Lavoro e energia

Nel primo capitolo di questo corso ("Introduzione al concetto di energia") abbiamo preso atto che in natura esiste un importante principio (o legge) di conservazione, quello che afferma che una grandezza fisica, che noi chiamiamo energia, si conserva durante i vari cambiamenti che si possono osservare durante l'evoluzione di un processo fisico.

Nel secondo capitolo ("L'energia meccanica"), partendo dalla legge di conservazione dell'energia, abbiamo invece trovato sperimentalmente come calcolare l'energia legata al movimento (energia cinetica), quella legata al peso (energia potenziale gravitazionale) e infine quella legata a forze elastiche (energia potenziale elastica).

Abbiamo sottolineato sperimentalmente in quanto alle varie formule siamo giunti "semplicemente" misurando le grandezze fisiche associate alle varie forme di energia e trovando come legarle fra di loro in modo che fosse sempre verificato il principio di conservazione.

Nei capitoli successivi ("Cinematica" e "Le forze e le leggi della dinamica") ci siamo occupati invece delle grandezze necessarie a descrivere il movimento e delle relazione che legano il movimento e le sue cause, in altre parole abbiamo trattato le leggi di Newton.

In questo capitolo definiremo un nuovo concetto fisico, che chiameremo il **lavoro di una forza**, che ci permetterà di ritrovare la legge di conservazione dell'energia e in particolare la legge di conservazione dell'energia meccanica non più come un fatto sperimentale ma come conseguenza diretta delle leggi della dinamica.

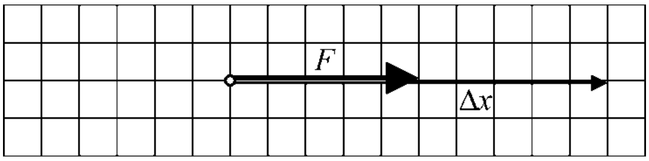
Il lavoro di una forza

Si dice che una forza compie un lavoro su un corpo quando quest'ultima agisce mentre il corpo si sposta. Se non c'è movimento non c'è lavoro.

Una definizione semplice e generale del concetto di lavoro necessita di strumenti matematici che non possedete ancora. Cominceremo perciò a calcolare il lavoro di una forza in situazioni particolari.

Il lavoro di una forza costante lungo un percorso rettilineo

Prendiamo innanzitutto in considerazione il caso di una forza costante che agisce su un corpo che si muove lungo una retta e cominciamo con la situazione in cui la forza agisce nella stessa direzione e verso dello spostamento. (Nel disegno abbiamo distinto il vettore forza dal vettore spostamento indicandolo con una freccia più spessa.)



In questo caso il lavoro della forza F, indicato con il simbolo W dall'inglese "work", vale:

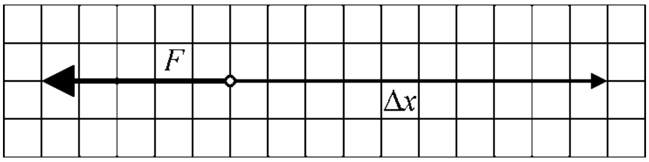
$$W = F \cdot \Delta x\,.$$

L'unità di misura del lavoro è pertanto:

$$[W] = [F] \cdot [\Delta x] = N \cdot m = J$$

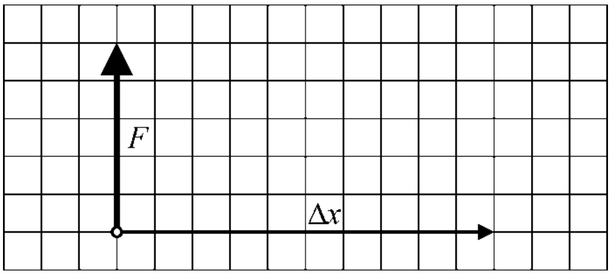
Ad esempio una forza di intensità $1N$ che agisce parallelamente allo spostamento rettilineo di lunghezza $1m$ compie un lavoro di: $1N \cdot 1m = 1Nm = 1J$.

Se la forza agisce nella stessa direzione ma verso opposto rispetto allo spostamento il lavoro della forza F diventa:



$$W = -F \cdot \Delta x\,.$$

Facciamo subito notare che, pur non avendo usato la notazione vettoriale, forza e spostamento sono grandezze vettoriali, mentre la grandezza lavoro di una forza è una grandezza **non** vettoriale, cioè una grandezza scalare.



Un altro caso particolare ma sovente presente è quello in cui forza e spostamento sono perpendicolari fra di loro (ad esempio la reazione del piano d'appoggio che è sempre perpendicolare al piano su cui si muove il corpo, oppure la forza di gravità quando un corpo si muove orizzontalmente).

In questo caso il lavoro è nullo.

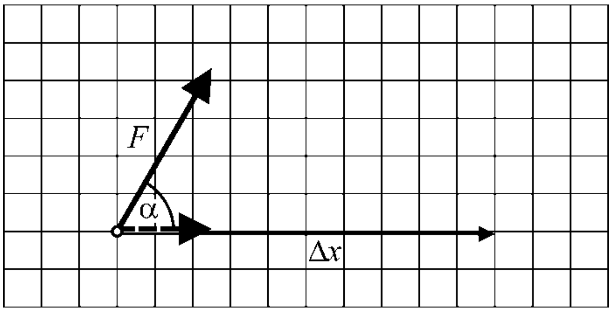
Sì, avete letto bene, una forza perpendicolare allo spostamento non compie nessun lavoro.

Facciamo alcuni esempi:

- una forza $F = 40\,N$ agisce parallelamente ad uno spostamento $\Delta x = 5{,}0\,m$ compie un lavoro pari a:
  $W = F \cdot \Delta x = 40\,N \cdot 5{,}0\,m = 200\,J$.
- Una forza $F = 25\,N$ agisce nella stessa direzione ma verso opposto rispetto allo spostamento $\Delta x = 6{,}0\,m$ compie un lavoro pari a:
  $W = -F \cdot \Delta x = -25\,N \cdot 6{,}0\,m = -150\,J$.

Cosa capita ora se, pur continuando considerare il caso di una forza costante e uno spostamento rettilineo, forza e spostamento non sono più paralleli (o antiparalleli) né perpendicolari?

Quanto vale ad esempio il lavoro di una forza costante di intensità $1,0\,N$ che agisce lungo uno spostamento rettilineo di lunghezza $1,0\,m$ quando fra i due vettori c'è un angolo α di $60°$?



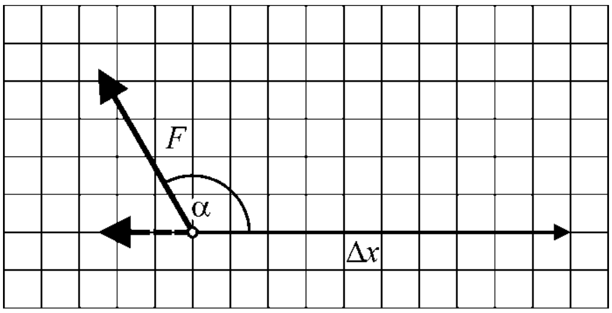
A partire da quanto visto prima è facile comprendere che, se scomponiamo la forza in una componente parallela e una perpendicolare, è solo la componente parallela a compiere lavoro. Possiamo pertanto scrivere:

$$W = F_{||} \cdot \Delta x \,.$$

Alla domanda che abbiamo posto poche righe sopra possiamo rispondere solo dopo aver calcolato (o eventualmente, se si disegna in scala, misurato) il valore della componente parallela della forza F. Nel nostro caso la componente parallela della forza F vale $F_{||} = 0,5\,N$. Il lavoro di F vale pertanto:

$W = 0,5\,N \cdot 1m = 0,5\,J$.

Nel caso in cui l'angolo fra la forza F e lo spostamento Δx supera i $90°$ (è compreso cioè fra $90°$ e $180°$) il calcolo del lavoro è:



$$W = -F_{||} \cdot \Delta x \,,$$

in quanto la componente della forza F è antiparallela allo spostamento.

A questo punto, osservando che:

- nel caso di una forza parallela allo spostamento la componente parallela del vettore forza è il vettore stesso,
- nel caso di una forza perpendicolare allo spostamento la componente parallela del vettore forza è un vettore nullo, vale a dire di intensità pari a zero,
- prendendo come positiva la direzione dello spostamento, un vettore avente la stessa direzione ma verso opposto, assume valore negativo,

il lavoro di una forza costante lungo un percorso rettilineo può essere generalizzato:

$$W = F_{||} \cdot \Delta x \,.$$

Facciamo alcuni esempi:

- calcolare il lavoro di una forza $F = 40\,N$ che agisce su un corpo in moto rettilineo con un angolo di $60°$ rispetto allo spostamento $\Delta x = 15,0\,m$.

