

## La pressione

Cominciamo con una definizione: si definisce pressione il rapporto fra la componente perpendicolare di una forza che agisce su una superficie e l'area della superficie stessa:

$$p = \frac{F}{A}.$$

L'unità di misura della pressione è pertanto:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa, \text{ dove } Pa \text{ sta per pascal.}$$

Da notare subito che  $1 Pa$  è un valore piuttosto piccolo, ecco qualche esempio.

La pressione esercitata sul pavimento da una persona di massa  $m = 80 kg$  che si appoggia con entrambi i piedi (area delle suole  $A \approx 2 \cdot 26 cm \cdot 8,5 cm = 2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-2} m^2 = 4,4 \cdot 10^{-2} m^2$ ) è pari a:

$$p = \frac{80 kg \cdot 9,8 \frac{N}{kg}}{4,4 \cdot 10^{-2} m^2} = 17,8 kPa.$$

Evidentemente se alza un piede la pressione raddoppia.

Premendo con una forza di  $50 N$  su una puntina (area della puntina pari a  $0,25 mm^2$ ) la pressione vale:

$$p = \frac{50 N}{0,25 \cdot 10^{-6} m^2} = 20 MPa.$$

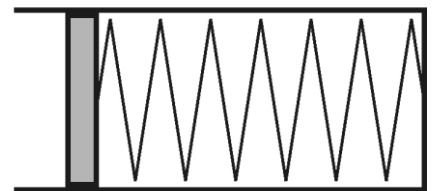
La pressione media atmosferica al livello del mare vale  $p_{atm} = 1,013 \cdot 10^5 Pa$ .

Sebbene l'unità di misura ufficiale e l'unica utilizzabile sia il pascal sono ancora molto usati: il bar ( $1 bar = 10^5 Pa$ ), l'atmosfera fisica (la pressione media al livello del mare)  $1 atm = 1,013 \cdot 10^5 Pa$ , il torricelli (la pressione esercitata da 1 millimetro di mercurio)  $760 torr = 1 atm$  oppure  $750 torr = 1 bar$ .

Evidentemente a noi interessa in particolare la pressione esercitata dai fluidi, in particolare dai gas. Inizieremo però con lo studiare la pressione esercitata dai liquidi.

## La pressione nei liquidi

Cominciamo col porci questa domanda: come si misura una pressione? Per rispondere ci viene in aiuto la definizione stessa di pressione: basta misurare la forza esercitata su una superficie e dividere per l'area della superficie stessa. Quindi un sensore atto alla misura di una pressione potrebbe semplicemente essere un cilindretto evacuato, nel quale cioè è stato fatto il vuoto (vedremo che è importante), chiuso da un pistone mobile a tenuta stagna appoggiato ad esempio ad una molla (vedi disegno a lato). La forza esercitata dal fluido sul pistone viene evidenziata dallo schiacciamento della molla. Molti di questi sensori, pur non avendo una molla ma una qualsiasi "diavoleria" elettronica, funzionano con lo stesso principio e permettono una misura semplice della pressione: basta mettere il sensore nel punto in cui si vuole conoscere la pressione e leggere sul display il valore. Per le nostre esperienze faremo uso di uno di questi o di qualche cosa di molto simile.



Strumenti che misurano la pressione prendono il nome di **manometri**. Va ricordato inoltre che si possono distinguere fra manometri assoluti e manometri differenziali o relativi. I primi misurano il valore assoluto della pressione (ad esempio, utilizzando uno di questi per misurare la pressione esercitata dall'acqua ad una certa profondità, un manometro assoluto misura la somma della pressione dell'acqua più quella dell'aria alla sua superficie libera).

I secondi misurano invece il valore della pressione relativamente alla pressione di qualcos'altro (sono di questo tipo ad esempio i manometri che misurano la pressione negli pneumatici, essi misurano la differenza di pressione fra l'aria nello pneumatico e l'aria esterna).

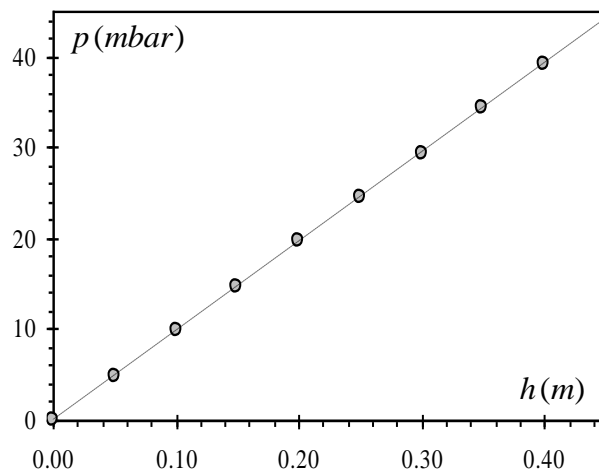
Siamo pronti a questo punto a studiare la pressione nei liquidi.

Chi fa sport subacquei è a conoscenza del fatto che la pressione dell'acqua aumenta grosso modo di  $1\text{ atm}$  per ogni  $10\text{ m}$  di profondità. Accettando per buona questa affermazione possiamo dedurre che la pressione nell'acqua aumenta regolarmente man mano che aumenta la profondità. Verifichiamolo.

Immergiamo un manometro differenziale in acqua e misuriamo la pressione in funzione della profondità.

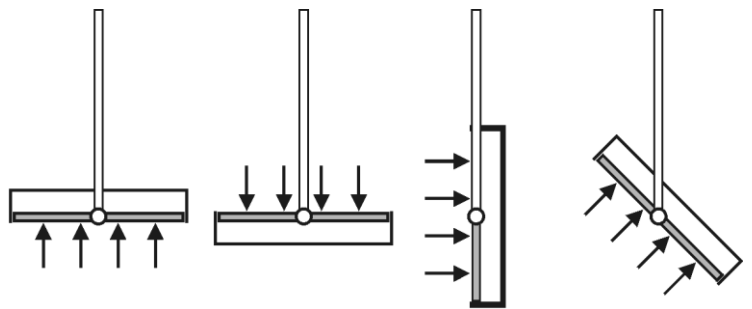
La tabella riporta i valori misurati con i quali costruiamo il grafico corrispondente.

| $h(\text{m})$ | $p(\text{mbar})$ |
|---------------|------------------|
| 0             | 0                |
| 0,05          | 4,9              |
| 0,10          | 9,8              |
| 0,15          | 14,7             |
| 0,20          | 19,6             |
| 0,25          | 24,5             |
| 0,30          | 29,4             |
| 0,35          | 34,3             |
| 0,40          | 39,2             |



Dal grafico si possono fare le seguenti deduzioni. In primo luogo è verificata l'affermazione secondo la quale la pressione aumenta in maniera direttamente proporzionale alla profondità. In secondo luogo è possibile anche quantificare questo aumento. Dalla pendenza si può dedurre che in acqua la pressione aumenta di  $98 \frac{\text{mbar}}{\text{m}}$  vale a dire  $0,98\text{ bar}$ , cioè circa  $1\text{ atm}$ , ogni  $10\text{ m}$  in perfetto accordo con quanto affermato in precedenza.

