Il concetto di campo[1]

Nelle formulazioni usate finora per la legge della forza di gravità ed elettrica, queste forze appaiono come azioni a distanza tra masse o cariche elettriche. La descrizione è accurata, ma non viene spiegato come avvenga questa azione istantanea. Ai tempi di Newton l'idea era nuova e suscitò varie difficoltà, tanto che egli dovette scusarsi di presentare solo una descrizione matematica. Col tempo gli scienziati ci si sono abituati e la scoperta della legge di Coulomb confermò questo modo di pensare.

Nel corso del diciannovesimo secolo, per influsso specialmente di Faraday, si è diffusa un'altra interpretazione: una carica elettrica (o una massa) influisce sullo spazio circostante: esso diventa sede di un campo elettrico (o gravitazionale); una carica (o una massa) che si trova nel campo subisce una forza.

L'interazione tra due cariche (o masse) è, per così dire, descritta in due fasi:

I fase: la prima carica (o massa) crea il campo attorno a sé,

II fase: il campo produce una forza, che agisce sulla seconda carica (o massa).

Il concetto di campo facilita molto la descrizione di situazioni complesse, ma esso non è solo un artificio matematico: progressivamente si è compreso che il campo è una grandezza fisica reale e che esso è il concetto basilare per descrivere tutte le interazioni. Per es. il campo attorno a una carica (o massa) non si crea istantaneamente, ma si propaga alla velocità della luce.

Da quanto detto risulta chiaro che la definizione di campo è possibile sia per l'interazione gravitazionale che per quella elettrica. Studieremo ora in dettaglio il campo elettrico, osservandone di tanto in tanto l'analogia con il campo gravitazionale.

Il campo elettrico e le sue rappresentazioni

Siano date le cariche Q_1, Q_2, fino a Q_N disposte in $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, … $\vec{r}_N$ e una carica positiva q_0 detta “esplorativa”, così piccola da non influenzare la distribuzione di cariche data. Ciascuna delle cariche elettriche eserciterà su q_0 una forza elettrica che indicheremo con $\vec{F}_{10}$ per Q_1, $\vec{F}_{20}$ per Q_2, fino a $\vec{F}_{N0}$ per la carica Q_N.

Chiamiamo $\vec{F}_e = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + ... + \vec{F}_{N0}$ la forza totale esercitata dalla distribuzione delle N cariche su q_0.

Il campo elettrico nel punto $\vec{r}$ in cui si trova q_0 é definito da:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}.$$

L’unità di misura del campo elettrico è $\frac{N}{C}$.

Per analogia il campo di gravità è definito come il rapporto fra la forza di gravità esercitata da una massa (o più masse, nel qual caso le singole forze vanno sommate) su una massa m_0.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}.$$

In prossimità della superficie terrestre il campo di gravità è un vettore costante diretto verso il basso di intensità pari a $g = 9{,}8\,\frac{N}{kg}$.

Vediamo ora alcuni esempi di campo elettrico e come è possibile rappresentarli.

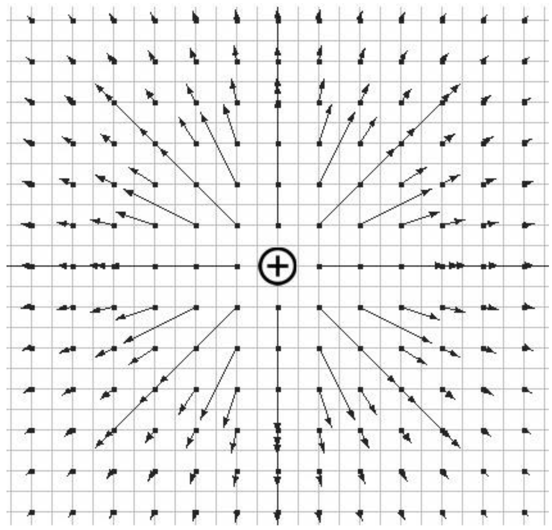
[1] Paragrafo tratto da “dispense di Fisica” della SUPSI

Iniziamo con il campo elettrico generato da una singola carica Q (positiva per la rappresentazione nei due disegni che seguono).

Per comodità poniamo la carica all'origine del sistema di riferimento.

