Moto a due (o tre) dimensioni

In questo capitolo tratteremo alcuni moti che avvengono a due dimensioni, vale a dire parleremo di moti la cui traiettoria (definiremo il concetto di traiettoria nel corso della trattazione) non è più semplicemente una retta.

Per poter fare questo in modo efficace occorre estendere il concetto di grandezza vettoriale, che fino ad ora avevamo esclusivamente usato quando parlavamo di forze, alle tre grandezze cinematiche che abbiamo già incontrato nel coso di prima: la posizione, la velocità e l'accelerazione.

Il primo concetto che dobbiamo definire, o meglio ampliare a 2 (o 3) dimensioni, è quello di sistema di riferimento. Dato che tutti i moti che incontreremo durante il corso, pur avvenendo in uno spazio tridimensionale, possono sempre essere ricondotti a moti che avvengono a due dimensioni, ci accontentiamo di definire un sistema di riferimento a due dimensioni.

sistema di riferimento a due dimensioni

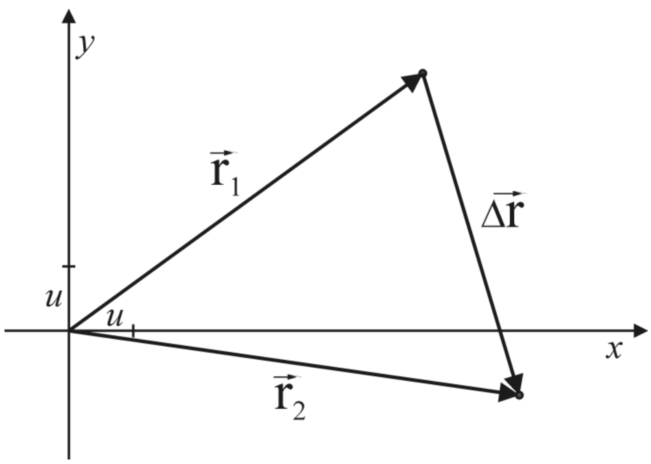
Come abbiamo già avuto modo di esaminare nel capitolo 3 (cinematica) e più precisamente nel capitolo 3.1, per costruire un sistema di riferimento occorrono:

- la direzione, nel nostro caso le direzioni,
- per ognuna di esse occorre un verso,
- un punto di riferimento o origine,
- e l'unita di misura.

Il più comune sistema di riferimento a due dimensioni è quello ortonormato, vale a dire che le due direzioni sono ortogonali (formano cioè un angolo retto fra di loro) e hanno la stessa unità di misura (oltre ad avere evidentemente la stessa origine).

In un sistema di riferimento a due dimensioni la posizione è determinata da un vettore indicato solitamente con $\vec{r}$. Come per le forze, il vettore posizione può essere scomposto nelle sue componenti e perciò:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Se un corpo passa dalla posizione $\vec{r}_1$ a una posizione $\vec{r}_2$ si può affermare che per il corpo c'è stato un cambiamento di posizione pari a $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Usando le componenti si può scrivere:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Utilizzando i valori ricavabili dal disegno a lato si può calcolare:

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5{,}5u \\ 4u \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 7u \\ -1u \end{pmatrix}$, quindi: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 7u \\ -1u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5{,}5u \\ 4u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u - 5{,}5u \\ -1u - 4u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5u \\ -5u \end{pmatrix}$.

A due dimensioni la distanza, che a una sola dimensione era banalmente il cambiamento di posizione privato del suo segno (il valore assoluto), si calcola con il teorema di Pitagora, vale a dire:

$$d = \|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

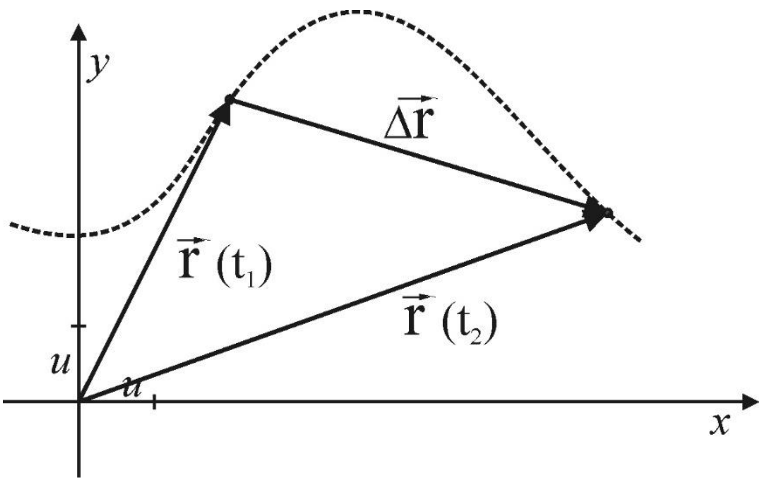
Movimento a due dimensioni

Cominciamo con il definire il concetto di traiettoria.