Interessante è pure verificare che il valore della pressione non cambia orientando il sensore in qualsiasi direzione, cioè che il sensore (il pistone) sia orientato verso il basso, verso l'alto o di lato, il valore della pressione non cambia se la posizione del sensore (la sua profondità) rimane costante.

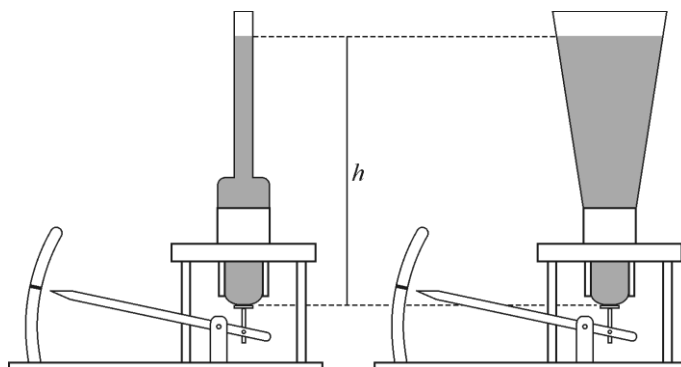


Ma che cosa causa la pressione?

Dalla definizione di pressione si può dedurre che questa deve essere associata ad una forza. Quale forza?

L'unica forza ipotizzabile come responsabile della pressione parrebbe essere la forza peso, il peso dell'acqua che si trova tra la superficie libera e il punto in cui si trova il sensore. Il peso dipende dalla quantità d'acqua presente sopra il sensore e la pressione dal rapporto fra forza e area della superficie sensibile (il sensore stesso). Questo fatto potrebbe significare che le conclusioni che abbiamo tratto precedentemente siano vere solo per il fatto che il recipiente contenete l'acqua era di forma cilindrica (il volume, quindi la massa e il peso, cresce proporzionalmente all'altezza) e che anche la concordanza numerica sia dovuta al caso (con un recipiente più largo o con un sensore di area diversa avremmo avuto un valore di pressione diverso)?

L'esperienza dei sub indica che la pressione dipende solo dalla profondità e non dalla grandezza del bacino nel quale ci si immerge (la pressione ad una certa profondità in una piscina è la stessa che in un lago alla stessa profondità). Quindi forma e dimensione del recipiente non incidono sulla pressione come è facile verificare con la seguente esperienza. Si misura la pressione in fondo a recipienti aventi la stessa altezza (e riempiti fino allo stesso punto con lo stesso liquido – ad esempio acqua) ma di forma diversa così che la quantità di liquido contenuta nel recipiente sia anche molto diversa (vedi disegni a lato).



Risultato: la pressione non cambia.

Possiamo pertanto riconfermare quanto detto in precedenza e cioè che la pressione in un liquido aumenta in modo direttamente proporzionale alla profondità.

Se la pressione dipende solo dalla profondità possiamo calcolarne il valore scegliendo un recipiente cilindrico (è facile calcolare il volume) e usando come sensore uno posto alla base del cilindro e abbia la sua stessa area. La pressione diventa pertanto:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F_g}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{V \cdot \rho \cdot g}{A} = \frac{A \cdot h \cdot \rho \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot h.$$

La formula è perfettamente coerente con l'ipotesi verificata che la pressione dipende dalla profondità e permette inoltre di comprendere pure da quali grandezze fisiche dipende il fattore di proporzionalità che per l'acqua valeva  $98 \frac{\text{mbar}}{\text{m}}$ : le grandezze in gioco sono  $g$  cioè l'intensità del campo di gravità terrestre (è quindi ipotizzabile che in una piscina sulla Luna la pressione cresca all'aumentare della profondità di un fattore un sesto rispetto a quanto succede sulla Terra) e da  $\rho$ , la densità del liquido in questione.

Per l'acqua e sulla Terra deve pertanto valere:

$$\rho \cdot g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0,98 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 0,98 \cdot 10^5 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} = 98 \frac{\text{mbar}}{\text{m}},$$

nuovamente in perfetto accordo con quanto misurato.

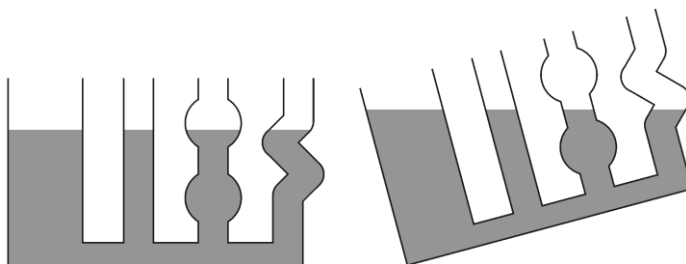
La formula della pressione appena ricavata calcola in realtà solo la pressione esercitata dal liquido e non la pressione assoluta in quel punto. È la pressione misurata da un manometro differenziale che ha come riferimento la pressione dell'aria alla superficie del liquido. Un manometro assoluto avrebbe misurato invece la somma delle due pressioni vale a dire:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h,$$

dove  $p_0$  è la pressione alla superficie del liquido cioè la pressione atmosferica.

Il fatto che un liquido esercita una pressione che dipende solo dalla sua densità e dalla profondità spiega il principio dei vasi comunicanti: in un sistema di vasi (condutture) tutti comunicanti fra di loro e aperti verso l'aria atmosferica il livello del pelo libero del liquido è alla stessa quota in ogni vaso.

Il principio dei vasi comunicanti permette inoltre di capire il funzionamento del più semplice dei manometri: il **manometro a U**.



Un manometro a U è formato da un tubo a forma di U riempito parzialmente con un liquido. Se i due rami sono aperti e a contatto con l'aria dell'ambiente, quindi se alla superficie libera si ha la stessa pressione, i due menischi si trovano alla stessa altezza (vedi figura A). Al contrario, se uno dei rami è collegato con un recipiente avente pressione diversa da quella ambientale, allora il livello dei due menischi non sarà lo stesso.