  Calcoliamo innanzitutto la componente parallela:

  $F_{||} = \frac{1}{2} \cdot 40\,N = 20\,N$,

  e quindi il lavoro:

  $W = F_{||} \cdot \Delta x = 20\,N \cdot 15,0\,m = 300\,J$.

- Calcolare il lavoro di una forza $F = 60\,N$ che agisce su un corpo in moto rettilineo con un angolo di $135°$ rispetto allo spostamento $\Delta x = 12,0\,m$.

  Calcoliamo innanzitutto la componente parallela:

  $F_{||} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 60\,N = -42,4\,N$ (il segno "-" perché l'angolo è maggiore di $90°$),

  e quindi il lavoro:

  $W = F_{||} \cdot \Delta x = -42,4\,N \cdot 12,0\,m = -509\,J$

- Calcolare il lavoro di una forza $F = 50\,N$ che agisce su un corpo in moto rettilineo di spostamento $\Delta x = 25,0\,m$; della forza conosciamo la componente perpendicolare pari a $F_{\perp} = 30\,N$.

  Calcoliamo innanzitutto la componente parallela:

  $F_{||} = \sqrt{(50\,N)^2 - (30\,N)^2} = 40\,N$

  Dato che non sappiamo se l'angolo fra la forza e lo spostamento è maggiore o minore di $90°$ ci sono due possibili soluzioni:

  $W = F_{||} \cdot \Delta x = 40\,N \cdot 25,0\,m = 1000\,J$

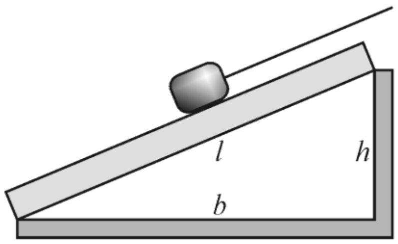
  oppure

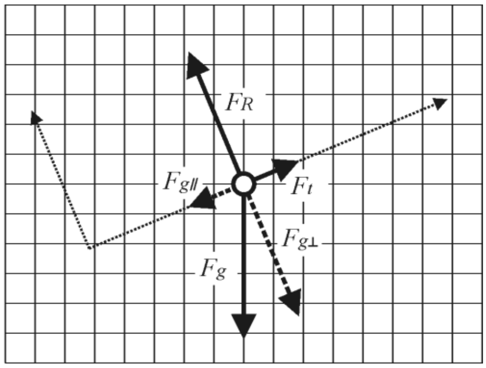
  $W = F_{||} \cdot \Delta x = -40\,N \cdot 25,0\,m = -1000\,J$

Esempi di problemi legati al lavoro di una forza.

Esempio 1.

Prendiamo in considerazione un corpo di massa $m = 2,6\,kg$ trainato a velocità costante lungo un piano inclinato senza attrito. La forza trainante sia parallela al piano. Il piano sia lungo $l = 130\,cm$ e il dislivello fra il punto più basso e quello più alto sia $h = 50\,cm$.





Analizzando la situazione, dato che la velocità di risalita è costante, per il principio di inerzia si deduce che la risultante delle forze deve essere pari a zero e perciò, viste le forze in giogo deve valere:

$F_R = F_{g\perp}$ e $F_t = F_{g\|}$.

Inoltre, data la geometria e i rapporti di similitudine (vedi capitolo "Esempi di applicazione delle leggi di Newton") deve pure valere:

$$F_{g\perp} = F_g \cdot \frac{b}{l} = m \cdot g \cdot \frac{b}{l} = 2,6\,kg \cdot 9,8\,\frac{N}{kg} \cdot \frac{120\,cm}{130\,cm} = 23,5\,N$$ e

$$F_{g\|} = F_g \cdot \frac{h}{l} = m \cdot g \cdot \frac{h}{l} = 2,6\,kg \cdot 9,8\,\frac{N}{kg} \cdot \frac{50\,cm}{130\,cm} = 9,8\,N\,.$$

Calcoliamo ora il lavoro di tutte le forze e della forza risultante.

Il lavoro della forza di traino, parallela al piano vale:

$W\left(F_t\right) = F_t \cdot \Delta x = 9,8\,N \cdot 1,3\,m = 12,7\,J$.

Il lavoro dalla forza di reazione del piano d'appoggio è nullo in quanto forza e spostamento sono perpendicolari.

$W\left(F_R\right) = 0\,J$.

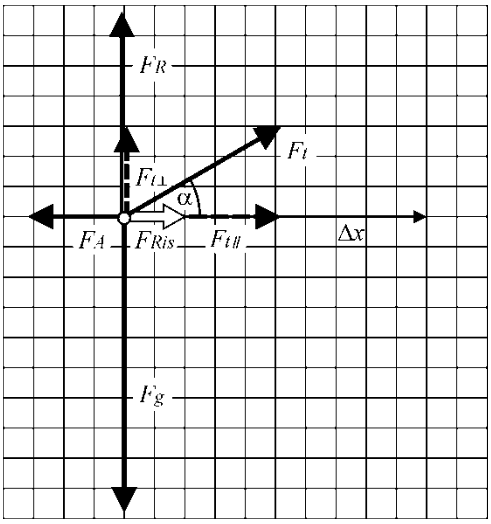
Il lavoro della forza di gravità, con componente antiparallela allo spostamento lungo il piano vale:

$W\left(F_g\right) = -F_{g\|} \cdot \Delta x = \left(-9,8\,N\right) \cdot 1,3\,m = -12,7\,J$.

E infine il lavoro della forza risultante è nullo in quanto la forza stessa ha intensità pari a zero, cioè:

$W\left(F_{Ris}\right) = 0\,N \cdot 1,3\,m = 0\,J$.

Esempio 2.



Un corpo di massa $m = 5,0\,kg$ viene trainato su un piano orizzontale con attrito (coefficiente di attrito pari a $\mu = 0,47$) da una forza costante di intensità $F = 30\,N$ inclinata di $\alpha = 30°$ rispetto al piano.

Per poter sommare le forze per determinare la forza risultante occorre calcolare la componente orizzontale e quella verticale della forza di traino (la sola forza in gioco non parallela né perpendicolare al piano). Con qualche relazione geometrica e usando il teorema di Pitagora per le due componenti della forza di traino si trova:

$F_{t||} = 26\,N$ e $F_{t\perp} = 15\,N$.

Inoltre, dato che non c'è movimento verticale, il peso è controbilanciato dalla reazione del piano d'appoggio sommata alla componente verticale della forza di traino, perciò vale:

$F_g = F_R + F_{t\perp} \;\Rightarrow\; F_R = F_g - F_{t\perp} = 49\,N - 15\,N = 34\,N$.

La forza di attrito vale pertanto:

$F_A = \mu \cdot F_R = 0,47 \cdot 34\,N = 16\,N$.

Infine la forza risultante è pari a:

$F_{Ris} = F_{t||} - F_A = 26\,N - 16\,N = 10\,N$.

Il lavoro delle varie forze lungo un percorso rettilineo $\Delta x = 10\,m$ è a questo punto presto calcolato:

$W\left(F_t\right) = F_{t||} \cdot \Delta x = 26\,N \cdot 10\,m = 260\,J$,

$W\left(F_R\right) = 0\,J$, in quanto la forza di reazione è perpendicolare allo spostamento,

$W\left(F_A\right) = -F_A \cdot \Delta x = \left(-16\,N\right) \cdot 10\,m = -160\,J$,

$W\left(F_g\right) = 0\,J$, in quanto anche la forza di gravità è perpendicolare allo spostamento, e infine

$W\left(F_{Ris}\right) = F_{ris} \cdot \Delta x = 10\,N \cdot 10\,m = 100\,J$.

Importante conclusione

Riassumiamo e analizziamo i risultati dei due esempi:

esempio 1:

$$W(F_t) = 12,7\,J$$
$$W(F_R) = 0\,J$$
$$W(F_g) = -12,7\,J$$
$$W(F_t) + W(F_R) + W(F_g) = 12,7\,J + 0\,J + (-12,7\,J) = 0\,J = W(F_{Ris}).$$

esempio 2:

$$W(F_t) = 260\,J$$
$$W(F_R) = 0\,J$$
$$W(F_A) = -160\,J$$
$$W(F_g) = 0\,J$$
$$W(F_t) + W(F_R) + W(F_A) + W(F_g) = 260\,J + 0\,J + (-160\,J) + 0\,J = 100\,J = W(F_{Ris}).$$

Da questi due esempi si osserva che il lavoro della forza risultante è pari alla somma dei lavori delle singole forze. Con strumenti matematici non ancora in vostro possesso è possibile dimostrare che, quanto appena affermato, è generalizzabile, cioè che, data

$$\vec{F}_{Ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_N$$

vale:

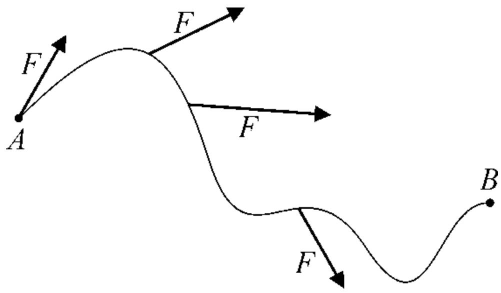
$$W(F_{Ris}) = W(F_1) + W(F_2) + W(F_3) + \cdots + W(F_N).$$

Il lavoro di una forza qualsiasi lungo un percorso qualsiasi

Commento e premessa a questa lezione.