Fino ad ora tutti i movimenti studiati (o almeno quelli studiati in dettaglio) avvenivano lungo una retta. Possiamo dire pertanto che la traiettoria di quei movimenti era rettilinea o meglio ancora che la traiettoria era un segmento di retta. Altri moti, pur non avvenendo lungo una retta come ad esempio quando si risolvevano problemi di auto lungo una autostrada oppure di treni, venivano ricondotti a movimenti rettilinei trascurando tutte le curve. In altri casi, ad esempio quando si parlava del moto di un pendolo o ancora quando affrontavamo problemi di carrelli di un ottovolante, ci soffermavamo solo su questioni legate alla loro energia. Ebbene tutti questi moti non avvenivano lungo una retta; ad esempio nel caso del pendolo la traiettoria consisteva in un arco di circonferenza. Più in generale la **traiettoria** è un insieme di punti del piano o dello spazio corrispondenti alle posizioni del corpo in moto in istanti di tempo successivi. Evidentemente questa definizione si adatta perfettamente anche nel caso di una traiettoria rettilinea.

Dalla definizione di traiettoria risulta evidente che se vogliamo descrivere il moto di un corpo è sufficiente conoscere la posizione di questo ad ogni istante. Fino a questo punto sembra essere esattamente quanto studiato nel capitolo cinematica; la differenza fondamentale sta nel fatto che la posizione ora è descritta non più semplicemente dalla funzione $x(t)$ (ad esempio[1] $x(t)=4,2km+45\frac{km}{h}\cdot t$), ma da un vettore posizione le cui componenti x e y (eventualmente z) variano nel tempo. Quindi a due dimensioni la posizione del corpo sarà descritta da:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$



I vettori $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}(t_2)$ definiscono le posizioni del corpo agli istanti t_1 e t_2. La linea tratteggiata è la traiettoria e, come da definizione, rappresenta i punti del piano xy in cui transita il corpo in esame.

Due importanti osservazioni.

In primo luogo occorre evidenziare la differenza concettuale fra questa rappresentazione grafica e quelle alle quali eravamo abituati fino ad ora. La rappresentazione grafica fino ad ora utilizzata era sempre del tipo posizione in funzione del tempo con il tempo in ascissa e la posizione in ordinata. Sul grafico ogni coppia di dati indicava una posizione e il relativo istante. Il grafico in esame è invece una rappresentazione dello spazio (nel nostro caso piano) fisico reale in cui ogni punto dello "spazio" è definito da una coordinata x e una coordinata y. Il tempo non è più rappresentato (nel caso specifico del grafico in esame gli unici due istanti noti sono t_1 e t_2).

In secondo luogo è importante rendersi subito conto che conoscere la traiettoria del moto di un corpo non significa conoscerne il moto in tutta la sua completezza. Sapere che un corpo si muove lungo una circonferenza e di questa avere la descrizione completa non significa sapere dove il corpo si troverà ad un preciso istante. Tutto quello che si sa è che prima o poi passerà per quel o quell'altro punto della circonferenza in esame. A volte questa conoscenza è sufficiente per risolvere un determinato problema. Ad esempio per sapere se un pallone da pallacanestro entrerà o meno nel cesto non ha importanza sapere quando la sua posizione coincide con quella del canestro, è sufficiente sapere che la posizione del canestro è un punto della traiettoria.

[1] In realtà anche il moto a una dimensione è descrivibile con i vettori, esattamente come quello a 2 o 3 dimensioni. Semplicemente la componente y (e z se del caso) rimane costante e quindi è sufficiente conoscere unicamente la componente x.

