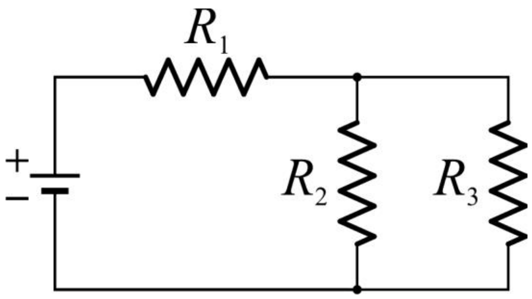
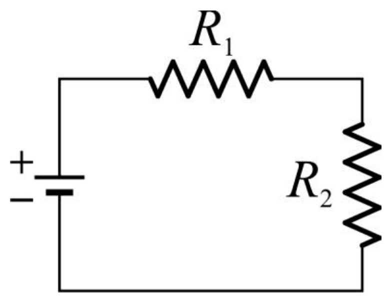
Resistenze in serie e in parallelo

A questo punto siamo in grado di analizzare nel dettaglio un circuito come quello di pagina 21 quando i consumatori sono dei resistori.



Conosciuta la differenza di potenziale U_0 ai capi della batteria (ddp) e noti i valori delle tre resistenze si chiede di calcolare la caduta di potenziale ai capi di ciascuna resistenza e la corrente che attraversa ciascuna resistenza.

Per meglio comprendere come affrontare il problema conviene semplificarlo, cominciando con due sole resistenze disposte in un caso una dopo l'altra e nell'altro una accanto all'altra.



Cominciamo con un circuito con due resistenze una dopo l'altra, cioè con due resistenze **in serie**.

Chiamiamo U_1 la caduta di potenziale sulla resistenza R_1 e U_2 quella su R_2. Per la legge delle maglie vale la seguente relazione:

$$U_0 = U_1 + U_2 .$$

La legge di Ohm afferma d'altro canto che:

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad \text{e} \quad U_2 = R_2 \cdot I .$$

Evidentemente la corrente I è la stessa nelle due resistenze.

Mettendo assieme la relazione ottenuta dalla legge delle maglie con le due ottenute dalla legge di Ohm si ottiene:

$$U_0 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = \left(R_1 + R_2\right) \cdot I = R_{tot} \cdot I .$$

La resistenza totale si calcola come la somma delle due resistenze, vale a dire:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 .$$

Conosciuta la resistenza totale si calcola facilmente la corrente I e in seguito U_1 e U_2.

Se al posto di due resistenze ne avessimo N tutte in serie la legge delle maglie diventa:

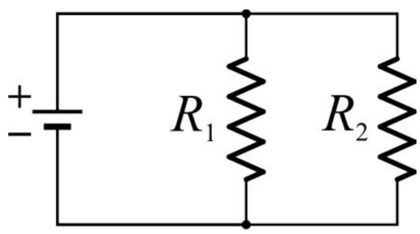
$$U_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_N .$$

Ripetendo le stesse sostituzioni fatte precedentemente otteniamo:

$$U_0 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \cdots + R_N \cdot I = \left(R_1 + R_2 + \cdots + R_N\right) \cdot I = R_{tot} \cdot I .$$

Si può pertanto concludere che N resistenze in serie si comportano come una sola resistenza il cui valore è pari alla somma dei valori delle N resistenze, cioè:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N .$$



Analizziamo ora il caso in cui due resistenze si trovino affiancate nel circuito. Si parla allora di resistenze **in parallelo**.

La legge delle maglie ci permette di affermare che la caduta di potenziale ai capi delle due resistenze (sempre indicata con U_1 e U_2) è la stessa ed è pari alla ddp U_0 della batteria. Chiamiamo I_1 la corrente che passa attraverso la resistenza R_1 e I_2 quella attraverso R_2.

Dalla legge di Ohm ricaviamo:

$U_0 = U_1 = R_1 \cdot I_1$ e $U_0 = U_2 = R_2 \cdot I_2$, da cui: $I_1 = \dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{U_0}{R_1}$ rispettivamente $I_2 = \dfrac{U_2}{R_2} = \dfrac{U_0}{R_2}$.

Dalla legge dei nodi si deduce d'altro canto che:

$$I = I_1 + I_2 .$$

Unendo assieme le ultime relazioni otteniamo:

$$I = \frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot U_0 .$$

Analogamente a quanto fatto per le due resistenze in serie chiamiamo R_{tot} la resistenza che inserita al posto delle due riproduce un circuito equivalente e scriviamo la legge di Ohm "risolvendola" rispetto alla corrente:

$$I = \frac{U_0}{R_{tot}} .$$

Da tutto questo possiamo dedurre che: $I = \dfrac{U_0}{R_{tot}} = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \cdot U_0$.

In altri termini possiamo affermare che:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

Questa uguaglianza stabilisce una relazione fra la resistenza totale o equivalente e le singole resistenze nel caso siano in parallelo e, a parole, afferma che l'inverso della resistenza totale è pari alla somma degli inversi delle singole resistenze. Essa può essere generalizzata al caso di N resistenze (la dimostrazione è lasciata a voi) in:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} .$$

È facile verificare che, nel caso di resistenze in serie, la resistenza totale o equivalente è maggiore della più grande delle resistenze prese singolarmente, mentre nel caso di resistenze in parallelo, la resistenza equivalente è minore della più piccola delle singole resistenze

Ritorniamo ora al caso iniziale che può essere visto come la somma di una resistenza in serie con due in parallelo:

Chiamiamo R_{23} la resistenza equivalente delle resistenze R_2 e R_3.

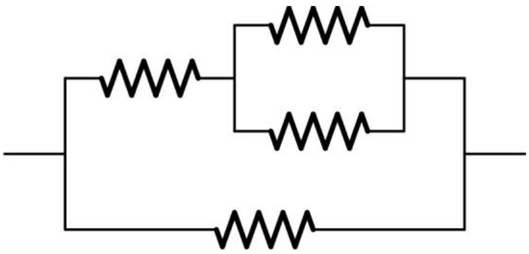
La resistenza totale è data dalla somma di R_1 con R_{23} dato che sono resistenze in serie. Da tutto ciò segue che, dato che R_2 e R_3 son resistenze in parallelo:

$$R_{tot} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} .$$

Nel caso in cui: $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ e $R_3 = 30\,\Omega$ segue: $R_{tot} = 27\,\Omega$.

Si possono fare molti esempi di combinazione di resistenze. Ci limitiamo al seguente caso lasciando agli studenti di analizzarne altri presenti sulle schede degli esercizi o sui vari libri.

La situazione è quella rappresentata nel disegno a lato nel quale tutte le resistenze hanno lo stesso valore. La domanda è: quanto vede valere ciascuna resistenza per fare in modo che la resistenza totale o equivalente sia pari a $R_{tot} = 15\Omega$? La risposta si trova risolvendo rispetto a R la seguente equazione:



$$R_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}}} = \frac{3}{5} R.$$

Da cui $R = 25\Omega$.