondo esempio di pagina 9: *un determinato fungo, il cui volume vale inizialmente 3 cm*^{3}*, cresce del* 20% *alla settimana. In quanto tempo il suo volume raddoppia?*

Come abbiamo notato a pagina 12, dal momento che per il volume vale:

$V(t) =$ ...., basta calcolare

2) Cambio di base: nella letteratura scientifica, invece della notazione $y = b\,a^x$, le funzioni di crescita esponenziale vengono spesso scritte nella forma $y = b\,e^{kx}$. Per passare da una forma all'altra basta porre $k = \ln a$, difatti

$$\boxed{b\,a^x = b\,e^{\ln(a^x)} = b\,e^{x\cdot\overbrace{(\ln a)}^{=k}} = b\,e^{kx}}$$

Esempio: per la funzione citata sopra vale $V(t) =$ .... ;

calcoliamo $k =$.............; quindi (approssimativamente) $V(t) =$..............

3) Numeri "grandi" vs "piccoli": Il logaritmo permette, a volte, di ridurre (o aumentare) l'ordine di grandezza di un numero per agevolare il calcolo. Ciò permette ad esempio di utilizzare una comune calcolatrice per operare su numeri molto grandi o molto piccoli[2]. Ad **esempio**, *scriviamo in notazione scientifica i seguenti numeri:*

a) $\alpha = 45^{100} =$ .... ;

b) $\beta = 0,00041^{30} =$...;

c) $\frac{(3.5)^{78}\cdot 10^{120}\cdot\pi}{4}$ ....

[2]le comuni calcolatrici approssimano a zero i numeri il cui valore assoluto è inferiore a 10^{-100} e rifiutano i numeri il cui valore assoluto supera 10^{100}

8 Funzioni logaritmiche

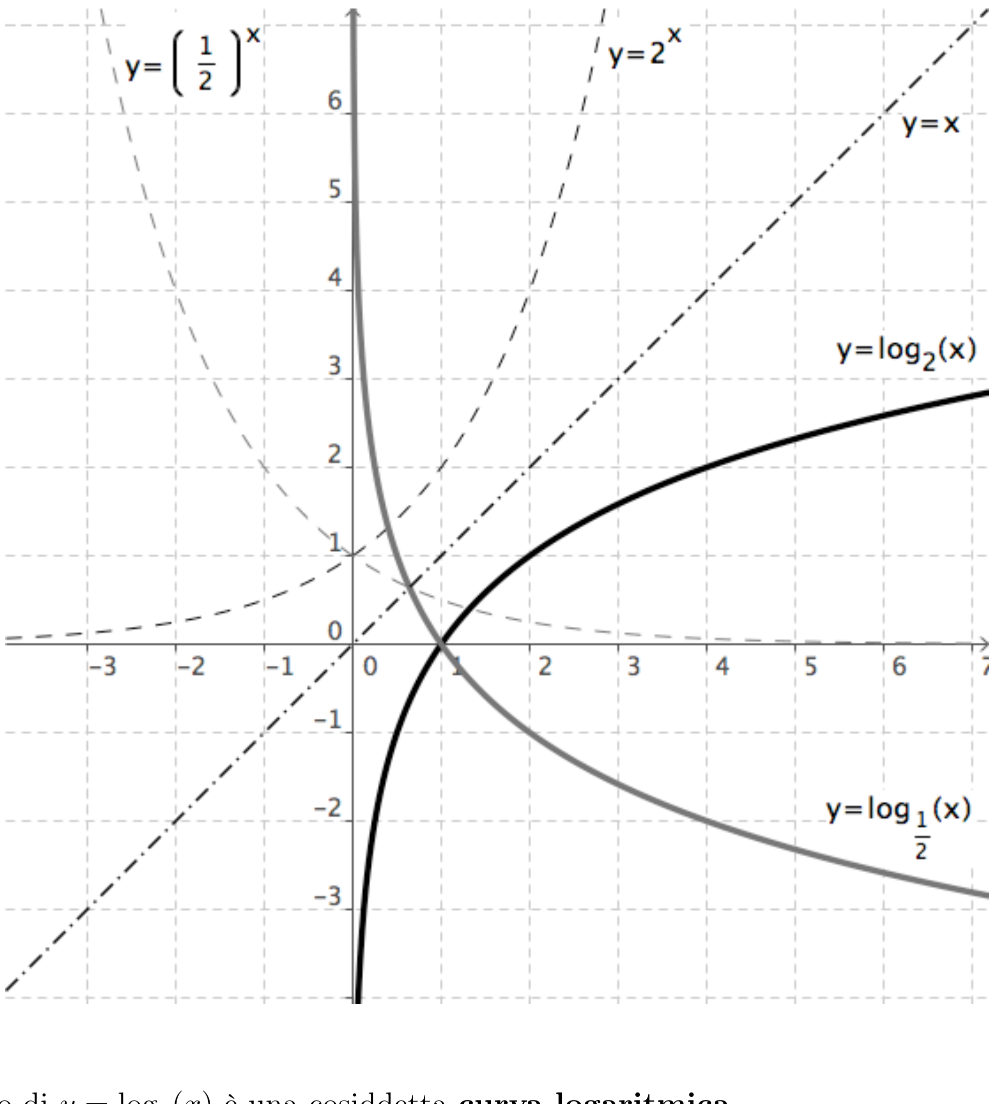
Ricorda: sia $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; la **funzione logaritmica** in base a è l'inversa della *funzione esponenziale* in base a

