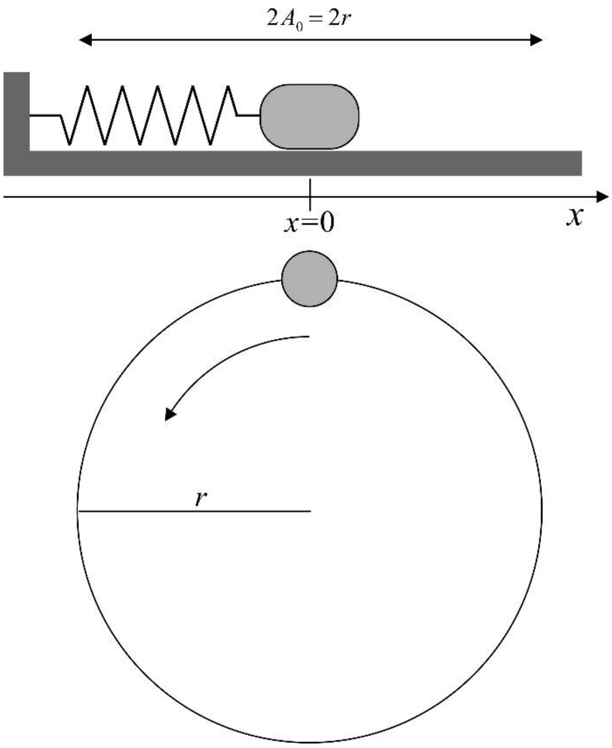
Il moto armonico semplice

Pur non trattandosi di un moto a due dimensioni, si è ritenuto opportuno analizzare questo tipo di moto in questa parte del capitolo sulla dinamica del punto materiale in quanto, come vedremo, questo moto è descrivibile come proiezione del moto circolare uniforme.

Prendiamo in considerazione un sistema massa – molla, ad esempio un carrello di massa m appoggiato su un binario orizzontale senza attrito e agganciato all'estremità di una molla di costante elastica k. Se si sposta la massa dal punto di equilibrio, questa si mette a oscillare.

Lo studio dell'oscillazione a partire dalla legge di Newton va al di là delle capacità matematiche di questo corso. Sceglieremo pertanto un approccio diverso per studiare il movimento della massa.



Prendiamo in considerazione la situazione sperimentale rappresentata dal disegno a lato. Se si ha l'accortezza di scegliere da una parte la giusta ampiezza di oscillazione e dall'altra la giusta velocità angolare, si può notare che il movimento della massa attaccata alla molla (rettangolo smussato) coincide con la proiezione sul piano di oscillazione (asse x) del moto circolare uniforme della massa a forma di disco. Questo significa che è possibile descrivere il moto oscillatorio dalla massa attaccata alla molla come la componente x del moto circolare e cioè:

$$x(t) = A_0 \cdot \cos(\alpha_0 + \omega t)$$

con A_0 al posto di r, quale ampiezza di oscillazione.

E con questo abbiamo "risolto" la parte cinematica del problema. Si può infatti dimostrare che anche per la velocità e per l'accelerazione si possono prendere le sole componenti x. Si avrà perciò:

$$v(t) = -A_0\omega \cdot \sin\left(\alpha_0 + \omega t\right) \quad \text{e}$$

$$a(t) = -A_0\omega^2 \cdot \cos\left(\alpha_0 + \omega t\right) = -\omega^2\, x(t).$$

Analizziamo a questo punto le forze agenti sulla massa m.

Se si escludono la forza peso e la reazione del piano di appoggio che si annullano reciprocamente, rimane la sola forza della molla cioè $F(x) = -k\,x$. La legge di Newton afferma d'altro canto che $F_{ris} = ma = -m\omega^2\, x$. Unendo le due relazioni risulta:

