Geometria Vettoriale nel Piano

Esempio introduttivo: Nella vita di tutti i giorni siamo abituati a utilizzare delle **grandezze**. Normalmente per indicare delle grandezze necessitiamo solamente di un valore numerico; ad esempio oggi ci sono 18°, il volume di un cartone di latte è 1 l e costa 1.25 franchi. Se mi peso (o meglio misuro la mia *massa*) avrò una misura in kg. Questo tipo di grandezze vengono chiamate **grandezze scalari** (ovvero espresse da numeri reali).

A volte però dare *una sola misura* non è abbastanza: nel gioco degli scacchi, se dico al mio avversario che ho fatto *una mossa* di dimensione 3 con la torre questo non è abbastanza per indicare dove ho spostato la mia torre!

Per poter indicare esattamente la mia mossa dovrò indicare:

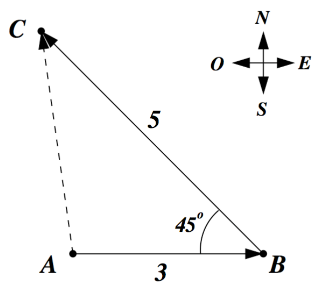
- **la direzione**: ovvero se in orizzontale o in verticale,
- **il senso/verso**: ovvero se verso destra/sinistra (se spostamento orizzontale) oppure verso l'alto/basso (se spostamento verticale),
- **la lunghezza/grandezza**: ovvero di quante caselle muovo la mia torre.

Vi sono moltissime altre grandezze che necessitano di tre valori per essere espresse: la forza (peso, attrito, ...), la velocità, il campo magnetico, eccetera. In questo caso parliamo di **grandezze vettoriali**.

Esempio 2: *percorro 3 km in direzione* EST *e in seguito 5 km in direzione* NORD-OVEST. *A che distanza dal punto di partenza mi trovo?*

Siano A, B e C i punti toccati dal percorso. Grazie al Teorema del coseno ricaviamo immediatamente

$$\begin{aligned}|AC| &= \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2\,|AB|\,|BC|\,\cos 45°} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{34 - 15\sqrt{2}} \cong 3,58 \quad [\text{km}] \quad .\end{aligned}$$



Osservazione: per risolvere il problema, abbiamo effettuato un'*addizione vettoriale*: $|AC| = \|\overrightarrow{AC}\|$ è il *modulo* del vettore $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. In particolare, per conoscere la distanza tra A e C le distanze tra A e B e tra B e C non sono sufficienti: occorre anche conoscere *direzione* e *verso* degli spostamenti.

1 Segmenti orientati e vettori geometrici

1.1 Segmenti orientati

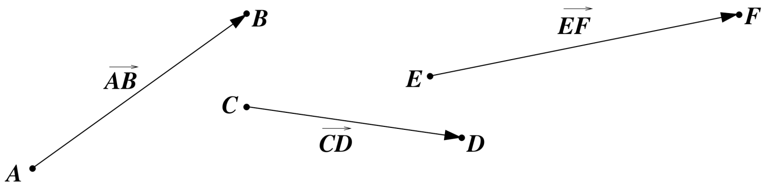
Definizione: Segmento orientato
Una *coppia ordinata* (A, B) di punti del piano definisce un **segmento orientato**, denotato con $\overrightarrow{AB}$.

Di un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ (con $A \neq B$) si definiscono:

- il **modulo**, indicato con $\|\overrightarrow{AB}\|$; si tratta della distanza tra i punti A e B;
- la **direzione**; si tratta della direzione di una (qualsiasi) retta parallela al segmento AB;
- il **verso** (o **senso**), indicato dalla direzione della freccia.

Illustrazione:

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{EF}$ sono segmenti orientati. L'orientamento è indicato dal senso della freccia.



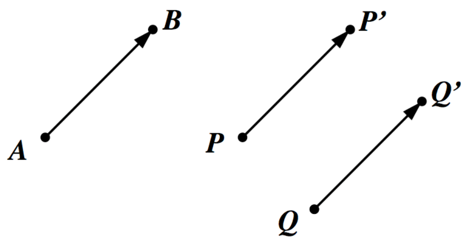
Osservazioni

- Nel caso particolare in cui gli elementi della coppia di punti coincidono (ad es. $\overrightarrow{AA}$), si parla di **segmento nullo**. In questo caso il modulo è pari a zero e direzione e verso non si definiscono.
- $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ (dal momento che un segmento orientato è dato da una coppia *ordinata* di punti).
- Un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ definisce una particolare trasformazione del piano, detta **traslazione**

$$\tau_{\overrightarrow{AB}} : P \longmapsto P' = \tau_{\overrightarrow{AB}}(P)$$

dove $P' = \tau_{\overrightarrow{AB}}(P)$ se

  - i segmenti AB e PP' sono paralleli
  - le distanze $|AB|$ e $|PP'|$ sono le stesse
  - (A, B) e (P, P') hanno lo stesso orientamento



(graficamente, è sufficiente "riprodurre" AB facendo corrispondere P con A e quindi B con P').

1.2 Vettori geometrici

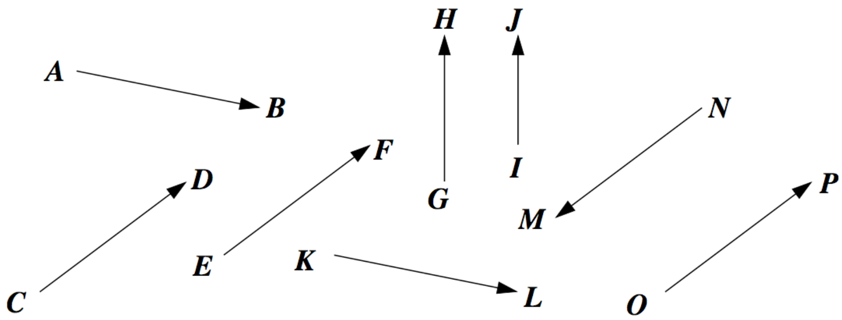
Osservazione: la stessa traslazione può essere definita da più segmenti orientati; in particolare, è facile vedere che due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ definiscono la stessa traslazione se

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$ (i due segmenti orientati sono **isometrici**);
- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono paralleli ad una stessa retta (sono cioè **collineari**);
- $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno lo stesso verso (sono **equiorientati**).

> **Definizione: Equipollenza**
> Due segmenti orientati *isometrici, collineari ed equiorientati* sono detti *equivalenti* o anche **equipollenti**.
>
> Notazione: se due segmenti orientati sono equipollenti scriveremo: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$

Illustrazione:

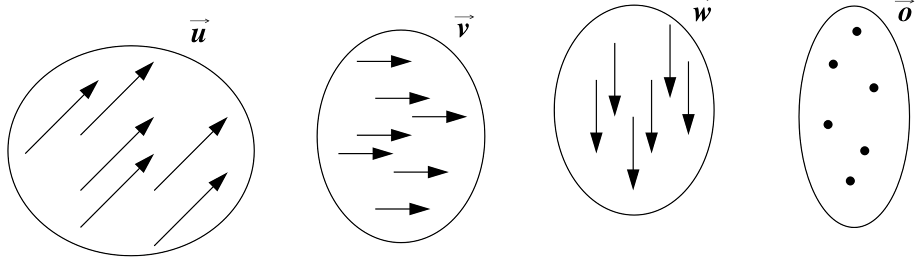
- $\overrightarrow{AB}$ .... $\overrightarrow{KL}$
- $\overrightarrow{CD}$ ..... $\overrightarrow{EF}$ ..... $\overrightarrow{OP}$
- $\overrightarrow{GH}$ .... $\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{CD}$ .... $\overrightarrow{NM}$
- $\overrightarrow{CD}$ .... $\overrightarrow{MN}$



La relazione di equipollenza[1] suddivide l'insieme dei segmenti orientati del piano in famiglie di segmenti tutti equivalenti tra loro, dette *classi di equipollenza*.

> **Definizione: vettore geometrico**
> La classe di *tutti* i segmenti orientati equipollenti ad un dato segmento $\overrightarrow{AB}$ è un **vettore geometrico** del piano.

Indicheremo con lettere minuscole ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ...) i vettori. La classe dei segmenti nulli è il cosiddetto **vettore nullo**, e si indica con $\vec{o}$.



[1] come tutte le cosiddette "relazioni di equivalenza"

Osservazioni:

(i) Un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ appartenente ad una determinata classe $\vec{v}$ è detto **rappresentante** del vettore geometrico $\vec{v}$. In questo caso scriveremo semplicemente $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Indicheremo inoltre con V_2 l'insieme dei vettori geometrici del piano.

(ii) Per un vettore $\vec{v} \in V_2$: il **modulo** (indicato con $\|\vec{v}\|$), la **direzione** e il **verso** di $\vec{v}$ sono il modulo, la direzione e il verso di un suo **rappresentante qualsiasi**.

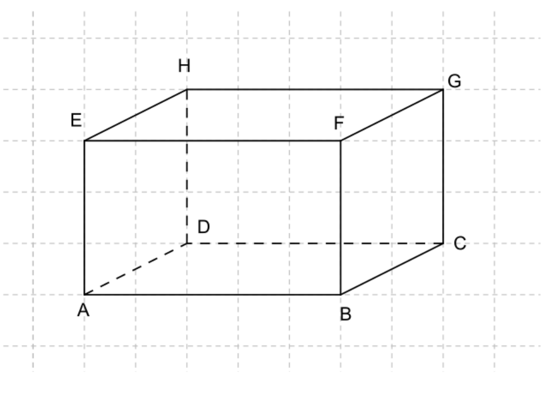
Ciò ha senso proprio perché gli elementi della "famiglia" $\vec{v}$ sono tutti isometrici, collineari ed equiorientati!