Quello che segue questa breve spiegazione è importante per comprendere come si fa a calcolare il lavoro di una forza al di là delle semplici situazioni viste in precedenza, o meglio ancora, a capire il principio del calcolo a livello teorico; nella pratica ci limiteremo a pochi esempi che calcoleremo insieme.

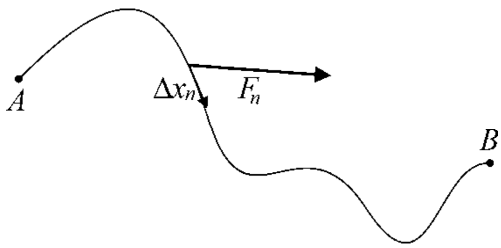
Vi chiedo però molta attenzione e concentrazione perché si tratta di un ragionamento astratto che ci permette di generalizzare quanto visto finora.



Finora ci siamo occupati di forze costanti e percorsi rettilinei. Quanto vale il lavoro di una forza che varia lungo un cammino non rettilineo?

Se, ad esempio, la situazione è quella descritta nel disegno a lato, quanto vale il lavoro della forza F quando si sposta dal punto A al punto B seguendo il cammino indicato?

Noi sappiamo calcolare il lavoro di una forza costante lungo un percorso rettilineo.



Perciò per calcolare il lavoro della forza F dal punto A al punto B non dobbiamo fare altro che suddividere il percorso in tanti pezzettini piccoli al punto tale che ciascuno possa essere considerato come un tratto rettilineo.

Inoltre, se ciascun tratto nel quale il cammino è stato suddiviso è piccolo a piacimento, l'intensità, la direzione (e il verso) della forza lungo quel tratto possono essere considerati costanti.

È facile a questo punto calcolare il lavoro della forza F lungo quel tratto in quanto è riconducibile a quanto abbiamo appena esaminato.

Chiamato il tratto in esame Δx_n (con n si intende una qualsiasi delle suddivisioni lungo il tragitto che da A porta a B) e indicata la forza lungo quel tratto come F_n, allora il lavoro W_n della forza lungo quel tratto vale semplicemente:

$$W_n = F_{n||} \cdot \Delta x_n$$

(con $F_{n||}$ si intende la componente di F_n parallela a Δx_n).

Appare ovvio a questo punto che il lavoro lungo tutto il tragitto è la somma di tutti i lavori cioè:

$$W_{A\to B}(F) = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n + \cdots + W_N =$$
$$= F_{1||} \cdot \Delta x_1 + F_{2||} \cdot \Delta x_2 + F_{3||} \cdot \Delta x_3 + \cdots + F_{n||} \cdot \Delta x_n + \cdots + F_{N||} \cdot \Delta x_N$$

Nelle pagine che seguono applicheremo il principio che abbiamo appena studiato a due forze che abbiamo già incontrato, cioè la forza di gravità e la forza elastica.

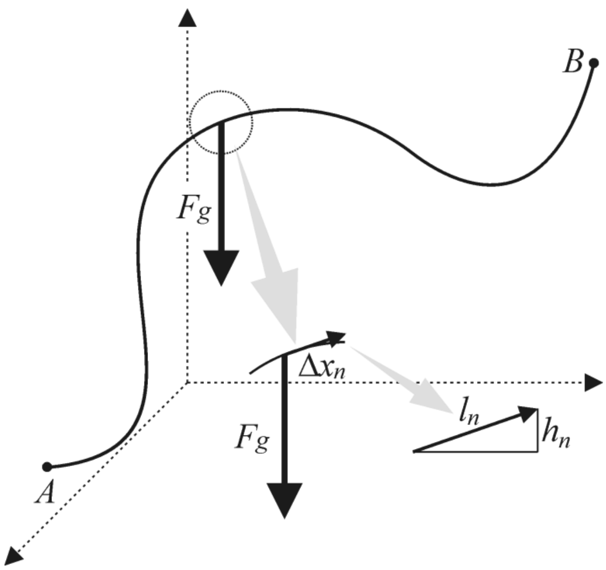
Nel caso della forza di gravità vedremo come calcolare il lavoro di una forza costante (costante in intensità, direzione e verso, cioè costante come vettore) lungo un percorso qualsiasi, mentre nel secondo caso, quello riguardante la forza elastica, calcoleremo il lavoro di una forza che cambia di intensità in funzione della posizione (noi sappiamo che la forza elastica cambia con l'allungamento della molla) lungo un percorso rettilineo.

Il lavoro della forza di gravità

Cominciamo con il calcolare il lavoro della forza di gravità (forza costante) lungo un percorso qualsiasi.

Applichiamo quanto abbiamo appena visto, suddividendo il percorso da A a B in tanti tratti piccoli al punto tale che possono essere considerati rettilinei.

Nel disegno a lato viene mostrato il principio: si sceglie un tratto qualsiasi del percorso (quello indicato con il cerchio tratteggiato), si ingrandisce il disegno in modo da mostrare che, se scelto sufficientemente piccolo, il tratto del percorso può essere assimilato ad un percorso rettilineo e infine si riconduce il calcolo del lavoro della forza di gravità lungo quel piccolo tratto ad una situazione già nota – vedi quanto si riporta nelle prossime righe.



Iniziamo a determinare il lavoro della forza di gravità lungo il tratto Δx_n (rettilineo). Ci si rende subito conto che il calcolo è del tutto identico al primo esempio che abbiamo visto nel capitolo "Esempi di problemi legati al lavoro di una forza", cioè il calcolo del lavoro della forza di gravità lungo un piano inclinato di lunghezza l_n e dislivello h_n, vale a dire:

$$W_n\left(F_g\right) = -F_{g||}\cdot\Delta x_n = -\left(m\cdot g\cdot\frac{h_n}{l_n}\right)\cdot l_n = -m\cdot g\cdot h_n.$$

Il lavoro totale della forza di gravità da A a B si determina pertanto sommando assieme tutti i lavori parziali, cioè:

$$\begin{aligned}W_{A\to B}\left(F_g\right) &= W_1 + W_2 + \cdots + W_N = \\ &= \left(-m\cdot g\cdot h_1\right) + \left(-m\cdot g\cdot h_2\right) + \cdots + \left(-m\cdot g\cdot h_N\right).\end{aligned}$$

Raccogliamo a fattore comune il termine “ $-m \cdot g$ ” così che il tutto diventa:

$$W_{A \to B}\left(F_g\right) = \left(-m \cdot g\right) \cdot \left(h_1 + h_2 + \cdots + h_N\right).$$

La somma di tutti i dislivelli corrisponde al dislivello totale da A a B; se indichiamo il dislivello totale con h il lavoro della forza di gravità da A a B lungo un percorso qualsiasi diventa:

$$W_{A \to B}\left(F_g\right) = -m \cdot g \cdot h.$$

Il dislivello h può essere calcolato come differenza fra la quota del punto B (indicata con h_B oppure con z_B se si utilizza il sistema di riferimento “ x, y, z ”) e quella del punto A (indicata con h_A o z_A), vale a dire: $h = h_B - h_A$ oppure $h = z_B - z_A$.

