Moto a due (o tre) dimensioni

In questo capitolo tratteremo alcuni moti che avvengono a due dimensioni, vale a dire parleremo di moti la cui traiettoria (definiremo il concetto di traiettoria nel corso della trattazione) non è più semplicemente una retta.

Per poter fare questo in modo efficace occorre estendere il concetto di grandezza vettoriale, che fino ad ora avevamo esclusivamente usato quando parlavamo di forze, alle tre grandezze cinematiche che abbiamo già incontrato nel coso di prima: la posizione, la velocità e l'accelerazione.

Il primo concetto che dobbiamo definire, o meglio ampliare a 2 (o 3) dimensioni, è quello di sistema di riferimento. Dato che tutti i moti che incontreremo durante il corso, pur avvenendo in uno spazio tridimensionale, possono sempre essere ricondotti a moti che avvengono a due dimensioni, ci accontentiamo di definire un sistema di riferimento a due dimensioni.

sistema di riferimento a due dimensioni

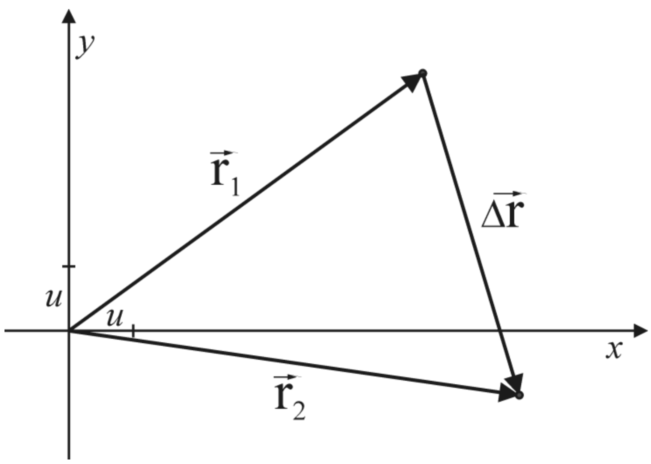
Come abbiamo già avuto modo di esaminare nel capitolo 3 (cinematica) e più precisamente nel capitolo 3.1, per costruire un sistema di riferimento occorrono:

- la direzione, nel nostro caso le direzioni,
- per ognuna di esse occorre un verso,
- un punto di riferimento o origine,
- e l'unita di misura.

Il più comune sistema di riferimento a due dimensioni è quello ortonormato, vale a dire che le due direzioni sono ortogonali (formano cioè un angolo retto fra di loro) e hanno la stessa unità di misura (oltre ad avere evidentemente la stessa origine).

In un sistema di riferimento a due dimensioni la posizione è determinata da un vettore indicato solitamente con $\vec{r}$. Come per le forze, il vettore posizione può essere scomposto nelle sue componenti e perciò:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Se un corpo passa dalla posizione $\vec{r}_1$ a una posizione $\vec{r}_2$ si può affermare che per il corpo c'è stato un cambiamento di posizione pari a $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Usando le componenti si può scrivere:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Utilizzando i valori ricavabili dal disegno a lato si può calcolare:

$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5,5u \\ 4u \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 7u \\ -1u \end{pmatrix}$, quindi: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 7u \\ -1u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5,5u \\ 4u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7u - 5,5u \\ -1u - 4u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5u \\ -5u \end{pmatrix}$.

A due dimensioni la distanza, che a una sola dimensione era banalmente il cambiamento di posizione privato del suo segno (il valore assoluto), si calcola con il teorema di Pitagora, vale a dire:

$$d = \|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

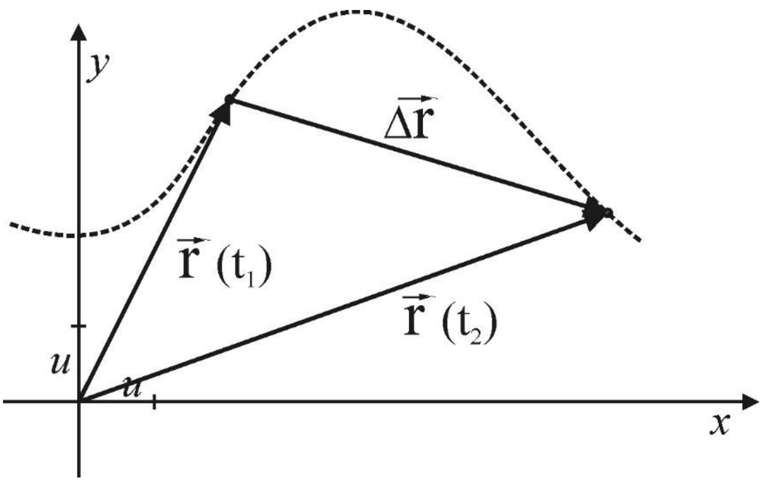
Movimento a due dimensioni

Cominciamo con il definire il concetto di traiettoria.

Fino ad ora tutti i movimenti studiati (o almeno quelli studiati in dettaglio) avvenivano lungo una retta. Possiamo dire pertanto che la traiettoria di quei movimenti era rettilinea o meglio ancora che la traiettoria era un segmento di retta. Altri moti, pur non avvenendo lungo una retta come ad esempio quando si risolvevano problemi di auto lungo una autostrada oppure di treni, venivano ricondotti a movimenti rettilinei trascurando tutte le curve. In altri casi, ad esempio quando si parlava del moto di un pendolo o ancora quando affrontavamo problemi di carrelli di un ottovolante, ci soffermavamo solo su questioni legate alla loro energia. Ebbene tutti questi moti non avvenivano lungo una retta; ad esempio nel caso del pendolo la traiettoria consisteva in un arco di circonferenza. Più in generale la **traiettoria** è un insieme di punti del piano o dello spazio corrispondenti alle posizioni del corpo in moto in istanti di tempo successivi. Evidentemente questa definizione si adatta perfettamente anche nel caso di una traiettoria rettilinea.

Dalla definizione di traiettoria risulta evidente che se vogliamo descrivere il moto di un corpo è sufficiente conoscere la posizione di questo ad ogni istante. Fino a questo punto sembra essere esattamente quanto studiato nel capitolo cinematica; la differenza fondamentale sta nel fatto che la posizione ora è descritta non più semplicemente dalla funzione $x(t)$ (ad esempio[1] $x(t)=4,2\,km+45\frac{km}{h}\cdot t$), ma da un vettore posizione le cui componenti x e y (eventualmente z) variano nel tempo. Quindi a due dimensioni la posizione del corpo sarà descritta da:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$



I vettori $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}(t_2)$ definiscono le posizioni del corpo agli istanti t_1 e t_2. La linea tratteggiata è la traiettoria e, come da definizione, rappresenta i punti del piano xy in cui transita il corpo in esame.

Due importanti osservazioni.

In primo luogo occorre evidenziare la differenza concettuale fra questa rappresentazione grafica e quelle alle quali eravamo abituati fino ad ora. La rappresentazione grafica fino ad ora utilizzata era sempre del tipo posizione in funzione del tempo con il tempo in ascissa e la posizione in ordinata. Sul grafico ogni coppia di dati indicava una posizione e il relativo istante. Il grafico in esame è invece una rappresentazione dello spazio (nel nostro caso piano) fisico reale in cui ogni punto dello "spazio" è definito da una coordinata x e una coordinata y. Il tempo non è più rappresentato (nel caso specifico del grafico in esame gli unici due istanti noti sono t_1 e t_2).

In secondo luogo è importante rendersi subito conto che conoscere la traiettoria del moto di un corpo non significa conoscerne il moto in tutta la sua completezza. Sapere che un corpo si muove lungo una circonferenza e di questa avere la descrizione completa non significa sapere dove il corpo si troverà ad un preciso istante. Tutto quello che si sa è che prima o poi passerà per quel o quell'altro punto della circonferenza in esame. A volte questa conoscenza è sufficiente per risolvere un determinato problema. Ad esempio per sapere se un pallone da pallacanestro entrerà o meno nel cesto non ha importanza sapere quando la sua posizione coincide con quella del canestro, è sufficiente sapere che la posizione del canestro è un punto della traiettoria.

[1] In realtà anche il moto a una dimensione è descrivibile con i vettori, esattamente come quello a 2 o 3 dimensioni. Semplicemente la componente y (e z se del caso) rimane costante e quindi è sufficiente conoscere unicamente la componente x.

Immediata a questo punto è la definizione di velocità media. Come nel caso a una dimensione si definisce **velocità media** il rapporto fra il cambiamento di posizione e il corrispondente intervallo di tempo vale a dire:

$$\vec{v}_{12} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} .$$

Domanda immediata: come si fa a dividere un vettore, in questo caso $\Delta \vec{r}$, con uno scalare, Δt ?

A matematica avete imparato o imparerete che dividere o moltiplicare un vettore con uno scalare è una operazione molto semplice: basta dividere o moltiplicare ciascuna componente del vettore con lo scalare.

Facciamo un esempio: dall'origine del sistema di riferimento mi sposto di $5m$ lungo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con un cateto (la base) lungo $4m$ e parallelo all'asse x e l'altro cateto (l'altezza) lungo $3m$ e parallelo all'asse y (i due cateti altro non sono che le componenti x e y del vettore spostamento). Spostandomi di altri $5m$ nella stessa direzione e verso, raddoppiando cioè lo spostamento vale a dire moltiplicando lo spostamento per 2 , mi ritrovo all'estremità dell'ipotenusa lunga $10m$ di un triangolo rettangolo con base $8m$ e altezza $6m$, vale a dire che ho moltiplicato per 2 pure le componenti x e y del vettore che rappresenta uno spostamento doppio. Analogamente se avessi deciso di dimezzare lo spostamento avrei diviso per 2 anche le sue componenti x e y .

In questo esempio ci siamo limitati a dividere o moltiplicare un vettore che rappresenta uno spostamento o una posizione per un numero, ottenendo così nuovamente uno spostamento o una posizione, ciascuna componente misurata in metri è stata moltiplicata o divisa per un numero ottenendo ancora una misura in metri. Avessimo operato in modo analogo su dei vettori forza, vettori che abbiamo già incontrato durante il capitolo 4, avremmo ottenuto ancora dei vettori che rappresentano una forza.

Nel caso delle velocità la divisione di un vettore (il vettore spostamento le cui componenti hanno unità di misura della lunghezza, vale a dire metri) con uno scalare (l'intervallo di tempo misurato in secondi) porta ad un nuovo vettore le cui componenti avranno unità di misura pari a metri su secondi, cioè le unità di misura della velocità, come d'altro canto ci saremmo aspettati dato che il nuovo vettore rappresenta appunto una velocità media, una velocità media vettoriale.

La velocità media e quindi la velocità in generale è pertanto una grandezza vettoriale.

La velocità media $\vec{v}_{12}$ fra l'istante t_1 e l'istante t_2 , con $t_2 - t_1 = \Delta t$, è perciò pari a:

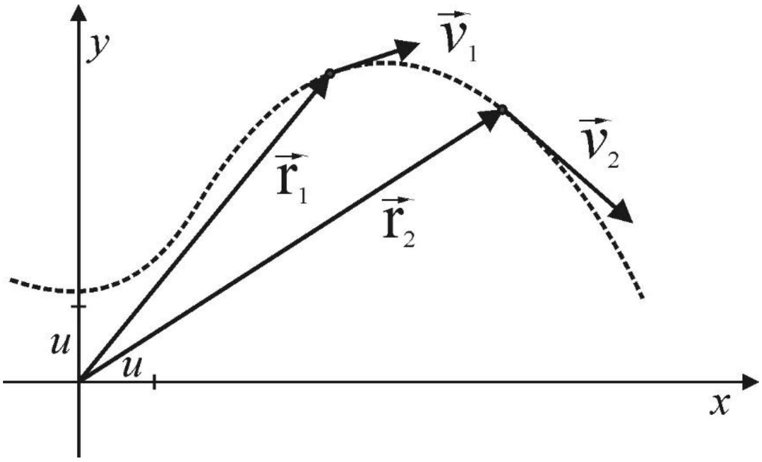
$$\vec{v}_{12} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{12x} \\ v_{12y} \end{pmatrix},$$

dove v_{12x} e v_{12y} sono le componenti x e y del vettore velocità media $\vec{v}_{12}$.

Per passare dalla velocità media a quella **istantanea** si deve procedere esattamente come già visto e studiato durante il corso di prima al capitolo cinematica e più precisamente si veda il capitolo 3.3.2. Si deve calcolare una velocità media per un intervallo di tempo piccolo a piacimento. Evidentemente anche la velocità istantanea è una grandezza vettoriale. Come rappresentare questo vettore e quali caratteristiche possiede?

Il grafico disegnato nella pagina precedente è la rappresentazione dello spazio fisico reale. I vettori rappresentano una posizione o descrivono uno spostamento. Le componenti hanno come unità di misura il metro (o qualsiasi altra unità di misura della lunghezza). (È possibile determinare la lunghezza del vettore o delle sue componenti misurandole direttamente sul grafico, basta prestare attenzione all'unità di misura presente sugli assi).

Il vettore velocità media o istantanea (che d'ora in avanti sarà semplicemente chiamata velocità) è di conseguenza un vettore diverso dal vettore posizione o spostamento. A rigor di logica non può e non dovrebbe essere rappresentato sullo stesso grafico delle posizioni.

