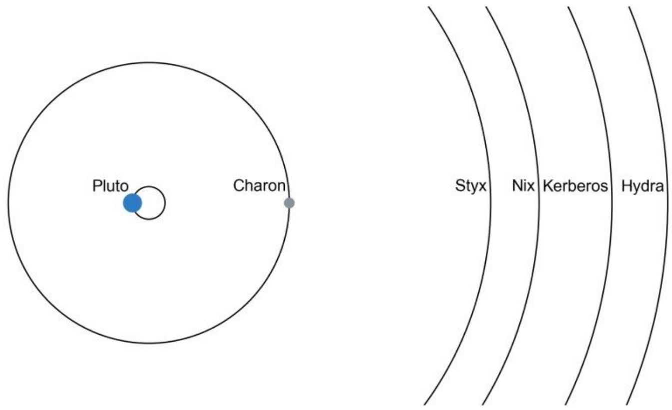
Sistemi binari

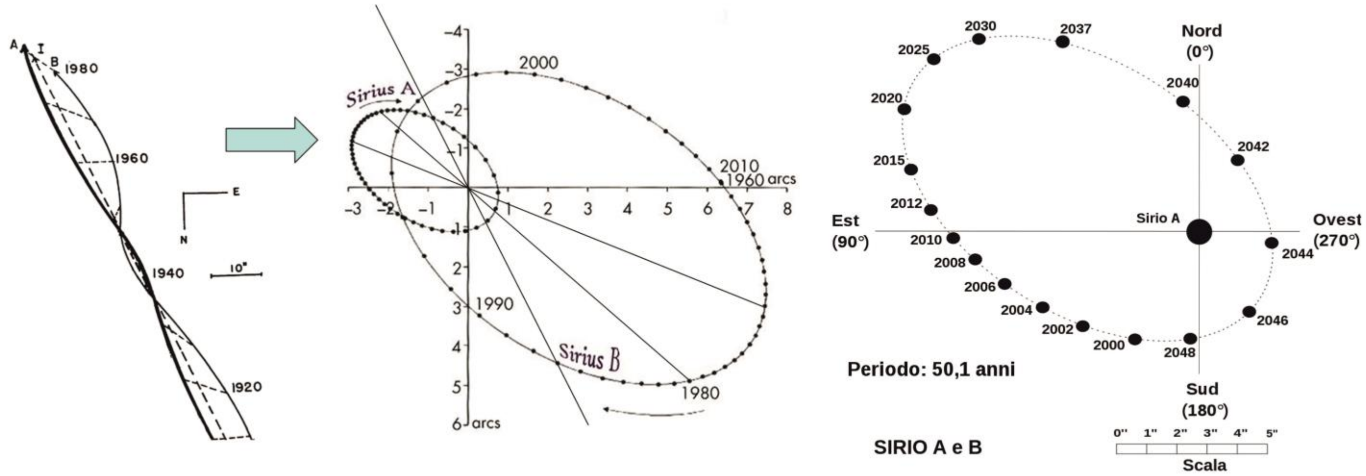
Finora ci siamo occupati di situazioni per le quali il corpo centrale, attorno a quale gravitano pianeti o satelliti, ha una massa molto più grande dei corpi che gli orbitano attorno. Prendiamo ad esempio il Sole il quale ha una massa che corrisponde a quasi il 99,9% della massa di tutto il sistema solare. Esso può pertanto essere considerato il centro del sistema la cui posizione non è influenzata (se non in misura marginale) dalla massa dei corpi che gli girano attorno. La stessa cosa può essere affermata pensando alla Terra e ai satelliti artificiali in orbita attorno ad essa (vedremo alla fine di questo capitolo che questo non è vero se pensiamo al sistema Terra – Luna).

Ci sono situazioni che non rientrano in questa casistica, e non sono pochi. Nel nostro sistema solare il più conosciuto è il sistema Plutone – Caronte. Ben più importante e significativo è il caso di stelle doppie, stelle cioè legate gravitazionalmente. Esse ruotano attorno al comune centro di gravità (un esempio storicamente interessante è il caso di Sirio A e Sirio B).



Nell'immagine a lato sono rappresentate le orbite, quasi circolari di Plutone e Caronte attorno al loro centro comune di gravità (più all'esterno le orbite degli altri satelliti del sistema Plutone – Caronte).