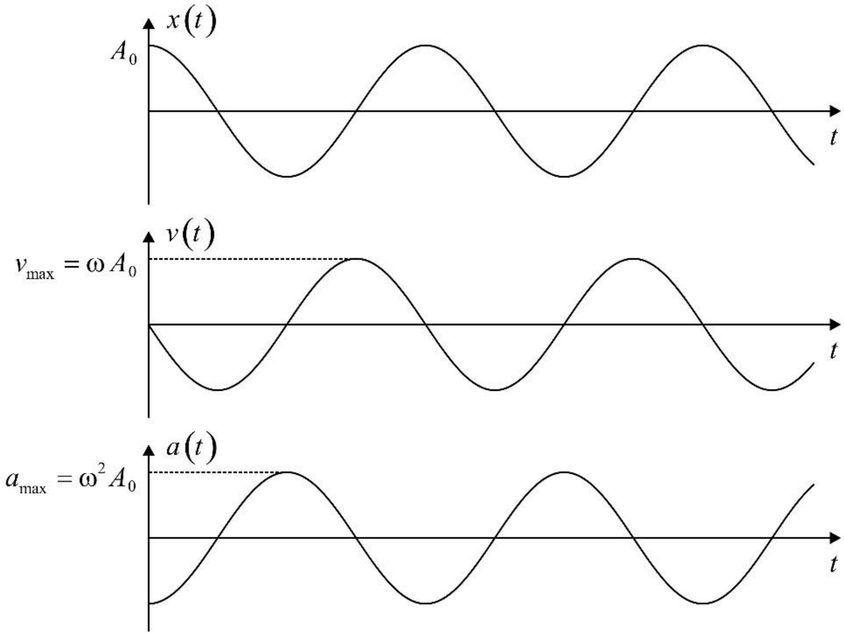
$$-k\,x = -m\omega^2 x.$$

Questo significa che:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{oppure:} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{oppure ancora:} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

dove T è il periodo di oscillazione.

Un moto che ha le caratteristiche fin qui descritte viene detto *moto armonico semplice.* Si può osservare che il periodo di oscillazione del moto armonico semplice non è influenzato dall'ampiezza di oscillazione ma dipende solo dalla molla e dalla massa. L'andamento grafico di posizione, velocità e accelerazione può essere osservato nel disegno a fianco.

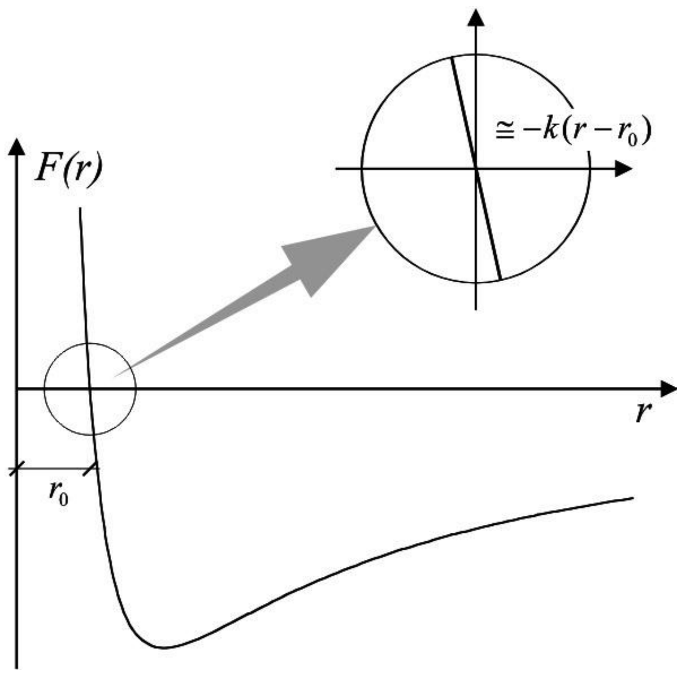


Riassumendo si può concludere che posizione, velocità e accelerazione di un moto armonico semplice sono funzioni sinusoidali, che per produrlo è necessaria una forza risultante di richiamo proporzionale allo spostamento e infine che l'ampiezza di oscillazione non influenza il periodo del moto.