(iii) La relazione di equipollenza esclude la "localizzazione" di un vettore: $\vec{v}$ possiede un'infinità di rappresentanti tutti diversi, e quindi non ha una posizione fissa nel piano.

(iv) Come abbiamo visto, segmenti orientati equipollenti definiscono la stessa traslazione del piano. Ha quindi senso parlare di *traslazione* $\tau_{\vec{v}}$ *di vettore* $\vec{v}$. In particolare, *ad ogni traslazione del piano corrisponde un vettore geometrico, e viceversa*: l'insieme V_2 può quindi essere *identificato* con l'insieme delle traslazioni del piano[2].

(v) In modo più formale possiamo definire: $\mathcal{O}_2$ è l'insieme dei segmenti orientati del piano e $\sim$ è una relazione d'equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) che agisce su $\mathcal{O}_2$ generando le classi di equivalenza: $[\overrightarrow{AB}] = \{\overrightarrow{PQ} \in \mathcal{O}_2 \,|\, \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}\}$. L'insieme di tutte le classi di equivalenza (cioè dei vettori) è detto **insieme dei vettori geometrici del piano:** $V_2 = \mathcal{O}_2/\sim$.

(vi) In modo analogo lavoreremo con i vettori nello spazio V_3. Ad esempio: Se $ABCDEFGH$ è un parallelepipedo rettangolo; le seguenti relazioni sono vere o false?



$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{HG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{HG}\|$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} \sim \|\overrightarrow{DH}\|$

$\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{EH}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EC} \sim \overrightarrow{AG}$

$\|\overrightarrow{EC}\| \sim \|\overrightarrow{AG}\|$ $\qquad$ $\|\overrightarrow{EC}\| = \|\overrightarrow{AG}\|$

$\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BF}\| = \|\overrightarrow{CG}\| + \|\overrightarrow{GH}\|$

(vii) Per semplicità ora utilizzeremo la notazione $\overrightarrow{AB}$ per indicare il vettore $\vec{v}$ avente il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ quale suo rappresentante. Scrivendo dunque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ indichiamo che si tratta dello stesso vettore.

[2]un vettore "trasporta", quindi, i punti del piano. Il termine "vettore" deriva dal latino *vehere*, "trasportare", ed è presente anche nel linguaggio comune, si pensi al *vettore di contagio* di una data infezione (ad es. la zanzara anofele per la malaria) o al *razzo vettore* per il trasporto di satelliti in orbita.

2 Lo spazio vettoriale V_2

In questo paragrafo ci proponiamo di introdurre e studiare due operazioni definite sui vettori di V_2, l'*addizione* e la *moltiplicazione con uno scalare*. Per la prima delle due sfrutteremo nuovamente l'identificazione di V_2 con l'insieme delle traslazioni del piano.

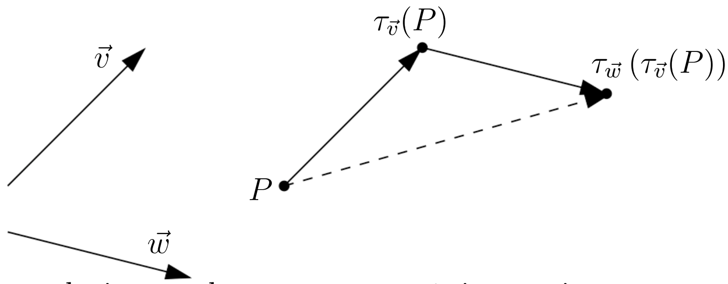
Ricorda: ad ogni vettore $\vec{v} \in V_2$ appartiene una traslazione

$$\tau_{\vec{v}} : P \longmapsto P' = \tau_{\vec{v}}(P) \quad .$$

2.1 Somma vettoriale

Considera quindi, per *due* vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, la composizione

$$\tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}} : P \longmapsto \tau_{\vec{w}}\left(\tau_{\vec{v}}(P)\right) \quad .$$



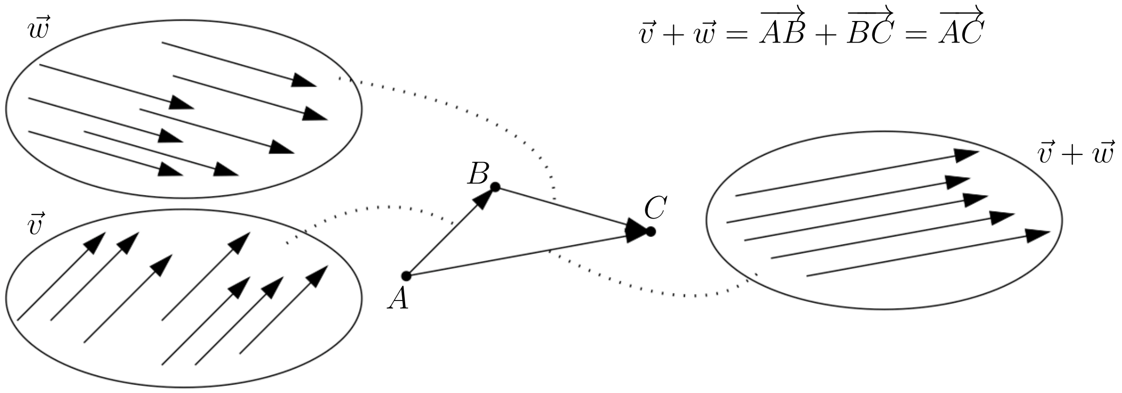
Dal momento che $\tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}}$ è anch'essa una traslazione, ad essa apparterrà in maniera univoca un vettore di V_2, che *chiameremo* $\vec{v} + \vec{w}$. L'addizione vettoriale è quindi definita formalmente dalla relazione

$$\tau_{\vec{v}+\vec{w}} = \tau_{\vec{w}} \circ \tau_{\vec{v}} \quad .$$

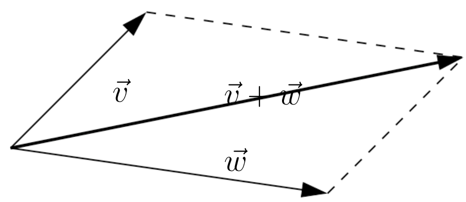
Ciò conduce immediatamente alla **regola della poligonale**: siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vettori di V_2; allora

- scelgo un rappresentante $\overrightarrow{AB}$ di $\vec{v}$;
- scelgo il rappresentante $\overrightarrow{BC}$ di $\vec{w}$;
- il segmento orientato $\overrightarrow{AC}$ è un rappresentante del vettore $\vec{v} + \vec{w}$.

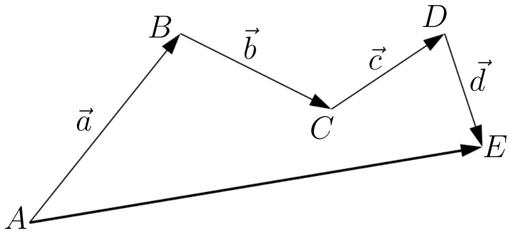
Illustrazione:



Osservazione: a volte, l'addizione viene espressa (in modo equivalente) per mezzo della cosiddetta *regola del parallelogrammo*.

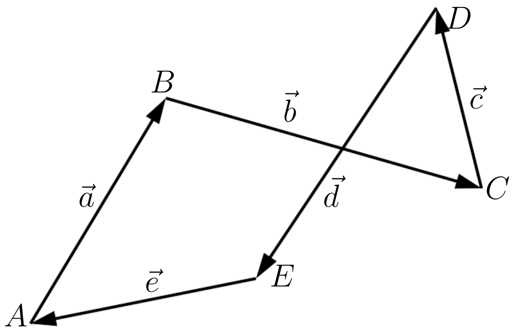


La regola della poligonale può essere agevolmente estesa a più di 2 vettori, ad **esempio**:



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$$

Se la poligonale è chiusa, allora la somma è data dal *vettore nullo*:



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}=$$
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AA}=\vec{o}$$

Con questo tipo di operazioni possiamo dunque definire la **somma di vettori:**

$$\begin{array}{rcl} + \ : \ V_2 \times V_2 & \longrightarrow & V_2 \\ (\vec{v},\vec{w}) & \longmapsto & \vec{v}+\vec{w} \end{array} .$$

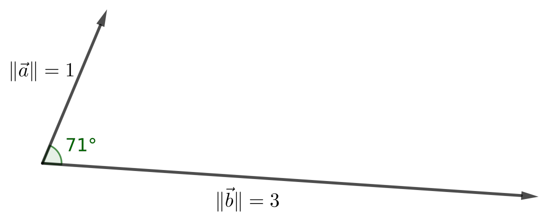
Osservazione: questa operazione è **interna**, ciò vuol dire che il risultato è anch'esso un vettore!

Esercizio: dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ di moduli 1 e 3 che formano un angolo di $71°$, determina:

a) $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

b) L'angolo tra $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}$.

