L'energia potenziale elettrica e il potenziale elettrico

La forza elettrica, come quella gravitazionale, è una forza conservativa (vi ricordo una forza è detta conservativa quando il suo lavoro non dipende dal percorso ma solo dai punti di partenza e di arrivo).

Vale pertanto la relazione:

$$\Delta E_{p,e} = -W\left(\vec{F}_e\right).$$

Si tratta ora di calcolare il lavoro nelle varie situazioni.

Iniziamo con il calcolare l'energia potenziale elettrica di una carica Q_0 dovuta ad una distribuzione di N cariche (la stessa situazione che abbiamo già incontrato all'inizio del capitolo).

Sia $\vec{F}_e = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + ... + \vec{F}_{N0}$.

Per un noto teorema, già incontrato nel capitolo "Lavoro e Energia", il lavoro della forza elettrica totale è pari alla somma del lavoro della forza elettrica delle singole cariche, cioè:

$$W\left(\vec{F}_e\right) = W\left(\vec{F}_{10}\right) + W\left(\vec{F}_{20}\right) + ... + W\left(\vec{F}_{N0}\right).$$

Si tratta ora di calcolare il lavoro della forza elettrica esercitata su Q_0 da ogni singola carica.

Siano A a B il punto di partenza rispettivamente quello di arrivo. Possiamo pertanto scrivere che, ad esempio per $\vec{F}_{10}$, il lavoro da A a B vale:

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{10}\right) = W_{A\to B}\left(k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_0}{r_{10}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}}\right).$$

La forza elettrica dovuta ad una carica puntiforme, descrivibile dalla legge di Coulomb, è, come abbiamo visto, analoga a quella di gravità. Non è quindi più necessario ripetere il calcolo che avevamo già fatto nel capitolo dedicato all'energia potenziale gravitazionale a grandi distanze. È sufficiente riprendere i risultati e adeguarli alla situazione.

Il lavoro della forza di gravità della massa m_1 su una massa m_0, fatto lungo un percorso che porta m_0 da A a B, è calcolabile con la formula:

$$W_{A\to B} = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right),$$

dove $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ sono il vettore posizione relativo al punto di partenza A rispettivamente al punto di arrivo B della massa m_0, vettori che coincidono con il vettore che lega la massa m_1 con la massa m_0 al punto di partenza rispettivamente al punto di arrivo in quanto la massa m_1 è posta all'origine degli assi.

Genericamente, ponendo m_1 in un punto qualsiasi, la formula precedente va riscritta in questo modo:

$$W_{A\to B} = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right).$$

Per ottenere il lavoro della forza che la carica Q_1 esercita su Q_0 lungo un percorso che porta Q_0 da A a B si deve semplicemente sostituire G con k, m_1 con Q_1 e m_0 con Q_0, eliminare il segno "$-$" dovuto al fatto che la forza di gravità è sempre attrattiva mentre per la forza elettrica attrazione o repulsione sono associate al prodotto dei segni della cariche. Si avrà così:

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{10}\right) = k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right), \text{ …da cui}$$

$$\Delta E_{p,e10} = -W_{A\to B}\left(\vec{F}_{10}\right) = -k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right) = k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_{1B}} - \frac{1}{r_{1A}}\right).$$

Ancora una volta, con le stesse argomentazioni del caso gravitazionale, poniamo l'energia potenziale elettrica al valore di zero quando la distanza fra le cariche è pari all'infinito. A questo punto possiamo dire che l'energia potenziale elettrica della carica Q_0 posta in $\vec{r}_0$, dovuta alla carica Q_1 posta in $\vec{r}_1$ è calcolabile con:

$$E_{p,e10} = k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \frac{1}{r_{10}}.$$

Dato che l'energia è una grandezza scalare, l'energia elettrica totale dovuta alle N cariche elettriche è semplicemente la somma delle energie dovute alle singole cariche.

Ed ora un qualche esempio.

- Determinare l'energia necessaria per portare tre cariche elettriche di valore $Q = 4,0\,\mu C$ da molto lontano tra di loro (in pratica a distanza infinita l'una dall'altra) sui vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 20\,cm$.

  Dato che l'energia iniziale è zero (le cariche sono all'infinito e sono supposte ferme), l'energia quando si troveranno nella posizione data corrisponde a quella che devo fornire per portarcele.