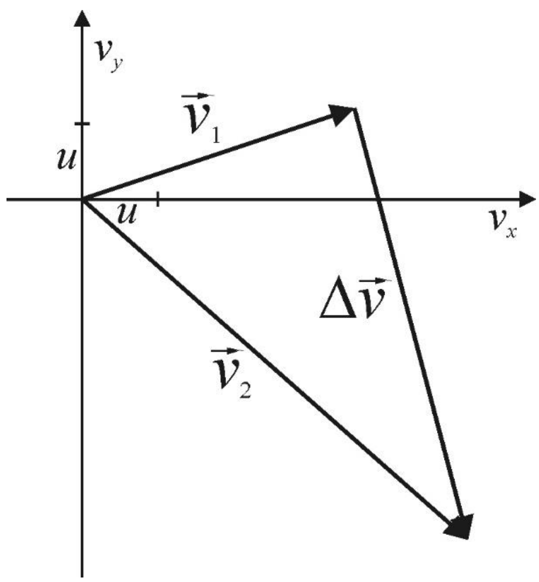


Capita sovente di trovare comunque sul grafico delle posizioni (la rappresentazione dello spazio fisico reale) anche i vettori velocità (vedremo più in avanti che anche i vettori accelerazione troveranno spazio sul grafico delle posizioni).

Di solito si posiziona il vettore velocità ad un certo istante con la sua "coda" in corrispondenza della posizione in quell'istante (vedi disegno a lato).

Evidentemente vettori velocità e vettori posizione non potranno essere paragonati uno con l'altro e tanto meno sommati assieme, essi rappresentano grandezze fisiche diverse (potremmo dire che i vettori velocità occupano abusivamente uno spazio riservato alle posizioni). (Si tenga comunque presente che una volta scelta la lunghezza di un vettore velocità, la stessa scala andrà applicata a tutte le velocità presenti sul disegno.)

Paragonabili sono però le direzioni dei due vettori. Infatti un corpo che si muove verso l'alto ha una velocità nella stessa direzione. Interessante è osservare come questo fatto si evidenzia nella rappresentazione grafica: il vettore velocità è **tangente** alla traiettoria nel punto corrispondente alla posizione. Questo fatto è d'altronde ricavabile della definizione stessa di velocità (istantanea). Dato che abbiamo definito il vettore velocità media come rapporto fra lo spostamento e l'intervallo di tempo e che la velocità istantanea è la velocità media con un Δt tendente a zero, in questa situazione il vettore spostamento si riduce ad un pezzettino piccolissimo e di fatto rettilineo (in matematica verrà detto infinitesimo) di traiettoria. Il vettore velocità sarà pertanto parallelo a questo piccolissimo pezzettino di traiettoria e pertanto parallelo e quindi tangente alla traiettoria stessa nel punto di contatto.



Una rappresentazione corretta dei vettori velocità andrebbe fatta in uno spazio a loro riservato. Il disegno a lato mostra appunto le due velocità del grafico precedente inserite in un grafico delle velocità, sull'asse delle ascisse la componente v_x e su quello delle ordinate la componente v_y.

La rappresentazione grafica delle velocità nel loro spazio vettoriale permette di visualizzare al meglio il concetto di variazione di velocità (vettoriale) $\Delta\vec{v}$ e di capire come determinarla matematicamente:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x2} - v_{x1} \\ v_{y2} - v_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \end{pmatrix}.$$

Immediato a questo punto è pure il concetto di accelerazione media (vettoriale) pari a:

$$\vec{a}_{12} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12x} \\ a_{12y} \end{pmatrix},$$

e, se necessario, quello di accelerazione (vettoriale) istantanea.

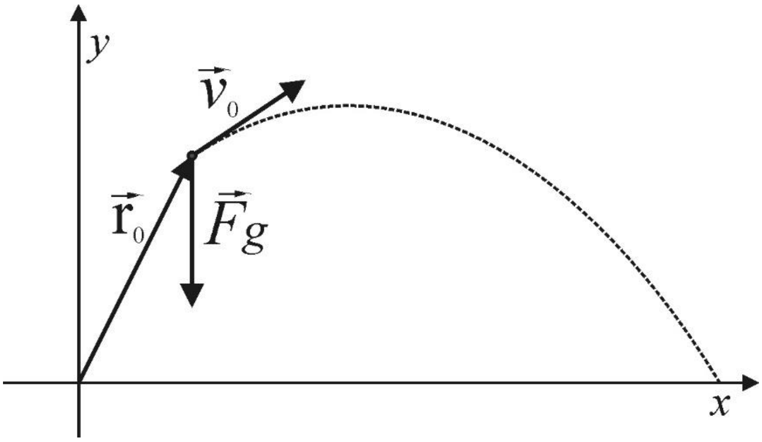
Moto parabolico

Il primo movimento a due dimensioni che studieremo è quello di un corpo lanciato in prossimità della superficie terrestre in presenza della sola forza peso. Trascuriamo l'attrito dell'aria, che sappiamo essere comunque presente, per facilitarci il compito di descrizione del moto. La presenza della forza di attrito, che dipende dalla velocità, implicherebbe la presenza di una seconda forza in continua evoluzione sia come intensità che direzione. Ritorneremo almeno qualitativamente su questo aspetto solo alla fine del paragrafo.

Prendiamo ad esempio una biglia, una pallina, un gesso e lanciamoli.

Come si muovono dopo aver lasciato la nostra mano?

Cominciamo ad osservare quali sono le condizioni di partenza del movimento: abbiamo un corpo di massa m in una posizione iniziale $\vec{r}_0$ avente velocità iniziale $\vec{v}_0$ (quella che gli abbiamo impresso noi). Evidentemente la sola forza presente a partire da quel momento è quella di gravità che sappiamo essere costante e diretta verso il basso.



Nel disegno a lato è schematizzata la situazione. Sono disegnati i vettori che rappresentano le condizioni di partenza e la traiettoria del movimento.

Dal punto di vista vettoriale il peso di un corpo può essere scritto in questo modo:

$$\vec{F}g = \begin{pmatrix} Fg_x \\ Fg_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Fg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}.$$

Secondo la legge di Newton è facilmente determinabile l'accelerazione, infatti:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}ris = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}g = \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \vec{g}\ .$$

Come si può osservare l'accelerazione possiede solo la componente verticale (y).

L'ultima osservazione ci permette di affermare che solo la componente y della velocità subirà modifiche durante il moto mentre la componente x della velocità rimarrà invariata. Della velocità noi conosciamo il valore iniziale $\vec{v}_0$ che scritto nella sua forma vettoriale esplicita diventa:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}.$$

Se la componente x della velocità non cambia si deduce che il movimento in x deve essere un moto uniforme con:

$v_x(t) = v_{0x}$ e

$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0)$

essendo x_0 la componente x di $\vec{r}_0$.

Nella componente y il moto è quello ottenuto con una accelerazione costante e pertanto:

$a_y = -g$,

$v_y(t) = v_{0y} + (-g) \cdot (t - t_0) = v_{0y} - g \cdot (t - t_0)$ e finalmente

$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}(-g) \cdot (t - t_0)^2 = y_0 + v_{0y} \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g \cdot (t - t_0)^2$.

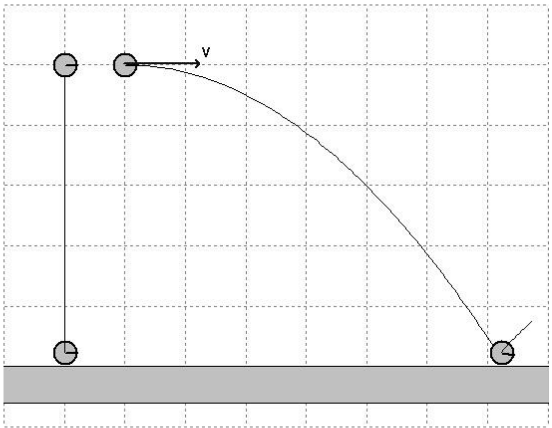
Ponendo per semplicità $t_0 = 0$ si possono riassumere le tre grandezze cinematiche del moto in esame nella forma vettoriale in questo modo:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \vec{g},$$

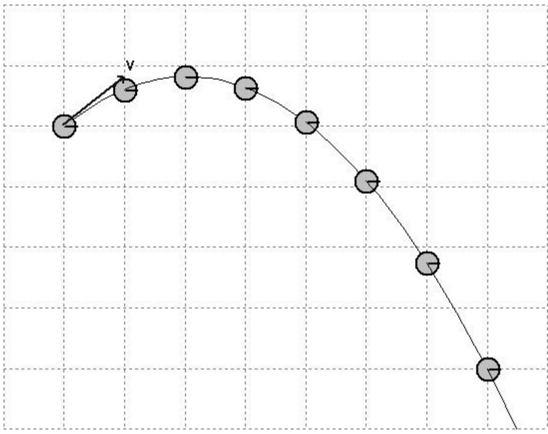
$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} - g \cdot t \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix}.$$

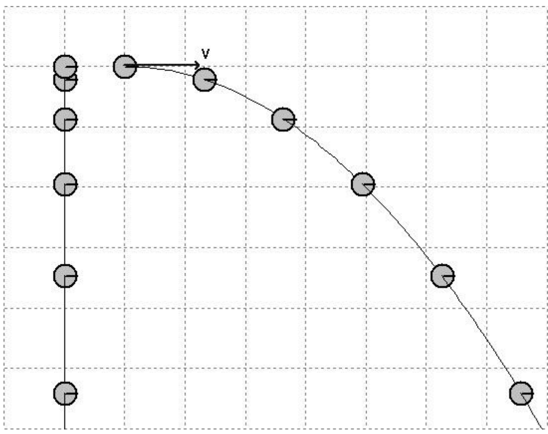
Sperimentalmente si può osservare che quanto ricavato dalla legge di Newton e dalle relazioni fra le grandezze cinematiche è verificabile.



Ad esempio una prima verifica che il moto in orizzontale è indipendente da quello verticale è la seguente: si lancia orizzontalmente una biglia con velocità v_0 da una certa altezza e contemporaneamente si lascia cadere dalla stessa altezza una seconda biglia (la velocità iniziale di quest'ultima è pari a zero). Esse toccano il pavimento contemporaneamente ed indipendentemente dalla velocità iniziale della prima biglia. Il disegno a lato mostra la simulazione dell'esperimento eseguita con il programma "Interactive Physics".



Facilmente verificabile è pure il fatto che il moto in orizzontale sia a velocità costante. È sufficiente filmare il movimento di un corpo lanciato con una certa velocità iniziale e da una certa posizione, sovrapporre i vari fotogrammi a formare una sola immagine con una opportuna scelta di intervalli di tempo fra un fotogramma e l'altro. La simulazione a lato mostra appunto quanto appena descritto. Come si può notare lo spostamento lungo l'asse orizzontale avviene a velocità costante, la distanza orizzontale fra l'immagine dell'oggetto e la successiva vale esattamente un quadretto nella scala scelta.



Un'ulteriore verifica consiste nell'osservare che il moto in verticale è un moto uniformemente accelerato (non sarebbe necessario in quanto già nel primo esperimento il fatto che le due biglie toccano contemporaneamente il suolo mostra che il moto in verticale della biglia avente inizialmente velocità orizzontale è identico al moto dell'altra biglia che parte da ferma). Facciamolo ugualmente. Ripetiamo il primo esperimento e filmiamolo. Come si può notare la posizione verticale della biglia lanciata orizzontalmente è, ogni volta che è stata filmata, la stessa di quella lasciata cadere che notoriamente cade in caduta libera, cioè il suo moto e uniformemente accelerato.

Facciamo un esempio con dei dati numerici: da un'altezza di $1,37\,m$ lanciamo un gessetto con velocità $\vec{v}_0$ le cui componenti valgono $v_{0x} = 4,25\,\frac{m}{s}$ rispettivamente $v_{0y} = 5,88\,\frac{m}{s}$. La posizione del gessetto al variare del tempo è descritta dal vettore $\vec{r}(t)$, vale a dire:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0,0\,m + 4,25\,\frac{m}{s} \cdot t \\ 1,37\,m + 5,88\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{pmatrix}.$$

Possiamo a questo punto rispondere a parecchie domande. Ad esempio: dove si trova il gessetto dopo $0,4\,s$? Risposta:

$$\vec{r}(0,4\,s) = \begin{pmatrix} 0,0\,m + 4,25\,\frac{m}{s} \cdot 0,4\,s \\ 1,37\,m + 5,88\,\frac{m}{s} \cdot 0,4\,s - \frac{1}{2} 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot (0,4\,s)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,70\,m \\ 2,94\,m \end{pmatrix},$$

vale a dire che si trova a $1,70\,m$ di distanza lungo l'asse orizzontale dal punto di lancio e a $2,94\,m$ dal pavimento, il punto zero dell'asse verticale.

Altra domanda: a che distanza dal punto di lancio il gesso passa per quota $2,35\,m$?