La forza elettrica di Q su q_0 posta in un punto qualsiasi $\vec{r}$ vale (è necessario adottare la notazione vettoriale):

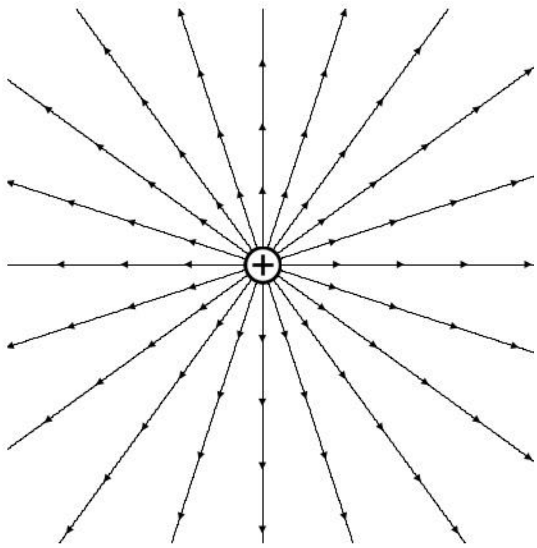
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} = k\frac{Q\cdot \cancel{q_0}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{q_0}} = k\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^3}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



Per rappresentare il campo elettrico si possono usare diverse modalità. In questa sede ne verranno mostrate solo due, concentrandoci in particolare sulla seconda. In rete trovate parecchi siti con delle applet (piccoli programmi che girano in java) in grado di rappresentare il campo elettrico in varie situazioni sia nelle due modalità che trattiamo sia in altri modi.

Il modo più semplice di rappresentare un campo elettrico consiste nel costruire una griglia, in ogni punto di essa calcolare il vettore campo elettrico e disegnare la freccia corrispondente. Per una carica puntiforme positiva il risultato è più o meno quello del disegno a lato.

L'intensità del campo in un punto è proporzionale alla lunghezza dei vettori mentre direzione e verso son quelli dei vettori.



L'altra possibilità consiste nel disegnare le **linee di campo**.

Per disegnare una linea di campo è sufficiente procedere come segue: a partire da un punto qualsiasi (di solito vicino ad una carica) si determina la direzione e verso del campo, ci si sposta di una piccola quantità (più piccola è meglio è) nella direzione e verso appena determinati. A partire dalla nuova posizione si ripete il procedimento fino a costruire la linea di campo. La direzione in cui ci si muove, che corrisponde al verso del vettore campo elettrico, è indicata con una freccia sulla linea. Si riempie lo spazio con un certo numero di linee con la convenzione che la "densità" delle linee è indice dell'intensità del campo. Per il campo elettrico generato da una singola carica (positiva) la rappresentazione è quella a lato.

Calcoliamo ora il campo generato da due cariche puntiformi Q, entrambe positive, dello stesso valore e distanti fra di loro una distanza d.

Per semplificare al massimo il calcolo, che risulta comunque più complesso del caso precedente, poniamo le due cariche sull'asse x, la prima in $x_1 = -\frac{1}{2}d$ e la seconda in $x_2 = \frac{1}{2}d$.

Poniamo la carica di prova in un punto qualsiasi $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Sia $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x-\left(-\frac{1}{2}d\right) \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}$ il vettore che unisce la prima carica con la carica di prova.

Sia $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}$ il vettore che unisce la seconda carica con la carica di prova.

$r_1 = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2}$ è la distanza fra la carica di prova e la prima carica,

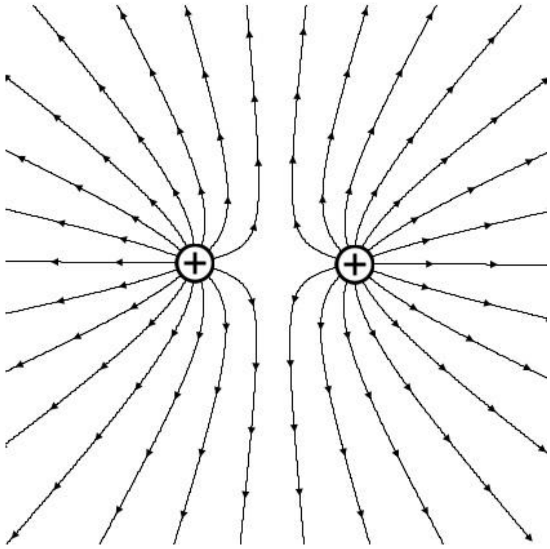
$r_2 = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2}$ è la distanza fra la carica di prova e la seconda carica.