Sperimentalmente si può osservare che la relazione che lega il periodo (grandezza cinematica) con la massa e la costante elastica della molla porta a risultati attendibili solo a condizione che la massa della molla sia trascurabile a confronto di quella del corpo che le è agganciato. Infatti quando le due masse diventano paragonabili, l'inerzia della molla stessa influenza il moto e quindi il periodo. Una formula empirica per il periodo che tiene conto pure della massa della molla indicata con m_0 è la seguente:

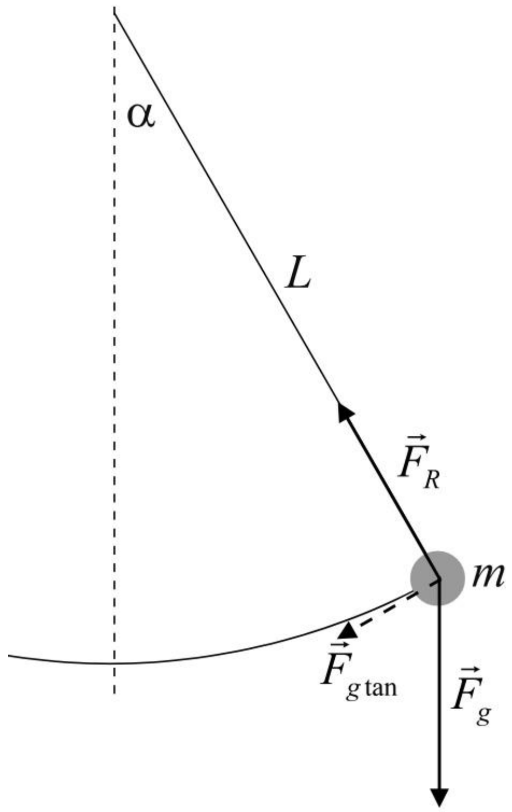
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{1}{3}m_0}{k}}\ .$$

In molte situazioni, in prossimità dell'equilibrio, la forza risultante non è del tipo $F=-k\,x$ ma per piccole oscillazione le si avvicina di molto (nel disegno a fianco ad esempio si mostra in modo approssimativo l'andamento della forza risultante agente su uno degli atomi di una molecola biatomica in funzione della distanza dall'altro).



In questi casi è possibile applicare la teoria sul moto armonico semplice e, conosciuto per altre vie il periodo di oscillazione (nell'esempio attraverso la frequenza luminosa emessa), è possibile risalire alla costante della forza in gioco.

Il pendolo



Un bel esempio di moto quasi armonico è quello del pendolo semplice composto da un corpo agganciato ad un'asta che può dondolare avanti e indietro attorno al punto di equilibrio.

Se analizziamo le forze in gioco ci rendiamo subito conto che la componente parallela all'asta (componente radiale) della forza risultante ($\vec{F}_{ris,\mathrm{rad}} = \vec{F}_R + \vec{F}_{g,\mathrm{rad}}$) o è nulla (ai due estremi del moto) o è responsabile della accelerazione centripeta necessaria a mantenere il corpo in moto circolare, ma non influenza il moto oscillatorio. La componente tangenziale ($\vec{F}_{ris,\tan} = \vec{F}_{g,\tan}$) rimane perciò la sola responsabile del moto oscillatorio. La legge di Newton diventa:

$$m\,a = -F_{g,\tan} = -m\,g\sin(\alpha) = -m\,g\sin\left(\frac{s}{L}\right)$$

dove s è la lunghezza dell'arco di circonferenza misurata a partire dal punto di equilibrio.

Se s è molto piccolo rispetto a L, allora anche l'angolo α è piccolo ed è possibile approssimare l'angolo con la funzione seno dell'angolo; infatti se $\alpha < 10°$ allora $\sin(\alpha) \cong \alpha$ con una differenza massima dello $0{,}2\,\%$ ne segue:

$$m\,a = -m\,g\sin\left(\frac{s}{L}\right) \cong -m\,g\,\frac{s}{L}$$

che ha la stessa forma di quella del moto armonico semplice ($\frac{m\,g}{L}$ al posto di k). Perciò, se l'oscillazione avviene per angoli piccoli, si può dire che il moto è armonico e il periodo vale:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

Con l'aumentare dell'angolo di oscillazione anche il periodo aumenta leggermente rispetto a quello per piccole oscillazioni (questo non avveniva nel caso del moto armonico per il quale il periodo non dipende dall'ampiezza di oscillazione). Un difficile calcolo porta ad esprimere il periodo T in funzione dell'angolo massimo di oscillazione, indicato con α_0, confrontandolo con il periodo di oscillazione per piccoli angoli e indicato con T_0:

$$T = T_0\,(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha_0) + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4(\tfrac{1}{2}\alpha_0) + \left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)^2 \sin^6(\tfrac{1}{2}\alpha_0) + \cdots\cdots)\,.$$