Moto parabolico

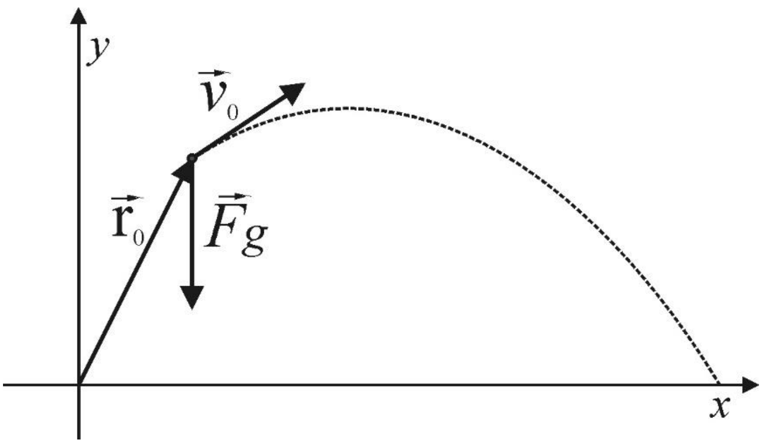
Il primo movimento a due dimensioni che studieremo è quello di un corpo lanciato in prossimità della superficie terrestre in presenza della sola forza peso. Trascuriamo l'attrito dell'aria, che sappiamo essere comunque presente, per facilitarci il compito di descrizione del moto. La presenza della forza di attrito, che dipende dalla velocità, implicherebbe la presenza di una seconda forza in continua evoluzione sia come intensità che direzione. Ritorneremo almeno qualitativamente su questo aspetto solo alla fine del paragrafo.

Prendiamo ad esempio una biglia, una pallina, un gesso e lanciamoli.

Come si muovono dopo aver lasciato la nostra mano?

Cominciamo ad osservare quali sono le condizioni di partenza del movimento: abbiamo un corpo di massa m in una posizione iniziale $\vec{r}_0$ avente velocità iniziale $\vec{v}_0$ (quella che gli abbiamo impresso noi). Evidentemente la sola forza presente a partire da quel momento è quella di gravità che sappiamo essere costante e diretta verso il basso.

Nel disegno a lato è schematizzata la situazione. Sono disegnati i vettori che rappresentano le condizioni di partenza e la traiettoria del movimento.



Dal punto di vista vettoriale il peso di un corpo può essere scritto in questo modo:

$$\vec{F}g = \begin{pmatrix} Fg_x \\ Fg_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Fg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

Secondo la legge di Newton è facilmente determinabile l'accelerazione, infatti:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}ris = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}g = \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \vec{g}\ .$$

Come si può osservare l'accelerazione possiede solo la componente verticale (y).

L'ultima osservazione ci permette di affermare che solo la componente y della velocità subirà modifiche durante il moto mentre la componente x della velocità rimarrà invariata. Della velocità noi conosciamo il valore iniziale $\vec{v}_0$ che scritto nella sua forma vettoriale esplicita diventa:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}.$$

Se la componente x della velocità non cambia si deduce che il movimento in x deve essere un moto uniforme con:

$v_x(t) = v_{0x}$ e

$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0)$

essendo x_0 la componente x di $\vec{r}_0$.

Nella componente y il moto è quello ottenuto con una accelerazione costante e pertanto:

$a_y = -g$,

$v_y(t) = v_{0y} + (-g) \cdot (t - t_0) = v_{0y} - g \cdot (t - t_0)$ e finalmente

$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}(-g) \cdot (t - t_0)^2 = y_0 + v_{0y} \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g \cdot (t - t_0)^2$.

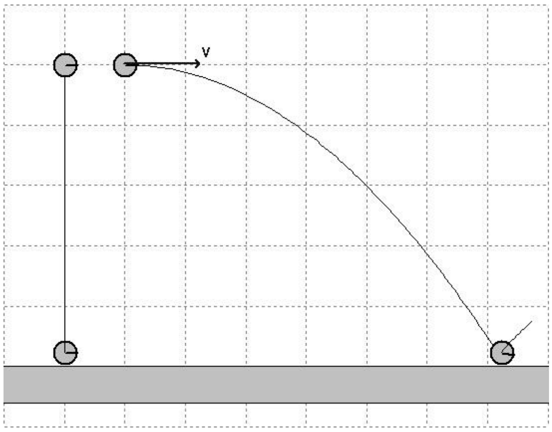
Ponendo per semplicità $t_0 = 0$ si possono riassumere le tre grandezze cinematiche del moto in esame nella forma vettoriale in questo modo:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \vec{g}\,,$$