Il campo elettrico generato dalla prima carica vale pertanto:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q}{r_1^3} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$

Quello generato dalla seconda:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$



Il campo elettrico totale lo si ottiene sommando i campi elettrici delle singole cariche. Il disegno a lato mostra la rappresentazione con le linee di campo.

In un punto qualsiasi la somma dei due campi non porta ad ottenere delle particolari semplificazioni e pertanto è sufficiente scrivere che $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Più interessante è analizzare il valore dell'intensità del campo lungo gli assi.

Iniziamo con il calcolare il campo nell'origine.

$$\vec{E}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La somma dei due vettori dà zero come era facile aspettarsi. In effetti l'origine degli assi si trova equidistante dalle due cariche e sul segmento che le unisce. Di conseguenza sulla carica esplorativa esse esercitano una forza di uguale intensità, uguale direzione ma verso opposto.

Analizziamo ora il caso di un punto sull'asse x, cioè con $y=0$, e per $x > \frac{1}{2}d$.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2 \cdot k \cdot Q \frac{x^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot \left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da notare che, quando $x \gg \frac{1}{2}d$, per il valore dell'intensità del campo si può usare l'approssimazione:

$$E \cong \frac{2 \cdot k \cdot Q}{x^2},$$

che equivale al campo generato da una carica posta all'origine di valore doppio rispetto alle due cariche di partenza.

Per ultimo calcoliamo il campo lungo l'asse y (cioè con $x=0$) con $y>0$.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{2 \cdot k \cdot Q}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot y}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esattamente come prima è da notare che, quando $y \gg \frac{1}{2}d$, per il valore dell'intensità del campo si può usare l'approssimazione:

$$E \cong \frac{2 \cdot k \cdot Q}{y^2},$$

che ancora una volta equivale al campo generato da una carica posta all'origine di valore doppio rispetto alle due cariche di partenza.

Un caso analogo è quello del **dipolo**, cioè di due cariche di uguale valore ma di segno opposto, distanti d. Sia negativa la carica posta in $x_1 = -\frac{1}{2}d$.

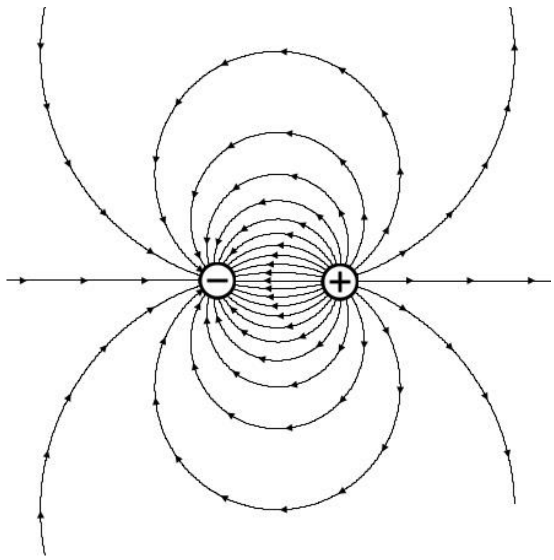
Si procede esattamente come nel caso precedente.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{-Q}{\left(\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x - \frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$

Come nel caso precedente il campo elettrico totale lo si ottiene sommando i campi elettrici delle singole cariche. Il disegno a lato mostra la rappresentazione con le linee di campo.

Ancora una volta in un punto qualsiasi la somma dei due campi non porta ad ottenere delle particolari semplificazioni e pertanto basta scrivere che $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Anche nel caso del dipolo è interessante analizzare il valore dell'intensità del campo lungo gli assi.



Non è il caso di affrontare il calcolo nei dettagli come fatto per la situazione precedente. Si osservi solo che lungo l'asse x come pure lungo l'asse y per la simmetria della disposizione il vettore campo elettrico totale abbia la componente y pari a zero. L'intensità del campo e quindi pari alla sola componente x.

All'origine degli assi essa vale: $E = \dfrac{2 \cdot k \cdot Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2}$.