Per rispondere a questa domanda è importante ricordarsi che il movimento in verticale è indipendente da quello in orizzontale e cominciare a rispondere alla domanda quando passa per quota $2,35\,m$, e cioè risolvere la seguente equazione in t:

$$2,35\,m = 1,37\,m + 5,88\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 .$$

Le soluzioni a questa equazione sono evidentemente due: $t_1 = 0,2\,s$ e $t_2 = 1,0\,s$, entrambe accettabili per il nostro problema. Esistono perciò due posizioni lungo l'asse x alle quali il gessetto passa per quota $2,35\,m$, cioè:

$x(0,2\,s) = 0,85\,m$ e $x(1,0\,s) = 4,25\,m$.

Alla domanda dove tocca il pavimento si risponde allo stesso modo risolvendo l'equazione:

$$0,0\,m = 1,37\,m + 5,88\,\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2} 9,8\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 .$$

Anche in questo caso le soluzioni dell'equazione sono due: $t_1 = -0,2\,s$ e $t_2 = 1,4\,s$. Solo la seconda soluzione è accettabile (la legge oraria che descrive il moto è vera solo dopo che il gessetto ha lasciato la mia mano, cioè per $t > 0\,s$). Il gessetto tocca il pavimento in $x(1,4\,s) = 5,95\,m$.

Che tipo di traiettoria è associato a questo tipo di moto? cioè è possibile trovare una funzione che descriva la forma della traiettoria nel piano xy ?

Il titolo stesso del paragrafo ci dovrebbe suggerire che il tipo di traiettoria è una parabola. Analizzando la legge oraria delle componenti x e y del moto lo si può facilmente dimostrare.

Cominciamo con un ragionamento qualitativo. Il movimento in x è un movimento a velocità costante. Questo significa che la componente x della posizione varia linearmente con il tempo. La variazione del tempo e della posizione sono tra loro direttamente proporzionali. Il movimento nella componente y è d'altro canto una funzione di secondo grado (è presente un termine t^2). A questo punto è facilmente intuibile che sostituendo la variazione di posizione $(x - x_0)$ nella legge oraria della componente y al posto della variazione del tempo si otterrà per la componente y una funzione quadratica in x.

Algebricamente il ragionamento precedente diventa:

da $x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot (t - t_0)$ si ricava: $(t - t_0) = \dfrac{x(t) - x_0}{v_{0x}}$.

Sostituendo $\left(t-t_0\right)$ con $\dfrac{x-x_0}{v_{0x}}$ nella legge oraria della componente y si ottiene:

$$y\left(x\right)=y_0+v_{0y}\cdot\frac{x-x_0}{v_{0x}}+\tfrac{1}{2}\left(-g\right)\cdot\left(\frac{x-x_0}{v_{0x}}\right)^2,$$ che generalmente viene scritta nel seguente modo:

$$y\left(x\right)=y_0+\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\cdot\left(x-x_0\right)-\tfrac{1}{2}g\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^2}{v_{0x}^2}.$$

Nell'esempio numerico visto alla pagina precedente alcune domande possono essere affrontate senza ricorrere alla legge oraria ma semplicemente con la conoscenza della traiettoria.

Per esempio, alla domanda: a che distanza dal punto di lancio il gesso passa per quota $2{,}35\,m$? se non viene richiesto di conoscere il quando, si può scrivere:

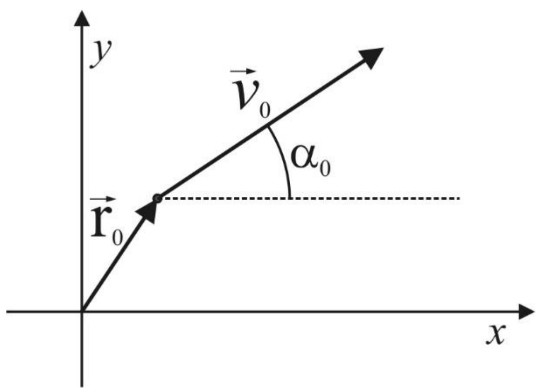
$$y\left(x\right)=1{,}37\,m+\frac{4{,}25\,\frac{m}{s}}{5{,}88\,\frac{m}{s}}\cdot\left(x-0{,}0\,m\right)-\tfrac{1}{2}9{,}8\,\tfrac{m}{s^2}\cdot\frac{\left(x-0{,}0\,m\right)^2}{\left(5{,}88\,\frac{m}{s}\right)^2},$$

porre $y\left(x\right)=2{,}35\,m$ e risolvere rispetto a x.

Anche in questo caso abbiamo una equazione di secondo grado con due soluzioni:
$x_1=0{,}85\,m$ e $x_2=4{,}25\,m$, entrambe accettabili.

Capita spesso che la velocità iniziale $\vec{v}_0$ sia conosciuta non tramite le sue componenti x e y, bensì a partire dal suo valore in assoluto e dalla direzione e verso, questi ultimi dati ricavati tramite l'angolo misurato rispetto all'orizzonte spesso chiamato anche alzo. In altre parole si passa da:

$$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}v_{0x}\\v_{0y}\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad\vec{v}_0=\left(v_0;\alpha_0\right)$$



Con l'aiuto della trigonometria si possono in ogni caso calcolare le componenti, infatti:

$$\vec{v}_0=\begin{pmatrix}v_{0x}\\v_{0y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_0\cdot\cos\left(\alpha_0\right)\\v_0\cdot\sin\left(\alpha_0\right)\end{pmatrix}=v_0\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\alpha_0\right)\\\sin\left(\alpha_0\right)\end{pmatrix}.$$

La legge oraria diventa allora:

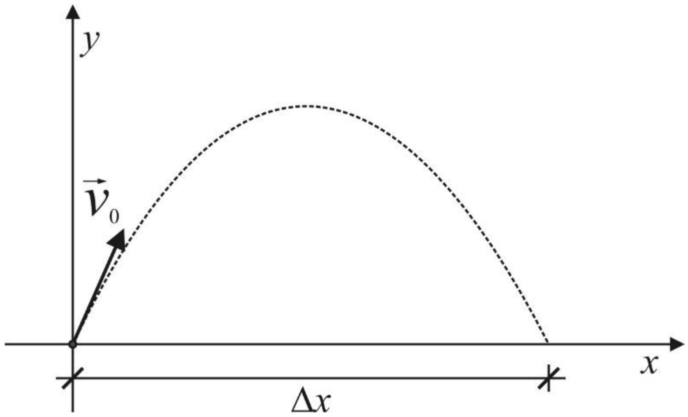
$$\vec{r}\left(t\right)=\begin{pmatrix}x\left(t\right)\\y\left(t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+v_0\cdot\cos\left(\alpha_0\right)\cdot t\\y_0+v_0\cdot\sin\left(\alpha_0\right)\cdot t-\tfrac{1}{2}g\cdot t^2\end{pmatrix},$$

e la traiettoria:

$$y\left(x\right)=y_0+\frac{v_0\cdot\sin\left(\alpha_0\right)}{v_0\cdot\cos\left(\alpha_0\right)}\cdot\left(x-x_0\right)-\tfrac{1}{2}g\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^2}{v_0^2\cdot\cos^2\left(\alpha_0\right)}=y_0+\tan\left(\alpha_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)-\tfrac{1}{2}g\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^2}{v_0^2\cdot\cos^2\left(\alpha_0\right)}.$$

Un caso particolare si ha quando il punto di arrivo si trova alla stessa quota del punto di partenza. In questo caso la distanza percorsa in x prende il nome di **gittata**. Per determinare quanto vale è sufficiente risolvere $y\left(x\right)=y_0$. L'equazione diventa:

$$y_0=y_0+\tan\left(\alpha_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)-\tfrac{1}{2}g\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^2}{v_0^2\cdot\cos^2\left(\alpha_0\right)},$$



cioè:

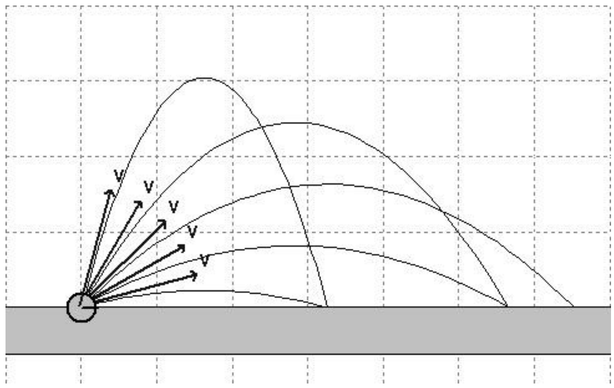
$$0=\tan\left(\alpha_0\right)\cdot\left(x-x_0\right)-\tfrac{1}{2}\,g\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^2}{v_0^2\cdot\cos^2\left(\alpha_0\right)}.$$

Risolvendo rispetto a $\left(x-x_0\right)=\Delta x$ si ottiene:

$$\Delta x=\frac{2\cdot\sin\left(\alpha_0\right)\cdot\cos\left(\alpha_0\right)\cdot v_0^2}{g}=\frac{v_0^2}{g}\sin\left(2\cdot\alpha_0\right).$$

La gittata dipende da v_0, α_0 e naturalmente da g.

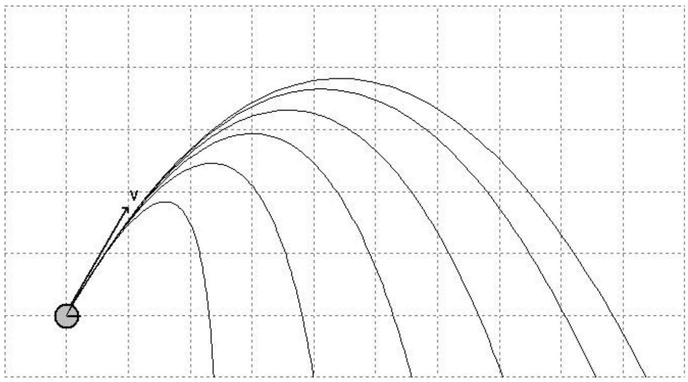
La gittata aumenta all'aumentare della velocità iniziale ed è massima con un angolo iniziale paria a $\alpha_0=45°$. Quest'ultimo aspetto è deducibile dall'analisi della funzione seno che è massima e vale 1 quando l'angolo è $90°$. Perciò: $\sin\left(2\cdot\alpha_0\right)=0$ con $\alpha_0=45°$.



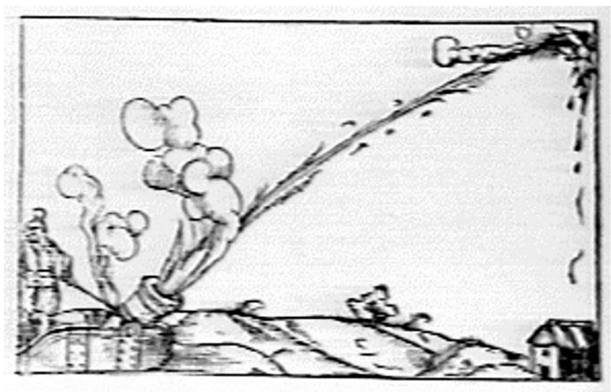
L'immagine a lato mostra la simulazione di un oggetto lanciato con la stessa velocità iniziale ma con angoli diversi i cui valori sono: $15°$, $30°$, $45°$, $60°$ e $75°$.

Interessante è osservare che angoli complementari danno la stessa gittata. Stessa gittata non significa stessa traiettoria e nemmeno stesso intervallo di tempo tra l'istante di partenza e quello di arrivo.

All'inizio del capitolo avevamo trascurato l'attrito dell'aria per semplificare la trattazione del problema. Non è compito di questo corso entrare nei dettagli del problema in quanto la trattazione matematica va ben al di là di quanto possa essere richiesto ad allievi di seconda. Il disegno a lato mostra qualitativamente cosa capita al moto di un corpo quando, oltre alla gravità, è presente anche la forza di attrito. Nella simulazione viene mostrato cosa succede quando la forza di attrito diventa via via più grande in rapporto all'inerzia e al peso del corpo.



La traiettoria da parabolica (nel disegno quella più in alto) diventa man mano sempre più asimmetrica fino a diventare quasi rettilinea nel primo tratto è poi verticale. Questo fatto, ben osservabile con oggetti leggeri (ad esempio una pallina da ping-pong) e lanciati con velocità inizialmente importanti, ha sicuramente contribuito a sostenere la teoria dell'impetus.



Questa illustrazione mostra l'opinione generale, anteriore a Galileo, dovuta ad Aristotele, che ipotizzava la teoria dell'*impetus*: cioè che un oggetto, come una palla di cannone, segue una linea retta fino a che non perde il suo *impetus* e poi cade a terra verticalmente.

Moto circolare (uniforme)

Il secondo movimento di cui vogliamo occuparci è il moto la cui traiettoria risulta essere una circonferenza.

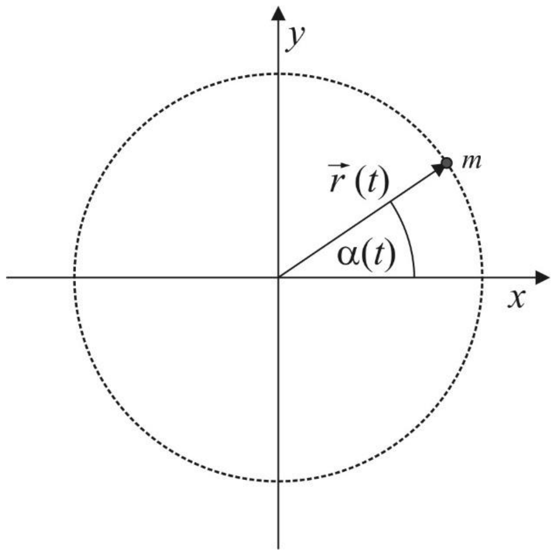
Molti sono le situazioni nelle quali questo moto si ottiene; qualsiasi corpo che ruota attorno ad un perno fisso genera un moto circolare. Come nel caso del moto parabolico occorre conoscere la legge oraria vale a dire $\vec{r}(t)$.