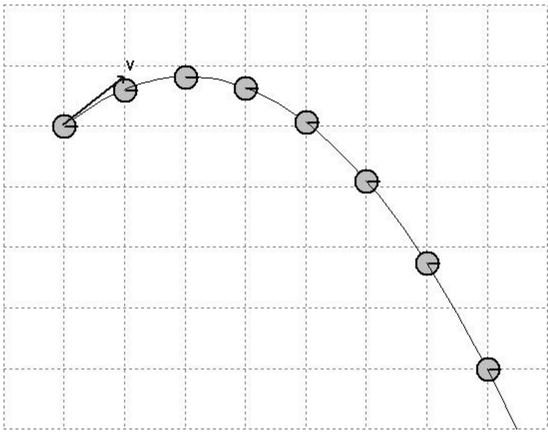
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - g \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix}.$$

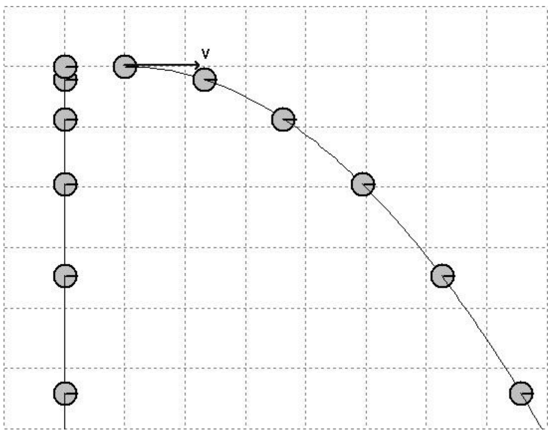
Sperimentalmente si può osservare che quanto ricavato dalla legge di Newton e dalle relazioni fra le grandezze cinematiche è verificabile.



Ad esempio una prima verifica che il moto in orizzontale è indipendente da quello verticale è la seguente: si lancia orizzontalmente una biglia con velocità v_0 da una certa altezza e contemporaneamente si lascia cadere dalla stessa altezza una seconda biglia (la velocità iniziale di quest'ultima è pari a zero). Esse toccano il pavimento contemporaneamente ed indipendentemente dalla velocità iniziale della prima biglia. Il disegno a lato mostra la simulazione dell'esperimento eseguita con il programma "Interactive Physics".



Facilmente verificabile è pure il fatto che il moto in orizzontale sia a velocità costante. È sufficiente filmare il movimento di un corpo lanciato con una certa velocità iniziale e da una certa posizione, sovrapporre i vari fotogrammi a formare una sola immagine con una opportuna scelta di intervalli di tempo fra un fotogramma e l'altro. La simulazione a lato mostra appunto quanto appena descritto. Come si può notare lo spostamento lungo l'asse orizzontale avviene a velocità costante, la distanza orizzontale fra l'immagine dell'oggetto e la successiva vale esattamente un quadretto nella scala scelta.



Un'ulteriore verifica consiste nell'osservare che il moto in verticale è un moto uniformemente accelerato (non sarebbe necessario in quanto già nel primo esperimento il fatto che le due biglie toccano contemporaneamente il suolo mostra che il moto in verticale della biglia avente inizialmente velocità orizzontale è identico al moto dell'altra biglia che parte da ferma). Facciamolo ugualmente. Ripetiamo il primo esperimento e filmiamolo. Come si può notare la posizione verticale della biglia lanciata orizzontalmente è, ogni volta che è stata filmata, la stessa di quella lasciata cadere che notoriamente cade in caduta libera, cioè il suo moto e uniformemente accelerato.