Immediata a questo punto è la definizione di velocità media. Come nel caso a una dimensione si definisce **velocità media** il rapporto fra il cambiamento di posizione e il corrispondente intervallo di tempo vale a dire:

$$\vec{v}_{12} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Domanda immediata: come si fa a dividere un vettore, in questo caso $\Delta\vec{r}$, con uno scalare, Δt ?

A matematica avete imparato o imparerete che dividere o moltiplicare un vettore con uno scalare è una operazione molto semplice: basta dividere o moltiplicare ciascuna componente del vettore con lo scalare.

Facciamo un esempio: dall'origine del sistema di riferimento mi sposto di $5m$ lungo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con un cateto (la base) lungo $4m$ e parallelo all'asse x e l'altro cateto (l'altezza) lungo $3m$ e parallelo all'asse y (i due cateti altro non sono che le componenti x e y del vettore spostamento). Spostandomi di altri $5m$ nella stessa direzione e verso, raddoppiando cioè lo spostamento vale a dire moltiplicando lo spostamento per 2, mi ritrovo all'estremità dell'ipotenusa lunga $10m$ di un triangolo rettangolo con base $8m$ e altezza $6m$, vale a dire che ho moltiplicato per 2 pure le componenti x e y del vettore che rappresenta uno spostamento doppio. Analogamente se avessi deciso di dimezzare lo spostamento avrei diviso per 2 anche le sue componenti x e y.

In questo esempio ci siamo limitati a dividere o moltiplicare un vettore che rappresenta uno spostamento o una posizione per un numero, ottenendo così nuovamente uno spostamento o una posizione, ciascuna componente misurata in metri è stata moltiplicata o divisa per un numero ottenendo ancora una misura in metri. Avessimo operato in modo analogo su dei vettori forza, vettori che abbiamo già incontrato durante il capitolo 4, avremmo ottenuto ancora dei vettori che rappresentano una forza.

Nel caso delle velocità la divisione di un vettore (il vettore spostamento le cui componenti hanno unità di misura della lunghezza, vale a dire metri) con uno scalare (l'intervallo di tempo misurato in secondi) porta ad un nuovo vettore le cui componenti avranno unità di misura pari a metri su secondi, cioè le unità di misura della velocità, come d'altro canto ci saremmo aspettati dato che il nuovo vettore rappresenta appunto una velocità media, una velocità media vettoriale.

La velocità media e quindi la velocità in generale è pertanto una grandezza vettoriale.

La velocità media $\vec{v}_{12}$ fra l'istante t_1 e l'istante t_2, con $t_2 - t_1 = \Delta t$, è perciò pari a:

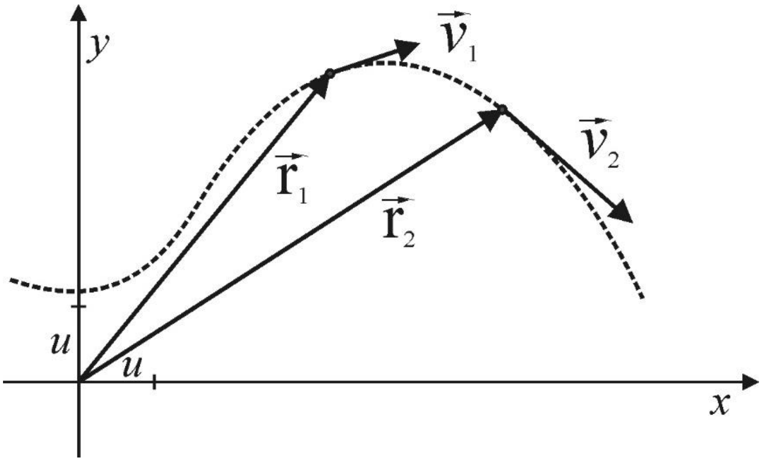
$$\vec{v}_{12} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12x} \\ v_{12y} \end{pmatrix},$$

dove v_{12x} e v_{12y} sono le componenti x e y del vettore velocità media $\vec{v}_{12}$.

Per passare dalla velocità media a quella **istantanea** si deve procedere esattamente come già visto e studiato durante il corso di prima al capitolo cinematica e più precisamente si veda il capitolo 3.3.2. Si deve calcolare una velocità media per un intervallo di tempo piccolo a piacimento. Evidentemente anche la velocità istantanea è una grandezza vettoriale. Come rappresentare questo vettore e quali caratteristiche possiede?