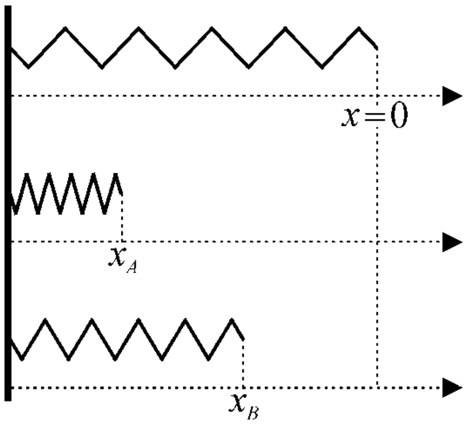
Il lavoro della forza di gravità da A a B può quindi essere scritto anche in questo modo:

$$W_{A \to B}\left(F_g\right) = -m \cdot g \cdot \left(h_B - h_A\right) = -\left(m \cdot g \cdot h_B - m \cdot g \cdot h_A\right)$$

oppure

$$W_{A \to B}\left(F_g\right) = -\left(m \cdot g \cdot z_B - m \cdot g \cdot z_A\right).$$

Il lavoro di una forza elastica

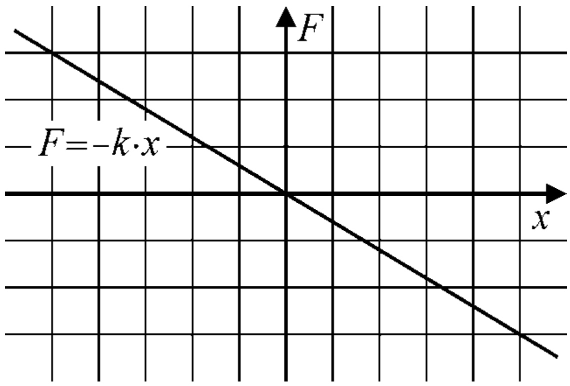


Un altro esempio interessante è quello dal calcolo del lavoro di una forza elastica (una forza che cambia) lungo un percorso rettilineo.

Calcoliamo il lavoro compiuto da una molla che passa da un punto di compressione x_A a un punto di compressione x_B, x_A e x_B misurati dal punto di riposo della molla.

Noi sappiamo che la forza di una molla è esprimibile con la formula: $F = k \cdot \Delta l$, dove k è la costante elastica della molla e Δl è lo schiacciamento o l'allungamento della molla misurato dal suo punto di riposo.

Avendo scelto un sistema di riferimento in cui il punto di riposo della molla è stato posto in $x = 0$, l'allungamento o lo schiacciamento della molla sono determinabili semplicemente dalla posizione x facendo semplicemente attenzione che con x positivo si intende allungamento mentre con x negativo abbiamo schiacciamento.



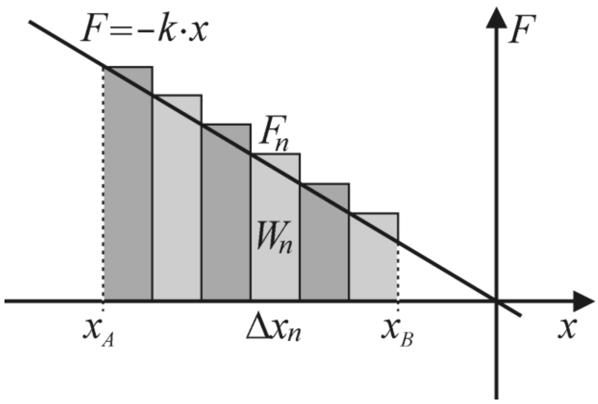
Quando la molla è schiacciata essa spinge in senso positivo (intendendo che la forza della molla agisce nel senso che noi abbiamo scelto come positivo), quando invece è tirata essa agisce in senso opposto.

Possiamo allora esprimere la forza della molla in funzione della posizione in modo tale che tenga conto di quanto abbiamo appena detto in questo modo:

$$F = -k \cdot x,$$

così che quando la posizione e positiva (molla tirata) la forza agisce in senso negativo, quando invece la posizione è negativa (molla schiacciata) la forza agisce in senso positivo.

In questa prima parte non si è affrontato ancora il calcolo del lavoro ma si è semplicemente messo ordine sugli aspetti matematici riguardanti la forza elastica.



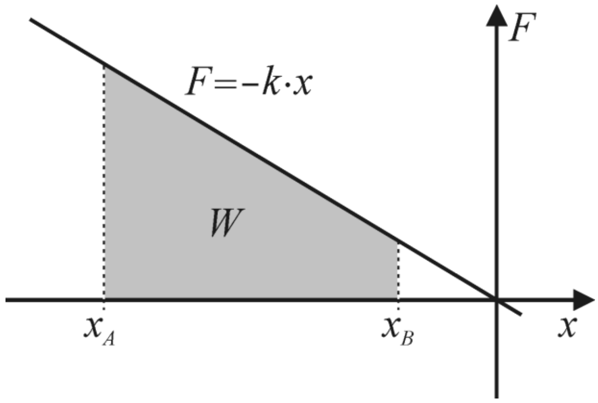
Applichiamo nuovamente quanto abbiamo appena visto, suddividendo il percorso da x_A a x_B in tanti tratti piccoli al punto tale la forza della molla lungo quel tratto possa essere considerata costante.

Il lavoro W_n lungo un tratto qualsiasi Δx_n diventa pertanto:

$W_n = F_n \cdot \Delta x_n$

assimilabile, sul grafico forza della molla in funzione della posizione, all'area di un rettangolo che ha per altezza F_n e base Δx_n.

Il lavoro totale da x_A a x_B è la somma di tutti i lavori parziali e pertanto la somma della area di tutti i rettangoli.



Se la suddivisione è sempre più fitta (cioè se i Δx_n diventano piccoli a piacimento) possiamo ritenere che l'area ottenuta sommando l'area di tutti i rettangoli è pari all'area del trapezio che ha per base maggiore la forza della molla nella posizione x_A (indicata con F_A), per base minore la forza della molla nella posizione x_B (F_B) e per altezza $\Delta x = x_B - x_A$. Il lavoro della molla da x_A a x_B diventa perciò:

$$W = \frac{1}{2}\left(F_A + F_B\right)\cdot\left(x_B - x_A\right)$$

Il principio per cui si possa passare dalla somma di aree di tanti rettangoli a quella di un trapezio è lo stesso che avevamo visto quando dovevamo calcolare lo spazio percorso attraverso il calcolo di un'area. Facciamo solo attenzione che queste "aree" sono solo rappresentazioni grafiche, non si misurano in metri quadrati ma nell'unità di misura che esse rappresentano; nel caso dello spazio percorso l'unità di misura dell'"area" erano i metri; in questo caso, trattandosi di un lavoro, l'unità di misura sarà il joule.

Noi sappiamo che $F_A = -k \cdot x_A$ e $F_B = -k \cdot x_B$, quindi:

$$W = \frac{1}{2}\left(\left(-k \cdot x_A\right) + \left(-k \cdot x_B\right)\right)\cdot\left(x_B - x_A\right)$$

$$= -\frac{1}{2}k \cdot \left(x_A + x_B\right)\cdot\left(x_B - x_A\right) = -\frac{1}{2}k \cdot \left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

cioè in ultima analisi:

$$W = -\left(\frac{1}{2}k \cdot x_B^2 - \frac{1}{2}k \cdot x_A^2\right)$$

Avrete sicuramente notato che l'espressione per il calcolo del lavoro della forza di gravità e quella per il lavoro della forza della molla sono molto simili alle espressioni per il calcolo dell'energia potenziale di gravità rispettivamente dell'energia potenziale elastica. Ritorneremo dettagliatamente su questo fatto nei capitoli successivi.

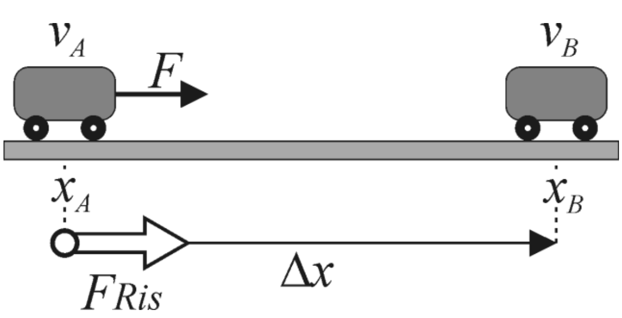
Il teorema dell'energia cinetica

A questo punto siamo in grado sfruttare ciò che abbiamo imparato sul lavoro di una forza per esaminare come il concetto di lavoro lega tra di loro le grandezze forza risultante, posizione e velocità.

Questo paragrafo, sebbene apparentemente corto, è di estrema importanza.

Esso è la base per capire il legame fra le leggi di Newton, in particolare la seconda legge, quella che afferma $F_{Ris} = m \cdot a$, e il principio di conservazione dell'energia.

Esaminiamo il caso di un corpo che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. La somma di tutte le forze ad esso applicate è evidentemente una forza orizzontale (quindi parallela al piano).



Il lavoro della forza risultante è presto calcolato:

$$W\left(F_{Ris}\right) = F_{Ris} \cdot \Delta x .$$

Dalla legge di Newton sappiamo inoltre:

$F_{Ris} = m \cdot a$ e quindi:

$$W\left(F_{Ris}\right) = m \cdot a \cdot \Delta x .$$

D'altro canto lo spazio percorso da un corpo in moto uniformemente accelerato è:

$$\Delta x = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2 \cdot a} .$$

Sostituendo nella formula del lavoro della forza risultante il valore di Δx appena calcolato otteniamo:

$$W\left(F_{ris}\right) = m \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v_B^2 - v_A^2}{2 \cdot \cancel{a}} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 .$$

Il termine $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ sappiamo essere l'energia cinetica di un corpo di massa m e velocità v, quindi:

$$W\left(F_{ris}\right) = E_{cin}\left(B\right) - E_{cin}\left(A\right) = \Delta E_{cin} .$$

La formula che abbiamo appena visto sta a significare che il lavoro compiuto dalla forza risultante che ha agito dal punto A al punto B è pari alla variazione dell'energia cinetica del corpo, cioè alla differenza della sua energia cinetica fra il punto A e il punto B.