Nelle immagini sotto viene rappresentata la posizione di Sirio A e Sirio B nel corso degli anni, la ricostruzione delle loro orbite attorno al comune centro di gravità e l'orbita di Sirio B relativa a Sirio A la cui posizione è posta al centro del sistema di riferimento.



Si tratta ora di trovare come applicare la legge di gravitazione universale a queste situazioni.

Come prima cosa è necessario definire il concetto di centro di massa o baricentro.

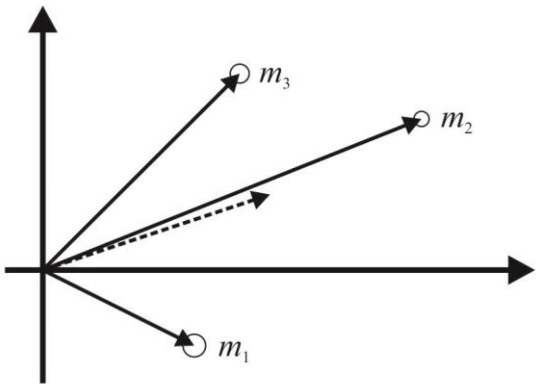
Il baricentro

La definizione di baricentro e relativamente semplice. Considerando un certo numero di masse puntiformi, ed è data dalla seguente formula:

$$\vec{r}_B = \frac{\sum_{n=1}^{N} m_n \cdot \vec{r}_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} \left(= \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + \ldots + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N} \right).$$

La posizione del baricentro è per così dire una media vettoriale, ponderata secondo la massa, delle posizioni di tutte le masse in gioco.

Facciamo un esempio a due dimensioni.



Si considerino le seguenti 3 masse,

$m_1 = 3{,}0\,kg$, $m_2 = 2{,}0\,kg$ e $m_3 = 2{,}5\,kg$

posizionate in

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2{,}0\,m \\ -1{,}0\,m \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5{,}0\,m \\ 2{,}0\,m \end{pmatrix} \; e \; \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 2{,}6\,m \\ 2{,}6\,m \end{pmatrix}$$

Il baricentro vale:

$$\vec{r}_B = \frac{3{,}0\,kg \cdot \begin{pmatrix} 2{,}0\,m \\ -1{,}0\,m \end{pmatrix}_1 + 2{,}0\,kg \cdot \begin{pmatrix} 5{,}0\,m \\ 2{,}0\,m \end{pmatrix} + 2{,}5\,kg \cdot \begin{pmatrix} 2{,}6\,m \\ 2{,}6\,m \end{pmatrix}}{3{,}0\,kg + 2{,}0\,kg + 2{,}5\,kg} = \begin{pmatrix} 3{,}0\,m \\ 1{,}0\,m \end{pmatrix}$$

Nel disegno a lato la posizione del baricentro è indicata con una freccia (vettore) tratteggiata.

Più semplice ancora è calcolare il centro di massa di due corpi. Avendo solo due corpi il problema è riducibile ad una sola dimensione perciò si può scrivere:

$$x_B = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}.$$

Ad esempio consideriamo due corpi di massa $m_1 = 5{,}0\,kg$ e $m_2 = 2{,}0\,kg$ posti in $x_1 = 0{,}0\,m$ e $x_2 = 3{,}5\,m$;

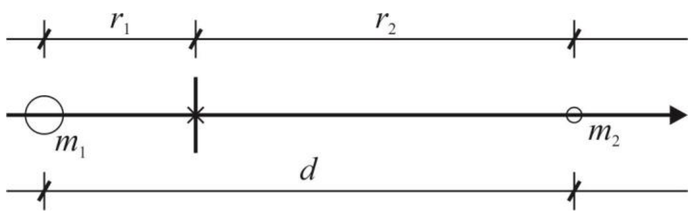
il baricentro si trova in:

$$x_B = \frac{5{,}0\,kg \cdot 0{,}0\,m + 2{,}0\,kg \cdot 3{,}5\,m}{5{,}0\,kg + 2{,}0\,kg} = 1{,}0\,m.$$

Moti orbitali attorno al centro di massa

Siamo pronti a questo punto a determinare le relazioni tra distanze fra due corpi celesti e il periodo di rotazione uno attorno all'altro quando le masse dei due corpi sono paragonabili (quando si parla di masse paragonabili si intende semplicemente che la massa del più piccolo non possa essere considerata trascurabile rispetto a quella del più grande).