  Cominciamo con il portare la prima carica. In assenza di qualsiasi forza non occorre nessuna energia (si può diversamente pensare che una carica si trovi già al vertice del triangolo).

  Portiamo la seconda carica in posizione. L'energia necessaria è:

  $$E_{p,e12} = k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_{12}} = k \cdot \frac{Q^2}{l} = 9 \cdot 10^9 \,\tfrac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{\left(4,0 \cdot 10^{-6} C\right)^2}{0,20\,m} = 0,72\,J.$$

  Portiamo ora la terza carica in posizione. Evidentemente occorre tenere presente che ci sono già due cariche e perciò l'energia necessaria è la somma dell'energia elettrica dovuta sia alla prima che alla seconda. Data la simmetria del problema il valore è lo stesso di quello appena calcolato così che alla fine abbiamo:

  $$E_{p,e(1,2)3} = E_{p,e13} + E_{p,e23} = 2 \cdot E_{p,e12} = 2 \cdot 0,72\,J = 1,44\,J.$$

  L'energia totale è data dalla somma del primo risultato più il secondo cioè tre volte $0,72\,J$, vale e dire $2,16\,J$.

- Si considerino due corpi di massa $m_1 = m_2 = m = 2,5\,kg$, entrambi caricati con carica $Q = 4,0\,\mu C$. Il primo è fisso mentre il secondo, inizialmente fermo e ad una distanza $d = 20\,cm$ dal primo (indichiamo questo punto con A), è libero di muoversi su un piano senza attrito. Calcolare la velocità del secondo corpo quando dista dal primo $x = 50\,cm$ (B) e quando si trova a grande distanza (C) dal primo.

  Per risolvere il problema è sufficiente applicare la legge di conservazione dell'energia e cioè:

  $$E_{tot}(A) = E_{tot}(B) = E_{tot}(C).$$

  L'unica energia potenziale in gioco è quella elettrica e perciò:

  $$E_{cin}(A) + E_{p,e12}(A) = 0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{d} = E_{cin}(B) + E_{p,e12}(B) = \tfrac{1}{2} m \cdot v_B^2 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{x} =$$
  $$= E_{cin}(C) + E_{p,e12}(C) = \tfrac{1}{2} m \cdot v_C^2 + 0$$

  Risolvendo rispetto alla velocità sia la prima che la seconda uguaglianza si ottiene:

  $$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{m} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(4,0 \cdot 10^{-6} C\right)^2}{2,5\,kg} \left(\frac{1}{0,20\,m} - \frac{1}{0,50\,m}\right)} = 0,59\,\tfrac{m}{s}$$, rispettivamente

  $$v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{m} \cdot \frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \,\frac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(4,0 \cdot 10^{-6} C\right)^2}{2,5\,kg} \frac{1}{0,20\,m}} = 0,76\,\tfrac{m}{s}.$$

Interessante sarebbe aggiungere un piccolo attrito. Supponiamo che sia di tipo radente con coefficiente pari a $\mu = 0,05$. La prima domanda potrebbe essere la stessa cioè quanto vale la velocità del secondo corpo quando dista dal primo $x = 50\,cm$ (B). La seconda potrebbe invece diventare: fino a distanza dal primo si allontana il secondo corpo?

La lagge sull'energia diventa allora:

$E_{tot}(B) - E_{tot}(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_A)$ per la prima domanda, rispettivamente:

$E_{tot}(C) - E_{tot}(A) = W_{A\to C}(\vec{F}_A)$ per la seconda.

La prima uguaglianza diventa:

$$\left(\tfrac{1}{2} m \cdot v_B^2 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{x}\right) - \left(0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{d}\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (x - d),$$

che risolta rispetto alla velocità porta a $v_B = 0,48\,\frac{m}{s}$.

La seconda diventa:

$$\left(0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{x_{\max}}\right) - \left(0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{d}\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (x_{\max} - d),$$

che risolta rispetto a $x_{\max}$ porta a due soluzioni, la prima $x_{\max} = 0,20\,m$ corrisponde al punto di partenza, mentre la seconda, che è quella che ci interessa, da $x_{\max} = 1,47\,m$.