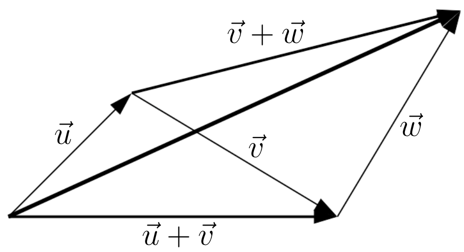
c) L'angolo tra $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{b}$.



2.2 Proprietà dell'addizione vettoriale

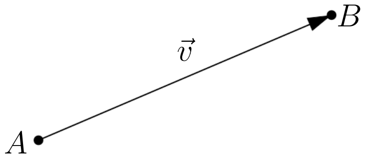
Elenchiamo ora alcune importanti **proprietà** dell'addizione vettoriale

(A1) L'addizione è **associativa**:



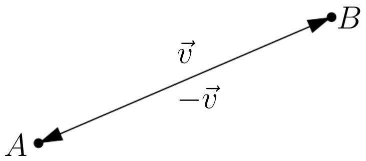
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \quad \forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_2\ .$$

(A2) L'addizione ammette l'**elemento neutro**, il *vettore nullo* $\vec{o}$:



$$\underbrace{\vec{v}+\vec{o}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}} = \underbrace{\vec{o}+\vec{v}}_{\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}} = \underbrace{\vec{v}}_{\overrightarrow{AB}} \quad \forall\ \vec{v}\in V_2 \quad .$$

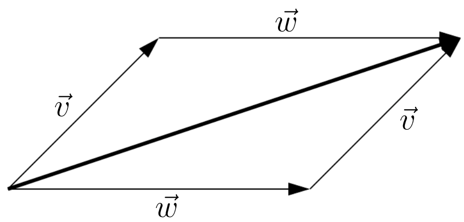
(A3) Ogni $\vec{v}\in V_2$ possiede l'**elemento opposto** (o *simmetrico*), denotato con $-\vec{v}$:



Se $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, poniamo $-\vec{v}=\overrightarrow{BA}$:

$$\underbrace{\vec{a}+(-\vec{a})}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}} = \underbrace{(-\vec{a})+\vec{a}}_{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}} = \vec{o} \quad .$$

(A4) L'addizione è **commutativa**:



$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v} \quad \forall\ \vec{v},\vec{w}\in V_2\ .$$

Osservazioni:

(i) L'addizione in V_2 si comporta come l'addizione numerica (da qui il suo nome). Le proprietà **(A1)-(A4)** si riassumono dicendo che

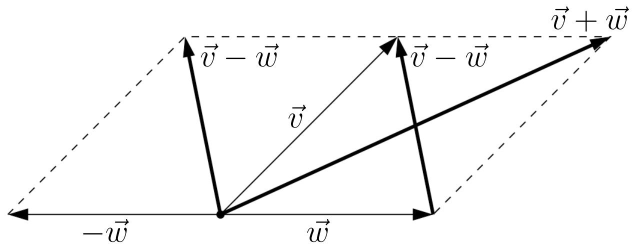
$$\boxed{(V_2,+)\ \textit{ha la struttura di gruppo commutativo.}}$$

(ii) Le proprietà **(A1)** e **(A2)** permettono di tralasciare le parentesi e permutare a piacimento i termini di una somma vettoriale,
ad **esempio** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{d}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}=\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}+\vec{c}=\dots$

(iii) La proprietà **(A4)** permette di definire una **sottrazione vettoriale**

$$\vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w}) \quad .$$

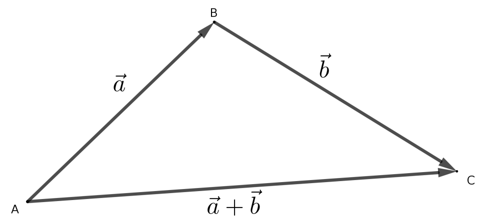
Illustrazione:



Nota che nel parallelogrammo una diagonale rappresenta la somma e l'altra la differenza.

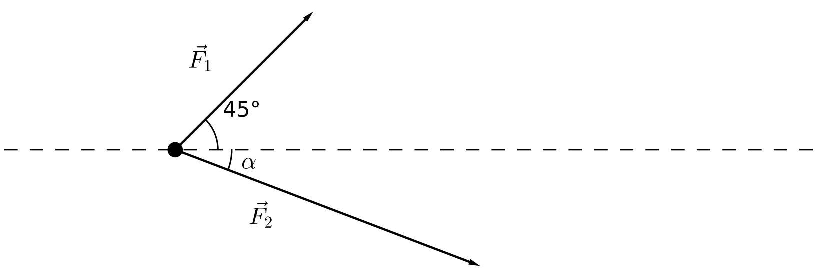
(iv) Vale la cosiddetta **disuguaglianza triangolare**: per due vettori $\vec{a}, \vec{b} \in V_2$:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$



Dimostrazione: (ricorda che per due numeri positivi vale: $x \leq y \iff x^2 \leq y^2$)

Esercizio: Su un oggetto agiscono due forze ($\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$) come rappresentato nella figura (**attenzione: non in scala!**). Sappiamo che $\|\vec{F_1}\| = 50$ N e agisce con un angolo di 45 gradi rispetto all'orizzontale. Quale sarebbe la forza risultate $\vec{F_R}$ se $\alpha = 30$ gradi e $\|\vec{F_2}\| = 70$ N? (Determinane il modulo e angolo con l'orizzontale)



Quale forza dobbiamo aggiungere in modo che l'oggetto sia fermo?

2.3 Moltiplicazione con scalare

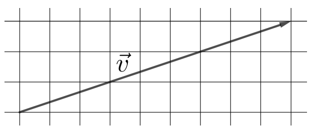
Definiamo ora la **moltiplicazione di un vettore con uno scalare**: sono dati un vettore $\vec{v} \in V_2$ e un numero reale λ;

$$\begin{array}{rrcl} \cdot\ : & \mathbb{R} \times V_2 & \longrightarrow & V_2 \\ & (\lambda, \vec{v}) & \longmapsto & \lambda \cdot \vec{v} \end{array}$$

- se $\lambda = 0$ oppure $\vec{v} = \vec{o}$, si definisce $0 \cdot \vec{v} = \vec{o}$;
- se $\lambda \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{o}$, $\lambda \cdot \vec{v}$ (o, più brevemente, $\lambda\vec{v}$) è il *vettore* tale che
  - (*modulo*) $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$;
  - (*direzione*) $\lambda\vec{v}$ e $\vec{v}$ sono collineari ;
  - (*verso*) $\begin{cases} \text{se } \lambda > 0, \ \lambda\vec{v} \text{ e } \vec{v} \text{ sono equiorientati ;} \\ \text{se } \lambda < 0, \ \lambda\vec{v} \text{ e } \vec{v} \text{ hanno versi opposti .} \end{cases}$

In sintesi: $\vec{v}$ viene dilatato o compresso di un fattore $|\lambda|$ e se $\lambda < 0$ il suo verso viene invertito.

Esercizio: Qui sotto è rappresentato il vettore $\vec{v}$.



Disegna i vettori:

$2\vec{v}$; $\quad -\vec{v}$; $\quad -\dfrac{1}{3}\vec{v} \quad \dfrac{5}{3}\vec{v} \quad 0\vec{v}$

La moltiplicazione gode delle seguenti, importanti **proprietà** algebriche:

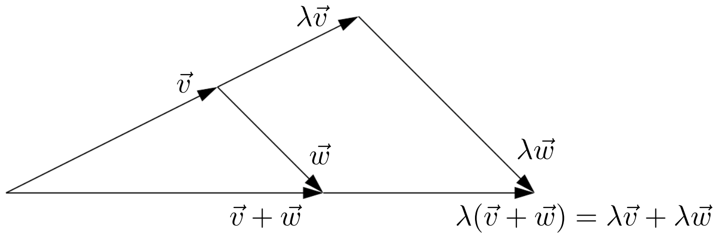
(M1) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall\, \vec{v} \in V_2$;

(M2) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V_2\ ,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(M3) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V_2\ ,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(M4) $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w} \quad \forall \vec{v}\ ,\ \vec{w} \in V_2\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Osservazione: le prime tre proprietà sono immediatamente verificabili, e la quarta è equivalente al *teorema di Talete*:



2.4 Spazio vettoriale e applicazioni

Le proprietà algebriche **(A1)-(A4)** e **(M1)-(M4)** sono gli **assiomi di spazio vettoriale**.

Un insieme provvisto di un'addizione (interna) e di una moltiplicazione scalare che le soddisfano è detto **spazio vettoriale**. Gli spazi vettoriali sono alla base della cosiddetta *algebra lineare*, una branca fondamentale della matematica dalle molteplici applicazioni, che vanno ben oltre l'ambito geometrico: essa permette, ad esempio, di formalizzare in modo elegante le proprietà degli *spazi di funzioni*.

Applicazioni: gli assiomi di spazio vettoriale traducono nel linguaggio algebrico le proprietà dei vettori, e permettono quindi di definire un vero e proprio *calcolo vettoriale*, indipendente dalla rappresentazione grafica.