Se nel caso del moto parabolico la scelta dell'origine del sistema di riferimento non aveva grande importanza (porre l'inizio del movimento nell'origine significa semplicemente che $\vec{r}_0 = 0$, la legge oraria non cambia nella sua forma). Una scelta oculata dell'origine del sistema di riferimento nel caso del moto circolare semplifica decisamente la sua descrizione.

La circonferenza possiede una proprietà geometrica importante, quella per cui tutti i punti appartenenti ed essa si trovano alla stessa distanza dal centro. Scegliere allora il centro della circonferenza come origine del sistema di riferimento ci assicura che il valore assoluto di $\vec{r}(t)$ è costante cioè: $\left\|\vec{r}(t)\right\| = r = \text{costante}$. Per questo motivo fisseremo il centro della circonferenza all'origine del sistema di riferimento.

Inizieremo con il descrivere il movimento non a partire dalle componenti $x(t)$ e $y(t)$ ma utilizzeremo la lunghezza del vettore e l'angolo rispetto all'asse x, vale a dire:

invece di $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ utilizzeremo $\vec{r}(t) = \left(r(t);\alpha(t)\right)$



che nel caso del moto circolare diventa:

$\vec{r}(t) = \left(r;\alpha(t)\right)$.

Questo significa che per descrivere il moto è sufficiente conoscere il raggio della circonferenza e come l'angolo cambia al variare del tempo.

Diventa a questo punto importante definire una nuova grandezza: la **velocità angolare**, vale a dire la rapidità con la quale l'angolo varia. In primo luogo occorre ricordare che, come a matematica, normalmente si sceglie come variazione positiva dell'angolo una variazione che avviene in senso antiorario.

Cominciamo con il definire la velocità angolare media e cioè:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}.$$

L'unità di misura della velocità angolare è:

$$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]} = \frac{rad}{s} = \frac{1}{s}$$, dato che il radiante è privo di unità di misura.

Nel caso che stiamo trattando, cioè quello del moto circolare uniforme, la velocità angolare è costante ed è evidentemente pari alla velocità angolare media. Perciò:

$\Delta\alpha = \omega \cdot \Delta t$ cioè $\alpha(t) - \alpha_0 = \omega \cdot (t - t_0)$ e quindi $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega \cdot (t - t_0)$.

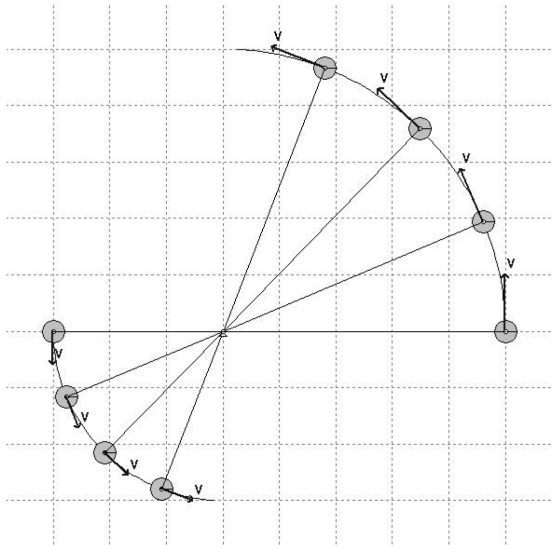
Noterete la somiglianza fra questa legge oraria e quella della posizione nel caso del moto lineare e uniforme.

A questo punto conosciamo il raggio, che è costante, e la legge oraria per determinare l'angolo. Possiamo perciò calcolarci facilmente la posizione $\vec{r}(t)$:

$\vec{r}(t)=(r;\alpha(t))=(r;\alpha_0+\omega\cdot(t-t_0))$.

Con l'aiuto della trigonometria si ricava facilmente anche la posizione a partire dalle componenti $x(t)$ e $y(t)$. Per semplicità porremo $\alpha_0=0$ e $t_0=0$ così che abbiamo:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\alpha(t))\\r\cdot\sin(\alpha(t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cdot\cos(\omega\cdot t)\\r\cdot\sin(\omega\cdot t)\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}\cos(\omega\cdot t)\\\sin(\omega\cdot t)\end{pmatrix}.$$



Prossima grandezza cinematica da determinare è la velocità da non confondere con la velocità angolare.

Una analisi qualitativa, grazie alla simulazione, del movimento di due corpi in moto circolare uniforme aventi la stessa velocità angolare e raggio diverso ci permette fare le seguenti osservazioni: il vettore velocità è tangente alla traiettoria (ma questo era già stato discusso a livello generale quando si era definita la traiettoria), è costante in modulo (ma non in direzione e verso) e, a parità di velocità angolare, è maggiore nel caso di raggio più grande.

Determinare quantitativamente il vettore velocità a partire dalle relazioni fra $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ viste nel capito 7.2 non è così evidente.

Possiamo arrivarci in ogni caso prendendo una strada meno diretta ma decisamente più percorribile.

Cominciamo con il definire una nuova grandezza chiamata **periodo**, indicata con il simbolo T che rappresenta l'intervallo di tempo necessario per compiere un giro completo. Il modulo del vettore velocità è perciò determinabile semplicemente nel seguente modo: la velocità (in modulo) è pari al rapporto fra la lunghezza della circonferenza (il percorso corrispondente ad un giro completo) e il periodo, vale a dire:

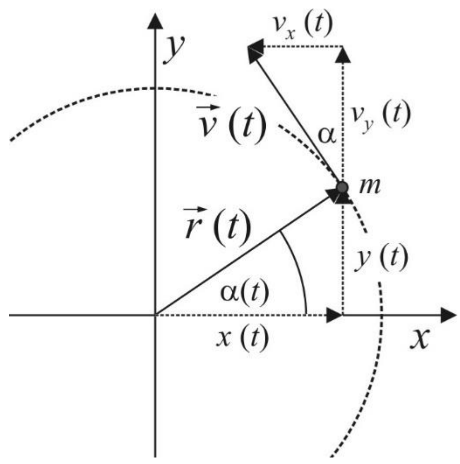
$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}.$$

La relazione fra il periodo T e la velocità angolare ω è presto calcolata. Nell'intervallo di tempo di un periodo il corpo ha compiuto un giro completo, vale a dire che la variazione angolare è stata di $360°$ o meglio di 2π, quindi:

$2\pi=\omega\cdot T$ da cui $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ e per finire $v=\dfrac{\cancel{2\pi}\cdot r}{\frac{\cancel{2\pi}}{\omega}}=r\cdot\omega$,

in perfetto accordo con le osservazioni qualitative di poc'anzi.

Che cosa dire ora di direzione e verso?



Il fatto che la velocità sia tangente alla traiettoria e che quest'ultima sia una circonferenza ci permette di affermare che il vettore posizione (raggio della circonferenza) e il vettore velocità siano perpendicolari fra di loro. I triangoli rettangoli costituiti dal vettore posizione e le sue componenti e il vettore velocità e le sue componenti sono simili e ruotati di $90°$. L'angolo α è adiacente alla componente x e opposto a quella y del triangolo costruito sul vettore posizione e le sue componenti mentre è adiacente alla componente v_y e opposto alla componente v_x del triangolo costruito sul vettore velocità.

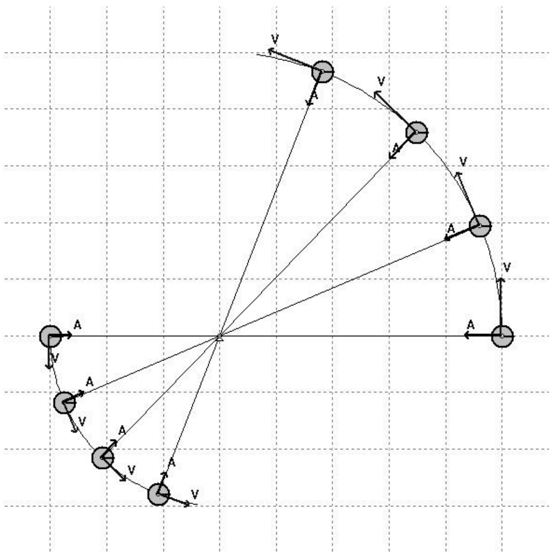
Con l'aiuto della trigonometria e tenendo presente che la componente v_x del vettore velocità e la componente x del vettore posizione hanno verso opposto si può finalmente scrivere;

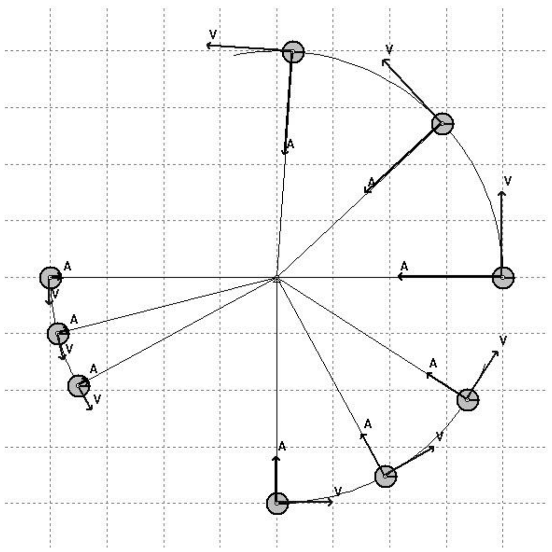
$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cdot\left(-\sin\left(\alpha(t)\right)\right) \\ v\cdot\cos\left(\alpha(t)\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cdot\omega\cdot\left(-\sin(\omega\cdot t)\right) \\ r\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) \end{pmatrix}=r\cdot\omega\cdot\begin{pmatrix} -\sin(\omega\cdot t) \\ \cos(\omega\cdot t) \end{pmatrix}.$$

Cosa dire ora dell'accelerazione? Potrebbe essere nulla come nel caso del moto lineare uniforme? In fin dei conti la velocità rimane costante. Facciamo attenzione ad un fatto importantissimo, la velocità rimane costante solo in modulo e non in direzione e verso. Il vettore velocità è in continuo cambiamento. Il vettore cambiamento di velocità $\Delta\vec{v}$ è in generale un vettore diverso da zero e pertanto il vettore accelerazione media definito come:

$\vec{a}_{12}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ è un vettore pure diverso da zero.

Anche per l'accelerazione iniziamo con una analisi qualitativa. La simulazione mostra due situazioni. In un primo caso si prende in esame il moto di due corpi aventi la stessa velocità angolare ma raggio di rotazione diverso. Nel secondo esempio tre corpi hanno lo stesso raggio di rotazione ma il secondo gira con una velocità angolare doppia del primo e il terzo con velocità angolare tripla.





Quali informazioni possiamo ricavare da queste simulazioni?

In primo luogo osserviamo che in tutti i casi l'accelerazione è un vettore costante in modulo, parallelo al raggio di rotazione e diretto verso il centro.

Nel primo disegno, quello in cui la velocità angolare è la stessa per i due moti, si nota che la lunghezza del vettore accelerazione cresce in modo direttamente proporzionale con il raggio della circonferenza.

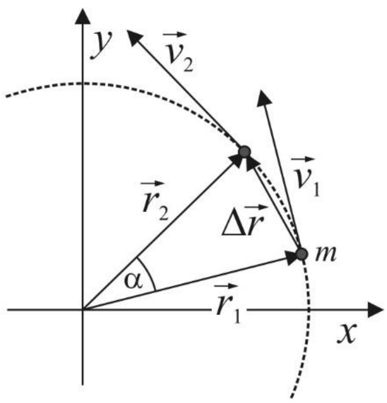
Nel secondo caso l'accelerazione cresce all'aumentare della velocità angolare e dal disegno si osserva come questo aumento sia più che proporzionale. La misura sull'immagine dei vettori accelerazione dà questi valori (unità di misura arbitraria espressa in quadretti):

$a_1=0,2=0,2\cdot 1$, $a_2=0,8=0,2\cdot 4$ e $a_3=1,8=0,2\cdot 9$.

Da queste osservazioni possiamo dedurre che l'accelerazione dipende in modo lineare dal raggio di rotazione e dal quadrato della velocità angolare. Quest'ultimo aspetto lo si deduce dal fatto che le tre accelerazioni sono in proporzione 1,4,9 tra di loro mentre le velocità lo sono in proporzione 1,2,3 .

Come per la velocità la via diretta per determinare il vettore accelerazione non è evidente.

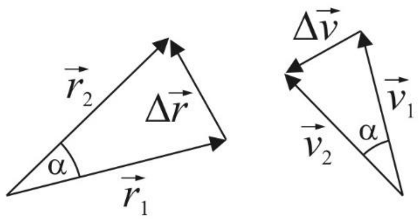
Faremo capo al seguente ragionamento.