Nel caso in cui la pressione nel recipiente collegato ad un ramo del tubo a U è maggiore di quella ambientale, il livello del liquido nell'altro ramo salirà fino ad una nuova situazione di equilibrio raggiunta quando la pressione al menisco del ramo collegato con il recipiente sarà pari a quella ambientale sommata a quella esercitata dalla differenza di livello del liquido, cioè:

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \rho \cdot g \cdot \Delta h.$$

Se la pressione nel recipiente fosse minore di quella ambientale il livello del liquido nel ramo collegato con il recipiente sarebbe maggiore rispetto a quello a contatto con l'ambiente. La condizione di equilibrio diventerebbe:

$$p + \Delta p = p + \rho \cdot g \cdot \Delta h = p_0, \text{ vale a dire } p = p_0 - \rho \cdot g \cdot \Delta h.$$

Le due relazioni si riducono ad una sola assegnando alla differenza di livello  $\Delta h$  valore positivo quando il livello nel ramo a contatto con l'ambiente è maggiore di quello nel ramo a contatto con il recipiente e negativo in caso contrario, detto in altri termini il valore di  $\Delta h$  è sempre pari alla differenza fra il livello a contatto con l'ambiente e il livello a contatto con il recipiente.

Questo tipo di manometri sono sempre manometri differenziali, misurano cioè sempre solo una differenza di pressione fra l'ambiente e il recipiente in esame. Per conoscere il valore assoluto della pressione è necessario conoscere la pressione ambientale.

Un manometro a U opportunamente usato può servire per la misura della pressione ambientale. È sufficiente riuscire a creare il vuoto nel recipiente collegato al manometro così che valga la relazione:

$$0 = p_0 - \Delta p = p_0 - \rho \cdot g \cdot \Delta h, \text{ da cui: } p_0 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

Creare il vuoto è più facile a dirsi che a farsi. In primo luogo occorre che il liquido a "contatto" con vuoto non inizi ad evaporare così da riempire il recipiente (che dovrebbe essere vuoto) con i suoi vapori. Acqua ed alcool non vanno bene. Un liquido che va invece molto bene a questo scopo è il mercurio. I vapori di mercurio presenti nel recipiente nel quale noi facciamo il vuoto sono in effetti trascurabili.

Semplici accorgimenti permettono inoltre di creare il vuoto anche senza avere a disposizione una pompa a vuoto (d'altro canto l'apparecchio che verrà descritto fra poco fu inventato da Evangelista Torricelli nel 1643).

È sufficiente riempire con del mercurio un tubo della lunghezza di circa un metro chiuso ad una estremità, tappare l'estremità libera (per esempio con un dito) e immergere l'estremità tappata in una bacinella contenete pure mercurio, togliere il tappo e lasciare che il mercurio scenda nel tubo fino a che la pressione della colonnina di mercurio non sia in equilibrio con la pressione dell'atmosfera.

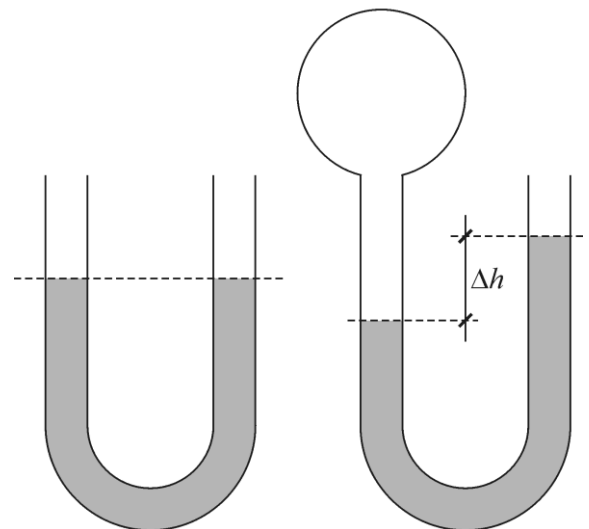
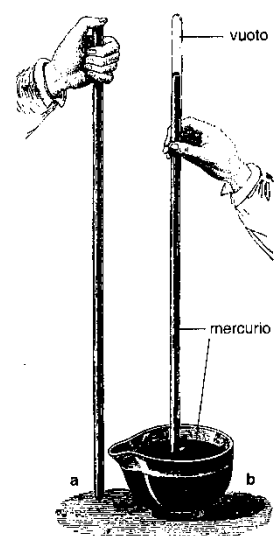


Figura A

Figura B



In alternativa a questo metodo (sconsigliabile vista la tossicità del mercurio) si può semplicemente riempire un tubo ad U chiuso da una parte e aperto dall'altra e poi sollevarlo verticalmente. Se il tubo è sufficientemente lungo si osserverà il mercurio scendere fino a che la pressione esercitata dalla colonnina di mercurio è bilanciata dalla pressione atmosferica.

Ancora più semplice dal punto di vista operativo è utilizzare un tubo ad U con una parte flessibile (tubo di gomma) e un rubinetto alla sommità di un ramo.

Inizialmente il rubinetto è aperto e i due rami sono alla stessa altezza (figura A).

Lasciando aperto il rubinetto si solleva l'altro ramo (che è sempre a contatto con l'aria esterna tramite un forellino nel tubo di vetro) fino a che il mercurio supera il rubinetto (figura B). Quindi si chiude il rubinetto e si abbassa il ramo fino a che la pressione atmosferica non è più in grado di sostenere la colonnina di mercurio nel ramo con il rubinetto (figura C). A questo punto si è realizzata la stessa situazione precedente e la pressione, espressa in millimetri di mercurio o torricelli, è data dalla altezza della colonnina di mercurio misurata fra i due livelli nei due rami.

Un manometro ad U usato in questo modo prende il nome di **barometro**. Un barometro è perciò un manometro usato (di solito esclusivamente) per misurare la pressione atmosferica. Dato che la pressione atmosferica è determinante per il tempo atmosferico, un barometro può servire alle previsioni del tempo.

Il concetto di pressione permette di capire un fenomeno che, verso la fine del primo anno avevamo studiato solo fenomenologicamente: la spinta di Archimede.

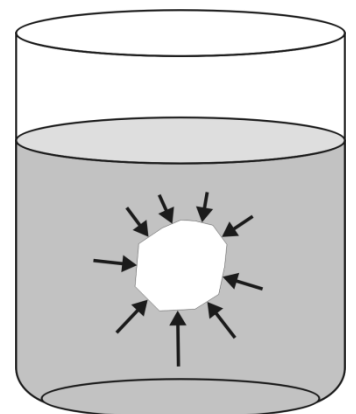
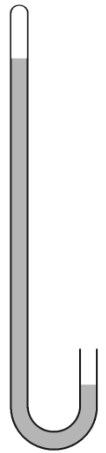
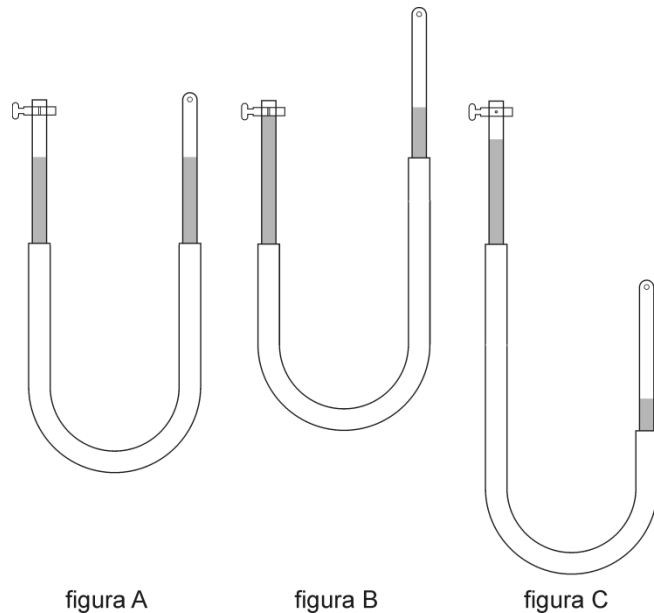
Le varie esperienze ci avevano portato a concludere che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso del fluido "spostato" dal corpo. In altri termini:

$$F_{\text{Archimede}} = \rho \cdot g \cdot V_{\text{immerso}}$$

Siamo ora in grado di dare una spiegazione di quanto affermato a partire dalla pressione esercitata dal fluido sul corpo.

Prendiamo in considerazione un corpo di forma qualsiasi immerso in un liquido (vedi disegno a lato). In ogni suo punto il liquido esercita una pressione dipendente solo dalla profondità. La forza totale esercitata dal liquido sul corpo può essere calcolata suddividendo la superficie del corpo in tanti pezzettini (piccoli abbastanza da poter considerare ogni porzione di superficie piana e alla stessa quota), calcolare la forza esercitata su ogni singolo pezzetto e sommare tutti i contributi (attenzione che si tratta di una somma di vettori!).

Per un corpo di forma qualsiasi questo calcolo è piuttosto difficile. Prendendo d'altro canto un cilindro immerso verticalmente il calcolo si fa più semplice.



Le forze esercitate dal liquido sul cilindro si possono dividere in due: quelle sul mantello (la superficie laterale) e quelle alle due basi.

Per ogni forza esercitata su un pezzettino di superficie laterale esiste un'altra forza esercitata su un altro pezzettino posto simmetricamente dall'altra parte così che i due contributi si annullano vicendevolmente.

Rimangono solo le forze esercitate sulle due basi, facilmente calcolabili.

Per la definizione di pressione la forza alle due superfici vale:

$$F_1 = p_1 \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_1 \cdot A$$

diretta verso il basso per la base superiore rispettivamente

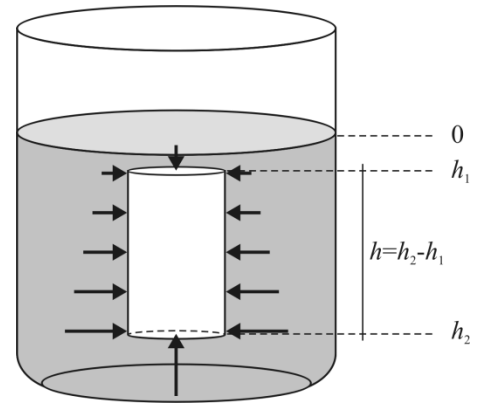
$$F_2 = p_2 \cdot A = \rho \cdot g \cdot h_2 \cdot A$$

diretta verso l'alto per quella inferiore.

La spinta di Archimede vale pertanto:

$$\begin{aligned} F_{Archimede} &= F_2 - F_1 = p_2 \cdot A - p_1 \cdot A = (p_2 - p_1) \cdot A = (\rho \cdot g \cdot h_2 - \rho \cdot g \cdot h_1) \cdot A = \\ &= \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1) \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A = \rho \cdot g \cdot V \end{aligned}$$

esattamente quello che affermavamo alla pagina precedente.



## La pressione nei gas

Siamo a questo punto in grado di studiare la pressione nei gas.

Cominciamo con alcune esperienze qualitative che mettono in evidenza l'esistenza della pressione atmosferica.

Oltre alla costruzione del barometro di Torricelli che non solo mette in evidenza l'esistenza di una pressione atmosferica ma addirittura la misura (esperienza che però non è così facile da realizzare), sono possibili altre semplici esperienze (alcune fattibili anche a casa propria) che qualitativamente evidenziano la presenza di una pressione atmosferica.

Bere da una cannuccia è possibile solo grazie alla pressione atmosferica; con una cannuccia più lunga si fa più fatica, con una "cannuccia" lunga più di 10m, cercare cioè di bere dal quarto piano con una "cannuccia" immersa in un bicchiere al pianterreno, è impossibile (nemmeno se si usa una pompa per risucchiare il liquido).

Bere con una cannuccia da un contenitore deformabile produce uno schiacciamento del contenitore fino a che non facciamo entrare aria nel contenitore stesso attraverso la cannuccia; la pressione atmosferica esercita sull'esterno del contenitore una forza non più controbilanciata dal liquido o dall'aria all'interno.

Se si riempie un bicchiere d'acqua fino all'orlo, lo si tappa con un cartoncino e lo si capovolge si può osservare che l'acqua non esce; la pressione atmosferica esercita sul cartoncino una forza tale da sostenere il peso dell'acqua.

Svuotando completamente una bottiglia in PET in alta montagna, richiudendola ermeticamente con il tappo e riportandola a basse quote si osserva che si schiaccia. La pressione atmosferica in quota è minore di quella in basso e l'equilibrio ritorna solo diminuendo il volume del recipiente. Avessimo fatto la stessa cosa con una bottiglia di vetro non avremmo assistito allo schiacciamento del vetro ma avremmo potuto osservare (o meglio sentire) l'aria che entra nella bottiglia appena aperta.

Avendo a disposizione una campana sotto la quale si possa fare il vuoto sono possibili varie esperienze fra le quali la seguente: si prende un palloncino, vi si immette un po' d'aria (non lo si gonfia ma si fa semplicemente in modo che contenga un po' d'aria), si fa un nodo (l'aria nel palloncino non può più fuoriuscire) e lo si mette sotto la campana. A questo punto si comincia a togliere l'aria da sotto la campana. Man mano che la pressione diminuisce si osserva

l'aumento di volume del palloncino come se lo stessi gonfiando. Era la pressione atmosferica che manteneva il volume del palloncino al valore "normale".

Tutte queste esperienze non comportavano cambiamenti di temperatura. Se coinvolgiamo anche questa grandezza fisica si possono fare altre interessanti osservazioni.

Oltre all'esperienza già descritta a pagina 8 di questo capitolo si possono realizzare in modo molto semplice anche queste piccole verifiche.