Chiaramente la matematica a nostra disposizione ci permette di calcolare solo il caso di orbite circolari. La cosa interessante è che e sempre possibile applicare i risultati a cui giungiamo anche quando le orbite sono ellittiche.



Consideriamo due corpi di massa m_1 e m_2 legati gravitazionalmente in orbita circolare alla distanza d .

Per semplicità di calcolo poniamo il baricentro in $x_B = 0$. Chiamiamo r_1 rispettivamente r_2 i raggi delle orbite circolari dei due corpi attorno al centro comune di massa.

Determiniamo ora la relazione fra i raggi delle orbite e la distanza fra i corpi:

$$0 = \frac{m_1 \cdot (-r_1) + m_2 \cdot r_2}{m_1 + m_2} .$$

(il segno "-" davanti a r_1 è semplicemente dovuto al fatto che il valore di r_1 è positivo mentre la posizione della massa m_1 è negativa, a destra cioè dell'origine del sistema di riferimento.)

Ne segue che:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot r_2 \quad \text{oppure} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot r_1 .$$

Dato che $d = r_1 + r_2$ si possono calcolare i raggi delle orbite in funzione della distanza d , cioè:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d \quad \text{rispettivamente} \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot d .$$

Concentriamoci sul corpo m_1 (potemmo benissimo calcolare il tutto rispetto a m_2; data la simmetria otterremmo lo stesso risultato).

Evidentemente il periodo di rotazione dei due corpi uno rispetto all'altro è lo stesso e lo indichiamo con T .

Il principio del calcolo è lo stesso di quando abbiamo "dimostrato" la validità della terza legge di Keplero per un pianeta che ruota attorno al Sole (o un satellite attorno alla Terra), cioè poniamo una uguaglianza fra la forza necessaria a garantire un moto circolare (forza centripeta) e quella a disposizione (forza di gravità).

$$\cancel{m_1} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r_1 = G \cdot \frac{\cancel{m_1} \cdot m_2}{d^2}$$

sostituiamo $r_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot d$ e otteniamo

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{\cancel{m_2}}{m_1 + m_2} \cdot d = G \cdot \frac{\cancel{m_2}}{d^2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G \cdot (m_1 + m_2)}{(2\pi)^2} \quad \text{oppure} \quad \frac{T^2}{d^3} = \frac{(2\pi)^2}{G \cdot (m_1 + m_2)}$$

Potete osservare che è la terza legge di Keplero con al posto del semiasse maggiore la distanza d e al posto della massa del corpo centrale la somma delle masse.

Evidentemente se il corpo centrale, ad esempio il corpo di massa $m_1 = M$, ha una massa molto più grande di quello che gli ruota attorno si ottiene:

$M + m_2 \cong M$, $r_1 \cong 0$ e $r_2 \cong d = a$ (con a il semiasse maggiore).

Questo riporta alla terza legge di Keplero che abbiamo già incontrato.

Riprendiamo ora uno degli esempi incontrati all'inizio, il sistema Plutone – Caronte.

Wikipedia ci fornisce i seguenti dati:

$m_{\text{Plutone}} = 1{,}303 \cdot 10^{22}\,kg$, $m_{\text{Caronte}} = 0{,}152 \cdot 10^{22}\,kg$ (questo significa che la massa di Plutone è circa 8,6 volte quella di Caronte, quindi masse paragonabili), periodo di rotazione uno attorno all'altro $T = 6{,}38723\,giorni = 551857\,s$, semiasse maggiore dell'orbita reciproca $a = 19{,}571 \cdot 10^6\,m$.

Risolvendo a relazione $\dfrac{d^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot (m_1 + m_2)}{(2\pi)^2}$ rispetto a $(m_1 + m_2)$ otteniamo:

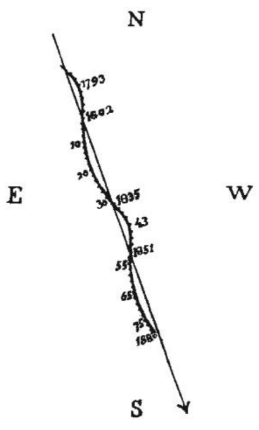
$$(m_1 + m_2) = \frac{d^3}{T^2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{G} = \frac{(19{,}517 \cdot 10^6\,m)^3}{(551857\,s)^2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{6{,}67408 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}} = 1{,}456 \cdot 10^{22}\,kg\,.$$

Questo corrisponde alla somma della massa dei due corpi (differenza inferiore ad una parte su mille).

