Serie 17 - Vettori aritmetici

"I modelli di un matematico, come quelli di un pittore o di un poeta, debbono essere belli; le idee, come i colori o le parole, debbono legarsi in modo armonioso. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto per la matematica brutta."

G.H. Hardy

1. Sono dati i vettori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in V_2. Scrivi in componenti i vettori $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ e $\vec{e} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$, e verifica geometricamente il risultato ottenuto.

2. Stabilisci se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono *collineari*:

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{33}{17} \\ \frac{22}{17} \end{pmatrix}$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{40} \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Per quali valori dei parametri i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono *collineari*?

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ a \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ e \end{pmatrix}$

4. Scrivi il vettore $\vec{c}$ come *combinazione lineare* di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e verifica algebricamente e graficamente il risultato ottenuto:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

5. È dato il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$;

a) determina il suo **versore** (o vettore unitario), cioè il vettore $\vec{v}\,'$ avente la medesima direzione e il medesimo verso di $\vec{v}$ e modulo $\|\vec{v}\,'\| = 1$.

b) Determina un vettore $\vec{w}$ avente la medesima direzione e il medesimo verso di $\vec{v}$ e modulo $\|\vec{w}\| = 100$.

c) Dato un vettore $\vec{v}$ in V_2, come si determina il suo versore in generale?

6. È dato il segmento AB, con $A(-9, 15)$ e $B(-12, 16)$. Dividilo in 3 parti uguali (trova cioè due punti P e Q tali che $|AP| = |PQ| = |QB|$).

7. * Siano $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ tre punti del piano. Mostra che per il baricentro (o "centro di gravità") G del triangolo ABC vale

$$G\left(\frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)\right)$$

(*consiglio: sfrutta l'esercizio* **11.** *della Serie* **9**). Determina inoltre il baricentro del triangolo dell'esercizio precedente.

8. Partendo dall'origine degli assi cartesiani, mi sposto di 5 unità verso il punto $A(12, 16)$. In seguito proseguo per 3 unità nella direzione dell'asse delle ascisse (in senso positivo) e di 10 unità verso il punto $B(0, 20)$. Dove mi trovo? A che distanza sono dall'origine degli assi cartesiani? E a che distanza dal punto A sono?

9. Considera i punti $A(-2; 1)$ e $B(4; x)$.

a) Determina per quali $x \in \mathbb{R}$ i punti distano a una distanza di $\sqrt{52}$ tra loro.

b) Considera il risultato x maggiore (punto a)). Determina algebricamente le coordinate di un punto P sull'asse Ox, che abbia la stessa distanza da A e B. Verifica il risultato graficamente!

10. Siano $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V_2$ non collineari (e non nulli).

a) I vettori $\overrightarrow{x} = -3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{y} = \frac{4}{3}\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{a}$ sono collineari?

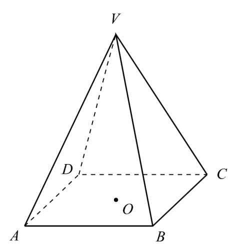
b) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ i vettori $\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{t} = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} + (k^2 - 3k)\overrightarrow{b}$ sono collineari?

11. Anche nello spazio (tridimensionale) è possibile definire e operare con vettori, esattamente come nel piano.

$ABCDV$ è una piramide a base quadrata. O è il centro del quadrato di base.

Esprimi i vettori indicati come combinazione lineare di $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AV}$:

$$\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OV}, \overrightarrow{BV}, \overrightarrow{CV}, \overrightarrow{DV}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}.$$



Soluzioni

1. $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{d} = 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 2-(-1)+3\cdot 0\\2\cdot 1-3+3\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$;

$\vec{e} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \vec{d} = -\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+2\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot 0\\-1+2\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.

La verifica geometrica non rappresenta un problema.

2. **a) SI**, dato che vale $\vec{w} = (-2)\cdot\vec{v}$.

b) SI, dato che vale $\vec{w} = -\frac{11}{17}\vec{v}$

c) SI, dato che vale $\vec{w} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\vec{v}$

d) NO, la componente y del vettore $\vec{w}$ è nulla mentre non lo è quella del vettore $\vec{v}$. Sarà dunque impossibile avere un fattore moltiplicativo che lega i due vettori!

3. **a)** $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono linearmente dipendenti $\iff$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\vec{w} = \lambda\cdot\vec{v}$

$\iff$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\begin{pmatrix}12\\7\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}-3\\a\end{pmatrix}$ $\iff$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\begin{cases}12 = -3\lambda\\7 = a\lambda\end{cases}$

Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda = -\frac{12}{3} = -4$, e quindi dalla seconda $a = \frac{7}{\lambda} = -\frac{7}{4}$.