La più semplice consiste nell'aprire un congelatore (meglio se vuoto) e richiuderlo dopo un attimo. Se si tenta di riaprirlo subito dopo si fa più fatica. L'aria a temperatura ambiente che è entrata nel congelatore a sostituire quella fredda e si è in seguito raffreddata è alla base di questo fenomeno.

E ancora. Si prende una bottiglia in PET vuota (riempita cioè solo d'aria), la si immerge in acqua bollente (attenti a non scottarvi e a non fare entrare acqua nella bottiglia) e la si chiude ermeticamente. Toglila dall'acqua e raffreddala. Si osserverà che la bottiglia si schiaccia.

Se invece di usare il tappo, aveste chiuso la bottiglia con un palloncino, man mano che si raffreddava avreste osservato il palloncino risucchiato nella bottiglia.

Contrariamente, aveste chiuso la bottiglia con il palloncino prima di immergerla nell'acqua bollente avreste visto il palloncino gonfiarsi.

Queste esperienze e molte altre ancora ci danno una informazione precisa di quali grandezze ci siano in gioco. Una certa quantità d'aria (più in generale di gas) occuperà un certo volume a seconda della sua temperatura e della sua pressione.

Come sempre, quando si tratta di determinare quale relazione esiste fra varie grandezze, occorre scegliere quale di queste è il nostro osservabile (la grandezza da osservare) e variare ad una ad una le altre.

Il nostro osservabile sarà la pressione e cominciamo a vedere come essa cambia al cambiare del volume mantenendo costante la temperatura.

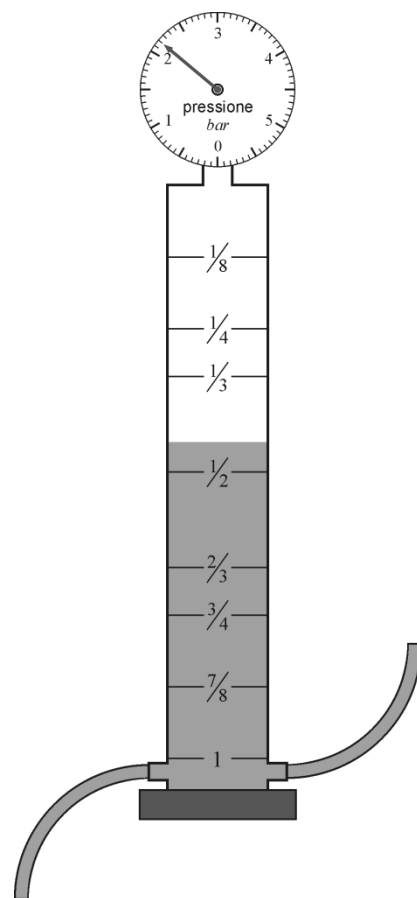
Fra le molte apparecchiature a nostra disposizione utilizzeremo la seguente: un cilindro munito di un manometro contiene una certa quantità d'aria che alla pressione ambientale occupa un volume unitario. L'aria viene compressa dall'acqua che facciamo entrare dal basso (vedi disegno) fino a che il volume d'aria si riduce a valori facilmente leggibili sulla scala del cilindro, la pressione si legge direttamente sul manometro.

Man mano che l'acqua entra nel cilindro e comprime l'aria si osserva che la pressione aumenta, come era logico aspettarsi.

La seguente tabella riporta la pressione (in bar) in funzione del volume (in unità arbitrarie) misurate con l'apparecchiatura descritta:

|                 |      |               |               |               |               |               |               |               |
|-----------------|------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $V(-)$          | 1    | $\frac{7}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
| $p(\text{bar})$ | 0,98 | 1,12          | 1,30          | 1,45          | 1,95          | 2,95          | 3,9           | 7,85          |

Costruiamo un grafico pressione in funzione del volume e verifichiamone l'andamento.



Dal grafico appare una possibile relazione di proporzionalità inversa fra le due grandezze.

Per poter controllare questa ipotesi è sufficiente verificare se il prodotto fra le due grandezze in gioco da una costante oppure, ed è ciò che faremo, costruire un grafico di pressione in funzione dell'inverso del volume e controllare se quest'ultimo è una retta passante per l'origine.

L'andamento del grafico pressione in funzione dell'inverso del volume conferma la nostra ipotesi e pertanto possiamo scrivere:

$$p \cdot V = \text{costante}.$$

Questa relazione fra volume e pressione è nota come legge di Boyle (o legge di Boyle e Mariotte) e descrive il comportamento di un gas a temperatura costante.

Da quali grandezze fisiche è composta la costante a destra della relazione che abbiamo appena scritto?

Appare abbastanza chiaro che fra le grandezze in gioco ce ne sia una qualcuna che tenga in considerazione la quantità di gas presente nel recipiente.

D'altro canto (come abbiamo già avuto modo di osservare con gli esempi precedenti) la temperatura gioca un ruolo non trascurabile.

Indagheremo perciò come cambia il nostro osservabile (la pressione) al cambiare della temperatura mantenendo il volume costante.

L'apparecchiatura che useremo consiste in un recipiente contenente aria tappato e collegato direttamente ad un manometro. Si misura la pressione man mano che si aumenta la temperatura.

La seguente tabella riporta i dati di un'esperienza effettuata con un recipiente di vetro pirex (la dilatazione di questo tipo di vetro è così piccola che non è necessario tenerla in considerazione durante l'esperienza) contenente un volume d'aria pari a  $575\text{cm}^3$ .

Le misure sono state prese ad intervalli di circa  $5^\circ\text{C}$  a partire dalla temperatura ambiente fino a circa  $70^\circ\text{C}$ .

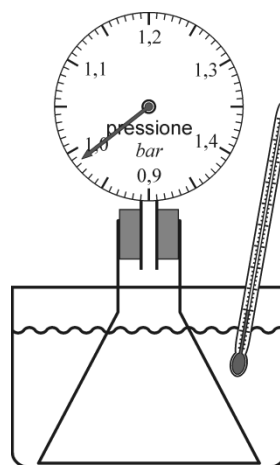
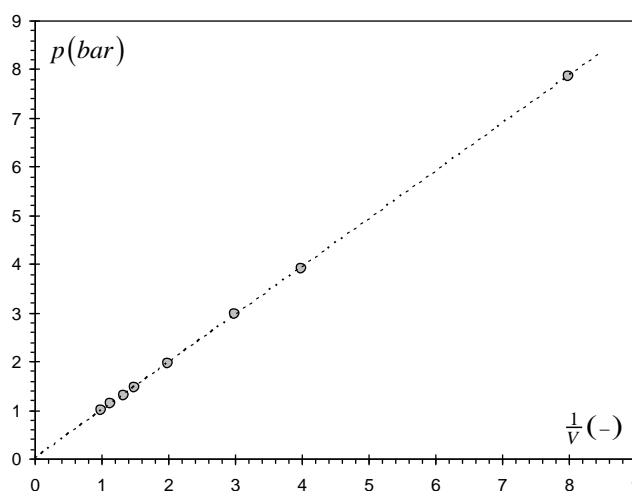
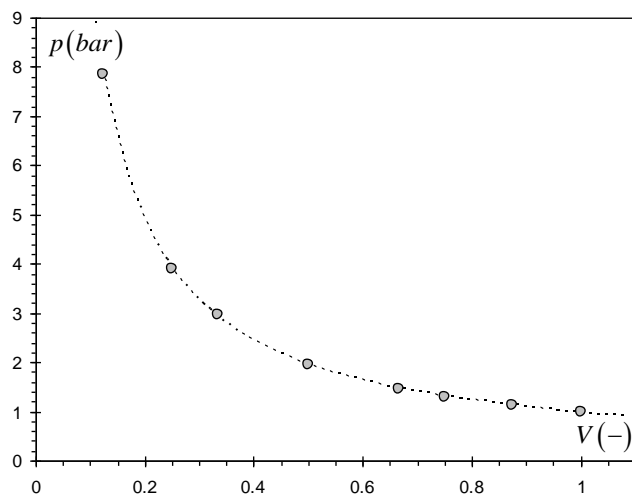