- Ed ora un esempio un po' più complesso. Consideriamo un sistema composto da due cariche positive di valore $Q = 4,0\,\mu C$ fissate su un piano alla distanza $d = 40\,cm$ una dall'altra e un corpo di massa $m = 250\,g$ e di carica pure $Q = 4,0\,\mu C$ libero di muoversi unicamente lungo l'asse del segmento che unisce le cariche. Per chiarire meglio la situazione poniamo le due cariche fisse sull'asse y in $y_1 = -0,20\,m$ e $y_2 = +0,20\,m$. La terza carica potrà allora muoversi solo sull'asse x. Da determinare è l'energia potenziale elettrica della terza carica rispetto alle altre due e la velocità minima che deve avere quando si trova infinitamente lontana a sinistra per riuscire a superare il punto $x = 0$ per poi allontanarsi verso destra.

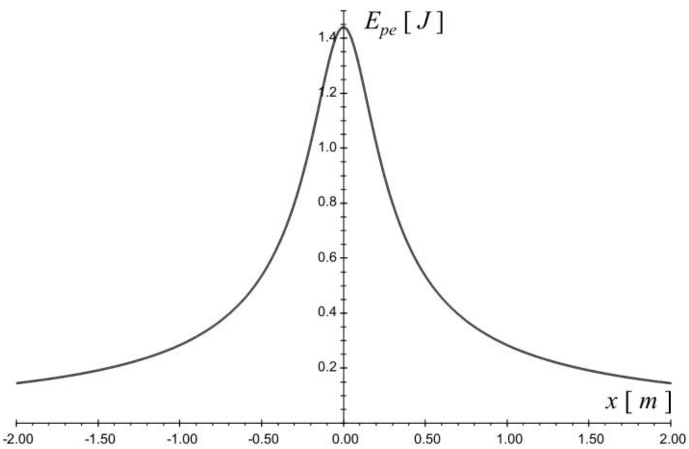
  Come abbiamo già avuto modo di costatare l'energia potenziale dipende in maniera inversamente proporzionale alla distanza. Essendo l'asse x anche l'asse del segmento che unisce le cariche, la carica libera di muoversi sarà sempre equidistante dalle due cariche fisse e questa distanza vale:

$$r = \sqrt{x^2 + y_1^2} = \sqrt{x^2 + y_2^2} = \sqrt{x^2 + \left(\tfrac{d}{2}\right)^2}.$$

L'energia potenziale elettrica totale vale pertanto:

$$E_{p,e} = 2 \cdot k \cdot Q \cdot Q \cdot \frac{1}{r} = 2 \cdot k \cdot Q \cdot Q \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(\tfrac{d}{2}\right)^2}}.$$

Qui a lato una rappresentazione grafica.



Per quel che riguarda la seconda domanda basta porre una uguaglianza fra l'energia al punto di partenza e quella in $x = 0$ dove la velocità viene posta pari a zero.

$$\tfrac{1}{2} m \cdot v^2 + 0 = 0 + 2 \cdot k \cdot Q \cdot Q \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\tfrac{d}{2}\right)^2}}, \quad \text{da cui:} \quad v = 3,39\,\tfrac{m}{s}.$$

Passiamo ora alla definizione di potenziale elettrico.

Per meglio comprenderne il significato cominciamo con il caso gravitazionale.

Se si sposta una massa m_0, ad esempio verso l'alto, la sua energia potenziale gravitazionale varia (in questo caso aumenta) di una quantità pari a:

$$\Delta E_{p,g} = -W\left(\vec{F}_g\right).$$

È possibile definire la **variazione di potenziale gravitazionale** e indicarla con ΔU_g quale nuova grandezza fisica determinabile la variazione dell'energia potenziale gravitazionale per unità di massa, vale a dire:

$$\Delta U_g = \frac{\Delta E_{p,g}}{m_0}.$$

Questa nuova grandezza dipende dalla massa (o dalle masse) che genera il campo gravitazionale ma non dalla massa m_0 che viene spostata. La sua unità di misura è il $\frac{J}{kg}$.

Parimenti può essere definita la **variazione di potenziale elettrico** e indicata con ΔU_e la variazione dell'energia potenziale elettrica per unità di carica, cioè:

$$\Delta U_e = \frac{\Delta E_{p,e}}{q_0}.$$

Questa nuova grandezza dipende dalla carica (o dalle cariche) che genera il campo elettrico ma non dalla carica q_0 che viene spostata. La sua unità di misura è il $\frac{J}{C} = V$ dove V sta per volt.