Facciamo un esempio con dei dati numerici: da un'altezza di $1,37\,m$ lanciamo un gessetto con velocità $\vec{v}_0$ le cui componenti valgono $v_{0x} = 4,25\frac{m}{s}$ rispettivamente $v_{0y} = 5,88\frac{m}{s}$. La posizione del gessetto al variare del tempo è descritta dal vettore $\vec{r}(t)$, vale a dire:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0,0\,m + 4,25\frac{m}{s}\cdot t \\ 1,37\,m + 5,88\frac{m}{s}\cdot t - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}\cdot t^2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo a questo punto rispondere a parecchie domande. Ad esempio: dove si trova il gessetto dopo $0,4\,s$? Risposta:

$$\vec{r}(0,4\,s) = \begin{pmatrix} 0,0\,m + 4,25\frac{m}{s}\cdot 0,4\,s \\ 1,37\,m + 5,88\frac{m}{s}\cdot 0,4\,s - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}\cdot (0,4\,s)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,70\,m \\ 2,94\,m \end{pmatrix},$$

vale a dire che si trova a $1,70\,m$ di distanza lungo l'asse orizzontale dal punto di lancio e a $2,94\,m$ dal pavimento, il punto zero dell'asse verticale.

Altra domanda: a che distanza dal punto di lancio il gesso passa per quota $2,35\,m$?

Per rispondere a questa domanda è importante ricordarsi che il movimento in verticale è indipendente da quello in orizzontale e cominciare a rispondere alla domanda quando passa per quota $2,35\,m$, e cioè risolvere la seguente equazione in t:

$$2,35\,m = 1,37\,m + 5,88\frac{m}{s}\cdot t - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}\cdot t^2 .$$

Le soluzioni a questa equazione sono evidentemente due: $t_1 = 0,2\,s$ e $t_2 = 1,0\,s$, entrambe accettabili per il nostro problema. Esistono perciò due posizioni lungo l'asse x alle quali il gessetto passa per quota $2,35\,m$, cioè:

$x(0,2\,s) = 0,85\,m$ e $x(1,0\,s) = 4,25\,m$.

Alla domanda dove tocca il pavimento si risponde allo stesso modo risolvendo l'equazione:

$$0,0\,m = 1,37\,m + 5,88\frac{m}{s}\cdot t - \frac{1}{2}9,8\frac{m}{s^2}\cdot t^2 .$$

Anche in questo caso le soluzioni dell'equazione sono due: $t_1 = -0,2\,s$ e $t_2 = 1,4\,s$. Solo la seconda soluzione è accettabile (la legge oraria che descrive il moto è vera solo dopo che il gessetto ha lasciato la mia mano, cioè per $t > 0\,s$). Il gessetto tocca il pavimento in $x(1,4\,s) = 5,95\,m$.

Che tipo di traiettoria è associato a questo tipo di moto? cioè è possibile trovare una funzione che descriva la forma della traiettoria nel piano $x\,y$?

Il titolo stesso del paragrafo ci dovrebbe suggerire che il tipo di traiettoria è una parabola. Analizzando la legge oraria delle componenti x e y del moto lo si può facilmente dimostrare.

Cominciamo con un ragionamento qualitativo. Il movimento in x è un movimento a velocità costante. Questo significa che la componente x della posizione varia linearmente con il tempo. La variazione del tempo e della posizione sono tra loro direttamente proporzionali. Il movimento nella componente y è d'altro canto una funzione di secondo grado (è presente un termine t^2). A questo punto è facilmente intuibile che sostituendo la variazione di posizione $(x - x_0)$ nella legge oraria della componente y al posto della variazione del tempo si otterrà per la componente y una funzione quadratica in x.

Algebricamente il ragionamento precedente diventa:

da $x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot(t - t_0)$ si ricava: $(t - t_0) = \dfrac{x(t) - x_0}{v_{0x}}$.

Sostituendo $(t-t_0)$ con $\frac{x-x_0}{v_{0x}}$ nella legge oraria della componente y si ottiene:

$y(x)=y_0+v_{0y}\cdot\frac{x-x_0}{v_{0x}}+\frac{1}{2}(-g)\cdot\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)^2$, che generalmente viene scritta nel seguente modo:

$$y(x)=y_0+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\cdot(x-x_0)-\frac{1}{2}g\cdot\frac{(x-x_0)^2}{v_{0x}^2}.$$

Nell'esempio numerico visto alla pagina precedente alcune domande possono essere affrontate senza ricorrere alla legge oraria ma semplicemente con la conoscenza della traiettoria.