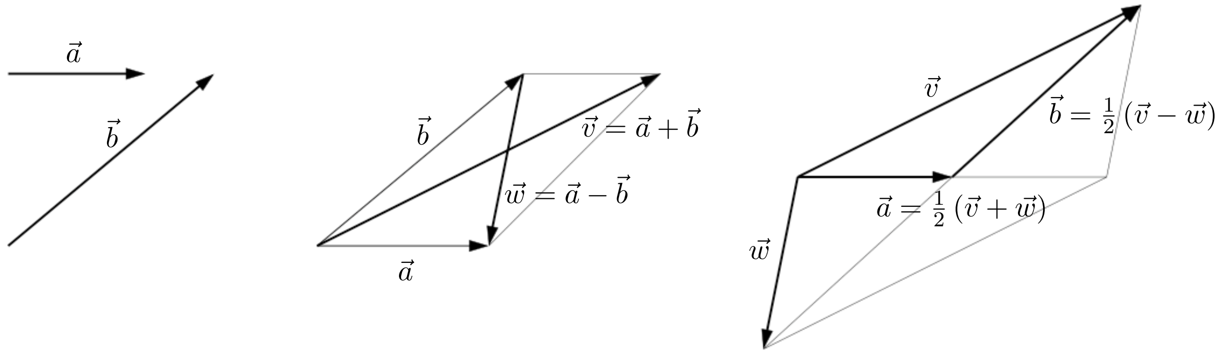
Esempio: siano $\vec{a}$, $\vec{b}$ due vettori di V_2; allora, con $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{w}=\vec{a}-\vec{b}$, vale

$$\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{v}+\vec{w}\right) \qquad \text{e} \qquad \vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{v}-\vec{w}\right) \quad .$$

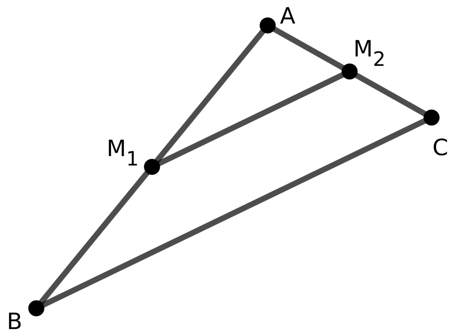
La *dimostrazione* algebrica è immediata:

$$\frac{1}{2}\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\cancel{\vec{b}}+\vec{a}-\cancel{\vec{b}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\vec{a}=\vec{a} \quad , \quad \frac{1}{2}\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=\frac{1}{2}\left(\cancel{\vec{a}}+\vec{b}-\cancel{\vec{a}}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\vec{b}=\vec{b} \quad ,$$

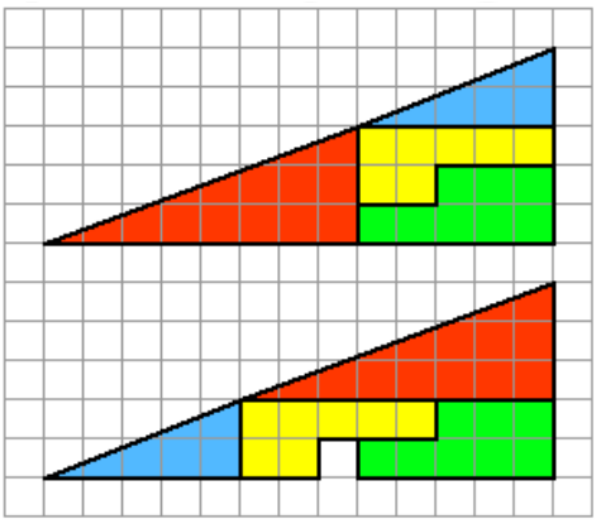
e *qualsiasi* scelta di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ confermerà quanto ottenuto:



Esercizio: Sia ABC un triangolo qualsiasi e siano M_1 e M_2 i punti medi dei segmenti AB e AC. Dimostra che $\overrightarrow{M_1M_2} = \dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}$.



Osservazione: sfruttando i vettori possiamo "tradurre" un problema geometrico nel "mondo algebrico" così da trovare dimostrazioni più rigorose e solide.
Le dimostrazioni "a occhio" sono spesso fallaci come si nota facilmente dall'immagine qui sotto: riassemblando le parti del triangolo sembrerebbe possibile ottenere lo stesso triangolo con però un quadretto mancante!



2.5 Combinazione lineare e basi di V_2

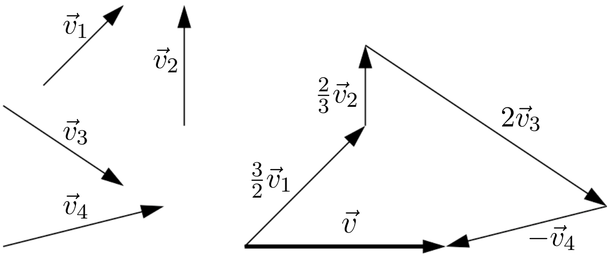
Introduciamo ora un concetto fondamentale della geometria vettoriale:

Definizione: Combinazione lineare
Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vettori di V_2 e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ numeri reali. Il vettore

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n$$

è una **combinazione lineare** di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Illustrazione:

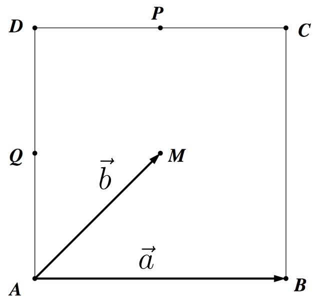


$\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{v}_1 + \frac{2}{3}\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$

è una combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ con

$\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = -1$.

Esempio: *siano $ABCD$ un quadrato, M il suo centro e P, Q i punti medi dei lati CD risp. AD. Scrivi $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{QB}$ e $\overrightarrow{PA}$ come combinazione lineare di $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{AM}$.*



Si ottiene:

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + 2\vec{b}$;
- $\overrightarrow{AQ} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{PQ} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{QB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{PA} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Domanda 1: Avendo a disposizione un solo vettore (es: $\vec{a}$), potresti rappresentare gli altri vettori?

....

Domanda 2: Se oltre ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sfruttiamo il vettore $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$, otteniamo:

$\overrightarrow{AP} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ ma anche $\overrightarrow{AP} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

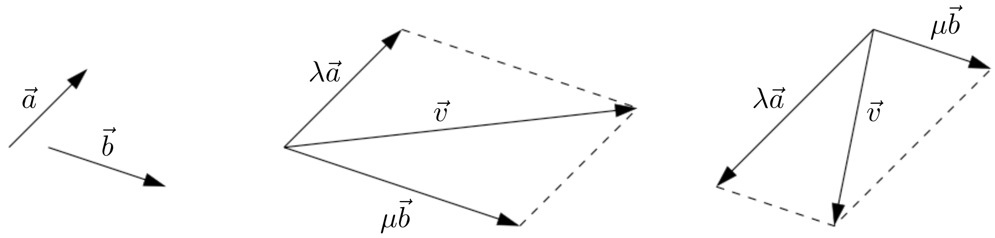
Domanda 3: Se ora ti venissero messi a disposizione i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{QM}$, quali vettori potresti rappresentare quale combinazione lineari?

....

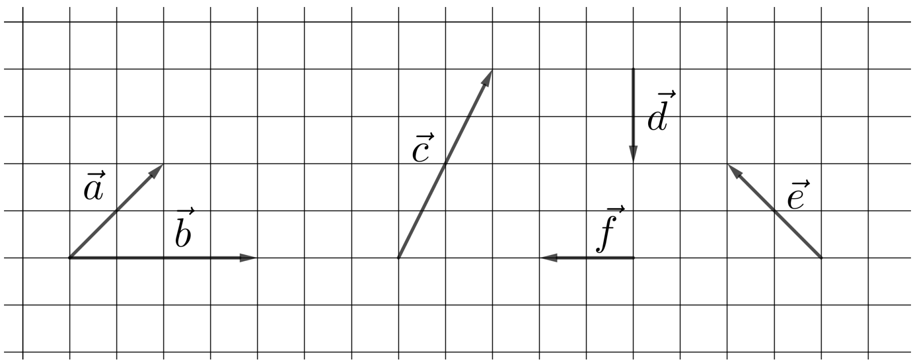
Teorema: Scomposizione di un vettore in V_2
Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori *non collineari e non nulli* di V_2. Allora *ogni* vettore $\vec{v} \in V_2$ si lascia scrivere *in un unico modo* come combinazione lineare

$$\vec{v} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \quad .$$

Dimostrazione/illustrazione: è sufficiente notare che, dati $\vec{a}$ e $\vec{b}$, ogni vettore $\vec{v} \in V_2$ può essere rappresentato dalla diagonale di un parallelogrammo di lati collineari ad $\vec{a}$ e $\vec{b}$:



Esercizio: descrivi i vettori $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ e $\vec{f}$ quale combinazione lineare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



$\vec{c} = \ldots\ldots \cdot \vec{a} + \ldots\ldots \cdot \vec{b}$; $\quad \vec{d} = \ldots\ldots \cdot \vec{a} + \ldots\ldots \cdot \vec{b}$;

$\vec{e} = \ldots\ldots \cdot \vec{a} + \ldots\ldots \cdot \vec{b}$; $\quad \vec{f} = \ldots\ldots \cdot \vec{a} + \ldots\ldots \cdot \vec{b}$

Osservazioni:

1. Dati due vettori **non collineari e non nulli**, è possibile esprimere qualsiasi ulteriore vettore **in modo univoco** come combinazione lineare dei vettori dati. Da questo segue:

   Definizione: Una coppia $\left\{\vec{a}, \vec{b}\right\}$ di vettori del piano, non collineari e non nulli, costituisce una **base** di V_2.