Determinare la variazione di potenziale elettrico a partire dal campo elettrico a cui è associato è facile nella misura in cui risulta facile calcolare la variazione dell'energia potenziale a sua volta associata al calcolo di un lavoro.

Spesso risulta molto più facile misurarlo. Per farlo basta collegare ad uno strumento chiamato voltometro i due punti interssati e leggerne il valore.

Ad esempio, supponiamo di avere un elettrone (massa dell'elettrone pari a $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg$ e carica pari alla carica elementare $q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$) che si muove nel vuoto a velocità termica $v_0 \cong 0$. Esso passa da un punto A ad un punto B fra i quali è presente una differenza di potenziale pari a $\Delta U_e = 3{,}0\,kV$. Calcolare la velocità dell'elettrone in B. Dal teorema di conservazione dell'energia possiamo affermare che la variazione dell'energia totale deve essere pari a zero, vale a dire:

$\Delta E_e + \Delta E_{cin} = 0$, cioè: $q_e \cdot \Delta U_e + \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2 - 0\right) = 0$ vale a dire: $\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -q_e \cdot \Delta U_e$ da cui

$$v = \sqrt{-\frac{2\cdot q_0 \cdot \Delta U_e}{m_e}} = \sqrt{-\frac{2\cdot\left(-1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\right)\cdot 3{,}0\cdot 10^3\,V}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg}} = 3{,}25\cdot 10^7\,\tfrac{m}{s}.$$

Se in questo esempio la differenza di potenziale è generata da un condensatore a lastre piane e parallele, all'interno delle quali il campo può essere considerato omogeneo, allora diventa facile calcolare il valore del campo, infatti:

$\Delta E_e = -W\left(F_e\right) = -F_e \cdot \Delta x = -q_0 \cdot E \cdot \Delta x$, da cui

$$E = \frac{\Delta E_e}{-q_0 \cdot \Delta x} = -\frac{\Delta E_e}{q_0}\cdot\frac{1}{\Delta x} = -\frac{\Delta U_e}{\Delta x} = -\frac{3{,}0\,kV}{2{,}0\,cm} = -1{,}5\,\tfrac{kV}{cm} = -1{,}5\cdot 10^5\,\tfrac{V}{m}$$

Il segno "$-$" sta a indicare che il punto A si trova sulla piastra caricata negativamente mentre il punto B si trova sull'altra e che l'elettrone si muove rispinto dalle cariche negative della prima piastra e attratto da quelle positive della seconda piastra. Si presti grande attenzione a non confondere il simbolo E riferito al campo elettrico col lo stesso simbolo che rappresenta l'energia. Solitamente per evitare qualsiasi pericolo di confusione si usa la notazione vettoriale per il campo elettrico.

Dato che abbiamo considerato il campo omogeneo possiamo continuare con questa approssimazione e calcolare la distribuzione di carica sulle piastre (sempre nella approssimazione che sia omogenea). Dato che fra due piastre il campo si calcola con $E = 4\pi \cdot k \cdot \sigma$ ne segue che:

$$\sigma = \frac{|E|}{4\pi \cdot k} = \frac{1,5 \cdot 10^5 \, \frac{V}{m}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}} = 1,3 \, \frac{\mu C}{m^2} \, .$$

Alcune ultime considerazioni.

- Di solito nella fisica delle particelle elementari ed in fisica nucleare si usa esprimere l'energia in eV (elettronvolt). L'energia di $1eV$ corrisponde alla variazione d'energia potenziale elettrica di una carica elementare (indicata di solito con e o q_e) che viene spostata fra due punti dello spazio con differenza di potenziale elettrico di $1V$.

  Nel SI $1eV$ corrisponde a $1,602 \cdot 10^{-19} \, C \cdot 1V = 1,602 \cdot 10^{-19} \, C \cdot 1 \frac{J}{C} = 1,602 \cdot 10^{-19} \, J$.
- Se si considera la superficie di un metallo nel caso elettrostatico (quindi con cariche ferme), si osserva che il potenziale su di essa è costante: infatti il lavoro della forza elettrica (che corrisponde alla variazione dell'energia potenziale elettrica, a meno del segno) da sempre valore nullo per ogni spostamento lungo la superficie metallica, essendo nulla la componente tangenziale del campo elettrico (e quindi della forza). Si dice che la superficie è equipotenziale.