Serie 20 - Prodotti tra vettori nello spazio

1. Dati i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$, determina $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}+\vec{c}\|$, $\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|$ e l'ampiezza dell'angolo (convesso) tra $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

2. **a)** Per quali valori di a i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ racchiudono un angolo di ampiezza $\frac{1}{4}\pi$?

b) Per quali valori di b i vettori $\begin{pmatrix} b \\ b+1 \\ b+2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b-2 \\ b-1 \\ b \end{pmatrix}$ sono perpendicolari tra loro?

3. Dati $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$:

a) Calcola il vettore $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$.

b) Calcola l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

c) Per quali valori di k i vettori $\vec{a}$ e $\vec{c}$ sono collineari? E per quali valori sono perpendicolari?

d) Per quali valori di k il vettore $\vec{c}$ ha modulo 10?

e) Per quali k i vettori $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$?

f) Sia $k = 1$, rappresenta il vettore $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

4. Quali delle seguenti espressioni sono formalmente accettabili?

a) $\|\vec{a}\| \leq \|\vec{b}\| + 3$;

b) $\vec{a} \leq \vec{b} + 3$;

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$;

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} - \|\vec{a}\| \cdot \|c\| = \vec{d} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{a}$;

e) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}$;

f) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \geq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{s}\|$;

g) $\vec{a} \times \vec{b} < \vec{a} \times \vec{c}$;

h) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$.

5. Determina, con l'aiuto del prodotto scalare, l'ampiezza dell'angolo tra le diagonali (spaziali) del cubo e l'ampiezza dell'angolo tra la diagonale e lo spigolo del cubo.

6. (Prodotto vettoriale tra vettori aritmetici). Siano $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Verifica esplicitamente che $\vec{v}$ è ortogonale a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

b) Mostra che vale $\|\vec{v}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\alpha$ dove $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ è l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

7. **a)** Dati $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcola $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{b}$.

b) Verifica esplicitamente che vale $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

8. Sono dati i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Determina un vettore $\vec{c}$ tale che $\vec{c} \perp \vec{a}$ e $\vec{c} \perp \vec{b}$.

b) Determina un vettore $\vec{d}$ tale che $\vec{d} \perp \vec{a}$, $\vec{d} \perp \vec{b}$ e la terna $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ sia *negativa*.

c) Determina un vettore $\vec{e}$ tale che $\vec{e} \perp \vec{a}$, $\vec{e} \perp \vec{b}$ e $\|\vec{e}\| = 5$ unità.

9. Dimostra, senza utilizzare le componenti, che per due vettori $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ vale

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\, \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

(ricorda che per definizione vale $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$).

Quale applicazione geometrica ha questa relazione?

10. Dimostra, senza utilizzare le componenti, che per due vettori $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ vale

$$\tan \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

dove $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ è l'angolo convesso e positivo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

11. Considera tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$. Le seguente affermazione è vera? Motiva la risposta!

$$\vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{u} \Rightarrow \vec{w} = \vec{u}$$

12. Considera i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b} \in V_3$ (non collineari) e $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b}$.

a) Dimostra che $\vec{a}$ e perpendicolare a $\vec{b} + \vec{c}$.

b) Dimostra che l'angolo tra $\vec{b}$ e $\vec{c}$ è ottuso.

13. Sono dati i vettori

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} \right\} .$$

a) Tre di essi formano una *base ortogonale* di V_3 (sono cioè linearmente indipendenti e ortogonali tra loro). Stabilisci quali.

b) Esprimi il vettore rimanente come combinazione lineare dei 3 vettori ortogonali.

Soluzioni

1.

$$\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

e quindi

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17} \quad , \quad \|\vec{b}+\vec{c}\|=\sqrt{4+1+25}=\sqrt{30} \quad , \quad \|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

e per l'angolo cercato vale

$$\angle\left(\vec{a}+\vec{b},\, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\arccos\left(\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{\|\vec{a}+\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|}\right)=\arccos\left(\frac{-9}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}\right)\cong 140,77^\circ \quad .$$

2. **a)** Siano $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix}$ e $\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Deve valere $\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, cioè

$$\frac{1+2}{\sqrt{a^2+5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sqrt{a^2+5}=3 \Rightarrow a^2+5=9$$

da cui segue $a^2=4$, $a=\pm2$. Quindi, per $\boxed{a=2 \text{ oppure } a=-2}$ l'angolo misura 45°.

b) Deve valere $\begin{pmatrix}b\\b+1\\b+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b-2\\b-1\\b\end{pmatrix}=0$, cioè

$$b(b-2)+(b+1)(b-1)+(b+2)b=0 \iff 3b^2-1=0 \iff b=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \quad .$$

Quindi, per $\boxed{b=\frac{1}{3}\sqrt{3} \text{ oppure } b=-\frac{1}{3}\sqrt{3}}$ i vettori sono ortogonali.

