La quantità di moto e la sua conservazione

Introduzione

Cominciamo questo capitolo dando risalto all'ultima parola del titolo, vale a dire "conservazione".

Non è la prima volta che incontriamo questo vocabolo. Esso era la parola chiave nel capitolo "Lavoro e Energia" al momento in cui abbiamo mostrato che dalle leggi della dinamica e in particolare dalla legge di Newton poteva essere dedotto il principio di conservazione dell'energia e, in presenza di sole forze conservative, la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Riassumiamo di seguito i punti più importanti riguardanti il concetto di lavoro in modo da ridefinirli con l'aiuto delle nuove nozioni di matematica che nel frattempo avete imparato.

Cominciamo con la definizione di lavoro di una forza. Il lavoro di una forza lega la grandezza forza applicata ad un corpo allo spostamento del corpo stesso. Nel caso di una forza costante che agisce lungo un percorso rettilineo, la definizione di lavoro è:

$W = F_{||} \cdot \Delta x$, dove $F_{||}$ è la componente della forza parallela allo spostamento.

Con l'aiuto della trigonometria si può scrivere:

$W = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \Delta x$, dove α è l'angolo fra la forza (che sappiamo essere un vettore) e lo spostamento (esso pure grandezza vettoriale).

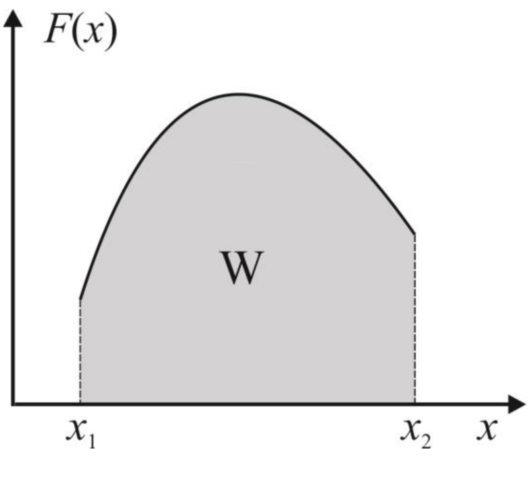
D'altro canto avete imparato (o imparerete a breve) che quanto appena scritto altro non è che il prodotto scalare fra due vettori, cioè:

$W = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \Delta x = F \cdot \Delta x \cdot \cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$.

Questo significa che, da due grandezze vettoriali, si ricava una grandezza scalare.

Il passaggio alla situazione generale, dove la forza non è più costante e il percorso non è più rettilineo, consiste nel suddividere il percorso in tanti piccoli tratti in grado di soddisfare i seguenti due criteri: ogni tratto di percorso deve poter essere considerato rettilineo e la forza lungo quel tratto possa essere considerata costante; a questo punto si calcola il lavoro della forza in ogni tratto; il lavoro totale dall'inizio alla fine altro non è che la somma di tutti I lavori calcolati.

Nel caso di una forza variabile che agisce parallelamente ad un percorso rettilineo, il concetto di somma dei lavori calcolati lungo ciascun tratto si può ricondurre al calcolo di un'area sul grafico (a questo proposito richiamo al calcolo del lavoro di una forza elastica, vista lo scorso anno, oppure alla determinazione del lavoro della forza di gravità nel caso planetario, analizzata quando abbiamo esteso il concetto di energia potenziale gravitazionale su grandi distanze). Genericamente se la forza in funzione dello spostamento ha l'andamento indicato nel grafico accanto, il lavoro è determinabile calcolando l'area sotto la curva (non ha importanza al momento come si faccia a calcolare quest'area).