È possibile dimostrare che questa relazione è valida non solo in caso di forza risultante costante e percorso rettilineo ma in qualsiasi caso, quindi anche quando la forza cambia e il percorso è qualsiasi.

Essa prende il nome di **"teorema dell'energia cinetica"**.

Ad esempio un corpo di massa $m = 2,5\,kg$ che si muove a velocità $v = 4,0\,\frac{m}{s}$ è soggetto ad una forza risultante $F_{Ris} = 10\,N$ parallela alla velocità. Qual è la velocità del corpo se la forza ha agito lungo un percorso $\Delta x = 30\,m$?

Calcoliamo innanzitutto l'energia cinetica iniziale del corpo:

$$E_{cin,iniziale} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{iniziale}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,5\,kg \cdot \left(4,0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 = 20\,J$$

Determiniamo ora il lavoro della forza risultante:

$$W\left(F_{Ris}\right) = 10\,N \cdot 30\,m = 300\,J\ .$$

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica e troviamo:

$$E_{cin,\,finale} = E_{cin,iniziale} + \Delta E_{cin} = E_{cin,iniziale} + W\left(F_{Ris}\right) = 20J + 300J = 320J\ ,$$

$$v_{finale} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{cin,\,finale}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 320J}{2,5\,kg}} = 16\,\tfrac{m}{s}\ .$$

In questo riquadro mostro un qualche passaggio in più per meglio capire il calcolo precedente.

$$\Delta E_{cin} = E_{cin,\,finale} - E_{cin,iniziale}$$

$$\Delta E_{cin} = W\left(F_{Ris}\right)$$

Dalle due relazioni si ricava: $E_{cin,\,finale} = E_{cin,iniziale} + W\left(F_{Ris}\right)$.

Ma dato che: $E_{cin,\,finale} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{finale}^2$ *segue:* $v_{finale} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{cin,\,finale}}{m}}$

Un altro esempio

Un'automobile di massa $m = 1296\,kg$ in frenata costante riduce la propria velocità da $50\,\frac{km}{h}$ a $40\,\frac{km}{h}$ percorrendo uno spazio $\Delta x = 4,5\,m$. Determinare lo spazio che deve ancora percorrere per fermarsi.

Cominciamo con il calcolare l'energia cinetica iniziale e quella finale (che indicheremo con $E_{cin,0}$ rispettivamente $E_{cin,1}$) dell'automobile:

$$E_{cin,0} = \frac{1}{2}\cdot 1296\,kg\cdot\left(\frac{50}{3,6}\,\frac{m}{s}\right)^2 = 125\,kJ\ ,\quad E_{cin,1} = \frac{1}{2}\cdot 1296\,kg\cdot\left(\frac{40}{3,6}\,\frac{m}{s}\right)^2 = 80\,kJ$$

Applicando il teorema dell'energia cinetica troviamo la forza agente sull'automobile:

$$F_{Ris} = \frac{W\left(F_{ris}\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta E_{cin}}{\Delta x} = \frac{\left(80-125\right)kJ}{4,5\,m} = -10\,kN\ .$$

Il segno "-" sta a indicare una forza di verso opposto alla direzione di marcia, cioè una forza frenante.

Sapendo che alla fine l'energia cinetica ($E_{cin,2}$) è pari a zero si può calcolare:

$$\Delta x' = \frac{W\left(F_{ris}\right)}{F_{Ris}} = \frac{\Delta E_{cin}}{F_{Ris}} = \frac{\left(0-80\right)kJ}{-10\,kN} = 8,0\,m\ .$$

Un ulteriore esempio

Una biglia di massa $m = 25\,g$ viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale pari a $14,7\,\frac{m}{s}$. Si ammetta che la forza di gravità sia la sola forza presente (non ci sono attriti). Determinare la velocità della biglia dopo che è salita di $9,8\,m$ rispetto al punto di partenza.

L'energia cinetica iniziale è pari a: $E_{cin,0} = \frac{1}{2}\cdot 0,025\,kg\cdot\left(14,7\,\frac{m}{s}\right)^2 = 2,7\,J$.

Il lavoro della forza di gravità vale: $W\left(F_g\right) = -0,025\,kg\cdot 9,8\,\frac{N}{kg}\cdot 9,8\,m = -2,4\,J$.

L'energia cinetica finale si trova applicando il teorema dell'energia cinetica:

$E_{cin,1} = E_{cin,0} + \Delta E_{cin} = E_{cin,0} + W\left(F_g\right) = 2,7\,J + \left(-2,4\,J\right) = 0,3\,J$, da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\cdot E_{cin,1}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,3\,J}{0,025\,kg}} = 4,9\,\frac{m}{s}\ .$$

Le forze conservative e le energie potenziali

Che cosa c'entra il teorema dell'energia cinetica con quello di conservazione dell'energia visto nei primi capitoli di questo corso (quelli che abbiamo affrontato nei mesi di settembre e ottobre)?

Per rispondere a questa domanda occorre innanzitutto calcolare il lavoro di alcune forze esaminate nel capitolo dedicato alla dinamica.

Commento

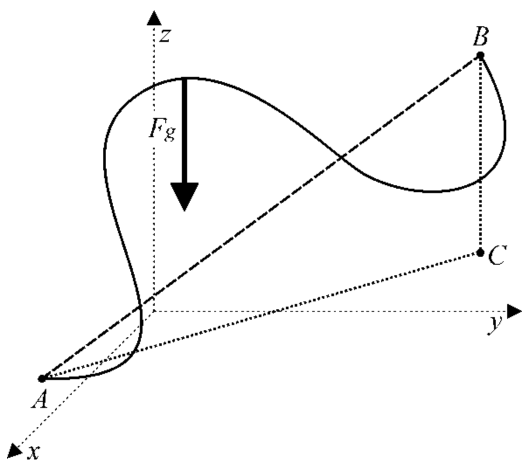
Gli argomenti trattati in questo paragrafo sono piuttosto astratti.

Come ho avuto già modo di accennare, alla fine del capitolo "lavoro e energia" chiuderemo, per così dire, un cerchio, cominciato con i primi due capitoli dell'anno, nei quali avevamo introdotto il principio di conservazione dell'energia.

In questo paragrafo si porrà un legame profondo fra il lavoro di alcune forze (quelle che verranno inserite in un insieme di forze dette "forze conservative") e le corrispondenti energie potenziali.

Alla fine dovreste vedere con occhi nuovi quanto avevamo già affrontato all'inizio dell'anno scolastico.

Cominciamo con la forza di gravità.



Prendiamo in considerazione la situazione di un corpo che va dal punto A al punto B passando per tre diversi percorsi, il percorso diretto (linea tratteggiata e indicato come percorso no. 1), un tragitto dapprima orizzontale fino al punto C (esattamente sotto il punto B) e poi verticale fino al punto B (linea puntinata, percorso no. 2) e infine un percorso qualsiasi dal punto A al punto B (linea continua, percorso no. 3).

Calcoliamo ora il lavoro della forza di gravità lungo i tre percorsi.

Non occorre ripetere il calcolo già effettuato alla prima pagina del paragrafo "Esempi di problemi legati al lavoro di una forza" per quel che riguarda il calcolo del lavoro lungo il tragitto no. 1 e alla seconda e terza pagina del paragrafo "Lavoro di una forza qualsiasi lungo un percorso qualsiasi", sezione "Il lavoro della forza di gravità", per quel che riguarda il calcolo del lavoro lungo il tragitto no. 3.

Esso vale:

$$W_{A\to B}\left(F_g\right) = -\left(m\cdot g\cdot z_B - m\cdot g\cdot z_A\right)$$

per entrambi i percorsi.

Il calcolo del lavoro della forza di gravità lungo il percorso no. 2 è presto fatto.

Suddividiamo il percorso in due tratti, uno orizzontale da A a C e uno verticale da C a B e cioè:

$$W_{A\to B}\left(F_g\right)=W_{A\to C}\left(F_g\right)+W_{C\to B}\left(F_g\right).$$

Il fatto di poter suddividere il calcolo del lavoro in due parti è una conseguenza diretta di quanto abbiamo visto nel paragrafo "Lavoro di una forza qualsiasi lungo un percorso qualsiasi". Se per il calcolo del lavoro è possibile suddividere il percorso in tanti tratti è sicuramente possibile dividerlo in due parti.