3. a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$, dunque otteniamo:

$$\vec{a}\times\vec{b}-12\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}-12\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\22\\-50\end{pmatrix}$$

b) $\alpha=\arccos\left(\frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{8}}\right)\cong 22.21^\circ$

c) Collineari se $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o} \iff \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\6\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k-24\\-(k+12)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Dalle prime due componenti otteniamo: $k=-12$ in entrambi i casi.

Perpendicolari se $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\k\end{pmatrix}=3-12+4k=0 \iff k=\frac{15}{4}$

d) $\|\vec{c}\|=10 \iff \sqrt{(-3)^2+6^2+k^2}=10 \iff 9+36+k^2=100 \iff k=\pm\sqrt{55}$.

e) Formano una base se non nulli (✓) e linearmente indipendenti. Se essi sono dipendenti allora possiamo descrivere $\vec{c}$ come combinazione lineare degli altri due vettori ottenendo:

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} \iff \begin{cases}-3=\lambda\\6=-2\lambda-2\mu\\k=4\lambda+2\mu\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-3\\\mu=\frac{6-6}{-2}=0\\k=4(-3)+2\cdot0=-12\end{cases}$$

Dunque se $k\neq-12$ avremo una base.

f) Utilizzando il sistema abituale otteniamo: $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.

4. Soluzioni:

a) Accettabile (disequazione tra numeri reali);

b) Non accettabile: mescolare vettori e scalari;

c) Non accettabile (numero sommato a vettore);

d) Accettabile (equazione tra numeri);

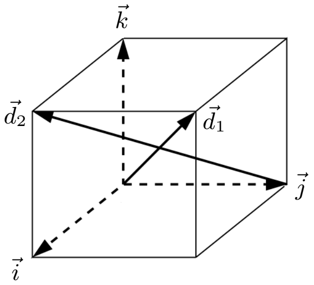
e) Accettabile (equazione tra vettori);

f) Accettabile (disequazione fra numeri);

g) Non accettabile: non definita una disequazione tra vettori;

h) Accettabile (equazione fra vettori).

5. Soluzione:



Consideriamo un cubo di spigolo unitario, e rappresentiamo come nel disegno una base ortonormata $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Allora vale

$$\vec{d_1} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{d_2} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \quad .$$

- L'angolo α tra lo spigolo e la diagonale è, ad esempio, l'angolo α tra $\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\vec{d_1}$:

$$\cos\,\alpha = \frac{\vec{i}\cdot\vec{d_1}}{\left\|\vec{i}\right\|\cdot\left\|\vec{d_1}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \text{e} \qquad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 54^\circ 44' 8'' \quad .$$

- L'angolo β tra le diagonali è l'angolo tra $\vec{d_1}$ e $\vec{d_2}$:

$$\cos\,\beta = \frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{\left\|\vec{d_1}\right\|\cdot\left\|\vec{d_2}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad \beta = \arccos\frac{1}{3} \cong 70^\circ 31' 44'' \quad .$$

6. **a)** Occorre verificare che $\vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{b}\cdot\vec{v} = 0$:

- $\vec{a}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\-a_1b_3 + a_3b_1\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix} = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$
- $\vec{b}\cdot\vec{v} = 0$ si dimostra analogamente.

b) Dal momento che vale $\|\vec{v}\| \geq 0$, $\|\vec{a}\| \geq 0$, $\|\vec{b}\| \geq 0$, $\sin\,\alpha > 0$ (nota che $0 \leq \alpha \leq \pi$),

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\,\alpha \iff \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cdot\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} \quad .$$

Dobbiamo verificare quest'ultima uguaglianza: in componenti, il termine a sinistra diventa

$$\|\vec{v}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (-a_1b_3 + a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

mentre il termine a destra diventa

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cdot\sin^2\alpha &= \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cdot(1-\cos^2\alpha) = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cdot\cos^2\alpha = \\ &= \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \quad .\end{aligned}$$

Ora non resta che confrontare le due espressioni in a_1, a_2, a_3 (si tratta di un semplice, ma tedioso, esercizio di calcolo letterale).