Oppure, direttamente: dal momento che nessuna componente è uguale a 0, possiamo anche sfruttare il fatto che $\frac{12}{-3} = \frac{7}{a}$.

b) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono linearmente dipendenti *per qualsiasi valore di* b, dal momento che vale $\vec{w} = \frac{b}{\sqrt{5}}\vec{v}$.

c) *Per nessun valore di* c i vettori sono linearmente dipendenti: $\lambda\cdot 1 = 0 \iff \lambda = 0$, ma $0\cdot c \neq 8$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.

d) Chiaramente non può valere $d = 0$; quindi possiamo procedere così: $\vec{w} = \lambda\vec{v} \iff \lambda = \frac{8}{d} = \frac{e}{7}$. Ricaviamo la relazione $de = 56$ (per ogni scelta di $d \neq 0$, otteniamo $e = \frac{56}{d}$).

4. **a)** Procediamo così:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad\iff\quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \quad\iff\quad \begin{cases}\lambda + 3\mu = 2\\2\lambda + 5\mu = 3\end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $\lambda = 2 - 3\mu$; sostituendo nella seconda $2(2-3\mu) + 5\mu = 3$, $\mu = 1$ e $\lambda = 2 - 3\mu = -1$. Quindi $(\lambda,\mu) = (-1,1)$ e $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$.

Verifica algebrica: $-\vec{a} + \vec{b} = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \vec{c}$.

b) $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \iff \begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \iff (\lambda,\mu) = (\frac{1}{2}, 2)$

e quindi $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$.

c) il sistema di equazioni $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \iff \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ risulta impossibile (non possiede soluzioni), dunque $\vec{c}$ non è rappresentabile come combinazione lineare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Questo perché i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **collineari** (mentre $\vec{c}$ non è collineare a questi due vettori) e dunque la combinazione lineare non esiste!

d) $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \iff \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} \iff (\lambda,\mu) = (-\frac{3}{2}, 3)$

e quindi $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

5. **a)** Il modulo di $\vec{v}$ è $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Quindi, per "normare" il vettore basta dividerlo per 5 :

$$\vec{v}' = \frac{1}{5}\vec{v} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} \quad .$$

b) È sufficiente centuplicare $\vec{v}'$: $\vec{w} = 100\vec{v}' = 100\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\\80\end{pmatrix}$.

c) Per determinare il **versore** $\vec{v}\,'$ di un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, basta dividerlo per il suo modulo:

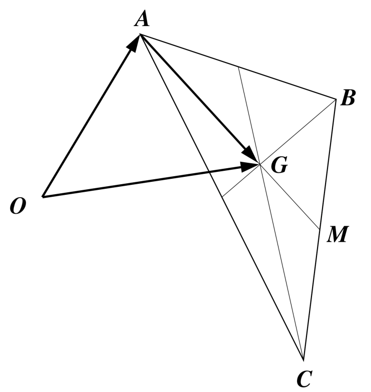
$$\vec{v}\,' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \quad .$$

6. Vale ovviamente

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-9\\15\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-12-(-9)\\16-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\15\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\\frac{46}{3}\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-9\\15\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-11\\\frac{47}{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

e quindi $P(-10, \frac{46}{3})$ e $Q(-11, \frac{47}{3})$.

7.



Siano $O(0,0)$ l'origine degli assi cartesiani, $G(x_G, y_G)$ il baricentro e M il punto medio del lato BC. Allora vale (v. Serie **19**, es. **2.**)

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}$$

e, siccome $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \underbrace{\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2}}_{\frac{\overrightarrow{AC}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$,

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

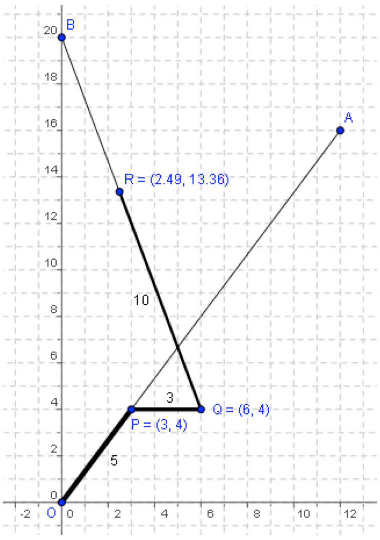
da cui si ricava

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_A+\frac{1}{3}x_B-\frac{1}{3}x_A+\frac{1}{3}x_C-\frac{1}{3}x_A\\y_A+\frac{1}{3}y_B-\frac{1}{3}y_A+\frac{1}{3}y_C-\frac{1}{3}y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)\\\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)\end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare (le coordinate del baricentro sono la *media aritmetica* delle coordinate dei tre vertici). Per quanto riguarda il triangolo dell'esercizio precedente, ricaviamo il baricentro

$$G\left(\frac{1}{3}(2+5-5), \frac{1}{3}(1+4+3)\right) = G\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right) \quad .$$