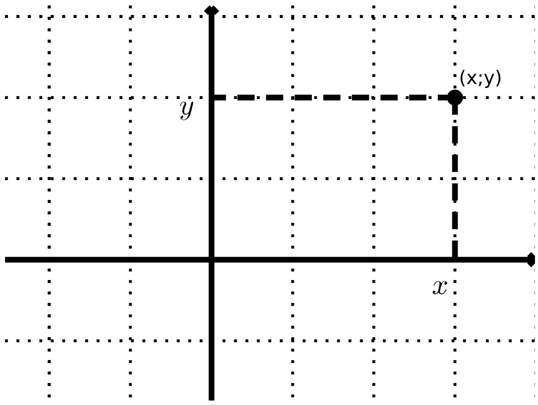
2. Con un singolo vettore o con due vettori collineari è possibile descrivere solamente altri vettori collineari. Non sarà dunque possibile descrivere tutti i vettori del piano!

3. Con tre o più vettori (non nulli e non collineari) è possibile descrivere tutti i vettori del piano ma **non in modo univoco**.

3 Vettori aritmetici del piano

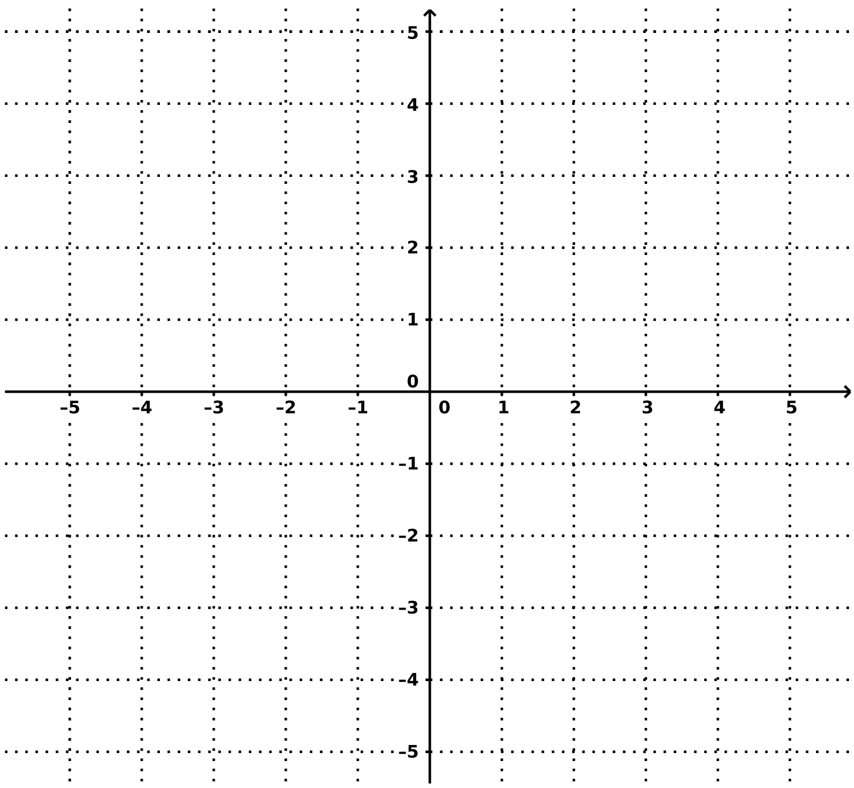
3.1 Ripasso: il piano cartesiano

Nel piano cartesiano ogni **coppia ordinata** di numeri $(x; y)$ corrisponde a un punto in corrispondenza del valore di x letto sull'asse orizzontale (ascisse) e del valore di y letto sull'asse verticale (ordinate).



Esercizio:

a) Rappresenta nel piano cartesiano i punti $A(3; 2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; 4)$, $D(3; -3)$, $E(-1; 0)$, $F(0; 2)$ e $G(-2; -1)$.
b) Determina e disegna i punti: A' simmetrico ad A rispetto all'asse x, B' simmetrico a B rispetto all'asse y e C' simmetrico a C rispetto l'origine degli assi cartesiani (punto $O(0; 0)$).
c) Determina la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ e determina la distanza tra due punti generici $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$.
d) Dati due punti $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$, il punto medio di $\overline{PQ}$ ha coordinate $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Trova e disegna il punto medio del segmento $\overline{AG}$.



3.2 Esempio introduttivo

Il quartiere di Manhattan, centro nevralgico della città di New York e situato nell'omonima isola, conta più di un milione e mezzo di abitanti. A differenza delle città europee, costruite e ricostruite nel corso dei secoli generando una rete viaria molto contorta, Manhattan (come molte altre città americane) si è sviluppata in maniera geometrica molto ordinata. Se guardiamo la carta geografica, in particolare del "Midtown" (parte centrale della *City*), osserviamo come tutte le strade siano perpendicolare le une alle altre.

Inoltre notiamo come:

- Le strade che percorrono il percorso Ovest - Est sono chiamate **Street**
- Le strade che corrono nella direzione Nord - Sud sono chiamate **Avenue**

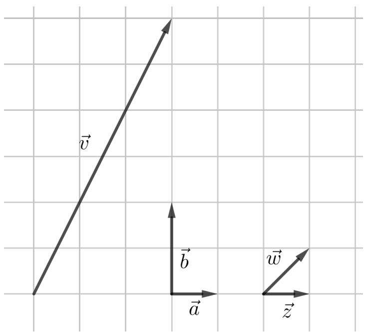
Esercizio: Immaginatevi di trovarvi presso il "Reed Foundation"; come potete memorizzare le indicazioni per andare verso l'incrocio tra la 56th Street e la Second Avenue?
E se da quel punto vi spostate di 5 Avenues verso ovest e di tre Streets verso nord, dove vi troverete?
Quale tragitto dovrete poi intraprendere per ritornare alla Reed Foundation?

Lo spostamento da un incrocio all'altro può essere dunque definito **in modo univoco** descrivendo quante *streets* verso Est o Ovest e quante *avenues* verso Nord o Sud devo attraversare: a livello numerico questo è facilmente descrivibile tramite due numeri!

3.3 Base ortonormata

L'esempio precedente ci ha mostrato come è possibile esprimere un movimento bidimensionale tramite due numeri: nel caso della mappa di Manhattan si trattava del numero di "Avenues" da superare in direzione Nord o Sud e il numero di "Streets" verso Ovest o Est.

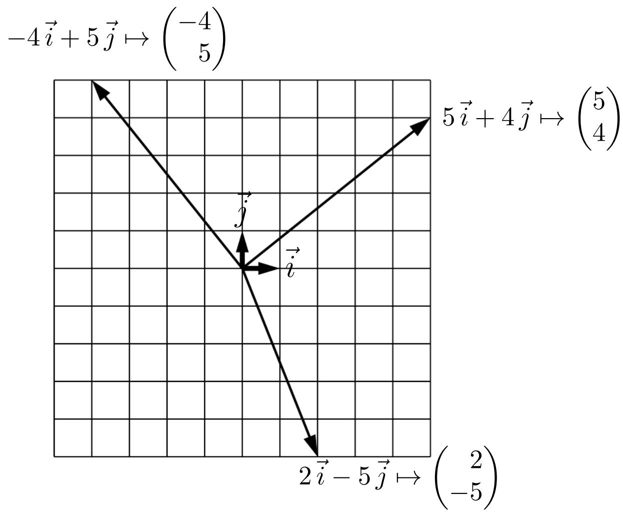
Nel caso di vettori geometrici possiamo ottenere un risultato analogo immergendo un vettore $\vec{v}$ in un piano cartesiano quadrettato. A questo punto è possibile scegliere una **coppia di vettori** che chiameremo *base* e, per esprimere un questo vettore $\vec{v}$, utilizzeremo la relativa **combinazione lineare**. Ad esempio possiamo scegliere come vettori di riferimento $\vec{a}, \vec{b}$ oppure $\vec{z}, \vec{w}$. Il vettore $\vec{v}$ sarà dunque esprimibile come:



$\vec{v} =$ ....

$\vec{v} =$ ....

Ovviamente la scelta più facile per descrivere un vettore $\vec{v}$ è quello di suddividerlo nelle componenti orizzontali e verticali: questa suddivisione coincide con utilizzare dei vettori cosiddetti *ortonormati*, ovvero perpendicolari tra loro e di lunghezza 1.



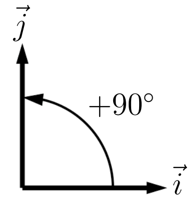
Nell'esempio qui accanto descriviamo i tre vettori con la coppia di numeri che ne descrivono lo spostamento orizzontale (se positivo verso destra) e verticale (positivo se verso l'alto): in realtà stiamo utilizzando una **combinazione lineare** dei vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ che rappresentano dei vettori **unitari** lungo gli assi x e y.

Per evitare di confondere le componenti di un vettore con le coordinate di un punto scriveremo le prime in verticale: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mentre le coordinate di un punto come sempre in orizzontale $P(x; y)$.

Dunque: per poter tradurre un vettore in componenti numeriche (x e y) dobbiamo utilizzare una determinata base di V_2.

Definizione: Base ortonormata
Una coppia $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ di vettori del piano costituisce una **base ortonormata** di V_2 (orientata positivamente), se

- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$;
- $\sphericalangle\left(\vec{i}, \vec{j}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$ (*angolo orientato*).