Per definizione $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ quando Δt è un intervallo piccolo a piacimento. Inoltre da quanto abbiamo detto in precedenza il vettore $\vec{v}_2$ è perpendicolare a $\vec{r}_2$ e il vettore $\vec{v}_1$ è perpendicolare a $\vec{r}_1$. Questo significa che l'angolo fra i vettori $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_1$ è lo stesso che fra i vettori $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$.

Da ciò segue che il triangolo costruito con i vettori posizione e spostamento, e quello costruito con i vettori velocità e variazione di velocità sono isosceli e simili da cui: $\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$ e perciò, per quel che riguarda i moduli:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}\frac{\Delta v}{v} = \frac{v}{\Delta t}\frac{\Delta r}{r} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}.$$



Ma dato che, per valori molto piccoli di Δt, $\frac{\Delta r}{\Delta t} = v$ segue che

$$a = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r}v = \frac{v^2}{r}.$$

Per quel che riguarda la direzione e il verso dell'accelerazione appare evidente che per valori molto piccoli di Δt il vettore $\Delta\vec{v}$ è perpendicolare al vettore $\vec{v}$ che a sua volta è perpendicolare al vettore $\vec{r}$ e quindi il vettore $\vec{a}$ è antiparallelo (cioè parallelo ma di verso opposto) al vettore $\vec{r}$.

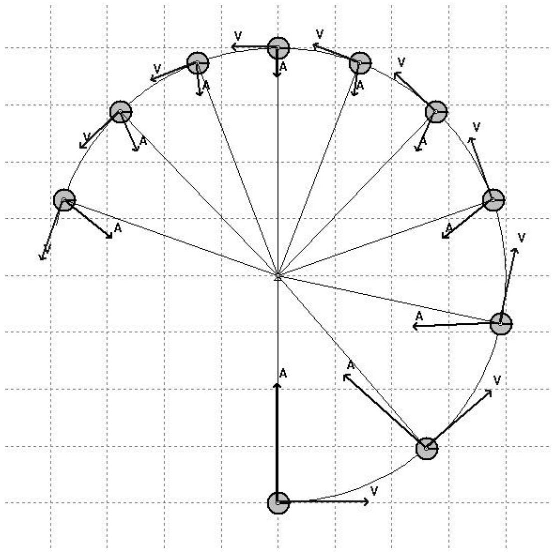
È inoltre possibile trovare altre relazioni interessanti per il modulo del vettore accelerazione, infatti:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{oppure ancora:} \quad a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

La relazione $a = \omega^2 \cdot r$ è in perfetto accordo con quanto "osservato" grazie alle simulazioni.

Il moto circolare (uniforme) è così frequente che all'accelerazione responsabile di questo moto viene dato il nome di **accelerazione centripeta**, cioè diretta verso il centro.

Finora abbiamo discusso solo di moto circolare uniforme.



Facessimo ruotare verticalmente un corpo legato ad una fune (se lo lanciamo dal basso dobbiamo conferirgli una velocità iniziale tale da permettere al corpo di compiere un giro completo) osserveremmo che la velocità diminuisce durante la fase di salita e aumenta in discesa (in perfetto accordo con la legge di conservazione dell'energia). In questa situazione (e in tutte le altre in cui il moto è circolare ma non uniforme) l'accelerazione non è centripeta o meglio non è unicamente centripeta. Il vettore accelerazione può essere scomposto in una componente centripeta calcolabile esattamente come appena visto (si faccia solo attenzione che, non essendo né la velocità e quindi nemmeno la velocità angolare costanti, si devono usare il valore istantaneo di queste grandezze per calcolare il valore istantaneo della componente centripeta dell'accelerazione) e una componente tangenziale responsabile della variazione del modulo della velocità.

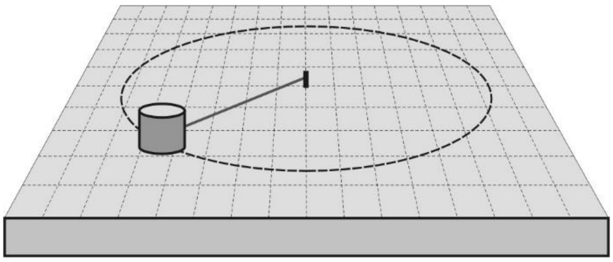
Non è compito di questo corso approfondire questo tema. Si osservi semplicemente che, nel caso preso come esempio, esistono due istanti in cui la accelerazione ha unicamente componente centripeta, nel punto più in basso e in quello più in alto. In quelle situazione il moto può essere trattato come fosse circolare e uniforme.

Finora ci siamo occupati solo della cinematica del moto circolare. Che cosa possiamo dire delle forze che danno luogo ad un moto di questo tipo? Limitandoci al caso uniforme (modulo della velocità costante) possiamo tranquillamente affermare che per soddisfare la legge di Newton, deve valere:

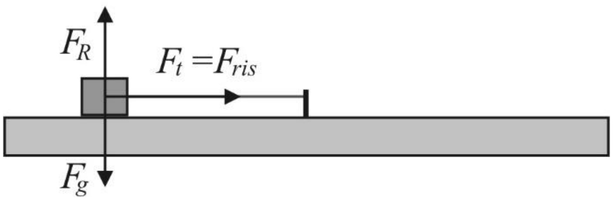
$\vec{F}_{ris} = m \cdot \vec{a}$ con $\vec{a}$ sempre diretta verso il centro della circonferenza e di modulo $\omega^2 r$.

Come già per l'accelerazione si è dato un nome particolare a questo tipo di forza risultante, la si è chiamata **forza centripeta**. A scanso di equivoci va subito ricordato che, pur avendo un nome particolare, resta pur sempre una forza risultante, somma vettoriale di tutte le forze agenti che, in questo caso, danno luogo ad un moto circolare uniforme. Ecco alcuni esempi.

Su un piano orizzontale senza attrito un disco si muove di moto circolare uniforme grazie ad un filo agganciato ad un piolo posto al centro del piano. Quali sono le forze agenti sul disco? quanto vale la forza di tensione del filo?



Le forze agenti sono tre: la forza peso, la reazione del piano di appoggio e la forza di tensione del filo. Le prime due sono verticali, di uguale intensità e di verso opposto e pertanto si equilibrano vicendevolmente. La forza di tensione del filo è la sola forza orizzontale ed è di conseguenza la forza risultante. Il moto è circolare uniforme e pertanto:



$$\left.\begin{array}{r} F_t = F_{ris} \\ F_{ris} = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow F_t = m \cdot \omega^2 \cdot r .$$

Una automobile affronta una curva circolare a velocità costante. Quali sono le forze agenti sull'automobile? quali di queste diventa forza risultante centripeta?

Anche in questo caso sono presenti due forze verticali che si equilibrano a vicenda. L'unica forza orizzontale presente, responsabile del moto circolare, è la forza di attrito fra gli pneumatici e la strada. È quest'ultima la forza risultante e quindi forza centripeta. Analogamente a quanto visto prima vale.

$$\left.\begin{array}{r} F_A = F_{ris} \\ F_{ris} = m \cdot a = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow F_A = m \cdot \frac{v^2}{r} .$$

Se la domanda fosse stata: qual è la massima velocità con la quale una automobile può affrontare una curva circolare di raggio $r = 75\,m$ se il coefficiente di attrito di stacco tra gli pneumatici e la strada vale $\mu_0 = 0{,}85$?

La massima velocità, prima di perdere aderenza e quindi uscire di strada, è quella ottenibile grazie al valore più grande possibile dell'attrito statico (si faccia attenzione che uno pneumatico non scivola in condizioni normali di marcia ma la porzione che è in contatto con la strada è ferma rispetto a quest'ultima) e cioè l'attrito di stacco. Pertanto:

$$\left.\begin{array}{r} F_{A0} = \mu_0 \cdot F_R = \mu_0 \cdot F_g = \mu_0 \cdot m \cdot g \\ F_{A0} = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot r} = \sqrt{0{,}85 \cdot 9{,}8 \tfrac{m}{s^2} \cdot 75\,m} = 25 \tfrac{m}{s} = 90 \tfrac{km}{h} .$$

Il moto dei satelliti (la gravitazione universale)

Le conoscenze attuali di meccanica celeste sono sicuramente superiori a quelle che avevano gli studiosi della natura dell'antichità o del medioevo o anche solo di cento anni fa.

Oggi noi sappiamo che la Terra è un pianeta roccioso (classificato come pianeta di tipo terrestre), quasi sferico, di diametro $d_{\text{Terra}} = 12,75 \cdot 10^3\,km$ e massa $m_{\text{Terra}} = 5,97 \cdot 10^{24}\,kg$ che ruota attorno al Sole, una stella classificata come una nana gialla di diametro $d_{\text{Sole}} = 1,4 \cdot 10^6\,km$ e massa $m_{\text{Sole}} = 2,0 \cdot 10^{30}\,kg$ su un'orbita quasi circolare di raggio $r = 149,6 \cdot 10^6\,km$ (in astronomia questa distanza viene usata come unità di misura e indicata come unità astronomica: $1UA = 149,6 \cdot 10^6\,km$). Attorno al Sole orbitano una infinità di altri corpi fra cui altri tre pianeti di tipo terrestre (Mercurio, Venere e Marte), quattro giganti gassosi (Giove, Saturno, Urano e Nettuno) classificati come pianeti di tipo gioviano, diversi corpi indicati come pianeti nani (fra questi c'è Plutone), migliaia di corpi rocciosi ancora più piccoli detti asteroidi, comete e altro ancora. Tutto questo insieme di corpi celesti forma il sistema solare. Dare una dimensione a questa struttura non è evidente. Per farvi un'idea, l'ultimo pianeta, Nettuno, orbita attorno al Sole ad una distanza media di circa $30UA$.

Il Sole è una delle circa 200 miliardi (qualche astronomo sostiene che siano addirittura 400 miliardi) di stelle appartenenti ad un agglomerato di stelle chiamato Galassia o Via Lattea. Le dimensioni della Galassia, la cui forma è quella di un disco con un rigonfiamento al centro, è di circa centomila anni luce (un anno luce è la distanza percorsa dalla luce in un anno e vale circa $9,5 \cdot 10^{12}\,km$; per confronto una unità astronomica vale circa 8 minuti luce) e uno spessore al centro di circa diecimila anni luce.

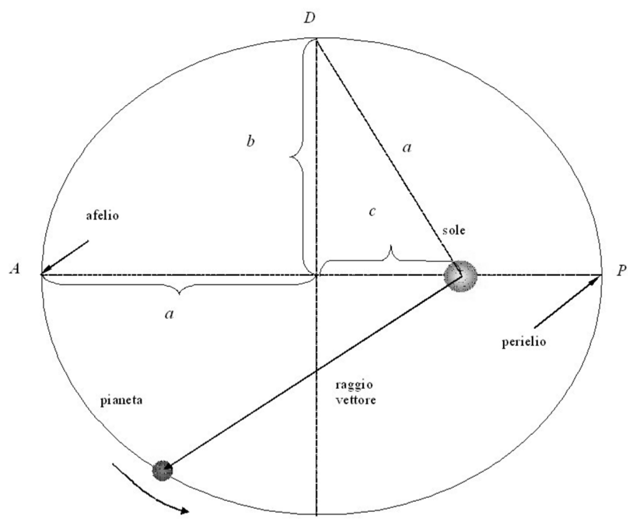
La Via Lattea è una delle 100 miliardi di galassie che formano l'universo conosciuto la cui dimensioni si esprimono in miliardi di anni luce.

Queste conoscenze sono relativamente recenti, alcune risalgono al secolo scorso, una qualcuna addirittura è di pochi decenni fa. Fino al sedicesimo secolo si credeva che la Terra fosse il centro dell'universo e che gli altri corpi conosciuti vi girassero attorno. Osservazioni e idee di uomini illustri come Galileo (cui dobbiamo l'introduzione del metodo scientifico), Copernico, Keplero e infine Newton hanno posto le basi per la formulazione del modello cosmologico oggi ampiamente accettato dalla comunità scientifica.

Famose e importanti per questo corso sono le tre regolarità o leggi di Keplero a proposito del moto dei pianeti attorno al Sole che possono essere formulate in questo modo[2] :

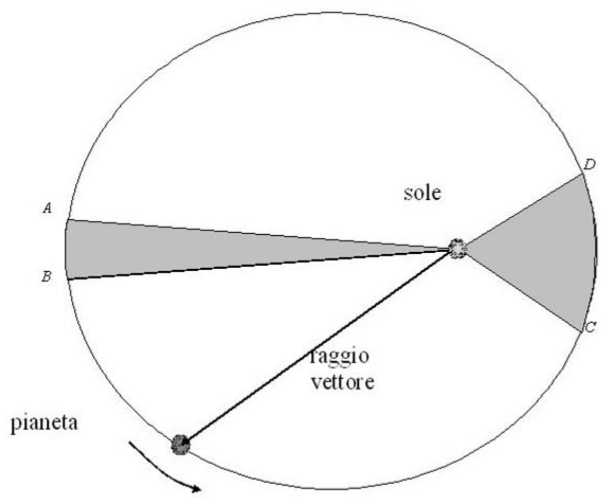
1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

Per la prima volta nella storia della scienza Keplero elimina dall'astronomia le sfere celesti e ipotizza per i pianeti un moto diverso da quello circolare. Osserviamo che, poiché l'ellisse è una figura piana, i moti dei pianeti avvengono in un piano, detto piano orbitale. Per la Terra tale piano è detto eclittica. Nella figura a fianco è rappresentata un'orbita ellittica, con indicati i suoi parametri caratteristici: semiasse maggiore (a), semiasse minore (b), semi-distanza focale (c).