Si tratta ora di calcolare il lavoro nei due tratti.

Il lavoro della forza di gravità da A a C è nullo in quanto forza e percorso sono perpendicolari fra di loro.

Quindi:

$$W_{A\to C}\left(F_g\right)=0.$$

Il lavoro da C a B è facile da calcolare trattandosi del lavoro di una forza costante (la forza di gravità) lungo un percorso rettilineo e parallelo (nel nostro caso antiparallelo, cioè con verso opposto).

Quindi:

$$W_{C\to B}\left(F_g\right)=-m\cdot g\cdot\Delta z=-m\cdot g\cdot\left(z_B-z_C\right)$$

ma dato che la quota di A è uguale alla quota di C si ottiene infine:

$$W_{C\to B}\left(F_g\right)=-m\cdot g\cdot\left(z_B-z_A\right)=-\left(m\cdot g\cdot z_B-m\cdot g\cdot z_A\right).$$

Per finire possiamo scrivere che il lavoro da A a B della forza di gravità vale:

$$W_{A\to B}\left(F_g\right)=\underbrace{W_{A\to C}\left(F_g\right)}_{0}+\underbrace{W_{C\to B}\left(F_g\right)}_{-\left(m\cdot g\cdot z_B-m\cdot g\cdot z_A\right)}=0+\left(-\left(m\cdot g\cdot z_B-m\cdot g\cdot z_A\right)\right)=-\left(m\cdot g\cdot z_B-m\cdot g\cdot z_A\right).$$

Osserviamo, ma ce lo aspettavamo, che il lavoro è ancora lo stesso di prima.

In effetti non occorreva calcolare il lavoro anche per il percorso no. 2 (come non avremmo nemmeno dovuto calcolarlo per il percorso no. 1). Abbiamo calcolato il lavoro della forza di gravità lungo un percorso qualsiasi e il risultato deve valere per tutti i percorsi.

Notiamo inoltre che il lavoro dipende da tre grandezze.

Due di queste grandezze (la massa m del corpo e la costante di gravità g) concorrono a determinare il peso del corpo, cioè la forza di gravità agente sul corpo ($F_g=m\cdot g$), e sono costanti, la terza, la quota z dei punti di partenza e di arrivo, dipende esclusivamente dai punti partenza e di arrivo del percorso.

Il lavoro <u>non</u> dipende invece dal percorso scelto.

All'inizio dell'anno, nel capitolo "Energia meccanica", abbiamo imparato d'altro canto che ad ogni corpo che si trova ad una certa quota è associabile una grandezza fisica chiamata energia potenziale gravitazionale pari a: $E_{p,g}=m\cdot g\cdot h$ oppure $E_{p,g}=m\cdot g\cdot z$.

A questo punto possiamo pertanto affermare che il lavoro della forza di gravità è legato all'energia potenziale gravitazionale dalla relazione:

$$W_{A\to B}\left(F_g\right)=-\left(m\cdot g\cdot z_B-m\cdot g\cdot z_A\right)=-\left(E_{p,g}\left(B\right)-E_{p,g}\left(A\right)\right)=-\Delta E_{p,g}.$$

Calcoliamo ora il lavoro di una forza elastica (ad esempio la forza di una molla di costante elastica k: $F=-k\cdot x$). Abbiamo già effettuato il calcolo nella sezione "Lavoro di una forza elastica" e non occorre ripeterlo. Abbiamo ottenuto:

$$W_{A\to B}\left(F_{elastica}\right)=-\left(\frac{1}{2}k\cdot x_B^2-\frac{1}{2}k\cdot x_A^2\right).$$

Anche in questo caso (la dimostrazione viene tralasciata) il lavoro di una forza elastica è indipendente dal percorso ma dipende solo dal punto di partenza e da quello di arrivo.

Sempre all'inizio dell'anno, al capitolo "Energia meccanica", abbiamo visto che l'energia potenziale legata ad una forza elastica è calcolabile con:

$$E_{p,elastica}=\frac{1}{2}\cdot k\cdot \Delta l^2 .$$

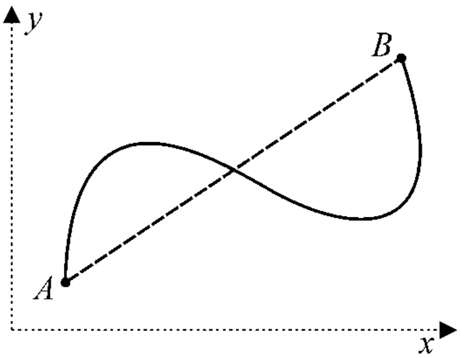
Dato che lo schiacciamento o l'allungamento Δl è misurato a partire dal punto di riposo della molla e coincide con la posizione x dell'estremità libera della molla possiamo, analogamente a quanto fatto con il lavoro della forza di gravità, associare il lavoro di una forza elastica con la corrispondente energia potenziale. Vale cioè:

$$W_{A\to B}\left(F_{elastica}\right)=-\left(\frac{1}{2}k\cdot x_B^2-\frac{1}{2}k\cdot x_A^2\right)=-\left(E_{p,elestica}\left(B\right)-E_{p,elestica}\left(A\right)\right)=-\Delta E_{p,elestica} .$$

Calcoliamo adesso il lavoro di un'altra forza che abbiamo incontrato spesso: la forza di attrito (ci limitiamo all'attrito radente in quanto forza costante ma la conclusioni a cui arriviamo valgono anche per l'attrito legato alla resistenza del mezzo).

Prendiamo in considerazione due casi.

Nel primo un corpo di massa m viene trainato su un piano orizzontale da un punto A ad un punto B passando per due percorsi diversi, uno rettilineo (tratteggiato nel disegno) e l'altro qualunque.



Calcoliamo il lavoro della forza di attrito lungo i due percorsi.

La forza di attrito è sempre antiparallela al percorso e pertanto lungo il tragitto rettilineo vale semplicemente:

$W_{A\to B}(F_A) = -F_A \cdot d_{A\to B}$

dove $d_{A\to B}$ è la distanza fra il punto A e il punto B.

Il lavoro della forza d'attrito lungo l'altro percorso vale invece:

$W_{A\to B}(F_A) = -F_A \cdot l_{A\to B}$

dove $l_{A\to B}$ corrisponde alla lunghezza del percorso qualsiasi.

Per calcolare il lavoro lungo il percorso qualunque abbiamo utilizzato il principio fondamentale studiato al paragrafo "Lavoro di una forza qualsiasi lungo un percorso qualsiasi". Abbiamo cioè suddiviso il percorso in tanti piccoli tratti, piccoli al punto che ciascuno poteva essere considerato rettilineo e poi abbiamo sommato assieme il lavoro di ciascun tratto.

Dal punto di vista matematico si può calcolare:

$W_n(F_A) = -F_A \cdot \Delta x_n$,

dove con $W_n(F_A)$ *si intende il lavoro lungo l'ennesimo tratto* Δx_n .

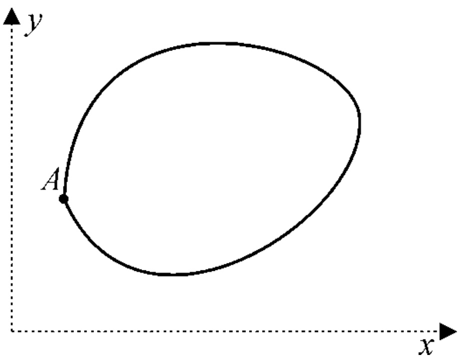
Il lavoro totale è la somma di ciascun lavoro, cioè:

$$\begin{aligned} W_{A\to B}(F_A) &= W_1(F_A) + W_2(F_A) + W_1(F_A) + \ldots = \\ &= (-F_A \cdot \Delta x_1) + (-F_A \cdot \Delta x_2) + (-F_A \cdot \Delta x_3) + \ldots = \\ &= -F_A \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots) = -F_A \cdot l_{A\to B} \end{aligned}$$

dove $l_{A\to B}$ *corrisponde appunto alla lunghezza del percorso qualsiasi.*

Dato che $l_{A\to B}$ è sicuramente maggiore di $d_{A\to B}$ il lavoro lungo il secondo percorso è diverso, in valore assoluto più grande, del lavoro della forza di attrito lungo il primo percorso.

Nel secondo caso un corpo di massa m viene trainato lungo un percorso che lo riporta al punto di partenza.



Il lavoro di F_A vale semplicemente:

$W_{A\to A}(F_A) = -F_A \cdot l_{A\to A}$

dove $l_{A\to A}$ corrisponde alla lunghezza del percorso che dal punto A riporta il corpo al punto di partenza (al punto A).