Il grafico disegnato nella pagina precedente è la rappresentazione dello spazio fisico reale. I vettori rappresentano una posizione o descrivono uno spostamento. Le componenti hanno come unità di misura il metro (o qualsiasi altra unità di misura della lunghezza). (È possibile determinare la lunghezza del vettore o delle sue componenti misurandole direttamente sul grafico, basta prestare attenzione all'unità di misura presente sugli assi).

Il vettore velocità media o istantanea (che d'ora in avanti sarà semplicemente chiamata velocità) è di conseguenza un vettore diverso dal vettore posizione o spostamento. A rigor di logica non può e non dovrebbe essere rappresentato sullo stesso grafico delle posizioni.

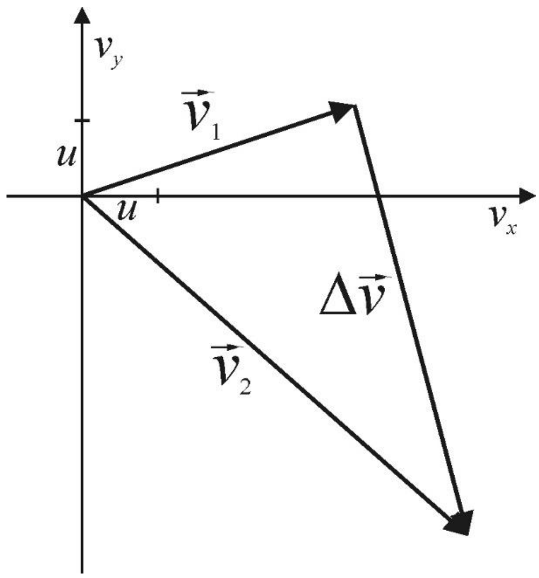


Capita sovente di trovare comunque sul grafico delle posizioni (la rappresentazione dello spazio fisico reale) anche i vettori velocità (vedremo più in avanti che anche i vettori accelerazione troveranno spazio sul grafico delle posizioni).

Di solito si posiziona il vettore velocità ad un certo istante con la sua "coda" in corrispondenza della posizione in quell'istante (vedi disegno a lato).

Evidentemente vettori velocità e vettori posizione non potranno essere paragonati uno con l'altro e tanto meno sommati assieme, essi rappresentano grandezze fisiche diverse (potremmo dire che i vettori velocità occupano abusivamente uno spazio riservato alle posizioni). (Si tenga comunque presente che una volta scelta la lunghezza di un vettore velocità, la stessa scala andrà applicata a tutte le velocità presenti sul disegno.)

Paragonabili sono però le direzioni dei due vettori. Infatti un corpo che si muove verso l'alto ha una velocità nella stessa direzione. Interessante è osservare come questo fatto si evidenzia nella rappresentazione grafica: il vettore velocità è **tangente** alla traiettoria nel punto corrispondente alla posizione. Questo fatto è d'altronde ricavabile della definizione stessa di velocità (istantanea). Dato che abbiamo definito il vettore velocità media come rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo e che la velocità istantanea è la velocità media con un Δt tendente a zero, in questa situazione il vettore spostamento si riduce ad un pezzettino piccolissimo e di fatto rettilineo (in matematica verrà detto infinitesimo) di traiettoria. Il vettore velocità sarà pertanto parallelo a questo piccolissimo pezzettino di traiettoria e pertanto parallelo e quindi tangente alla traiettoria stessa nel punto di contatto.



Una rappresentazione corretta dei vettori velocità andrebbe fatta in uno spazio a loro riservato. Il disegno a lato mostra appunto le due velocità del grafico precedente inserite in un grafico delle velocità, sull'asse delle ascisse la componente v_x e su quello delle ordinate la componente v_y.

La rappresentazione grafica delle velocità nel loro spazio vettoriale permette di visualizzare al meglio il concetto di variazione di velocità (vettoriale) $\Delta\vec{v}$ e di capire come determinarla matematicamente:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x2} - v_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{pmatrix}.$$

Immediato a questo punto è pure il concetto di accelerazione media (vettoriale) pari a:

$$\vec{a}_{12} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12x} \\ a_{12y} \end{pmatrix},$$

e, se necessario, quello di accelerazione (vettoriale) istantanea.