fig. A

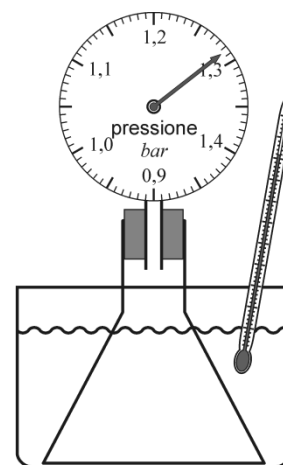


fig. B

|                                 |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\vartheta(^{\circ}\text{C})_t$ | 21,5 | 26,4 | 31,6 | 36,8 | 42,1 | 47,3 | 52,5 | 57,3 | 62,1 | 66,9 | 71,8 |
| $p(\text{mbar})$                | 987  | 1003 | 1021 | 1038 | 1056 | 1073 | 1091 | 1107 | 1123 | 1139 | 1155 |



Costruiamo il grafico pressione in funzione della temperatura e verifichiamone l'andamento.

Dal grafico se ne può immediatamente dedurre un andamento lineare e pertanto possiamo scrivere:

$$\Delta p \propto \Delta \vartheta.$$

Ripetiamo ora l'esperienza variando alcuni parametri iniziali.

Modifichiamo dapprima la pressione iniziale cominciando però con la stessa temperatura di partenza (non importa se il cambiamento sia dovuto ad una diminuzione di volume o ad un aumento della quantità di gas presente nel recipiente).

Eseguiamo in seguito ancora l'esperienza con la stessa pressione iniziale della prima esperienza ma partendo da una temperatura iniziale diversa (maggiore o minore poco importa).

I risultati delle esperienze danno le seguenti indicazioni:

La prima esperienza mostra che l'aumento di pressione dipende oltre che dall'aumento di temperatura anche in maniera direttamente proporzionale alla pressione di partenza cioè:

$$\Delta p \propto p_0.$$

La seconda mostra che anche la temperatura di partenza gioca un ruolo importante: a parità di pressione iniziale e di aumento di temperatura, l'aumento di pressione è maggiore se la temperatura di partenza è minore.

Riassumendo in una unica formula queste risultati sperimentali e chiamando  $\gamma(\vartheta_0)$  la costante di proporzionalità (che come abbiamo visto dipende dalla temperatura iniziale) possiamo pertanto scrivere:

$$\Delta p = p_0 \cdot \gamma(\vartheta_0) \cdot \Delta \vartheta.$$

Abbiamo chiamato  $\gamma$  il coefficiente di proporzionalità per un fatto molto semplice. Avessimo deciso che il nostro osservabile fosse stato il volume del gas e non la pressione, avessimo cioè indagato come cambia il volume al cambiare della temperatura mantenendo la pressione costante, avremmo ottenuto gli stessi identici risultati, cioè: il volume di un gas aumenta in maniera direttamente proporzionale all'aumento di temperatura, al suo volume di partenza e la temperatura iniziale avrebbe giocato lo stesso ruolo e perciò avremmo ottenuto per il volume del gas la seguente formula:

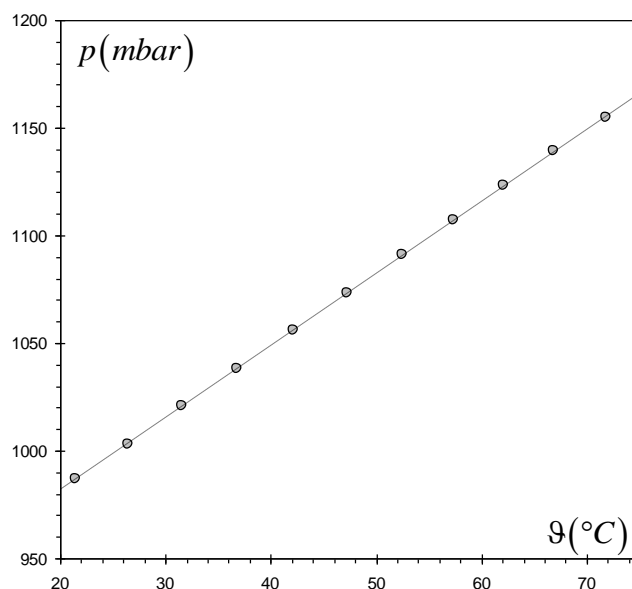
$$\Delta V = V_0 \cdot \gamma(\vartheta_0) \cdot \Delta \vartheta.$$

Confrontate questa formula con quella della dilatazione dei liquidi e capirete il perché di questa scelta.)

Il fatto poi che il coefficiente  $\gamma$  debba dipendere dalla temperatura di partenza poteva essere dedotto senza nemmeno effettuare l'ultima delle tre esperienze. Infatti considerando la prima esperienza effettuata con solo due aumenti identici di temperatura  $\Delta \vartheta$  si porta inizialmente il gas da una pressione  $p_0$  ad una pressione  $p_1 = p_0 + \Delta p$  e la temperatura ad un valore  $\vartheta_1 = \vartheta_0 + \Delta \vartheta$ . Chiamiamo ora  $p'_0$  la nuova pressione di partenza e con  $\vartheta'_0$  la nuova temperatura. Se l'aumento di temperatura è lo stesso, sarà pure lo stesso l'aumento di pressione (abbiamo a che fare con un andamento lineare).