Da osservare che il campo è diretto dalla carica positiva a quella negativa e perciò il vettore campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot k \cdot Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In un punto sull'asse x e per $x > \frac{1}{2}d$ l'intensità del campo vale:

$$E = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot d \cdot x}{\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}d\right)^2}, \quad \text{da cui segue che } \vec{E} = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot d \cdot x}{\left(x + \frac{1}{2}d\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

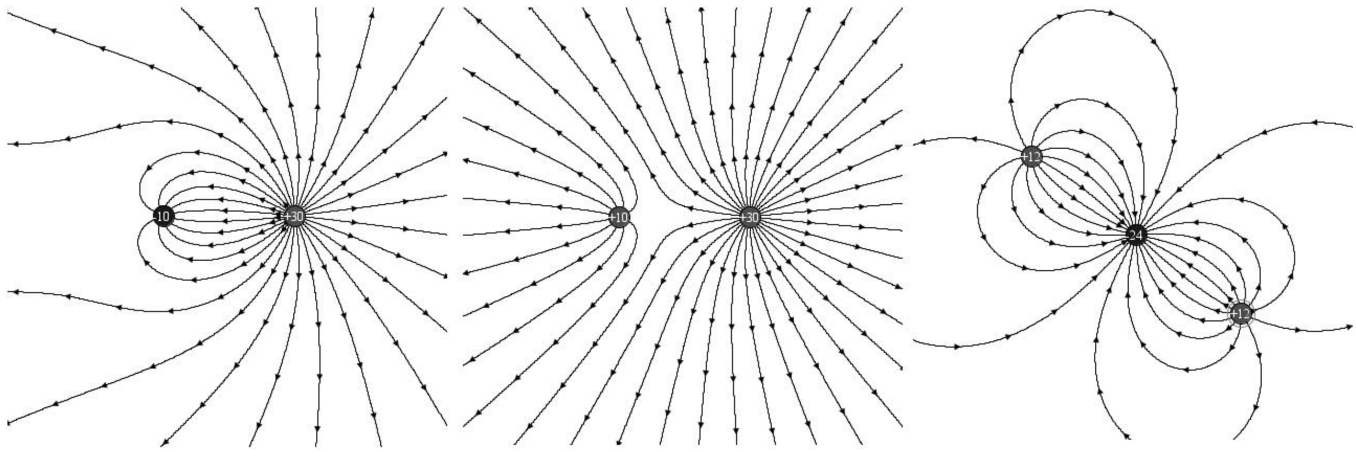
In un punto sull'asse y l'intensità del campo vale:

$$E=\frac{k\cdot Q\cdot d}{\left(y^2+\left(\frac{1}{2}d\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\ ,\quad \text{da cui segue che } \vec{E}=\frac{k\cdot Q\cdot d}{\left(y^2+\left(\frac{1}{2}d\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

Un'ultima osservazione: l'intensità del campo elettrico lontano dal dipolo può essere approssimata in:

$E=\frac{2\cdot k\cdot Q\cdot d}{x^3}$ lungo l'asse x, rispettivamente $E=\frac{k\cdot Q\cdot d}{y^3}$ lungo l'asse y.

Nelle immagini che seguono sono rappresentati dei campi elettrici per alcune distribuzioni di carica. Da notare che i valori scritti sulle cariche ne indicano il valore in unità arbitrarie.



Spesso la distribuzione delle cariche, sorgente del campo elettrico, viene considerata continua (la struttura "granulare" delle cariche elettriche porterebbe a calcoli comprendenti un numero enorme di particelle).

In questi casi si introducono opportune **densità di carica**.

Nel caso di un filo carico si definisce la **carica lineica** o carica per unità di lunghezza, indicata con il simbolo λ ($[\lambda]=\frac{C}{m}$); nel caso di un piano si ha la **carica areica** o carica per unità di superficie, indicata con σ ($[\sigma]=\frac{C}{m^2}$).

Fra i molti casi possibili, interessanti e relativamente facili da calcolare sono il campo elettrico generato da un filo rettilineo, infinito e omogeneamente carico e quello di una lastra piana infinita e omogeneamente carica.

Relativamente facili non significa alla portata di allievi di seconda liceo, in quanto la matematica necessaria è in programma in quarta. Riportiamo di seguito unicamente i risultati di questi calcoli.