Per esempio, alla domanda: a che distanza dal punto di lancio il gesso passa per quota $2,35\,m$? se non viene richiesto di conoscere il quando, si può scrivere:

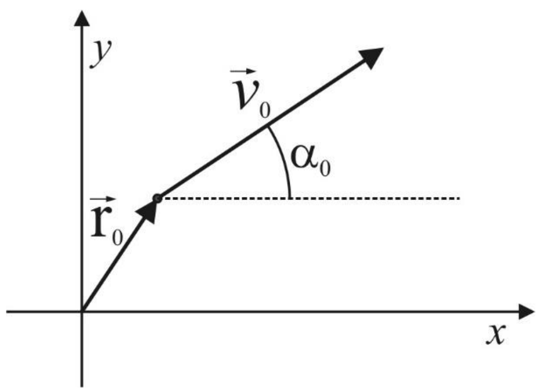
$$y(x)=1,37\,m+\frac{4,25\,\frac{m}{s}}{5,88\,\frac{m}{s}}\cdot(x-0,0\,m)-\frac{1}{2}9,8\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{(x-0,0\,m)^2}{\left(5,88\,\frac{m}{s}\right)^2},$$

porre $y(x)=2,35\,m$ e risolvere rispetto a x.

Anche in questo caso abbiamo una equazione di secondo grado con due soluzioni:
$x_1=0,85\,m$ e $x_2=4,25\,m$, entrambe accettabili.

Capita spesso che la velocità iniziale $\vec{v}_0$ sia conosciuta non tramite le sue componenti x e y, bensì a partire dal suo valore in assoluto e dalla direzione e verso, questi ultimi dati ricavati tramite l'angolo misurato rispetto all'orizzonte spesso chiamato anche alzo. In altre parole si passa da:

$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}v_{0x}\\v_{0y}\end{pmatrix}$ a $\vec{v}_0=(v_0;\alpha_0)$



Con l'aiuto della trigonometria si possono in ogni caso calcolare le componenti, infatti:

$$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}v_{0x}\\v_{0y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_0\cdot\cos(\alpha_0)\\v_0\cdot\sin(\alpha_0)\end{pmatrix}=v_0\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha_0)\\\sin(\alpha_0)\end{pmatrix}.$$

La legge oraria diventa allora:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+v_0\cdot\cos(\alpha_0)\cdot t\\y_0+v_0\cdot\sin(\alpha_0)\cdot t-\frac{1}{2}g\cdot t^2\end{pmatrix},$$

e la traiettoria:

$$y(x)=y_0+\frac{v_0\cdot\sin(\alpha_0)}{v_0\cdot\cos(\alpha_0)}\cdot(x-x_0)-\frac{1}{2}g\cdot\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cdot\cos^2(\alpha_0)}=y_0+\tan(\alpha_0)\cdot(x-x_0)-\frac{1}{2}g\cdot\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cdot\cos^2(\alpha_0)}.$$

Un caso particolare si ha quando il punto di arrivo si trova alla stessa quota del punto di partenza. In questo caso la distanza percorsa in x prende il nome di **gittata**. Per determinare quanto vale è sufficiente risolvere $y(x)=y_0$. L'equazione diventa:

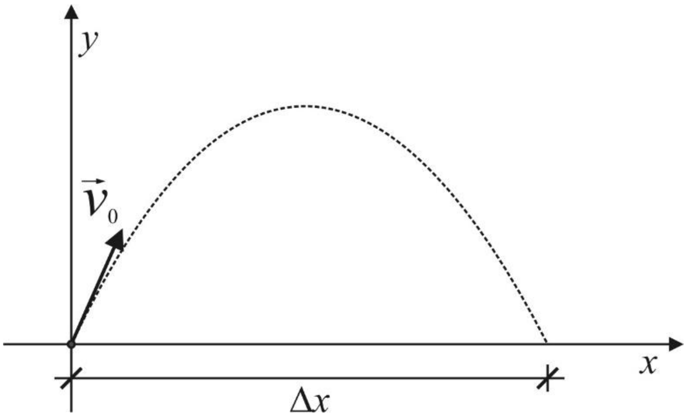
$$y_0=y_0+\tan(\alpha_0)\cdot(x-x_0)-\frac{1}{2}g\cdot\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2\cdot\cos^2(\alpha_0)},$$

cioè:

$$0 = \tan(\alpha_0) \cdot (x - x_0) - \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha_0)} .$$