Possiamo perciò scrivere:

$$\Delta p = p_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \vartheta \quad \text{e} \quad \Delta p = p'_0 \cdot \gamma' \cdot \Delta \vartheta.$$



Dato che due aumenti identici di temperatura portano a due aumenti identici di pressione, il confronto fra le due relazioni porta a dire che necessariamente deve valere:

$$p_0 \cdot \gamma = p'_0 \cdot \gamma'.$$

Con  $p'_0 > p_0$  segue che  $\gamma' < \gamma$ .

Le leggi  $\Delta V = V_0 \cdot \gamma(\vartheta_0) \cdot \Delta\vartheta$  e  $\Delta p = p_0 \cdot \gamma(\vartheta_0) \cdot \Delta\vartheta$  sono note come la prima e la seconda legge di Gay-Lussac (la prima conosciuta anche come legge di Charles).

Oltre a mettere in relazione la variazione della pressione di un gas a volume costante (o il volume a pressione costante) con la variazione della temperatura, l'estrapolazione di queste leggi per basse temperature porta a ad un fatto sconcertante: l'esistenza di una temperatura minima sotto la quale non si può scendere.

Ridisegniamo il grafico pressione in funzione della temperatura e prolunghiamo all'indietro la retta che rappresenta al meglio i punti sperimentali. Se l'andamento continua ad essere lineare, ad un certo punto la retta, che rappresenta la pressione, interseca l'asse delle temperature, cioè il valore della pressione diventa zero, o peggio, oltre il punto di intersezione, diventa negativo.

Pressioni negative non possono esistere (nemmeno pressioni pari a zero). Con qualsiasi gas facciamo questa esperienza, con qualsivoglia pressione o temperatura di partenza, il prolungamento verso il basso della retta interseca sempre l'asse

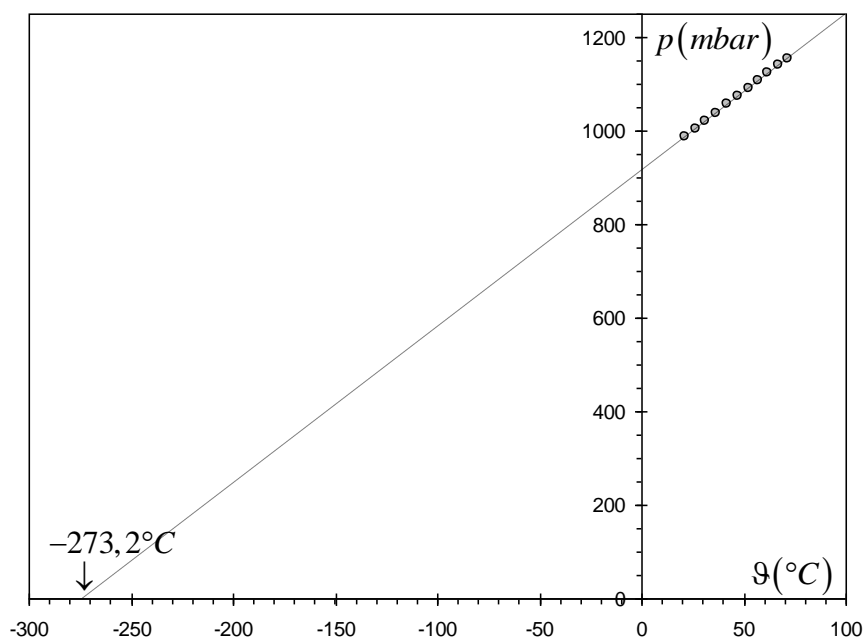
delle temperature sempre nello stesso punto alla temperatura di  $-273,2^\circ\text{C}$ . (Con i dati a nostra disposizione calcoleremmo:  $\vartheta = (273,2 \pm 0,4)^\circ\text{C}$ )

Questa temperatura deve essere pertanto la più bassa temperatura possibile. Essa viene chiamata la temperatura dello **zero assoluto**.

L'esistenza di un valore di temperatura minimo permette la costruzione di una nuova scala termometrica sempre positiva chiamata appunto scala termometrica assoluta. Questa nuova scala ha come unità di misura il kelvin ( $K$ ).  $0 K$  corrispondono alla temperatura dello zero assoluto. L'aumento di  $1 K$  coincide con l'aumento di  $1^\circ\text{C}$ . Pertanto  $0^\circ\text{C}$  corrispondono a  $+273,2 K$ .



Il fatto che questa scala abbia come zero lo zero di natura le conferisce un'importanza maggiore rispetto alle altre i cui punti di riferimento sono arbitrari (comodi ed interessanti ma comunque arbitrari). Per questo motivo scegliamo un nuovo simbolo per la temperatura assoluta: il simbolo  $T$ . Ad esempio il punto di fusione del ghiaccio verrà scritto con  $T = 273,2 K$ .



Inoltre il fatto che per qualsiasi gas il punto di intersezione delle rette con l'asse delle temperature passi per lo zero assoluto (evidentemente lo stesso per tutti i gas) significa che il coefficiente  $\gamma$  è lo stesso per tutti i gas e dipende solo dalla temperatura di partenza.

Il calcolo del valore di  $\gamma$  è presto fatto.

Dalla legge  $\Delta p = p_0 \cdot \gamma \cdot \Delta \vartheta$  possiamo ricavare che

che  $\frac{\Delta p}{\Delta \vartheta} = p_0 \cdot \gamma$  che rappresenta la

pendenza della retta.

Dal disegno a lato si capisce che la pendenza della retta può essere determinata anche da:

$$\text{pendenza} = \frac{p_0}{\vartheta_0 - \vartheta_{ZA}}.$$

Si può perciò scrivere:

$$\frac{p_0}{\vartheta_0 - \vartheta_{ZA}} = p_0 \cdot \gamma, \text{ da cui: } \gamma = \frac{1}{\vartheta_0 - \vartheta_{ZA}}.$$

Ma dato che  $\vartheta_0 - \vartheta_{ZA}$  corrisponde alla temperatura misurata nella scala assoluta corrisponde cioè a  $T_0$  si può scrivere che:

$$\gamma = \frac{1}{T_0}.$$

Finora abbiamo cercato e trovato leggi che mettono in relazione la temperatura, la pressione e il volume di un gas legando queste grandezze fisiche a due a due, trovando cioè come cambia una di queste grandezze al cambiare di un'altra tenendo costante la terza.

La legge di Boyle,  $p \cdot V = \text{costante}$ , mette in relazione pressione e volume a temperatura costante.