In altre parole: *i vettori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ sono unitari, e $\vec{j}$ può essere ottenuto ruotando $\vec{i}$ di 90° in senso antiorario.*

Sia quindi $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ una base ortonormata di V_2; ogni vettore $\vec{v}$ si può quindi scrivere come combinazione lineare

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} \quad ,$$

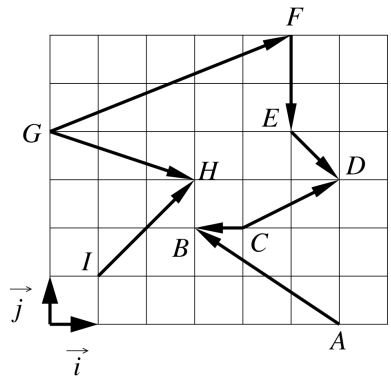
e le **componenti scalari** (o semplicemente *componenti*) $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ identificano $\vec{v}$ in modo univoco. La legge

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} \longmapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

permette quindi di identificare l'insieme V_2 dei vettori geometrici del piano con l'insieme

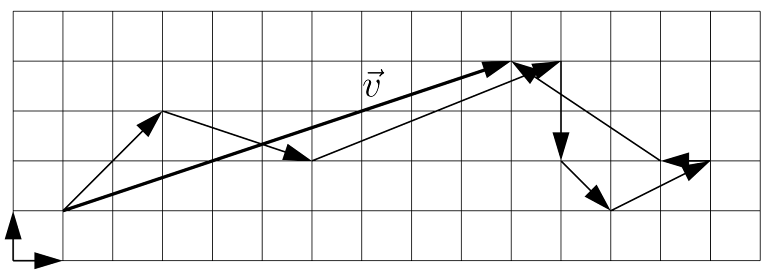
$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ dei **vettori aritmetici** del piano, che è *isomorfo* a V_2.

Esercizio: Esprimi i vettori qui raffigurati come combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$.



- $\overrightarrow{IH} =$ .... $\overrightarrow{ED} =$ ....
- $\overrightarrow{GH} =$ .... $\overrightarrow{CD} =$ ....
- $\overrightarrow{GF} =$ .... $\overrightarrow{CB} =$ ....
- $\overrightarrow{FE} =$ .... $\overrightarrow{AB} =$ ....

Geometricamente, per calcolare la somma di questi vettori è sufficiente rappresentarli rispettandone il verso:



Quali sono le componenti di questa risultante di vettori? Leggili dal grafico e calcolali utilizzando le componenti algebriche calcolate qui sopra:

$\vec{v} =$ ....

3.4 Operazioni tra vettori aritmetici

L'addizione e la moltiplicazione con uno scalare nello spazio vettoriale geometrico inducono operazioni analoghe nell'insieme dei vettori aritmetici:

- **Addizione**: dato che per $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ e $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j}$ vale

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1)\vec{i} + (v_2 + w_2)\vec{j} \quad ,$$

definiremo

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \quad ;$$

- **Moltiplicazione con scalare**: dato che per $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{i} \in V_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ vale

$$\lambda\vec{v} = \lambda v_1\,\vec{i} + \lambda v_2\,\vec{j} \quad ,$$

definiremo

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, v_1 \\ \lambda\, v_2 \end{pmatrix} \quad .$$

L'insieme V_2 dei vettori aritmetici del piano soddisfa per costruzione gli assiomi di spazio vettoriale. In particolare, in esso ha nuovamente senso la nozione di *combinazione lineare*.

Per due vettori, ad esempio, vale

$$\lambda\,\vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \mu w_1 \\ \lambda v_2 + \mu w_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Nota che vale

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

in particolare, alla base ortonormata $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ corrisponde la *base standard* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

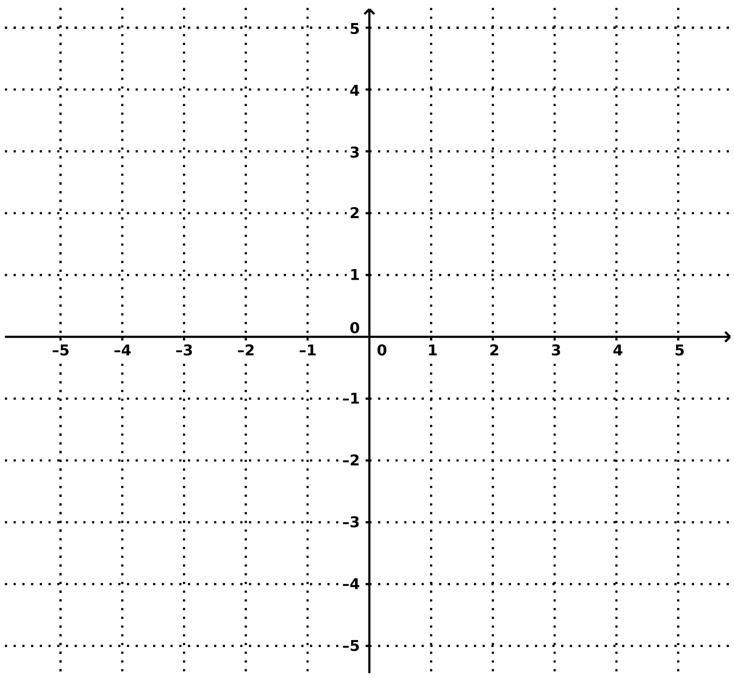
Esercizio 1: *dati* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, *determina* $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} \quad .$

Esercizio 2:

a) Rappresenta nel piano cartesiano qui sotto il vettore (o meglio: un suo rappresentante) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Rappresenta i punti $A(3;-1)$ e $B(2;2)$ e determina il vettore $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$.

c) Risolvi geometricamente e algebricamente: se parto dal punto B e seguo il vettore $\vec{v}$ e metà del vettore $\vec{w}$, dove mi troverò?



3.5 Applicazioni

Questo nuovo approccio permette di tradurre nel linguaggio algebrico i problemi del calcolo vettoriale, ad esempio:

1) Condizione di collinearità tra due vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \text{i vettori } \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ sono collineari} &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } \vec{v} = \lambda \vec{w} \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ con } \begin{cases} v_1 = \lambda\, w_1 \\ v_2 = \lambda\, w_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

I vettori sono quindi collineari se le rispettive componenti sono *proporzionali*.

Esempi:

(i) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix}$ sono collineari: $\vec{w} = (-2)\,\vec{v}$, dato che $\begin{cases} -6 = (-2) \cdot 3 \\ 14 = (-2) \cdot (-7) \end{cases}$;

(ii) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; **(iii)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Scomposizione di un vettore $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ come comb. lineare di 2 vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ non collineari: basta trovare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\vec{a} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \iff \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ a_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \end{cases} .$$

Si tratta quindi di risolvere un sistema di 2 equazioni nelle incognite λ e μ.

Esempio: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \iff \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 8 = \lambda + 2\mu \\ 1 = -\lambda + \mu \end{cases} ;$$

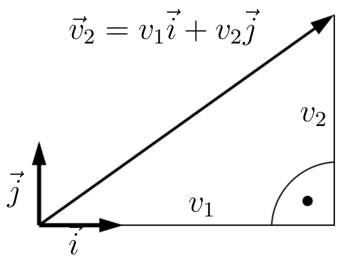
sommando le 2 equazioni otteniamo $9 = 3\mu$, e quindi $\mu = 3$ e $\lambda = 8 - 2\mu = 2$. Vale quindi

$$\vec{a} = 2\vec{v} + 3\vec{w} \quad .$$

Esercizio: scomponi il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ per i due casi seguenti:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$;

3) Modulo di un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: la scelta di due vettori unitari ed ortogonali quale base permette di applicare il teorema di Pitagora, ottenendo



$$\|\vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \quad .$$

Esempi:

(i) $\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| =$ .... (ii) $\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| =$ ....

4) Versore (Vettore unitario): da un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ è possibile crearne uno **unitario** (vale a dire con la stessa direzione e lo stesso verso ma di **modulo 1**) semplicemente dividendolo per il suo modulo (moltiplicazione con scalare):

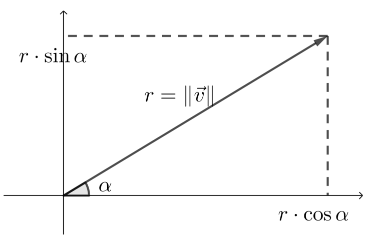
$$\vec{v}_u = \underbrace{\frac{1}{\|\vec{v}\|}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} \\ \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} \end{pmatrix}$$

Esercizio: Rendi unitario il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, controlla poi che il relativo vettore unitario $\vec{v}_u$ abbia modulo uguale a 1.

$\vec{v}_u =$......................; $\|\vec{v}_u\| =$...

5) Vettori geometrici: se di un vettore geometrico si conoscono modulo e angolo di incidenza con l'asse delle ascisse (asse x) è possibile risalire alla sua forma aritmetica tramite la trigonometria.

Considera un vettore $\vec{v}$ di modulo $\|\vec{v}\| = r$ che forma un angolo α con l'asse delle ascisse. Esso avrà componenti:



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Esempio: determina le componenti dei vettori:

a) $\vec{v}$ di modulo 3 con un angolo di incidenza $\alpha = 30°$, $\vec{v} =$ ....

b) $\vec{w}$ di modulo 4 con un angolo di incidenza $\alpha = 180°$, $\vec{w} =$ ....