7. **a)** $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}4 & 0\\5 & -5\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}-3 & 4\\5 & -5\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}-3 & 4\\4 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot(-5)-5\cdot 0\\-((-3)\cdot(-5)-5\cdot 4)\\-3\cdot 0-4\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\5\\-16\end{pmatrix}$

e inoltre $\vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}7\\-1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{c}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}15\\-3\\12\end{pmatrix}$.

b)
- $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}-20\\5\\-16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\4\\-11\end{pmatrix}$
- $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix}-20\\5\\-16\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\-3\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\4\\-11\end{pmatrix}$.

8. **a)** Basta porre

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\1\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+12\\-(-10+4)\\15-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\6\\14\end{pmatrix} \quad \text{oppure anche} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix} \quad .$$

b) La terna $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ è positiva; sostituendo ad es. $\vec{c}$ con il suo opposto $-\vec{c}$ si ottiene quindi una terna negativa. Poniamo quindi $\vec{d} = -\vec{c} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\-7\end{pmatrix}$.

c) Il vettore $\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$ (il *versore* di $\vec{c}$) ha modulo pari ad un'unità. Possiamo quindi porre

$$\vec{e} = 5\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \frac{5}{\sqrt{5^2+3^2+7^2}} = \frac{5}{\sqrt{83}}\begin{pmatrix}5\\3\\7\end{pmatrix} \quad .$$

9. Sia α l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cdot\underbrace{\sin^2\alpha}_{1-\cos^2\alpha} = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 - \underbrace{\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2\cos^2\alpha}_{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \\ &= \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \quad .\end{aligned}$$

Di conseguenza, per l'area $\mathcal{A}_{ABC}$ di un triangolo ABC vale

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \quad ;$$

la relazione permette pertanto di calcolare l'area di un triangolo ABC (i cui lati rappresentano vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) *senza dover ricorrere al prodotto vettoriale.*

10.

$$\frac{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}{\vec{a}\cdot\vec{b}} = \frac{\cancel{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\cdot\sin\alpha}{\cancel{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\cdot\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad .$$

11. Ponendo $\vec{v} = \vec{o}$ l'affermazione $\vec{o}\times\vec{w} = \vec{o}\times\vec{u}$ vale per ogni $\vec{w}$ e $\vec{u}$ e dunque non necessariamente uguali.

Ponendo $\vec{v}\neq\vec{o}$ otteniamo:

$$\vec{v}\times\vec{w} = \vec{v}\times\vec{u} \iff \cancel{\|\vec{v}\|}\cdot\|\vec{w}\|\sin(\alpha) = \cancel{\|\vec{v}\|}\cdot\|\vec{u}\|\sin(\beta)$$

dove α è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$, mentre β è l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{u}$. Dunque non necessariamente $\vec{w} = \vec{u}$ ma deve valere:

$$\|\vec{w}\|\sin(\alpha) = \|\vec{u}\|\sin(\beta)$$

12. a) Perpendicolari se il prodotto scalare è nullo, dunque:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}) = \underbrace{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}_{=0 \text{ (perpendicolari)}} = 0\checkmark$$

b) α ottuso $\iff$ $\cos\alpha < 0$. Sappiamo che $\vec{b}\cdot\vec{c} = \|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cos\alpha$ e anche che:

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}) = \underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}_{=0 \text{ perché } \vec{b}\perp(\vec{b}\times\vec{a})} -\vec{b}\cdot\vec{b} = -\|\vec{b}\|^2$$

dunque $\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cos\alpha = -\|\vec{b}\|^2$, ovviamente i moduli sono strettamente positivi quindi $\cos\alpha < 0$ ■

13. **a)** Siano

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}17\\2\\-9\end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix}-7\\-8\\11\end{pmatrix}\quad .$$

Dal momento che vale $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{d} = \vec{c}\cdot\vec{d} = 0$, i tre vettori sono $\boxed{\vec{a},\ \vec{c} \text{ e } \vec{d}}$.

b) Per esprimere $\vec{b}$ come combinazione lineare occorre risolvere il sistema dato da

$$\begin{pmatrix}17\\2\\-9\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-7\\-8\\11\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2\lambda - 3\mu - 7\nu = 17\\ \lambda + 4\mu - 8\nu = 2\\ 2\lambda + \mu + 11\nu = -9\end{cases}\quad .$$

La soluzione è la terna $(\lambda,\mu,\nu) = (2,-2,-1)$, e pertanto $\boxed{\vec{b} = 2\vec{a} - 2\vec{c} - \vec{d}}$.