La posizione finale sarebbe stata la stessa anche nel caso in cui il corpo non si fosse spostato. In quel caso il lavoro della forza di attrito sarebbe stato nullo (nessun spostamento, nessun lavoro).

In questi due casi, contrariamente a quanto avveniva con le situazioni analizzate relative alla forza di gravità e alla forza elastica, il lavoro dipende dal percorso.

I due esempi ci illustrano un fatto molto semplice, cioè che non è possibile associare il lavoro della forza di attrito ad una funzione della posizione come invece avevamo fatto in precedenza con la forza peso e con la forza elastica e quindi che non può essere definita una energia potenziale associata al lavoro della forza di attrito.

Esistono dunque forze per le quali è possibile associare un'energia potenziale, sono quelle il cui lavoro non dipende dal percorso ma solo delle posizioni iniziale e finale.

Queste forze prendono il nome di **forze conservative**.

Altre, quelle per le quali il lavoro dipende invece dal percorso, vengono chiamate **forze non conservative**.

Ad ogni forza conservativa (indicata genericamente con F_c) è quindi associabile una energia potenziale (E_p) secondo la relazione:

$$W_{A\to B}(F_c) = -\Delta E_p = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right).$$

Il principio di conservazione dell'energia

Siamo pronti a questo punto ad analizzare come dal teorema dell'energia cinetica, che tramite il lavoro lega le leggi della dinamica all'energia cinetica, si giunge al principio di conservazione dell'energia.

Ultimo commento.

Siamo arrivati alla conclusione di questo capitolo.

In questo ultimo paragrafo si chiude finalmente il cerchio.

Il grado di astrazione si fa ancora più considerevole. Si parla genericamente di forze conservative o non conservative senza indicare quali siano e, almeno all'inizio, senza nessun valore numerico. Gli esempi concreti li troverete solo alla fine.

Se per voi risulta più facile ragionare in modo un pochino più concreto, potete sostituire la forza conservativa F_{c1} *con la forza di gravità, la forza conservativa* F_{c2} *con la forza della molla e la somma di tutte le forze non conservative* F_{NC} *con la forza di attrito.*

Evidentemente alla fine dovrete rileggere il tutto senza queste semplificazioni così da cogliere il significato profondo del risultato a cui arriviamo.

Nel testo ho inserito altri commenti immaginando di essere a lezione con voi; in qualche modo sostituiscono quello che avrei potuto dire a voce.

Inizialmente provate a non prenderli in considerazione, così che non perdiate il filo del discorso. Leggeteli solo in un secondo momento quando riprendete il paragrafo dall'inizio per consolidare i concetti.

Consideriamo un processo fisico nel quale siano coinvolte sia forze conservative che forze non conservative (indicheremo le forze conservative con F_{c1}, F_{c2} ecc.; quelle non conservative siano invece raggruppate in un'unica forza non conservativa indicata semplicemente con F_{NC}).

La risultante delle forze è dunque (utilizzeremo la notazione vettoriale solo dove strettamente necessario):
$$\vec{F}_{Ris} = \vec{F}_{c1} + \vec{F}_{c2} + \cdots + \vec{F}_{NC}.$$

Questa è la definizione di forza risultante che ci ha accompagnato per tutto il capitolo sulle forze.

Il lavoro della forza risultante vale pertanto:
$$W\left(F_{Ris}\right) = W\left(F_{c1}\right) + W\left(F_{c2}\right) + \cdots + W\left(F_{NC}\right).$$

Questa relazione è stata incontrata all'inizio del capitolo e rappresenta uno degli aspetti fondamentali del calcolo del lavoro. Ricordiamo inoltre che le forze si sommano come vettori, le energie (e quindi anche il lavoro di una forza) sono invece grandezza scalari e si sommano come numeri.

Al lavoro di ogni forza conservativa associamo la corrispondente variazione dell'energia potenziale, ne segue:
$$W\left(F_{Ris}\right) = \left(-\Delta E_{p1}\right) + \left(-\Delta E_{p2}\right) + \cdots + W\left(F_{NC}\right).$$

Anche per questa relazione dobbiamo rifarci a quanto visto in precedenza e cioè che ad ogni forza conservativa (cioè una forza il cui lavoro non dipende dal percorso) è possibile associare una funzione della posizione che chiamiamo energia potenziale.

Noi sappiamo d'altro canto che il lavoro della forza risultante è pari alla variazione dell'energia cinetica, quindi:
$$\Delta E_{cin} = \left(-\Delta E_{p1}\right) + \left(-\Delta E_{p2}\right) + \cdots + W\left(F_{NC}\right).$$

Finalmente applichiamo il teorema dell'energia cinetica che associa il lavoro della forza risultante alla variazione appunto dell'energia cinetica stessa; in altre parole sostituiamo $W\left(F_{Ris}\right)$ presente a sinistra della penultima relazione con ΔE_{cin}.

Portando a sinistra le variazioni delle diverse energie potenziali la relazione diventa:
$$\Delta E_{cin} + \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} + \cdots = W\left(F_{NC}\right).$$

D'altro canto se il processo fisico in esame è cominciato nel punto A ed è terminato nel punto B possiamo scrivere:

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}(B) - E_{cin}(A)$$

e

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A),$$

perciò:

$$\left(E_{cin}(B) - E_{cin}(A)\right) + \left(E_{p1}(B) - E_{p1}(A)\right) + \left(E_{p2}(B) - E_{p2}(A)\right) + \cdots = W_{A\to B}(F_{NC})$$

e ancora:

$$\left(E_{cin}(B) + E_{p1}(B) + E_{p2}(B) + \cdots\right) - \left(E_{cin}(A) + E_{p1}(A) + E_{p2}(A) + \cdots\right) = W_{A\to B}(F_{NC}).$$

Se indichiamo come **energia meccanica** la somma dell'energia cinetica e di tutte le energie potenziali, cioè:

$$E_{meccanica} = E_{cin} + E_{p1} + E_{p2} + \cdots,$$

la relazione precedente diventa:

$$E_{meccanica}(B) - E_{meccanica}(A) = \Delta E_{meccanica} = W_{A\to B}(F_{NC}).$$

Questa relazione prende il nome di **teorema dell'energia meccanica** e afferma che la variazione dell'energia meccanica corrisponde al lavoro delle forze non conservative.

I passaggi algebrici di queste ultime dieci righe servono solo a riscrivere la relazione che è scritta in fondo alla pagina precedente, rendendo esplicito il significato del termine Δ (differenza fra la situazione alla fine e quella all'inizio, differenza fra ciò che abbiamo al punto di arrivo (punto B) e al punto di partenza (punto A). Si sono raggruppati i termini relativi al punto di arrivo e quelli al punto di partenza e infine si dice semplicemente che la somme di tutte le energie prende il nome di energia meccanica.

In assenza di forze non conservative, cioè in presenza di sole forze conservative, il teorema dell'energia meccanica diventa:

$$\Delta E_{meccanica} = 0$$

cioè

$$E_{meccanica} = \text{costante}.$$

La relazione prende il nome di **teorema di conservazione dell'energia meccanica** e afferma che, in presenza di sole forze conservative, l'energia meccanica si conserva, rimane cioè costante. Essa rappresenta un caso particolare del più generico principio di conservazione dell'energia.

Esso indica che la somma dell'energia cinetica e di quelle potenziali in un punto corrisponde alla somma dell'energia cinetica e di quelle potenziali in un altro punto ed è ciò che avevamo già avuto modo di osservare nei primi due capitoli di questo corso.

Comprendiamo a questo punto il perché le forze sono state suddivise in due insiemi, quello delle forze conservative e quello delle forze non conservative. In presenza unicamente di forze conservative l'energia meccanica si conserva.

Vi proponiamo due esempi: nel primo agiscono solo forze conservative e pertanto può essere applicato il teorema di conservazione dell'energia meccanica, nel secondo avremo anche la forza di attrito e pertanto dovremo applicare il teorema sull'energia meccanica.

Prendiamo in considerazione una "pistola a molla" che usa sfere di gomma come proiettili. Si spara verticalmente.

I dati siano i seguenti: costante elastica della molla $k = 98\,\frac{N}{m}$, massa del proiettile $m = 250\,g$, Schiacciamento iniziale della molla $\Delta l = 20\,cm$. Da determinare la velocità con cui il proiettile lascia la pistola (quando cioè la molla si è completamente rilassata), la massima altezza raggiunta dal proiettile misurata dal punto in cui lascia la pistola e infine la massima velocità raggiunta dal proiettile. Sia trascurabile l'attrito dell'aria.

In gioco ci sono sicuramente l'energia cinetica, quelle potenziali elastica e di gravità.