Il campo elettrico generato da un filo rettilineo, infinito e omogeneamente carico è un campo perpendicolare al filo la cui intensità decresce con l'inverso della distanza. Per il modulo vale:

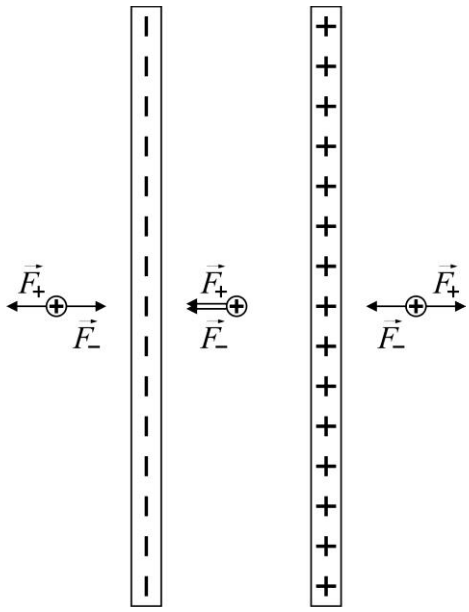
$E=\frac{2\cdot k\cdot\lambda}{r}$ con r la distanza dal filo.

Il campo generato da una lastra piana infinita e omogeneamente carica è un campo perpendicolare alla piastra e costante in modulo che vale:

$$E=2\pi\cdot k\cdot\sigma.$$

Quest'ultimo è un caso interessante perché un corpo elettricamente carico che si muove in un campo elettrico costante (un campo di questo tipo viene anche detto uniforme o omogeneo) è soggetto ad una forza costante (in modulo, direzione e verso). Il moto di questo corpo avrà la stessa cinematica di una massa che si muove in prossimità della superficie terrestre soggetta alla sola forza peso.

Essere confrontati con situazioni reali di fili infiniti o piastre infinite non è evidentemente possibile.



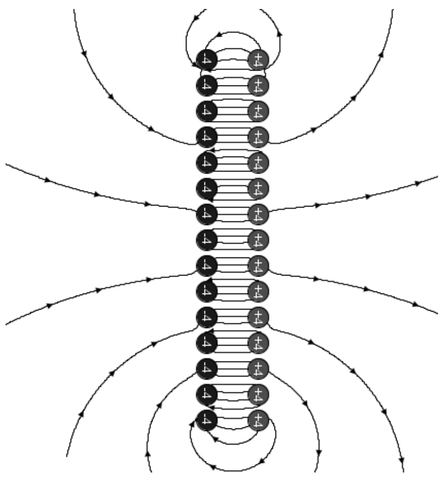
È possibile realizzare una situazione in cui i risultati ottenuti precedentemente sono applicabili con una grande approssimazione: è il caso del **condensatore piano**.

Un condensatore piano è formato da due piastre identiche, piane, finite, parallele fra di loro separate da una distanza solitamente molto più piccola delle dimensioni delle piastre e caricate con una quantità di carica uguale ma di segno opposto.

In un punto all'interno delle piastre o subito all'esterno il campo elettrico generato dalle due piastre prese singolarmente non si discosta molto da quello generato da piastre di dimensione infinita caricate con la stessa carica areica. Il campo totale lo si ottiene sommando i campi delle singole piastre. Il disegno accanto ci aiuta a visualizzare il verso del campo delle singole piastre e poi quello totale nei vari punti interessanti.

Come si può osservare all'esterno del condensatore i campi sono di uguale intensità, direzione ma verso opposto e quindi si annullano. All'interno i campi si sommano producendo un campo omogeneo di intensità pari al doppio del campo di ciascuna piastra, cioè:

$$E_{\text{est}} = 0; \quad E_{\text{int}} = 4\pi \cdot k \cdot \sigma \,.$$



Se ci si allontana dal condensatore o ci si pone ai bordi ci sono delle piccole differenze fra quanto calcolato e la situazione reale sia per quel che riguarda l'intensità del campo sia per la sua direzione.

L'immagine a lato è la simulazione di un "condensatore" formato da singole cariche allineate. Osservate che all'esterno il campo non è completamente nullo e la direzione è perpendicolare solo al centro. Il campo è quasi omogeneo solo all'interno del condensatore.

Alcune ultime osservazioni:

- Il campo elettrico all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico, le cui cariche cioè sono ferme, è nullo. In caso contrario le cariche libere per effetto del campo sarebbero accelerate e quindi non in equilibrio. Il raggiungimento dell'equilibrio è un fenomeno praticamente istantaneo.
- Se il conduttore è carico, le cariche si disporranno alla superficie dello stesso. Essendo il campo nullo, all'interno non vi sono linee di campo e quindi neppure cariche (sorgenti di linee di campo).
- Il campo elettrico sulla superficie di un conduttore (per es. un metallo) in equilibrio elettrostatico è sempre perpendicolare alla superficie stessa: se esistesse una componente non nulla tangenziale alla superficie, le cariche sarebbero accelerate e quindi non in equilibrio.