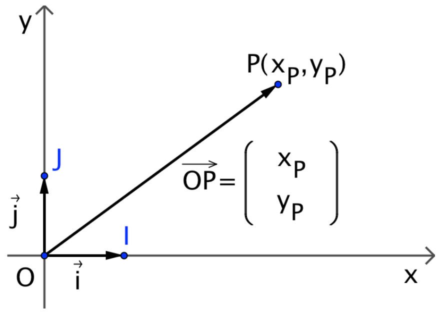
Determina inoltre il modulo e l'angolo di incidenza del vettore $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

....

3.6 Vettori nel piano cartesiano

Come abbiamo visto possiamo immergere i vettori nel **piano cartesiano**; è ovvio che la *base standard* $\vec{i}, \vec{j}$ corrisponde agli assi cartesiani. Sarà dunque possibile trasformare problemi di carattere geometrico (nel piano cartesiano) in problemi algebrici (calcoli fra vettori).

1. **Vettore luogo:** innanzitutto dobbiamo introdurre il **vettore luogo**, ovvero quel vettore che dall'origine degli assi (punto $(0;0)$ porta al punto P.

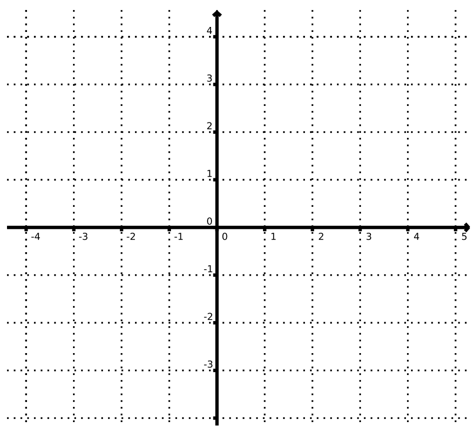


Per il punto $P(x_P, y_P) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$\overrightarrow{OP} = x_P \cdot \vec{i} + y_P \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \quad .$$

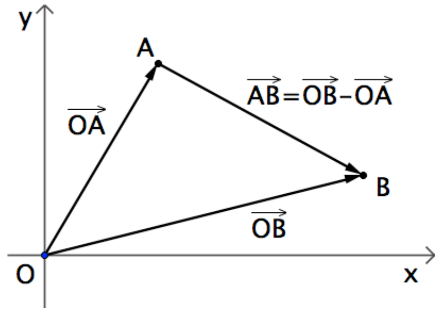
Il vettore $\overrightarrow{OP} \in V_2$ è detto **vettore luogo** del punto $P \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio: Rappresenta i seguenti punti e determinane il vettore luogo:
$P(1;3), Q(0;4), R(-3;2)$ e $S(-\pi, e)$.



- $\overrightarrow{OP} =$ ....
- $\overrightarrow{OQ} =$ ....
- $\overrightarrow{OR} =$ ....
- $\overrightarrow{OS} =$ ....

2. **Vettore aritmetico dati due punti:** Dati i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, scrivi il vettore $\overrightarrow{AB}$ in componenti:



Otteniamo immediatamente

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$$

cioè $\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

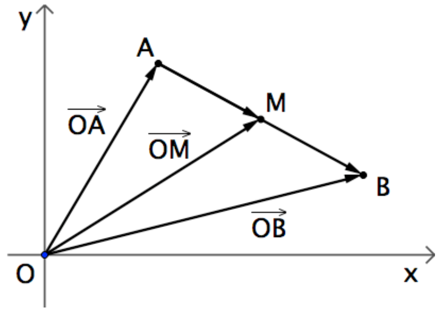
Esempio: Determina le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ} =$ ....

3. **Distanza tra due punti:** Determina la distanza $|AB|$ tra i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$: si tratta evidentemente del modulo del vettore $\overrightarrow{AB}$, quindi

$$\boxed{|AB| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad .$$

Esempio: Determina la distanza tra i punti P e Q: ....

4. **Punto medio:** Determina le coordinate del punto medio del segmento AB, con $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$:



Otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè $\boxed{M\left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B)\right)}$ (le coordinate del punto medio sono la *media aritmetica* delle coordinate degli estremi del segmento).

Esempio: Trova le coordinate del punto medio tra P e Q:

....

4 Il prodotto scalare nel piano

4.1 Introduzione

Dopo aver introdotto la somma tra vettori e la moltiplicazione **con uno scalare**, vorremmo introdurre anche una moltiplicazione tra vettori. Una scelta che sembra ovvia è quella della moltiplicazione per componenti:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \end{pmatrix}.$$

Questo tipo di moltiplicazione viene però utilizzato **raramente** poiché ha il grande svantaggio di creare dei "divisori dello zero", vale a dire: esistono due vettori (non nulli) per cui vale: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{o}$ (in questo caso $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il vettore nullo ovvero l'elemento neutro della somma di vettori).
Ad esempio:

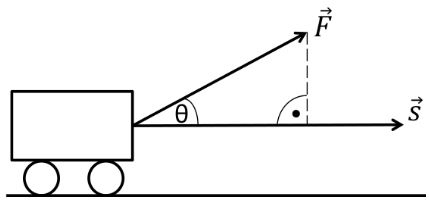
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi è inoltre da osservare che questa definizione non possiede nessuna interpretazione geometrica o fisica banale, come era il caso della somma e sottrazione di vettori.

Queste problematiche impongono un approccio diverso. Come vedremo in realtà è possibile definire diverse definizioni di moltiplicazione: in questo capitolo introduciamo il **prodotto scalare**, mentre in futuro (per la geometria vettoriale nello spazio) introdurremo due ulteriori tipi di moltiplicazione tra vettori (prodotto vettoriale e misto).

Esempio iniziale:

L'idea del prodotto scalare deriva dalla fisica: Consideriamo un vagone sul quale agisce una forza $\vec{F}$. La forza fa percorrere al vagone un tratto $\vec{s}$, compiendo così un lavoro.
Sappiamo che il lavoro compiuto da una forza si definisce come il prodotto della componente della forza lungo la direzione del moto e la lunghezza dello spostamento, quindi:



Lavoro = ...

Nota: il lavoro è una grandezza **scalare**: dunque questa operazione tra vettori ritorna una grandezza numerica!

4.2 Definizione

Definiamo innanzitutto il prodotto scalare facendo riferimenti ai **vettori geometrici**:

Definizione: Prodotto scalare
Siano $\vec{v}$, $\vec{w}$ due vettori geometrici di V_2; il loro **prodotto scalare** $\vec{v} \cdot \vec{w}$ è il numero reale definito come segue:

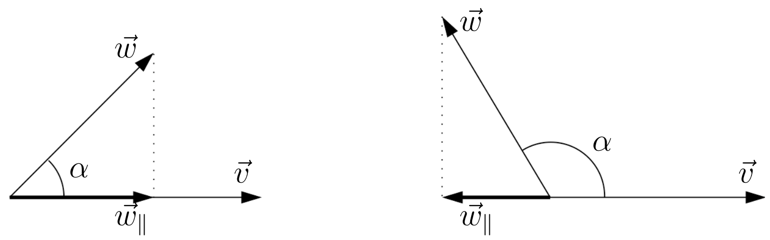
- se $\vec{v} = \vec{o}$ oppure $\vec{w} = \vec{o}$, allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$;
- se $\vec{v} \neq \vec{o}$ e $\vec{w} \neq \vec{o}$, allora si definisce

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha}$$

  dove α è l'angolo positivo e convesso tra due rappresentanti di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ uscenti da uno stesso punto del piano.

Illustrazione: sia $\vec{w}_{\|}$ la componente di $\vec{w}$ collineare a $\vec{v}$; allora

$$\|\vec{w}\| \cdot \cos\alpha = \pm\|\vec{w}_{\|}\| \ ;$$



quindi, vale $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}_{\|}\|$ se α è acuto e $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}_{\|}\|$ se α è ottuso.

Esempio: Calcola il prodotto scalare al variare dell'angolo tra i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ per cui vale: $\|\vec{a}\| = 4$ e $\|\vec{b}\| = 3$.

α	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
$\vec{a} \cdot \vec{b}$							

Osservazioni:

(i) Per convenzione, si indica con α l'angolo positivo e convesso tra i due vettori; non vi è comunque rischio di far confusione, visto che vale

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha) \quad .$$

(ii) Occorre definire separatamente il prodotto scalare con un vettore nullo, poiché in tal caso l'angolo non è definito.

(iii) Se $\vec{v}_p$ è la componente di $\vec{v}$ collineare a $\vec{w}$, vale anche $\vec{v} \cdot \vec{w} = \pm\|\vec{v}_p\| \cdot \|\vec{w}\|$.

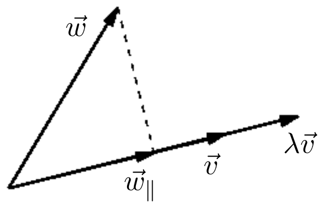
4.3 Proprietà del prodotto scalare

Proprietà del prodotto scalare:

(i) Commutatività: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$ (e quindi $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}_\|\| = \|\vec{v}_\|\| \cdot \|\vec{w}\|$) $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$.

(ii) "Associatività": Sia $\lambda \in \mathbb{R}$; allora vale $(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w}) = \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$.