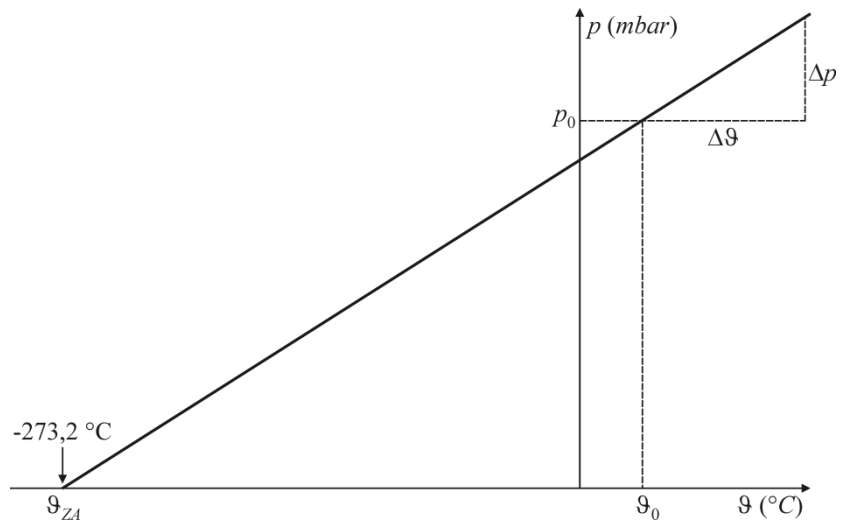
La prima legge di Gay-Lussac, che può essere scritta anche in questo modo  $V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)$ , con  $\gamma = \frac{1}{T_0}$ , permette di determinare il volume al cambiare della temperatura a pressione costante.

Infine la seconda legge di Gay-Lussac, che può essere pure scritta anche in questo modo  $p = p_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)$ , sempre con  $\gamma = \frac{1}{T_0}$ , lega la pressione con la temperatura a volume costante.

È giunto il momento di trovare una relazione che leghi le tre grandezze assieme.

Appare chiaro che le tre grandezze caratterizzano lo stato di una certa quantità di gas indipendentemente da come ci si arrivi, cioè se si parte da uno stato caratterizzato da  $p_0$ ,  $V_0$  e  $T_0$ , e si arriva ad un altro stato caratterizzato da  $p_1$ ,  $V_1$  e  $T_1$ , non ha importanza se la pressione (sempre il nostro osservabile) sia cambiata variando prima il volume e poi la temperatura o viceversa oppure variando le grandezze insieme. Alla fine la pressione  $p_1$  deve dipendere solo dalle condizioni di pressione, volume e temperatura iniziali ( $p_0$ ,  $V_0$  e  $T_0$ ) e da volume e temperatura finali ( $V_1$  e  $T_1$ ).

Procederemo perciò nel seguente modo: a partire dallo stato di partenza, caratterizzato da  $p_0$ ,  $V_0$  e  $T_0$ , faremo variare la temperatura fino a  $T_1$  mantenendo il volume costante; chiameremo la nuova pressione  $p_i$  (pressione intermedia); varieremo a questo punto il volume fino a  $V_1$  mantenendo costante la temperatura arrivando così allo stato finale caratterizzato da  $p_1$ ,  $V_1$  e  $T_1$ .



Dalla seconda legge di Gay-Lussac possiamo scrivere:

$$p_i = p_0 \cdot (1 + \gamma \cdot (T_1 - T_0)) = p_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_0} \cdot (T_1 - T_0)\right) = p_0 \cdot \left(1 + \frac{T_1}{T_0} - 1\right) = p_0 \cdot \frac{T_1}{T_0}.$$

Inserendo questo risultato nella legge di Boyle otteniamo:

$$P_1 \cdot V_1 = p_i \cdot V_0 = p_0 \cdot \frac{T_1}{T_0} \cdot V_0.$$

Portando tutto quello che riguarda lo stato iniziale a sinistra e quello finale a destra si ha:

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \quad \text{cioè} \quad \frac{p \cdot V}{T} = \text{costante}.$$

L'ultima grandezza da determinare è il valore della costante.

Quest'ultima dovrà dipendere a questo punto solo dalla quantità del gas in esame. Se a caratterizzare questa quantità scegliamo il numero di particelle (atomi o molecole) che compongono il gas otteniamo:

$$\frac{p \cdot V}{T} = N \cdot k$$

dove  $N$  è il numero delle particelle e  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$  è detta costante di Boltzmann.

Solitamente la legge appena ricavata, nota come **equazione di stato dei gas perfetti**, viene scritta nel seguente modo:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T.$$

Introducendo il concetto di **mole** ( $mol$ ) l'equazione di stato dei gas perfetti (o ideali) si scrive:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

dove  $n$  è il numero di moli e  $R = 8,31 \frac{J}{mol \cdot K}$  è detta la **costante dei gas**.

Rimandiamo al corso di chimica per una definizione di mole con tutte le sue implicazioni. Per noi è sufficiente sapere che il numero di particelle  $N$  e il numero di moli  $n$  di una certa quantità di gas sono legati assieme dalla relazione:

$$n = \frac{N}{N_A}, \quad \text{dove } N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ è il numero di Avogadro.}$$

L'importanza di questa relazione è che essa permette una uguaglianza numerica fra la massa atomica di una particella espressa in unità di massa atomica ( $uma$ ) e la massa di una mole della stessa sostanza espressa in grammi.

Ad esempio una molecola di anidride carbonica  $CO_2$  ha massa atomica pari a  $12uma + 2 \cdot 16uma = 44uma$ , di conseguenza la massa di  $1mol$  di anidride carbonica è pari a  $44g$ .

Prima di concludere ancora un'importante osservazione.

L'equazione di stato dei gas perfetti non ha validità assoluta.

Essa è vera solo se il gas presenta le seguenti caratteristiche<sup>1</sup>:

- le molecole sono puntiformi;
- interagiscono tra loro e con le pareti del recipiente mediante urti perfettamente elastici (ovvero non vi è dispersione di energia durante gli urti);
- non esistono forze di interazione a distanza tra le molecole del gas;
- le molecole del gas sono identiche tra loro e indistinguibili;
- le molecole si muovono di moto browniano;
- il gas non può essere liquefatto per sola compressione.

Normalmente queste condizioni sono soddisfatte solo se la pressione del gas è sufficientemente bassa e la sua temperatura sufficientemente alta.

L'aria (ossigeno e azoto), l'idrogeno, l'elio e altri gas alla temperatura e pressione ambientali soddisfano in buona approssimazione queste condizioni. Altri gas (ad esempio quello delle bombole da campeggio) no.

A pressioni elevate (per l'aria significa diverse centinaia di atmosfere) il volume proprio delle singole molecole inizia a giocare un ruolo importante nel volume del gas. Il volume a queste condizioni risulta maggiore rispetto a quello calcolabile con l'equazione di stato.

A basse temperature i gas condensano trasformandosi in liquidi. Evidentemente in questo stato di aggregazione non possono più seguire la legge dei gas.

Trattare la problematica dei gas reali esula dagli scopi di questo corso come pure non affronteremo lo studio di un gas molto particolare presente nell'aria: il vapore d'acqua.

---

<sup>1</sup> citazione da Wikipedia