$$\log_a : x \longmapsto y = \log_a(x); \qquad \exp_a : x \longmapsto y = \exp_a(x) = a^x \quad .$$

Poiché:

$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = a^y \qquad .$$

Rappresentiamo graficamente le funzioni logaritmiche nelle basi 2 e $\frac{1}{2}$, notando che è possibile sfruttare la simmetria di asse $y = x$ tra il grafico di una funzione e della sua inversa:



Il grafico di $y = \log_a(x)$ è una cosiddetta **curva logaritmica**.

8.1 Proprietà della funzione logaritmica

1) Insieme di definizione: $\mathrm{D}_{\log_a} =$ ....

2) Insieme delle immagini: $\mathrm{Im}_{\log_a} =$ ....

3) Monotonia: in generale, **la monotonia di una funzione iniettiva coincide con la monotonia della sua inversa**; ad esempio, con $a > 1$, nel nostro caso vale

$$x_1 > x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad y_1 > y_2 \quad \text{con} \quad y_1 = a^{x_1} \text{ e } y_2 = a^{x_2}$$

e quindi, applicando la funzione inversa,

$$y_1 > y_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 > x_2 \quad \text{con} \quad x_1 = \log_a y_1 \text{ e } x_2 = \log_a y_2.$$

Quindi segue che la funzione $y = \log_a(x)$ è ...

- .... per $a > 1$
- .... per $0 < a < 1$

4) Iniettività: ....

5) segno:

- se $a > 1$: ....
- se $0 < a < 1$: ....
- $\log_a(x) = 0$: ....

6) *Intersezione con gli assi:* ....

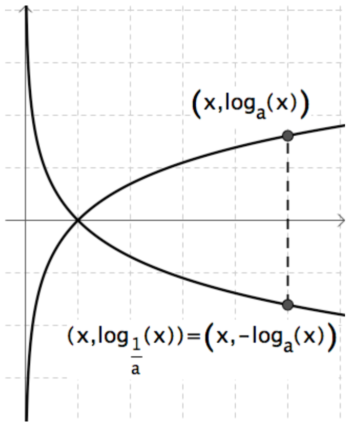
7) *asintoto verticale:* ....

8) *simmetria:* $y = \log_a(x)$ e $y = \log_{\frac{1}{a}}(x)$ ....

$(x, \log_a x)$ giace sul grafico di $y = \log_a(x)$ e $(x, -\log_a x)$ giace sul grafico di $y = \log_{\frac{1}{a}}(x)$.

Questo è dimostrabile anche algebricamente:

$\log_{\frac{1}{a}} x =$ ....



9 Equazioni esponenziali e logaritmiche

9.1 Equazioni esponenziali

Nei paragrafi precedenti abbiamo già trattato alcuni casi particolari di *equazioni* esponenziali:

(i) Equazioni del tipo $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$ (vedi pag. 8): l'iniettività della funzione esponenziale permette di concludere immediatamente che $f(x) = g(x)$; ad **esempio**

$$7^{2x^2-3} = 7^{x^2+1} \iff 2x^2 - 3 = x^2 + 1 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \quad .$$

(ii) Equazioni del tipo $\boxed{a^{f(x)} = b}$ (vedi pag. 17): dalla definizione di logaritmo segue immediatamente $f(x) = \log_a b$; ad **esempio**

$$e^{x^2+1} = 3 \iff x^2 + 1 = \ln 3 \iff x = \pm\sqrt{\ln 3 - 1} \cong 0,314 \quad .$$

(iii) Più in generale, vogliamo occuparci di equazioni riconducibili a $\boxed{a \cdot b^{f(x)} = c \cdot d^{g(x)}}$.