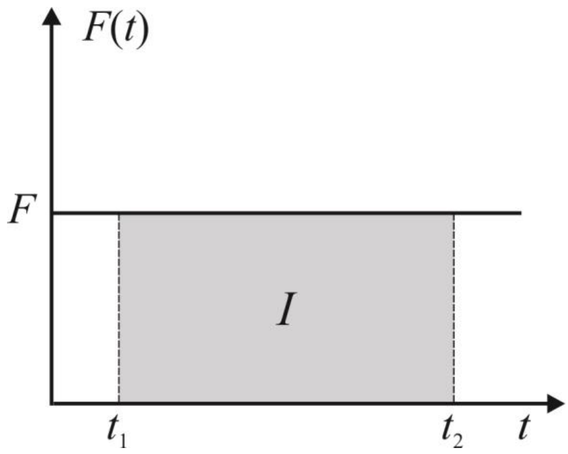


L'impulso di una forza

Se il lavoro di una forza ci dava informazioni sull'azione di una forza lungo un percorso, l'impulso di una forza ci fornisce indicazioni su cosa fa una forza durante un intervallo di tempo.

Se consideriamo una forza costante **l'impulso** viene semplicemente definito nel seguente modo:

$I = F \cdot \Delta t$.



Dal punto di vista grafico si può dire che l'impulso è riconducibile all'area del rettangolo che ha come base l'intervallo di tempo e altezza la forza.

Dato che una forza è una grandezza vettoriale, mentre l'intervallo di tempo è uno scalare, è più corretto scrivere per una forza costante (quando si parla di un vettore costante si intende costante in intensità, direzione e verso):

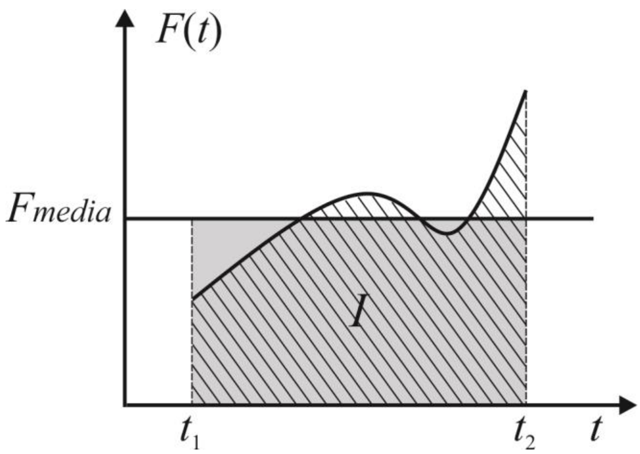
$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$.

Moltiplicare un vettore per uno scalare significa moltiplicare per lo scalare le singole componenti del vettore.

Evidentemente, se la forza F è la sola forza che ci interessa ed è costante, tutto è riconducibile ad una sola dimensione e quindi alla prima formula.

Se la forza non è costante nel tempo come intensità ma agisce sempre nelle stessa direzione, l'impulso di una forza è definibile come segue:

$I = F_{media} \cdot \Delta t$,



dove con forza media si intende una forza costante che agisce nello stesso intervallo di tempo della forza in esame con la seguente caratteristica: l'area del rettangolo calcolato con $I = F_{media} \cdot \Delta t$ (nel disegno in color grigio chiaro) ha lo stesso valore di quello sotto la curva che rappresenta la forza che cambia nel tempo (nel disegno quella tratteggiata). Se la forza non è costante anche come direzione e verso allora si dovranno calcolare i valori della forza media di tutte le componenti. Si scriverà allora:

$\vec{I} = \vec{F}_{media} \cdot \Delta t$.

L'impulso della forza risultante

Esaminiamo ora il caso della forza risultante. Iniziamo con una forza costante e calcoliamo l'impulso di questa forza nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Dalla definizione di impulso possiamo scrivere:

$$I\left(Fris\right) = Fris \cdot \Delta t \ ,$$

che con l'aiuto della legge di Newton diventa:

$$I\left(Fris\right) = m \cdot a \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = m \cdot v\left(t_2\right) - m \cdot v\left(t_1\right) = m \cdot v_2 - m \cdot v_1 .$$