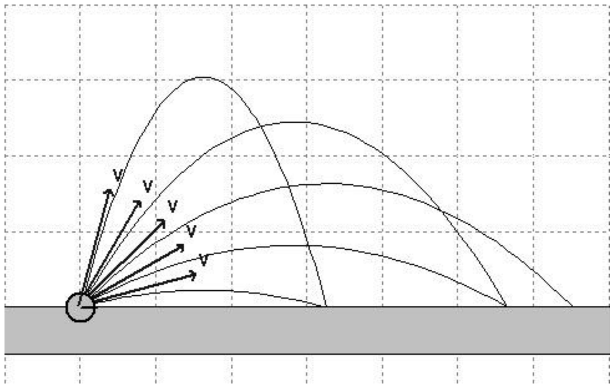
Risolvendo rispetto a $(x - x_0) = \Delta x$ si ottiene:

$$\Delta x = \frac{2 \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \cos(\alpha_0) \cdot v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot \alpha_0) .$$



La gittata dipende da v_0, α_0 e naturalmente da g.

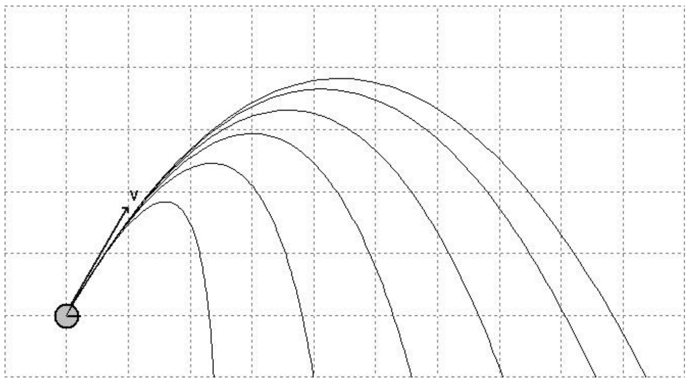
La gittata aumenta all'aumentare della velocità iniziale ed è massima con un angolo iniziale paria a $\alpha_0 = 45°$. Quest'ultimo aspetto è deducibile dall'analisi della funzione seno che è massima e vale 1 quando l'angolo è $90°$. Perciò: $\sin(2 \cdot \alpha_0) = 0$ con $\alpha_0 = 45°$.



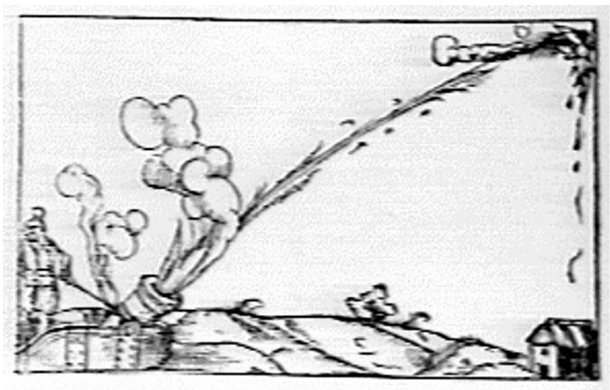
L'immagine a lato mostra la simulazione di un oggetto lanciato con la stessa velocità iniziale ma con angoli diversi i cui valori sono: $15°$, $30°$, $45°$, $60°$ e $75°$.

Interessante è osservare che angoli complementari danno la stessa gittata. Stessa gittata non significa stessa traiettoria e nemmeno stesso intervallo di tempo tra l'istante di partenza e quello di arrivo.

All'inizio del capitolo avevamo trascurato l'attrito dell'aria per semplificare la trattazione del problema. Non è compito di questo corso entrare nei dettagli del problema in quanto la trattazione matematica va ben al di là di quanto possa essere richiesto ad allievi di seconda. Il disegno a lato mostra qualitativamente cosa capita al moto di un corpo quando, oltre alla gravità, è presente anche la forza di attrito. Nella simulazione viene mostrato cosa succede quando la forza di attrito diventa via via più grande in rapporto all'inerzia e al peso del corpo.



La traiettoria da parabolica (nel disegno quella più in alto) diventa man mano sempre più asimmetrica fino a diventare quasi rettilinea nel primo tratto è poi verticale. Questo fatto, ben osservabile con oggetti leggeri (ad esempio una pallina da ping-pong) e lanciati con velocità inizialmente importanti, ha sicuramente contribuito a sostenere la teoria dell'impetus.



Questa illustrazione mostra l'opinione generale, anteriore a Galileo, dovuta ad Aristotele, che ipotizzava la teoria dell'*impetus*: cioè che un oggetto, come una palla di cannone, segue una linea retta fino a che non perde il suo *impetus* e poi cade a terra verticalmente.