[2] Formulazione tratta da Wikipedia (http://it.wikipedia.org/wiki/Leggi_di_Keplero)

2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.



La velocità orbitale non è costante, ma varia lungo l'orbita. Le due aree evidenziate nella figura qui a fianco sono uguali e vengono quindi percorse nello stesso tempo. In prossimità del perielio, dove il raggio vettore è più corto che all'afelio, l'arco di ellisse è corrispondentemente più lungo. Ne segue quindi che la velocità orbitale è massima al perielio e minima all'afelio.

3. I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

Questa legge può essere formulata matematicamente in questo modo:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}.$$

Si faccia attenzione che in questa formula a rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita e che la costante è la stessa per tutti i corpi che girano attorno al Sole (questa legge è evidentemente applicabile anche a tutti i corpi che orbitano attorno ad un altro corpo centrale, ad esempio ai satelliti della Terra, Luna compresa. La costante assumerà chiaramente un altro valore).

Un'ultima osservazione: va specificato che le leggi di Keplero sono precise nella misura in cui sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella del Sole;
- si possono trascurare le interazioni tra diversi pianeti (tali interazioni portano a leggere perturbazioni sulla forma delle orbite).

Mezzo secolo più tardi la formulazione delle leggi di Keplero, Isaac Newton pubblicò la **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (in italiano: I principi matematici della filosofia naturale), un'opera considerata una delle più importanti del pensiero scientifico. In essa Newton enunciò le leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale.

La legge di gravitazione universale rappresenta una prima importante unificazione vale a dire in essa si afferma che le cause del moto sulla Terra sono le stesse che muovono i corpi celesti. La stessa forza di gravità che fa cadere al suolo una mela mantiene in orbita la Luna attorno alla Terra.

Newton mostrò che una forza in grado di generare orbite in accordo con le leggi di Keplero doveva essere di tipo attrattivo, essere diretta lungo il raggio vettore, essere proporzionale sia alla massa del pianeta che a quella del Sole (in generale alle masse dei due corpi coinvolti nel movimento) e inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza del raggio vettore, vale a dire per quel che riguarda l'intensità:

$$F_g = G\,\frac{M \cdot m}{r^2},$$

dove con M si indica la massa del corpo maggiore (ad esempio il Sole), con m quella del corpo in orbita, con r la lunghezza del raggio vettore, la distanza fra i centri dei due corpi, e con G la costante universale di gravità che oggi noi sappiamo valere: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Mostrare che le leggi di Keplero sono una conseguenza diretta della legge di gravitazione universale in generale non è cosa facile. Diventa relativamente semplice se prendiamo in considerazione un corpo la cui orbita è circolare. Un cerchio è una ellisse un po' particolare. Il semiasse maggiore e quello minore sono uguali e sono pari al raggio del cerchio. I due fuochi coincidono nel centro del cerchio. In questa situazione la seconda legge di Keplero è banale: un arco di circonferenza percorso in un determinato intervallo di tempo è sempre lo stesso e quindi anche l'area del corrispondente settore circolare. Per mostrare invece la relazione fra la terza legge di Keplero e quella di gravitazione universale facciamo il seguente ragionamento. L'unica forza in grado di mantenere il corpo in orbita circolare è quella di gravità che è forza risultante ma soprattutto forza centripeta e pertanto.

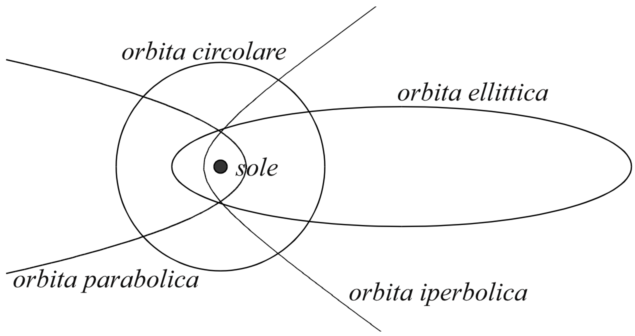
$$\left.\begin{aligned} m\,a &= F_{ris} = F_g = G\frac{M\,m}{r^2} \\ a &= \frac{4\pi^2}{T^2}r \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad m\frac{4\pi^2}{T^2}r = G\frac{M\,m}{r^2},$$

che riscritta in modo diverso diventa:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M},$$

cioè proprio la terza legge di Keplero dato che ciò che si trova a destra del segno di uguale è formato da grandezze costanti.

Rifare lo stesso percorso anche per orbite ellittiche va molto al di là della capacità di uno studente di seconda liceo. Interessante è comunque osservare che la legge di gravitazione universale assieme alle leggi della dinamica prevede che il moto di corpi attorno al Sole non solo può essere ellittico (eventualmente circolare) ma che esistono pure orbite paraboliche e iperboliche.



Alcuni esempi di applicazione della terza legge di Keplero e della legge di gravitazione universale.

- Quanto vale il semiasse maggiore dell'orbita di Giove sapendo che la percorre in circa 12 anni?

  È noto che la Terra percorre la sua orbita in un anno e che il semiasse maggiore della sua orbita è una unità astronomica, perciò:

$$\frac{T^2_{\text{Terra}}}{a^3_{\text{Terra}}} = \frac{T^2_{\text{Giove}}}{a^3_{\text{Giove}}} \quad \Rightarrow \quad a_{\text{Giove}} = a_{\text{Terra}} \cdot \sqrt[3]{\frac{T^2_{\text{Giove}}}{T^2_{\text{Terra}}}} = 1UA \cdot \sqrt[3]{\frac{(12\,anni)^2}{(1anno)^2}} = 5,2UA.$$

- Calcolare la distanza all'afelio della cometa di Encke sapendo che la distanza al perielio vale $0,33UA$ e che il suo periodo di rotazione attorno al sole vale 3,3 anni.

  Si procede come per il problema precedente applicando la terza legge di Keplero determinando così il semiasse maggiore dell'orbita della cometa vale a dire:

$$\frac{T^2_{\text{Terra}}}{a^3_{\text{Terra}}} = \frac{T^2_{\text{Encke}}}{a^3_{\text{Encke}}} \quad \Rightarrow \quad a_{\text{Encke}} = a_{\text{Terra}} \cdot \sqrt[3]{\frac{T^2_{\text{Encke}}}{T^2_{\text{Terra}}}} = 1UA \cdot \sqrt[3]{\frac{(3,3\,anni)^2}{(1anno)^2}} = 2,22UA.$$

  In base alla definizione dell'ellisse vale che:

$$2 \cdot a = d_A + d_P \quad \Rightarrow \quad d_P = 2 \cdot a - d_A = 2 \cdot 2,22UA - 0,33UA = 4,11UA.$$

- Determinare la velocità di un satellite in orbita circolare attorno alla Terra ad una quota di $320\,km$ dalla superficie.

  In principio è possibile sfruttare di nuovo la terza legge di Keplero a partire dai dati conosciuti di periodo e semiasse maggiore dell'orbita di un altro satellite della Terra (ad esempio della Luna), determinare il periodo del satellite e infine calcolare la velocità come rapporto fra la lunghezza della circonferenza dell'orbita e il periodo. Vogliamo arrivarci direttamente uguagliando la forza di gravità (l'unica forza presente e quindi la forza risultante) con la forza necessaria per ottenere un moto circolare (forza centripeta) scritta nella forma contenente la grandezza velocità, vale a dire:

$$\left.\begin{array}{l} F_{ris} = F_g = G\dfrac{M\,m}{r^2} \\ F_{ris} = m\cdot\dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\,.$$

  Inserendo il valore della massa della Terra $M = 5{,}97\cdot 10^{24}\,kg$, del raggio dell'orbita pari al raggio della Terra più la quota misurata dalla superficie, vale a dire $r = R_0 + h = 6{,}38\cdot 10^6\,m + 0{,}32\cdot 10^6\,m = 6{,}70\cdot 10^6\,m$, ed infine la costante universale di gravità $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$ si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\,kg}{6{,}70\cdot 10^6\,m}} = 7{,}71\cdot 10^3\,\tfrac{m}{s} = 27{,}7\cdot 10^3\,\tfrac{km}{h}\,.$$

- Verificare che la massa del Sole vale $2{,}0\cdot 10^{30}\,kg$.

  La terza legge di Keplero va scritta utilizzando la legge di gravitazione universale e cioè:

  $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{G\,M}$ e risolvere rispetto a M che appunto è la massa del Sole:

$$M = \frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{4\pi^2}{G} = \frac{\left(1{,}496\cdot 10^{11}\,m\right)^3}{\left(1\cdot 365{,}25\cdot 24\cdot 3600\,s\right)^2}\cdot\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}} = 1{,}99\cdot 10^{30}\,kg\,.$$

Si osservi che negli ultimi due esempi sono state utilizzate per le varie grandezze le unità di misura del SI ed inoltre che è stato necessario conoscere il valore della costante universale di gravità, valore di cui non avevamo avuto bisogno negli esempi precedenti.

Da osservare inoltre che il valore della costante universale di gravità fu misurato la prima volta da Henry Cavendish nel 1798 più di cento anni dopo la pubblicazione dei Principia Matematica di Newton (1687).

Energia potenziale gravitazionale, energia di legame e velocità di fuga

Un tempo si affermava che tutto ciò che sale prima o poi deve scendere. Non è necessariamente vero. Se lanciamo verso l'alto ad un oggetto con una velocità sufficientemente alta esso non farà più ritorno. Quanto deve essere grande questa velocità?

Per rispondere a questa e ad altre domande occorre estendere il concetto di energia potenziale gravitazionale al di là della superficie terrestre.

Nel capitolo 2.1.4 e in seguito nel capitolo 5.1.3 avevamo inizialmente determinato che l'energia legata alla forza peso era calcolabile con la formula $E_{p,g} = m \cdot g \cdot h$ e in seguito dimostrato che a questo risultato si poteva pervenire a partire del calcolo del lavoro della forza di gravità. Avevamo scoperto che la forza di gravità è una forza conservativa e che, come per tutte le forze conservative, è possibile definire una funzione di stato (una funzione legata cioè alla posizione) associata al lavoro chiamata appunto energia potenziale (gravitazionale).

La linearità della crescita dell'energia potenziale è in questo caso attribuibile al fatto che, in prossimità della superficie terrestre, la forza peso è praticamente costante in modulo direzione e verso (il valore di g è pari a $9{,}8\,\frac{N}{kg}$ e il vettore associato è verticale e diretto verso il basso).

Come possiamo estendere questo concetto anche a grandi distanze?

Per prima cosa occorre ricordare che la forza di gravità non è costante ma varia secondo la legge universale di gravità e in modulo vale:

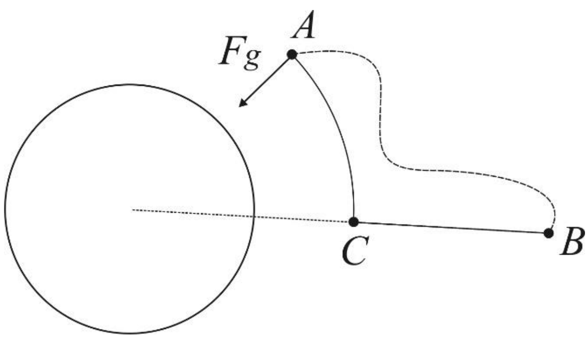
$$F_g = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}.$$

La direzione di questa forza è inoltre quella della retta congiungente i centri di massa dei due corpi in esame ed è sempre attrattiva.

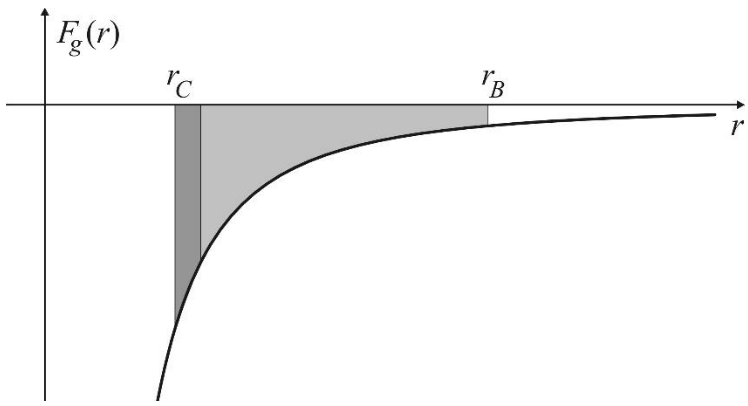
In base a quanto studiato nel capitolo 5 per determinare l'energia potenziale associata ad una forza occorre:

- calcolare il lavoro della forza fra due punti qualsiasi,
- verificare che la forza sia di tipo conservativo,
- associare al lavoro la corrispondente variazione dell'energia potenziale.