Per prima cosa occorre decidere dove porre lo zero dell'energia potenziale di gravità. Dato che la quota (posizione verticale) del proiettile, quando esso appoggia sulla molla, è determinante sia per l'energia potenziale gravitazionale che per quella elastica è opportuno scegliere lo zero in comune. Lo zero dell'energia potenziale elastica è sempre nel punto di riposo della molla e pertanto quella è pure la posizione per lo zero dell'energia potenziale di gravità. Questo sta a significare che al punto di partenza l'energia potenziale di gravità del proiettile è negativa.

Questa scelta non è obbligatoria; è sempre possibile scegliere lo zero dell'energia potenziale gravitazionale in un punto diverso da quello scelto per l'energia potenziale elastica. Solo lo zero dell'energia elastica è necessariamente nel punto di riposo della molla, in corrispondenza cioè della posizione dell'estremità libera della molla quando essa non è né tirata né schiacciata. La scelta che è stata fatta semplifica il problema. La variabile z *è la stessa per le due energie. Avessimo scelto diversamente, ad esempio porre lo zero dell'energia potenziale gravitazionale nel punto più in basso (in questo modo non avremmo avuto energie potenziali negative), avremmo dovuto trovare una relazione che lega le due posizioni, complicandoci la vita durante la risoluzione delle equazioni.*

Dato che non dobbiamo considerare l'attrito il teorema di conservazione dell'energia ci permette di scrivere:

$$E_{meccanica}(A) = E_{meccanica}(B) = E_{meccanica}(C) = \cdots.$$

Sia A il punto di partenza (proiettile schiacciato al massimo contro la molla), B il punto in cui il proiettile lascia la molla e C il punto di massima altezza del proiettile. Vale pertanto:

$$E_{meccanica}(A) = E_{cin}(A) + E_{p,g}(A) + E_{p,elastica}(A) = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v_A^2 + m\cdot g\cdot z_A + \tfrac{1}{2}\cdot k\cdot z_A^2,$$

con $z_A = -0,20\,m$ e $v_A = 0\,\frac{m}{s}$ diventa:

$$\begin{aligned} E_{meccanica}(A) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0,250\,kg\cdot\left(0\,\tfrac{m}{s}\right)^2 + 0,250\,kg\cdot 9,8\,\tfrac{N}{kg}\cdot(-0,20\,m) + \tfrac{1}{2}\cdot 98\,\tfrac{N}{m}\cdot(-0,20\,m)^2 = \\ &= 0\,J + (-0,49\,J) + 1,96\,J = 1,47\,J \end{aligned}$$

Del punto B conosciamo la quota $z_B = 0\,m$ e pertanto possiamo calcolare le due energie potenziali vale a dire:

$E_{p,g}(B) = 0,250\,kg\cdot 9,8\,\frac{N}{kg}\cdot 0\,m = 0\,J$ e $E_{p,elastica}(B) = \frac{1}{2}\cdot 98\,\frac{N}{m}\cdot(0\,m)^2 = 0\,J$.

L'energia meccanica in B è quindi solo l'energia cinetica. È quindi facile calcolare la velocità del proiettile e cioè:

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{cin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,47\,J}{0,250\,kg}} = 3,43\,\tfrac{m}{s}$$

Nel punto C (punto di massima altezza) la velocità è nulla e perciò è pari a zero l'energia cinetica, inoltre la molla non agisce più (si è ormai rilassata al massimo) ed è pertanto pari a zero pure l'energia potenziale elastica. L'energia meccanica in C è quindi solo l'energia potenziale di gravità. È quindi facile calcolare la quota del proiettile e cioè:

$$z_C = \frac{E_{p,g}}{m \cdot g} = \frac{1,47\,J}{0,250\,kg \cdot 9,8\,\frac{N}{kg}} = 0,60\,m\,.$$

Per rispondere all'ultima domanda, cioè quanto vale la velocità massima, occorre dapprima determinare in quale posizione il proiettile la raggiunge.

Se analizziamo il processo fisico dal punto di vista delle forze, possiamo dire quanto segue: le forze in gioco sono due, quella della molla sempre diretta verso l'alto che passa dal valore massimo (all'inizio) a zero (quando è a riposo) e quella di gravità, costante, diretta verso il basso. Il proiettile parte da fermo (punto A) e aumenta la sua velocità per tutto il tempo in cui la forza della molla è superiore a quella di gravità; da quel punto in avanti esso comincia a rallentare fino a fermarsi (punto C).

Il punto (che indicheremo con D) in cui il proiettile ha la massima velocità è pertanto quel punto in cui la forza della molla è pari in intensità a quella di gravità, cioè:

$$F_g = F_{elastica} \;\Rightarrow\; m \cdot g = k \cdot \Delta l \;\Rightarrow\; \Delta l = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{0,25\,kg \cdot 9,8\,\frac{N}{kg}}{98\,\frac{N}{m}} = 0,025\,m\,.$$

Il punto D in cui la velocità è massima è perciò in $z_D = -0,025\,m$. Ponendo l'energia meccanica in A pari all'energia meccanica in D e risolvendo rispetto alla velocità in D si ottiene $v_D = 3,46\,\frac{m}{s}$.

Nel secondo esempio si prenda in considerazione un corpo che risale un piano inclinato con attrito.

La massa del corpo è $m = 120\,g$, il coefficiente di attrito pari a $\mu = 0{,}15$ e l'angolo di inclinazione del piano vale $\alpha = 30°$ così che il percorso del corpo lungo il piano sia sempre il doppio rispetto alla variazione di quota cioè $l = 2 \cdot h$. La velocità del corpo in un punto A vale $v_A = 4{,}0\,\frac{m}{s}$. Da determinare la massima altezza raggiunta (punto B) e la velocità con cui ritorna al punto di partenza (punto A).

La presenza dell'attrito ci obbliga ad usare il teorema dell'energia meccanica e cioè:

$\Delta E_{meccanica} = W\left(F_{Attrito}\right)$.

Anche in questo caso la prima cosa da fare è fissare lo zero dell'energia potenziale di gravità.

La scelta più opportuna consiste nel porre lo zero dell'energia potenziale di gravità alla quota del punto di partenza (punto A), cioè fissare $h_A = 0\,m$. L'energia meccanica in quel punto è perciò solo quella cinetica:

$E_{meccanica}\left(A\right) = E_{cin}\left(A\right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}120\,kg \cdot \left(4{,}0\,\frac{m}{s}\right)^2 = 0{,}96\,J$.

L'energia meccanica nel punto più alto, quando cioè la velocità è nulla, consiste solo in quella potenziale di gravità cioè $E_{meccanica}\left(B\right) = E_{p,g}\left(B\right) = m \cdot g \cdot h_B$ con h_B la grandezza da trovare.

L'equazione da risolvere è perciò:

$E_{meccanica}\left(B\right) - E_{meccanica}\left(A\right) = W_{A \to B}\left(F_{Attrito}\right)$.

Si tratta di calcolare il lavoro della forza di attrito che è pari a $W_{A \to B}\left(F_{Attrito}\right) = -F_{Attrito} \cdot l = -F_{Attrito} \cdot 2 \cdot h$.

L'equazione di prima diventa:

$m \cdot g \cdot h_B - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 = -F_{Attrito} \cdot 2 \cdot h_B$.

La forza di attrito a determinabile in base alle considerazioni fatte a suo tempo nel capitolo dedicato alle forze (capito 4 del nostro corso) e vale

$F_{Attrito} = 0{,}153\,N$.

A questo punto si risolve rispetto h_B la sola grandezza rimasta sconosciuta e si trova $h_B = 0{,}648\,m$.

Per trovare la velocità al punto A al ritorno è presto fatto. Il teorema dell'energia meccanica applicato a questa situazione diventa:

$E_{meccanica}\left(A\right) - E_{meccanica}\left(B\right) = W_{B \to A}\left(F_{Attrito}\right)$ cioè $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 - m \cdot g \cdot h_B = -F_{Attrito} \cdot 2 \cdot h_B$.

Si risolve rispetto a v_A (nuova velocità al punto A) che vale $v_A = 3{,}07\,\frac{m}{s}$.

Che cosa capita quando in un processo fisico agiscono anche forze non conservative? Che cosa capita cioè quando l'attrito, come nel secondo esempio, non è più trascurabile?

In base al teorema dell'energia meccanica sappiamo che la differenza dell'energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative. Questo lavoro è sempre negativo così che l'energia meccanica alla fine è sempre minore di quella all'inizio. Non si tratta di una violazione del principio di conservazione energia. Solo l'energia meccanica è diminuita. L'energia in totale è rimasta costante. La parte "mancante" si è trasformata in un altro tipo di energia. Vedremo che a causa dell'attrito i corpi si riscaldano. L'energia "mancante" è andata ad aumentare l'energia di un corpo associata alla sua temperatura che chiameremo energia termica.