Come accennato all'inizio anche il sistema Terra – Luna può essere considerato un sistema binario (pianeta doppio) in quanto la massa della Terra e "solo" circa 81 volte più grande di quella della Luna, in qualche modo quindi paragonabile. Agli studenti è lasciato il calcolo della massa Terra – Luna a partire dei dati ricavabili sempre da Wikipedia.

L'altro esempio iniziale riguardava il sistema binario Sirio A – Sirio B.

Nella prima (quella di sinistra) delle tre immagini vengono riportate le posizioni delle due stelle rispetto allo sfondo delle stelle "fisse" nel corso di una sessantina d'anni. La linea tratteggiata rappresenta il movimento lineare del centro comune di massa. A partire da questa immagine si possono costruire le altre due e in particolare l'ultima (quella a destra) mostra l'orbita ellittica di Sirio B rispetto a Sirio A. Conoscendo la distanza del sistema, pari a $8{,}6\,anni\,luce$, è possibile ricavare il valore della distanza fra i due corpi nel corso degli anni, valore che varia fra $8{,}1\,UA$ e $31{,}5\,UA$ con una distanza media di $19{,}8\,UA$. Il periodo di rotazione è pari a $50{,}1\,anni$. A partire da questi dati è possibile ricavare la massa totale del sistema pari a $6{,}13 \cdot 10^{30}\,kg$ cioè circa $3{,}08$ masse solari. Dato che il rapporto fra le masse è pari all'inverso del rapporto fra i "raggi" delle orbite delle due stelle rispetto al centro comune di massa, misurabili sia nel primo che nel secondo disegno (quello al centro), si può calcolare che Sirio A ha una massa pari a circa $2{,}06$ masse solari mentre la massa di Sirio B è di $1{,}02$ masse solari.



Nonostante la massa di Sirio B sia pari alla massa del nostro Sole e la distanza del sistema di "soli" $8{,}6\,anni\,luce$, la sua luminosità è molto bassa al punto che la stella fu osservata solo nel 1862 mentre la sua esistenza fu ipotizzata parecchi anni prima. L'immagine a lato mostra il moto di Sirio A senza la sua compagna attraverso osservazioni precedenti la scoperta di Sirio B. Dall'oscillare di questo moto si può dedurre la presenza di un compagno "invisibile".

A questo punto ci si può chiedere se è possibile determinare la massa e la distanza media dal corpo principale (di solito una stella) del compagno invisibile a partire dalle osservazioni del moto della sola stella (il disegno in basso nella pagina precedente rappresenta proprio questa situazione).

Cominciamo col vedere quali informazioni si possono dedurre da queste osservazioni.

Sicuramente il dato più semplice da calcolare è il periodo di rotazione uno attorno all'altro dei due corpi. In secondo luogo si possono determinare la posizione del baricentro e il semiasse maggiore dell'orbita del corpo principale attorno al baricentro stesso (evidentemente a condizione di conoscere la distanza del sistema binario da noi – d'altro canto questa era una premessa anche nelle situazioni precedenti, altrimenti si hanno solo degli angoli).

Questo fa sì che non è nota la distanza che avevamo chiamato d ma unicamente la distanza media del corpo principale dal baricentro (nel nostro calcolo effettuato per orbite circolari lo avevamo chiamato r_1).

Chiamando ora M la massa del corpo principale, m la massa del compagno invisibile e R il raggio dell'orbita del corpo principale attorno al baricentro la relazione

$M \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$, con $d = \frac{M+m}{m} \cdot R$ diventa:

$$M \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R = G \cdot \frac{M \cdot m}{\left(\frac{M+m}{m} \cdot R \right)^2} .$$

Con alcune semplificazioni si ottiene:

$$\frac{(2\pi)^2}{G} \cdot \frac{R^3}{T^2} \cdot (M+m)^2 = m^3 .$$

Come potete notare, a differenza della relazione che avevamo usato in precedenza quando conoscevamo la distanza d, le due masse appaiono sia come somma che singolarmente. Questo significa che almeno una delle due deve essere conosciuta attraverso altri tipi di osservazione. Per una stella di cui si conosce la distanza è possibile determinarne la massa con un certo gradi di incertezza a partire della sua luminosità (magnitudine) e tipo di luce emessa (classe spettrale). A questo punto la sola incognita diventa la massa m del compagno invisibile.