Illustrazione (con $\lambda > 0$):



dal momento che le proiezioni ortogonali di $\vec{w}$ su $\vec{v}$ e su $\lambda\vec{v}$ coincidono,

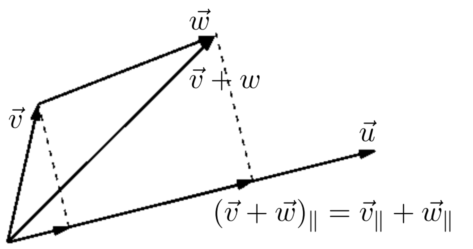
$$(\lambda\vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\lambda\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}_\|\| = \lambda\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}_\|\| = \lambda\,(\vec{v} \cdot \vec{w})\ ,$$

e $\quad \vec{v} \cdot (\lambda\vec{w}) \overset{\textbf{(i)}}{=} (\lambda\vec{w}) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{w} \cdot \vec{v}) \overset{\textbf{(i)}}{=} \lambda \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})\ .$

Analogamente si mostrano i casi rimanenti ($\lambda < 0$, $\vec{v}$ e $\vec{w}_\|$ non equiorientati).

(iii) Distributività: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$.

Illustrazione (caso particolare):



nella situazione rappresentata vale

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \|\vec{u}\| \cdot \|(\vec{v} + \vec{w})_\|\| \\
&= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_\| + \vec{w}_\|\| \\
&= \|\vec{u}\| \cdot (\|\vec{v}_\|\| + \|\vec{w}_\|\|) \\
&= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}_\|\| + \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}_\|\| \\
&= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}\ .
\end{aligned}$$

I casi rimanenti (dove $\vec{u}$, $\vec{v}_\|$ e $\vec{w}_\|$ non sono equiorientati) si dimostrano in modo analogo, e la seconda formula segue nuovamente da **(i)**.

(iv) Vettori collineari: Per due vettori non nulli e collineari $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vale

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos 0 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno lo stesso verso;
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos \pi = -\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno versi opposti.

In particolare, con $\vec{v} = \vec{w}$ ricaviamo $\vec{v} \cdot \vec{v} \underbrace{= \vec{v}^2}_{\text{notazione}} = \|\vec{v}\|^2$.

(v) Vettori perpendicolari: Se vale $\vec{v} \perp \vec{w}$, allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \underbrace{\cos 90}_{=0} = 0$.

(vi) Base ortonormata: Sia $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base ortonormata di V_2. Per quanto visto sopra, vale

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \qquad \text{e} \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0\ .$$

4.4 Prodotto scalare di vettori aritmetici

Nello spazio dei vettori *aritmetici*, il prodotto scalare assume una forma molto semplice:

Teorema: Prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$
Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori aritmetici del piano. Allora vale

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1\, w_1 + v_2\, w_2 \quad .$$

Dimostrazione:
Siano $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ due vettori. Osserviamo dapprima come per la base standard $(\vec{i}, \vec{j})$ vale:

$\vec{i} \cdot \vec{i} =$....................; $\vec{j} \cdot \vec{j} =$....................; $\vec{i} \cdot \vec{j} =$......................

Dalla definizione dei vettore aritmetico e sfruttando la distributività del prodotto scalare otteniamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) \cdot (w_1\vec{i} + w_2\vec{j}) = \cdots$$

Esempio 1: *calcola $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w}$, con $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

- $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ....
- $\vec{u} \cdot \vec{w} =$ ....
- $\vec{v} \cdot \vec{w} =$ ....

Esempio 2: Rappresenta i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcola il loro prodotto scalare utilizzando la formula appena introdotta e con la definizione: i risultati coincidono?

4.5 Applicazioni del prodotto scalare

Il prodotto scalare permette di operare in componenti sugli angoli tra vettori;

1) Angolo tra due vettori: dalla definizione $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\alpha$ segue immediatamente

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} = \frac{v_1w_1+v_2w_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2}}}\quad .$$

Esempio: *determina l'ampiezza dell'angolo α tra $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.*

Calcoliamo innanzitutto:

$\cos\alpha =$ ....

e quindi $\alpha = \arccos\Big($..............................$\Big) \cong$ ....

2) Condizione di ortogonalità: siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori non nulli; come abbiamo già notato, vale

$$\boxed{\vec{v}\perp\vec{w} \iff \vec{v}\cdot\vec{w} = 0}\quad .$$

Ad **esempio**, $\vec{v} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix}-10\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ sono ortogonali, perché:

$\vec{v}\cdot\vec{w} =$ ....

3) Vettori ortogonali: sia $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ un vettore non nullo.

Allora esistono ....vettori ortogonali a $\vec{v}$.

Essi saranno però tutti .... tra loro.

Se è necessario trovare un solo vettore ortogonale si può facilmente sfruttare quanto visto per il prodotto scalare:

$$\vec{v}\perp\vec{w} \iff \vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \iff v_1w_1+v_2w_2 = 0$$

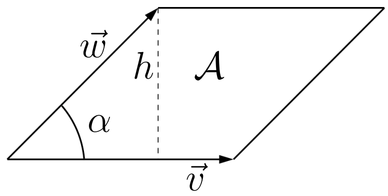
da cui è facile ricavare facilmente la seguente regola:

I vettori $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ sono ortogonali fra loro.

Esempio: trova due vettori perpendicolari a $\vec{v} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$:

$\vec{w} =$ .... $\vec{z} =$ ....

4) Area di un parallelogrammo: delimitato da $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$:



Sia $\mathcal{A}$ l'area cercata; allora vale

$$\mathcal{A} = \|\vec{v}\| \cdot h = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin\alpha \quad ;$$

elevando al quadrato otteniamo:

$\mathcal{A}^2 =$ ....

....

....

e quindi $\mathcal{A} =$ ....

Si tratta già di una relazione interessante, ma essa può essere ancora semplificata con l'ausilio delle componenti:

$\mathcal{A}^2 =$ ....

....

....

e quindi

$$\boxed{\mathcal{A} = |v_1 w_2 - v_2 w_1|} \quad .$$

Esempio: *determina l'area di un parallelogrammo avente lati collineari ai vettori* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Basta calcolare

$\mathcal{A} =$ ....

5 Il determinante e la regola di Cramer

5.1 Definizione

Come abbiamo visto grazie al prodotto scalare è possibile ricavare una semplice forma per calcolare l'area di un parallelogrammo descritto da due vettori ($\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$):

$\boxed{\mathcal{A} = |v_1 w_2 - v_2 w_1|}$

Questo valore ha un ruolo molto importante nell'algebra e in particolare nel calcolo matriciale.

Definizione: determinante

Il numero reale

$$\boxed{\underbrace{\det(\vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}}_{\text{notazioni}} = v_1 w_2 - v_2 w_1}$$

è detto **determinante** di $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Si tratta di una grandezza utile nell'ambito della geometria vettoriale;

Osservazione: il determinante può assumere anche valori negativi, questi vengono interpretati come positivi nel caso sia necessario calcolare un'area.

5.2 Collinearità

Una prima applicazione del determinante è la verifica di collinearità di due vettori: se essi sono collineari e dunque l'area del parallelogrammo da loro definito sarà pari a zero. Dunque vale:

$$\det(\vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{v} \text{ e } \vec{w} \textbf{ non } \text{sono collineari.}$$

Esempio: Determina per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ i seguenti vettori sono collineari o perpendicolari:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}.$$

5.3 Sistemi di equazioni lineari

Esempio introduttivo: considera un sistema di equazioni 2x2:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

può essere scritto in forma vettoriale come:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dunque risolvere il sistema di equazioni coincide con la ricerca di una **combinazione lineare** di vettori.
Questa osservazione ci dà un'importante informazione: essendo i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **non** collineari essi formano una **base**: ciò implica che è possibile esprimere un qualsiasi terzo vettore, in questo caso $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, come loro combinazione lineare: essa sarà la soluzione ricercata!

Cosa puoi affermare invece sui seguenti sistemi di equazioni lineari?

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$$

Risolvi questi due sistemi e confronta quanto ottenuto con quanto ipotizzato.

5.4 Regola di Cramer

Approfondendo questo approccio otteniamo la cosiddetta **regola di Cramer**: essa, oltre a indicarci se il sistema è risolvibile o meno, ci permetterà di risolvere velocemente sistemi di equazioni lineari.
Come visto possiamo riscrivere il sistema di equazioni lineari nella forma vettoriale:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$$

dove $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Come abbiamo già osservato, se vale

$$D = \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (non nulli) <u>non</u> sono collineari e dunque formano una base di V_2. In questo caso il sistema ha certamente una soluzione poiché il vettore $\vec{c}$ è esprimibile come combinazione lineare dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$: in particolare i coefficienti scalari x e y della combinazione lineare $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$ compongono la **soluzione ricercata**!

Regola di Cramer: ponendo

$$D_1 = \det(\vec{c}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \det(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

la soluzione del sistema di equazioni è data da:

$$x = \frac{D_1}{D} \quad , \quad y = \frac{D_2}{D} \quad .$$

Dimostrazione: tralasciata

Esempio: *risolviamo il sistema di equazioni*

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases} \quad .$$

Con $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15+8 = 23$, $D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = 60-14 = 46$, $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -21-48 = -69$ vale $x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{46}{23} = 2$, $y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-69}{23} = -3$ e quindi $\mathcal{S} = \{2, -3\}$.

Esercizio: risolvi con il metodo di Cramer:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ -4x - 6y = -7 \end{cases}$$