A differenza dal caso relativo al calcolo del lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, determinare il lavoro da A a B quando la forza varia sia in modulo che in direzione non è così facile, soprattutto se il percorso da A a B è un percorso qualsiasi (linea tratteggiata nel disegno). Scegliendo un percorso un po' particolare si semplifica un pochino il problema. Andiamo da A a B passando per C con un percorso con le seguenti caratteristiche: da A a C il percorso è un arco di circonferenza a distanza costante dalla Terra (la forza di gravità è in questo modo sempre perpendicolare al percorso che chiamiamo tangenziale); il tratto da C e B è rettilineo e radiale (la forza di gravità è sempre parallela – o antiparallela – al percorso). Il lavoro lungo il primo tratto è nullo; il lavoro lungo il secondo tratto va calcolato ma il tutto è riconducibile ad un caso ad una sola dimensione.



Come abbiamo visto nel caso del calcolo della forza elastica il lavoro è determinabile a partire dal calcolo di un'area. Il problema consiste nel fatto che non è così facile calcolare quest'area.



La figura mostra l'area di cui dobbiamo calcolare il valore. Come già visto è sempre possibile suddividere la figura in tanti pezzettini, calcolare l'area di ciascuno e poi sommare il tutto. Se la suddivisione è sufficientemente grande ciascun pezzettino è assimilabile ad un trapezio la cui area è facilmente calcolabile (nella figura è stato disegnato in grigio scuro il primo di questi pezzettini).

Cominciamo con il calcolare l'area del pezzettino grigio scuro che è un trapezio con base maggiore pari a $F_g\left(r_C\right)$, base minore $F_g\left(r_C+\Delta r\right)$ e altezza pari a Δr.

Rinominiamo il punto di partenza e chiamiamolo r_0, mentre sia $r_C+\Delta r=r_1$. Δr vale perciò r_1-r_0.

L'area di un trapezio si calcola con:

$A=\frac{1}{2}\left(B+b\right)\cdot h$.

Le due basi del trapezio, come à già stato detto, corrispondono al valore della forza di gravità nei punti r_0 (base maggiore) e r_1 (base minore) e valgono:

$F_g\left(r_0\right)=-G\dfrac{M\cdot m}{r_0^2}$ rispettivamente $F_g\left(r_1\right)=-G\dfrac{M\cdot m}{r_1^2}$ (il segno $-$ sta a indicare che la forza è attrattiva).

L'altezza h corrisponde a $\Delta r=r_1-r_0$.

Il lavoro della forza di gravità da r_0 a r_1 è, con approssimazione tanto maggiore quanto più Δr è piccolo, pari a:

$$W_{r_0\to r_1}=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\left(-G\frac{M\cdot m}{r_0^2}\right)+\left(-G\frac{M\cdot m}{r_1^2}\right)\right)\cdot\left(r_1-r_0\right)=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)\cdot\left(r_1-r_0\right)=-\tfrac{1}{2}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\frac{r_1^2+r_0^2}{r_0^2\cdot r_1^2}\cdot\left(r_1-r_0\right)\ .$$

Se Δr è piccolo, e noi sappiamo che Δr può essere piccolo quanto vogliamo (più Δr è piccolo, maggiore sarà semplicemente il numero di trapezi di cui dovremo calcolare l'area), r_1 e r_0 sono molto simili e vale sicuramente questa approssimazione[3]:

$r_1^2+r_0^2\approx 2\cdot\left(r_0\cdot r_1\right)$

Con questa approssimazione segue:

$$W_{r_0\to r_1}\approx-\tfrac{1}{\cancel{2}}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{r_0}\cdot\cancel{r_1}}{r_0^{\cancel{2}}\cdot r_1^{\cancel{2}}}\cdot\left(r_1-r_0\right)=-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{r_1-r_0}{r_0\cdot r_1}=-G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right).$$

A questo punto l'area del prossimo trapezio, e di conseguenza il lavoro da r_1 a r_2, vale:

$$W_{r_1\to r_2}=-G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Per determinare il lavoro dall'inizio alla fine basta sommare tutti i valori parziali cioè:

[3] Per fare un esempio numerico: sia $r_1=100{,}5$ e $r_0=99{,}5$.
$100{,}5^2+99{,}5^2=20000{,}5\approx 19999{,}5=2\cdot\left(100{,}5\cdot 99{,}5\right)$.

$$W_{r_C \to r_B} = W_{r_0 \to r_1} + W_{r_1 \to r_2} + W_{r_2 \to r_3} + \cdots =$$
$$= \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \right) + \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right) + \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right) \cdots =$$
$$= -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \cancel{\frac{1}{r_1}} + \cancel{\frac{1}{r_1}} - \cancel{\frac{1}{r_2}} + \cancel{\frac{1}{r_2}} - \frac{1}{r_3} + \cdots \right) \quad .$$

A due a due tutti i termini nella parentesi si annullano tranne il primo e l'ultimo e, tornando a sostituire r_0 con r_C, si ottiene:

$$W_{r_C \to r_B} = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Per definizione la variazione dell'energia potenziale è pari "-" (leggere meno) la variazione del lavoro della forza associata e pertanto:

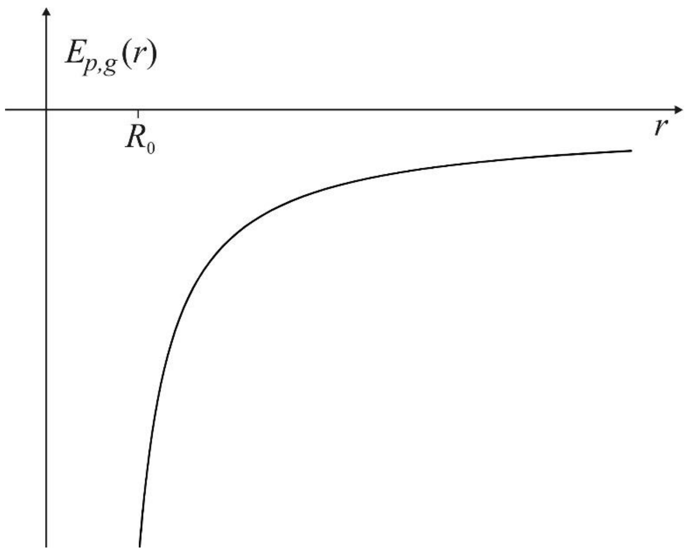
$$\Delta E_{p,g} = -W_{r_C \to r_B} = -\left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right) \right) = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right) =$$
$$= \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_B} \right) - \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_C} \right) = E_{p,g}(B) - E_{p,g}(C) \quad .$$

Possiamo perciò concludere che in un punto qualsiasi vale:

$$E_{p,g}(r) = -G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r}.$$

La relazione appena scritta presuppone in realtà di aver già compiuta una scelta per la posizione in cui si attribuisce il valore zero all'energia potenziale gravitazionale. Questa scelta è caduta per una posizione posta ad una distanza infinita, cioè:

$$E_{p,g}(r \to \infty) = 0.$$



Avessimo scelto diversamente (ad esempio di porre lo zero in prossimità della superficie terrestre) avremmo dovuto aggiungere una costante (da calcolare).

Si tratta comunque della migliore scelta possibile che rende i calcoli i più semplici possibili.

L'unico "inconveniente" consiste nel fatto che le energie potenziali gravitazionali sono sempre negative.

Il grafico a lato mostra l'andamento dell'energia potenziale gravitazionale a partire da R_0.

A questo punto è possibile rispondere a parecchie domande relative all'energia potenziale.

- Determinare l'energia totale di un corpo di massa m in orbita circolare di raggio $r = R_0 + h$ attorno alla Terra.
  Cominciamo con il dire che l'energia totale si calcola sommando l'energia cinetica all'energia potenziale gravitazionale, vale a dire:

  $$E_{tot} = E_{cin} + E_{p,g} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r} \right)$$

La velocità di un corpo in orbita circolare è già stata determinate nel capitolo precedente e vale:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\,.$$

Inserendo questo valore nella formula precedente si ottiene:

$$E_{tot} = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\sqrt{\frac{G\,M}{r}}\right)^2 + \left(-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{G\,M}{r} + \left(-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}\,.$$

Questo valore che è pari alla metà dell'energia potenziale gravitazionale è detto anche energia di legame.

- Calcolare la velocità di fuga dal pianeta Terra, dalla Luna o da qualsiasi corpo celeste.

Per velocità di fuga si intende il valore minimo che un corpo deve avere per non fare più ritorno sulla Terra (o su un qualsiasi altro pianeta o corpo celeste in esame). Questo significa che deve allontanarsi indefinitamente, raggiungere cioè una posizione a distanza infinita. In quel punto la sua velocità può essere pari a zero. Dal punto di vista del teorema di conservazione dell'energia si può scrivere:

$$E_{tot} = E_{cin}\left(R_0\right) + E_{p,g}\left(R_0\right) = E_{cin}\left(r\to\infty\right) + E_{p,g}\left(r\to\infty\right) = 0 + 0 = 0\,.$$

Dato che:

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{p,g} = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + \left(-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{R_0}\right) = 0$$

si può concludere che:

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot G\,M}{r}}\,.$$

Nel caso del pianeta Terra abbiamo:

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\,kg}{6,38\cdot 10^6\,m}} = 11,2\cdot 10^3\,\tfrac{m}{s} = 11,2\,\tfrac{km}{s} = 40,2\cdot 10^3\,\tfrac{km}{h}\,.$$

- Determinare la massima dimensione di un corpo celeste con massa pari a quella del Sole per diventare un buco nero.

Per definizione un buco nero è una zona dello spazio dalla quale non può fuggire niente, nemmeno la luce. Generalmente si pensa ad un corpo celeste estremamente denso, dotato di un'attrazione gravitazionale talmente elevata da non permettere l'allontanamento di alcunché dalla propria superficie. Questa condizione si ottiene quando la velocità di fuga dalla sua superficie è superiore alla velocità della luce. Pertanto il massimo raggio deve valere:

$$R_{\max} = \frac{2\cdot G\,M}{c^2} = \frac{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\,\tfrac{Nm^2}{kg^2}\cdot 2,0\cdot 10^{30}\,kg}{\left(3,0\cdot 10^8\,\tfrac{m}{s}\right)^2} \approx 3,0\,km\,.$$

Questa distanza del centro di massa viene anche detta raggio di Schwarzschild.

In queste condizioni un corpo possiede una grande densità superiore a quella presente nei nuclei atomici il cui ordine di grandezza è pari a $10^{18}\,\frac{kg}{m^3}$.

- Calcolare la velocità all'afelio e al perielio di una cometa, ad esempio della cometa di Encke, o di qualsiasi altro corpo che possiede un'orbita ellittica (attorno al Sole o a qualsiasi altro corpo centrale), di cui si conoscono le distanze all'afelio e al perielio (apoastro e periastro).

  Per risolvere questo problema occorre tenere in considerazione il principio di conservazione dell'energia e la seconda legge di Keplero.

  Il principio di conservazione dell'energia permette di scrivere:

  $E_{cin}(r_a)+E_{p,g}(r_a)=E_{cin}(r_p)+E_{p,g}(r_p)$, cioè:

  $$\tfrac{1}{2}mv_a^2+\left(-G\frac{M\,m}{r_a}\right)=\tfrac{1}{2}mv_p^2+\left(-G\frac{M\,m}{r_p}\right).$$

  La seconda legge di Keplero (quella delle aree), applicata durante un piccolo intervallo di tempo ai due estremi dell'orbita, perielio (periastro) e afelio (apoastro) appunto, quando cioè velocità orbitale e raggio vettore sono perpendicolari può essere scritta, con approssimazione tanto maggiore quanto più piccolo è l'intervallo di tempo, nel modo seguente: si approssima l'area da calcolare ad un triangolo con base il pezzettino di traiettoria Δr e con altezza il raggio vettore r , vale a dire:

  $$\tfrac{1}{2}\Delta r_a\cdot r_a=\tfrac{1}{2}\Delta r_p\cdot r_p \;\Rightarrow\; \cancel{\tfrac{1}{2}}v_a\cdot\cancel{\Delta t}\cdot r_a=\cancel{\tfrac{1}{2}}v_p\cdot\cancel{\Delta t}\cdot r_p \;\Rightarrow\; v_a\cdot r_a=v_p\cdot r_p\,.$$

  Sostituendo nell'uguaglianza precedente la velocità all'afelio con $v_a=v_p\cdot\dfrac{r_p}{r_a}$ segue:

  $$\tfrac{1}{2}\cancel{m}v_p^2\cdot\frac{r_p^2}{r_a^2}+\left(-G\frac{M\,\cancel{m}}{r_a}\right)=\tfrac{1}{2}\cancel{m}v_p^2+\left(-G\frac{M\,\cancel{m}}{r_p}\right)$$

  $$\tfrac{1}{2}v_p^2\left(\frac{r_p^2}{r_a^2}-1\right)=\frac{GM}{r_a}-\frac{GM}{r_p}$$

  $$v_p^2\,\frac{r_p^2-r_a^2}{r_a^{\cancel{2}}}=2GM\,\frac{r_p-r_a}{r_p\cdot\cancel{r_a}}$$

  $$v_p^2\,\frac{\cancel{(r_p-r_a)}\left(\overbrace{r_p+r_a}^{\cancel{2}a}\right)}{r_a}=\cancel{2}GM\,\frac{\cancel{r_p-r_a}}{r_p}$$

  $$v_p^2=\frac{r_a}{r_p}\frac{GM}{a}\quad.$$

  La velocità al perielio vale pertanto:

  $v_p=\sqrt{\dfrac{r_a}{r_p}\dfrac{GM}{a}}$ e, per simmetria, quella all'afelio: $v_a=\sqrt{\dfrac{r_p}{r_a}\dfrac{GM}{a}}$.