8. Sia R il punto cercato. Come mostra il disegno a fianco, vale



$$\overrightarrow{OR} = \underbrace{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}}_{\overrightarrow{OQ}} + \overrightarrow{QR}$$

con

$$\overrightarrow{OP} = 5\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} = \frac{5}{\sqrt{12^2+16^2}}\begin{pmatrix}12\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QR} = 10\frac{\overrightarrow{QB}}{\|\overrightarrow{QB}\|} = \frac{10}{\sqrt{(-6)^2+16^2}}\begin{pmatrix}-6\\16\end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{73}}\begin{pmatrix}-6\\16\end{pmatrix}$$

e quindi

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{73}}\begin{pmatrix}-6\\16\end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix}2,49\\13,36\end{pmatrix} \quad .$$

Mi trovo quindi (approssimativamente) nel punto $R(2,49;13,36)$. La distanza è semplicemente: $\|\overrightarrow{OR}\| = \sqrt{2,49^2 + 13,36^2} \cong 13,59$. Per la distanza fra R e A devo calcolare:

$$\|\overrightarrow{RA}\| = \left\| \begin{pmatrix} 12 - 2,49 \\ 16 - 13,36 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9,51^2 + 2,64^2} \cong 9,87.$$

9. a) La distanza corrisponde al modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right| = \left\| \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ x-1 \end{pmatrix} \right| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ x-1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{52}$$

da cui otteniamo:

$$\sqrt{6^2 + (x-1)^2} = \sqrt{52} \iff (x-1)^2 = 52 - 36 \iff x - 1 = \pm 4$$

dunque abbiamo due soluzioni: $x = 5$ oppure $x = -3$ (entrambe accettabili).

b) $P \in Ox$, dunque P ha coordinate: $P(x;0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Facilmente calcoliamo: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -5 \end{pmatrix}$. Sapendo che $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$ otteniamo:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (-5)^2} \iff x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 - 8x + 16 + 25 \iff x = 3.$$

Dunque $\boxed{P(3;0)}$.

10. a) I vettori sono collineari se esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui: $\vec{x} = \lambda \vec{y}$, cioè se:

$$-3\vec{a} + 2\vec{b} = \lambda \left(\frac{4}{3}\vec{b} - 2\vec{a} \right) \iff -3\vec{a} + 2\vec{b} = -\lambda 2\vec{a} + \lambda \frac{4}{3}\vec{b}$$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ <u>non</u> sono collineari e formano dunque una base: per rappresentare un terzo vettore ci sarà dunque **una sola combinazione lineare:** $x\vec{a} + y\vec{b}$, vale a dire i valori $x, y \in \mathbb{R}$ sono **univoci** (non ne esistono altri)!
L'equazione qui sopra ci indica due combinazioni lineari dello stesso vettore ma per quanto detto esse dovranno essere **uguali**, dunque segue che:

$$\begin{cases} -3 = -2\lambda \\ 2 = \frac{4}{3}\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases}$$

In entrambe le equazioni $\lambda = \frac{3}{2}$, dunque i vettori sono collineari!

b) Con le stesse considerazioni della parte a) possiamo dedurre che se $\vec{u} = \lambda \vec{t}$ allora $\lambda = 2$ (il fattore che moltiplica $\vec{a}$ passa da $\frac{1}{6}$ a $\frac{1}{3}$). Dunque, eguagliando i fattori che moltiplicano $\vec{b}$, otteniamo:

$$8 = 2(k^2 - 3k) \iff k^2 - 3k - 4 = 0 \iff (k-4)(k+1) = 0$$

Dunque le due soluzioni sono $k_1 = 4$ oppure $k_2 = -1$.

11. Soluzioni:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OV} = -\frac{1}{2}\vec{a} + -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{BV} = -\vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{CV} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$

$$\overrightarrow{DV} = -\vec{b} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$