Esempio: $2 \cdot 3^x = 5 \cdot 7^{2x-2}$; possiamo procedere in (almeno) 2 modi:

- I modo: ci riconduciamo a **(ii)**;

$$2{\cdot}3^x = 5{\cdot}7^{2x-2} \iff 2{\cdot}3^x = 5{\cdot}(7^2)^x{\cdot}7^{-2} \iff 2{\cdot}3^x = \frac{5}{49}{\cdot}49^x \iff \left(\frac{49}{3}\right)^x = \frac{98}{5}$$

da cui segue

$$x = \log_{\frac{49}{3}} \frac{98}{5} = \frac{\log \frac{98}{5}}{\log \frac{49}{3}} = \frac{\log 98 - \log 5}{\log 49 - \log 3} \quad .$$

Nota che ciò è possibile solo a condizione che gli esponenti siano *lineari* in x.

- II modo: applichiamo la funzione logaritmica (in una base qualsiasi) ad entrambi i termini dell'equazione, sfruttando l'iniettività;

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^x = 5 \cdot 7^{2x-2} \quad &\iff \quad \log(2 \cdot 3^x) = \log\left(5 \cdot 7^{2x-2}\right) \\ &\iff \quad \log 2 + x \cdot \log 3 = \log 5 + (2x-2) \cdot \log 7 \\ &\iff \quad x(\log 3 - 2\log 7) = \log 5 - \log 2 - 2\log 7 \end{aligned}$$

da cui segue

$$x = \frac{\log 5 - \log 2 - 2\log 7}{\log 3 - 2\log 7} = \frac{\log\left(\frac{5}{2\cdot 7^2}\right)}{\log\left(\frac{3}{7^2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{5}{98}\right)}{\log\left(\frac{3}{49}\right)} \quad .$$

Nota: qui non è necessario che gli esponenti siano lineari in x.

In generale, quindi, possiamo sempre procedere come segue:

$$a{\cdot}b^{f(x)} = c{\cdot}d^{g(x)} \iff \log\left(a \cdot b^{f(x)}\right) = \log\left(c \cdot d^{g(x)}\right) \iff \log a + f(x){\cdot}\log b = \log c + g(x){\cdot}\log d$$

per ottenere un'equazione lineare in $f(x)$ e $g(x)$.

Nota che **(i)** e **(ii)** sono casi particolari di **(iii)** !

Esempi: *risolviamo le seguenti equazioni:*

1) $3^{x-1} = 3^{x^2-7}$

2) $2^{5x-3} = 3^{6x-2}$

3) $3 \cdot 5^{(x^2)} = 11 \cdot 7^{x+1}$;

4) $\sqrt{5^{2x^2+1}} = 10^{x^2-1}$.

5) $3 \cdot 2^{x-1} + 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 9$

6) $2 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 3 = 0$

Soluzioni:

9.2 Equazioni logaritmiche

Considera ad **esempio** le seguenti equazioni:

1) $\ln x = 3 \ln 2$;

2) $2 \log x = \log(x + 2)$.

3) $\log_2 x = \log_4(x - \frac{1}{4})$

Per la loro risoluzione, si può procedere come segue:

1) l'equazione è equivalente a $\ln x = \ln 2^3$, e per l'iniettività della funzione logaritmica possiamo concludere immediatamente

$$x = 2^3 = 8; \qquad \mathcal{S} = \{8\}$$

2) analogamente, scriviamo

$$\log x^2 = \log(x + 2) \Rightarrow x^2 = x + 2$$

giungendo all'equazione quadratica

$$x^2 = x + 2 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x - 2)(x + 1) = 0$$

le cui soluzioni sono $x_1 = 2$ e $x = 2 = -1$. Quest'ultima, però, rende priva di senso l'equazione logaritmica originale (dato che l'argomento di un logaritmo non può essere negativo). Si tratta cioè di una *soluzione estranea*, da escludere dall'insieme soluzione. Vale quindi $\mathcal{S} = \{2\}$.