  Per la cometa di Encke vale:

  $$v_p=\sqrt{\frac{665\cdot10^9\,m}{49\cdot10^9\,m}\cdot\frac{6,67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot1,99\cdot10^{30}\,kg}{332\cdot10^9\,m}}=70,6\,\tfrac{km}{s}\quad\text{e}\quad v_a=5,7\,\tfrac{km}{s}\,.$$

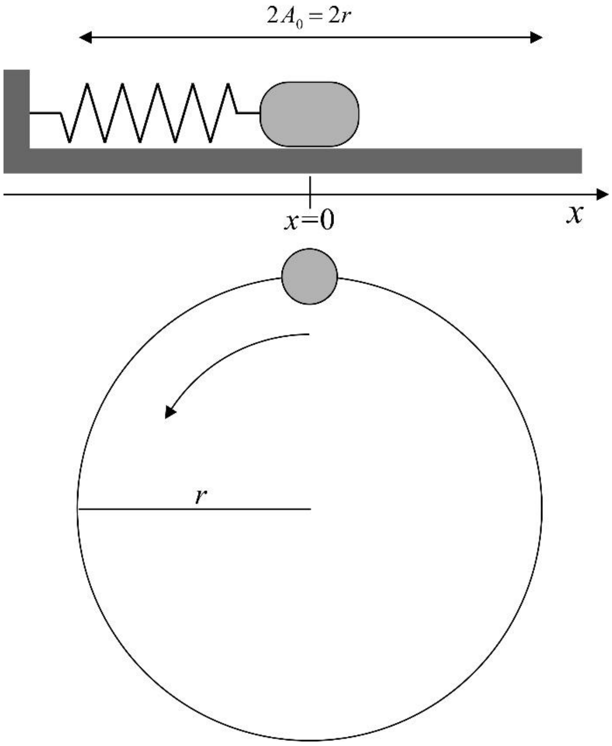
Il moto armonico semplice

Pur non trattandosi di un moto a due dimensioni, si è ritenuto opportuno analizzare questo tipo di moto in questa parte del capitolo sulla dinamica del punto materiale in quanto, come vedremo, questo moto è descrivibile come proiezione del moto circolare uniforme.

Prendiamo in considerazione un sistema massa – molla, ad esempio un carrello di massa m appoggiato su un binario orizzontale senza attrito e agganciato all'estremità di una molla di costante elastica k. Se si sposta la massa dal punto di equilibrio, questa si mette a oscillare.

Lo studio dell'oscillazione a partire dalla legge di Newton va al di là delle capacità matematiche di questo corso. Sceglieremo pertanto un approccio diverso per studiare il movimento della massa.

Prendiamo in considerazione la situazione sperimentale rappresentata dal disegno a lato. Se si ha l'accortezza di scegliere da una parte la giusta ampiezza di oscillazione e dall'altra la giusta velocità angolare, si può notare che il movimento della massa attaccata alla molla (rettangolo smussato) coincide con la proiezione sul piano di oscillazione (asse x) del moto circolare uniforme della massa a forma di disco. Questo significa che è possibile descrivere il moto oscillatorio dalla massa attaccata alla molla come la componente x del moto circolare e cioè:



$$x(t) = A_0 \cdot \cos(\alpha_0 + \omega t)$$

con A_0 al posto di r, quale ampiezza di oscillazione.

E con questo abbiamo "risolto" la parte cinematica del problema. Si può infatti dimostrare che anche per la velocità e per l'accelerazione si possono prendere le sole componenti x. Si avrà perciò:

$v(t) = -A_0\omega \cdot \sin(\alpha_0 + \omega t)$ e

$a(t) = -A_0\omega^2 \cdot \cos(\alpha_0 + \omega t) = -\omega^2\, x(t)$.

Analizziamo a questo punto le forze agenti sulla massa m.

Se si escludono la forza peso e la reazione del piano di appoggio che si annullano reciprocamente, rimane la sola forza della molla cioè $F(x) = -k\,x$. La legge di Newton afferma d'altro canto che $F_{ris} = ma = -m\omega^2\, x$. Unendo le due relazioni risulta:

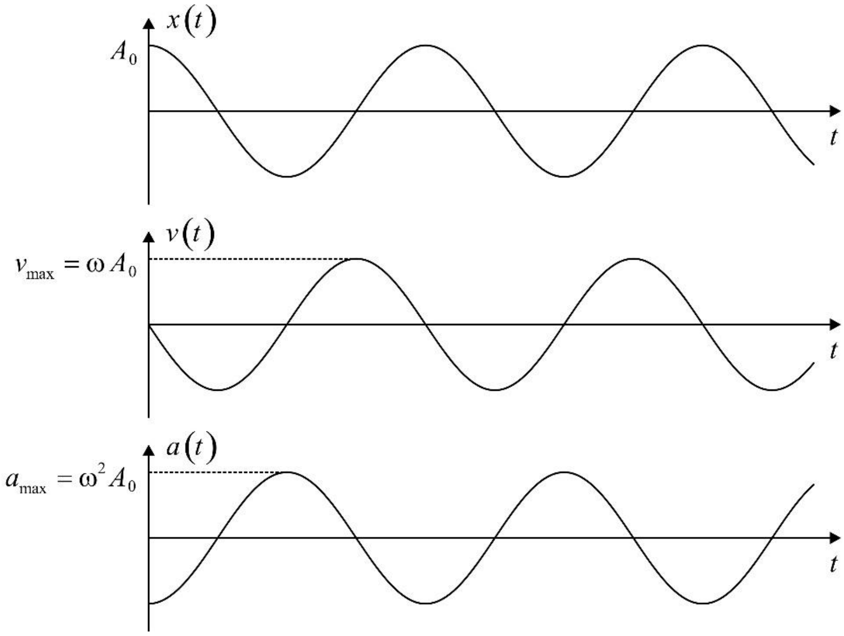
$$-k\,x = -m\omega^2 x\,.$$

Questo significa che:

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ oppure: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ oppure ancora: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

dove T è il periodo di oscillazione.

Un moto che ha le caratteristiche fin qui descritte viene detto *moto armonico semplice.* Si può osservare che il periodo di oscillazione del moto armonico semplice non è influenzato dall'ampiezza di oscillazione ma dipende solo dalla molla e dalla massa. L'andamento grafico di posizione, velocità e accelerazione può essere osservato nel disegno a fianco.

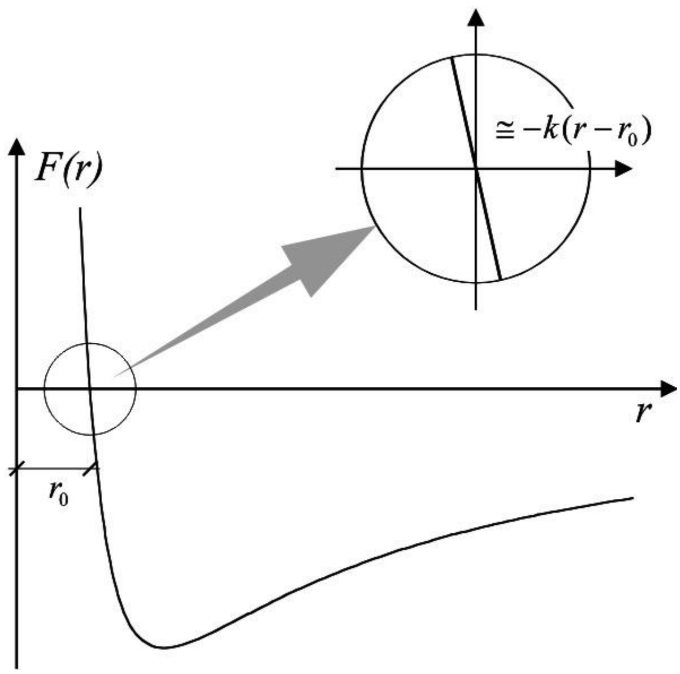


Riassumendo si può concludere che posizione, velocità e accelerazione di un moto armonico semplice sono funzioni sinusoidali, che per produrlo è necessaria una forza risultante di richiamo proporzionale allo spostamento e infine che l'ampiezza di oscillazione non influenza il periodo del moto.

Sperimentalmente si può osservare che la relazione che lega il periodo (grandezza cinematica) con la massa e la costante elastica della molla porta a risultati attendibili solo a condizione che la massa della molla sia trascurabile a confronto di quella del corpo che le è agganciato. Infatti quando le due masse diventano paragonabili, l'inerzia della molla stessa influenza il moto e quindi il periodo. Una formula empirica per il periodo che tiene conto pure della massa della molla indicata con m_0 è la seguente:

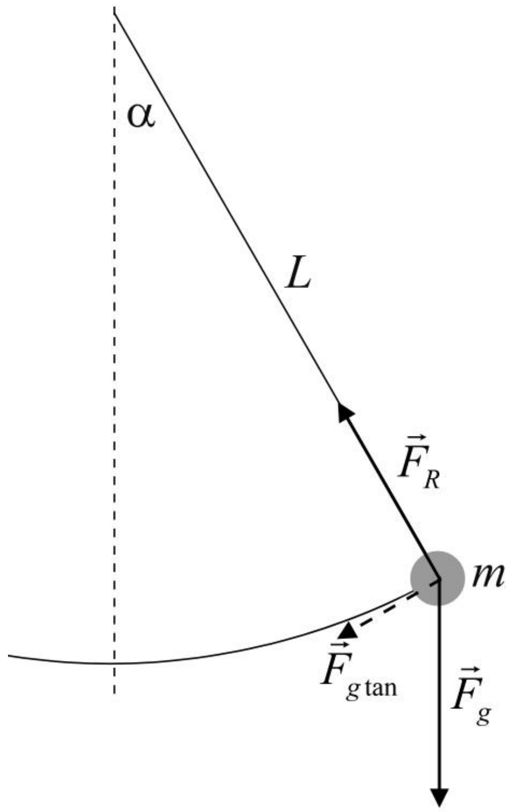
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{1}{3}m_0}{k}}\ .$$

In molte situazioni, in prossimità dell'equilibrio, la forza risultante non è del tipo $F=-k\,x$ ma per piccole oscillazione le si avvicina di molto (nel disegno a fianco ad esempio si mostra in modo approssimativo l'andamento della forza risultante agente su uno degli atomi di una molecola biatomica in funzione della distanza dall'altro).



In questi casi è possibile applicare la teoria sul moto armonico semplice e, conosciuto per altre vie il periodo di oscillazione (nell'esempio attraverso la frequenza luminosa emessa), è possibile risalire alla costante della forza in gioco.

Il pendolo



Un bel esempio di moto quasi armonico è quello del pendolo semplice composto da un corpo agganciato ad un'asta che può dondolare avanti e indietro attorno al punto di equilibrio.

Se analizziamo le forze in gioco ci rendiamo subito conto che la componente parallela all'asta (componente radiale) della forza risultante ($\vec{F}_{ris,\mathrm{rad}} = \vec{F}_R + \vec{F}_{g,\mathrm{rad}}$) o è nulla (ai due estremi del moto) o è responsabile della accelerazione centripeta necessaria a mantenere il corpo in moto circolare, ma non influenza il moto oscillatorio. La componente tangenziale ($\vec{F}_{ris,\tan} = \vec{F}_{g,\tan}$) rimane perciò la sola responsabile del moto oscillatorio. La legge di Newton diventa:

$$m\,a = -F_{g,\tan} = -m\,g\sin(\alpha) = -m\,g\sin\left(\frac{s}{L}\right)$$

dove s è la lunghezza dell'arco di circonferenza misurata a partire dal punto di equilibrio.

Se s è molto piccolo rispetto a L, allora anche l'angolo α è piccolo ed è possibile approssimare l'angolo con la funzione seno dell'angolo; infatti se $\alpha < 10°$ allora $\sin(\alpha) \cong \alpha$ con una differenza massima dello $0{,}2\,\%$ ne segue:

$$m\,a = -m\,g\sin\left(\frac{s}{L}\right) \cong -m\,g\,\frac{s}{L}$$

che ha la stessa forma di quella del moto armonico semplice ($\frac{m\,g}{L}$ al posto di k). Perciò, se l'oscillazione avviene per angoli piccoli, si può dire che il moto è armonico e il periodo vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Con l'aumentare dell'angolo di oscillazione anche il periodo aumenta leggermente rispetto a quello per piccole oscillazioni (questo non avveniva nel caso del moto armonico per il quale il periodo non dipende dall'ampiezza di oscillazione). Un difficile calcolo porta ad esprimere il periodo T in funzione dell'angolo massimo di oscillazione, indicato con α_0, confrontandolo con il periodo di oscillazione per piccoli angoli e indicato con T_0:

$$T = T_0\,(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha_0)+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2\sin^4(\tfrac{1}{2}\alpha_0)+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)^2\sin^6(\tfrac{1}{2}\alpha_0)+\cdots\cdots)\,.$$