3) In questo caso dobbiamo utilizzare il cambio di base in modo da avere lo stesso logaritmo:

$$\log_2(x) = \frac{\log_2\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\underbrace{\log_2(4)}_{=2}}$$

da cui otteniamo

$$2 \log_2(x) = \log_2\left(x - \frac{1}{4}\right) \iff \log_2(x^2) = \log_2\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

e infine: $x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 = 0$. Quindi $\mathcal{S} = \{\frac{1}{2}\}$

In generale, per risolvere equazioni ricondotte alla forma

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x)} \quad ,$$

si può procedere scrivendo $f(x) = g(x)$, con l'accortezza però di controllare l'accettabilità delle soluzioni trovate al fine di escludere dall'insieme soluzione $\mathcal{S}$ le *soluzioni estranee*.

Altri esempi:

1) $\log(x-3) = 7$;

2) $\log_3 x + \log_3(2x) = 5$;

3) $\log(x^3) - \dfrac{12}{\log x} = 5$;

4) $\log_2(4x-15)^2 = 1 + \log_2 x$;

5) $x^{\log x} = 10\,000$.

10 Disequazioni esponenziali e logaritmiche

10.1 Disequazioni esponenziali

Occupiamoci ora di **disequazioni esponenziali**, riconducibili alla forma

$$\boxed{a \cdot b^{f(x)} > c \cdot d^{g(x)}} \qquad \text{(risp. } \geq, <, \leq)$$

con $a, c \in \mathbb{R}$ e $b, d \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Per la loro risoluzione possiamo procedere in maniera analoga alle equazioni della forma $ab^{f(x)} = cd^{g(x)}$, applicando lo stesso logaritmo $\log_k$ ad entrambi i termini.

Esempio 1:
Se $2^x > 16 \iff 2^x > 2^4$ allora applicando $\log_2$ in entrambi i bracci della disequazione

otteniamo: ....

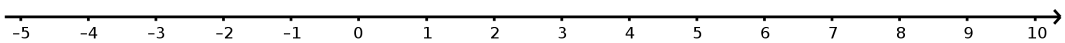
$\mathcal{S} =$ ....

Se invece analizziamo la situazione: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ e applichiamo $\log_{\frac{1}{2}}$

otteniamo: ....

$\mathcal{S} =$ ....

Rappresentiamo le soluzioni nella seguente retta dei numeri e proviamo ora a verificare le nostre soluzioni con qualche calcolo:



Quando $2^x > 2^4 = 16$? E quando $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8}$?

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1	1	1		
-4			2		
-3			3		
-2			4		
-1			5		

Occorre dunque tener conto del fatto che *la funzione* $y = \log_k(x)$ *è strettamente crescente per* $k > 1$ *e strettamente decrescente per* $0 < k < 1$: **applicando logaritmi con base compresa tra 0 e 1 il segno di disequazione cambia!**

Esempio: risolviamo nuovamente la seconda disequazione:

- Applicando il logaritmo in base 1/2 (**cambio di segno di disequazione!**):
  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8} \iff x < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) \iff x < 3$
- Alternativamente si può applicare il logaritmo in base 10 (funzione crescente che non modifica il segno di disequazione). In questo bisognerà però fare attenzione al segno dei valori ottenuti:
  $$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8} \iff x \cdot \underbrace{\log\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0\ !!!} > \log\left(\frac{1}{8}\right) \iff x < \frac{\log\left(\frac{1}{8}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

Esempi: *risolvi le seguenti disequazioni:*

1) $2^{x+1} \leq 7$;

2) $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > 10$;

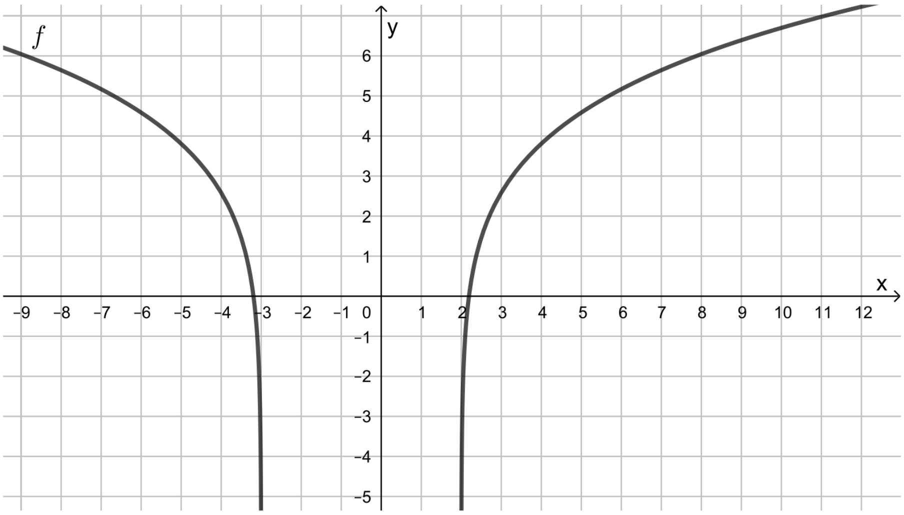
3) $3 \cdot 2^x > 10^{x+1}$;

4) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 \geq 0$;

5) $5^{x^2} < 4^x$.

10.2 Disequazioni logaritmiche

Esercizio introduttivo: qui sotto è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = \log_2(x^2 + x - 6)$. Rappresenta il grafico di $g(x) = \log_2(2x)$.



Risolvi ora la disequazione:

$$g(x) < f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \log_2(2x) > \log_2(x^2 + x - 6)$$

Prova ora a confrontare quanto ottenuto con quanto è osservabile nel grafico. Cosa puoi concludere?

Più in generale analizziamo le **disequazioni logaritmiche**, ricondotte alla forma elementare

$$\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x)} \qquad \text{(risp. } \geq, <, \leq)$$

con $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Anche in questo caso dobbiamo tenere conto della *monotonia* della funzione logaritmica: **crescente per $a > 1$, altrimenti decrescente**. Possiamo scrivere:

- se $a > 1$, il segno di disequazione <u>non cambia</u>:

  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \text{(risp. } \geq, <, \leq) \quad \Rightarrow \quad f(x) > g(x) \quad \text{(risp. } \geq, <, \leq)$

- se $0 < a < 1$, il segno di disequazione <u>cambia</u>:

  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \text{(risp. } \geq, <, \leq) \quad \Rightarrow \quad f(x) < g(x) \quad \text{(risp. } \leq, >, \geq).$

Nello scrivere l'insieme soluzione bisogna inoltre tener conto del fatto che l'argomento di un logaritmo può essere soltanto strettamente positivo; deve cioè valere $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$. L'equazione logaritmica richiede quindi di risolvere il "sistema di disequazioni in una indeterminata"

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \quad \text{(risp. } \geq, <, \leq) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Esempi:

1) $\log(x+1) \geq \log(2x-3)$; **3)** $\log_2(x+1) \geq \log_2 x + 1$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) < 1$; **4)** $(\log_2 x)^2 + \log_2 x \geq 2$.

11 Ricapitolazione

1. Grazie al concetto di logaritmo siamo ora in grado di risolvere tutta una nuova serie di equazioni:

$\sqrt(x) = a \quad \Longleftrightarrow \ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$x^2 = a \quad \Longleftrightarrow \ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$a^x = b \quad \Longleftrightarrow \ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Abbiamo inoltre visto come il logaritmo (in particolare grazie alla sua proprietà caratteristica $\boxed{\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)}$ e la regola derivata $\boxed{\log(x^n) = n\log(x)}$) permetta di “abbassare il grado” di una formula: *una potenza diventerà una moltiplicazione mentre una moltiplicazione diventerà una somma.*

$$\log(23 \cdot 10^2) = \log(23) + \log(10^2) = \log(23) + 2 \cdot \log(10) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Con le funzioni polinomiali siamo ora in grado di caratterizzare tutta una serie di funzioni:

Proprietà	**Nome**	**Esempio**
$f(x+y) = f(x) + f(y)$	Funzioni lineari	$f(x) = ax, \quad a(x+y) = ax + ay$
$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$	Funzioni potenza/radice	$f(x) = x^a, \quad (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$
$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$	Funzioni esponenziali	$f(x) = a^x, \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$	Funzioni logaritmiche	$f(x) = \log(x), \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

4. Attenzione:

$$e^{a+b} \neq e^a + e^b$$
$$e^{a \cdot b} \neq e^a \cdot e^b$$
$$\log(a+b) \neq \log(a) + \log(b)$$
$$\log(a \cdot b) \neq \log(a) \cdot \log(b)$$
$$\log(a+b) \neq \log(a) \cdot \log(b)$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) \neq \log(a-b)$$