Chiamando **quantità di moto** il prodotto fra la massa e la velocità e indicandolo con il simbolo p si può scrivere:

$$I\left(Fris\right) = p_2 - p_1 = \Delta p .$$

Anche quando la forza non è costante otteniamo lo stesso risultato, cioè:

$$I\left(Fris_{media}\right) = m \cdot a_{media} \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v = m \cdot v\left(t_2\right) - m \cdot v\left(t_1\right) = m \cdot v_2 - m \cdot v_1 = p_2 - p_1 = \Delta p \ ,$$

o meglio:

$$\vec{I}\left(\vec{F}ris\right) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p} .$$

L'introduzione del concetto di quantità di moto ci permette di formulare la legge di Newton, che abbiamo sempre visto scritta $Fris = m \cdot a$, nel seguente modo:

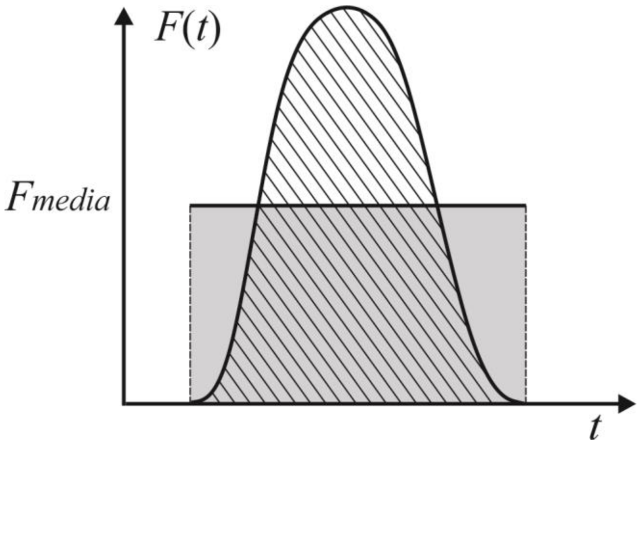
$$\left.\begin{aligned} I\left(Fris\right) &= Fris \cdot \Delta t \\ I\left(Fris\right) &= \Delta p \end{aligned}\right\} Fris \cdot \Delta t = \Delta p \ \Rightarrow \ Fris = \frac{\Delta p}{\Delta t} ,$$

che vettorialmente diventa:

$$\vec{F}ris = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Possiamo applicare questi concetti per affrontare problemi già incontrati ad esempio il seguente:

calcolare la forza media esercitata da una racchetta da tennis durante un servizio se la pallina di massa $m = 58\,g$, da ferma, raggiunge una velocità di $198\,\frac{km}{h}$ con un tempo d'urto (il tempo che la pallina rimane a contatto con la racchetta) di $0{,}052\,s$.



$$Fris_{media} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m \cdot v - 0}{\Delta t} = \frac{0{,}058\,kg \cdot \left(\frac{198}{3{,}6}\,\frac{m}{s}\right)}{0{,}052\,s} = 61{,}3\,N$$

Dobbiamo dire media in quanto l'andamento dalla forza segue all'incirca quello disegnato nel grafico a lato.

La quantità di moto in un sistema di particelle

Prima di affrontare questo capitolo occorre riprendere il concetto di centro di massa o **baricentro.**

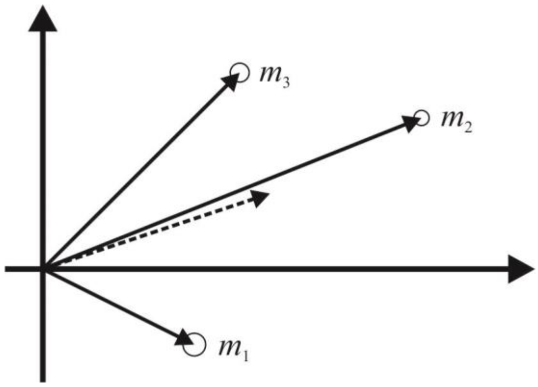
Il baricentro

La definizione di baricentro e relativamente semplice. Considerando un certo numero di masse puntiformi, è data dalla seguente formula:

$$\vec{r}_B = \frac{\sum_{n=1}^{N} m_n \cdot \vec{r}_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} \left(= \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + \ldots + m_N \cdot \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_N} \right).$$

La posizione del baricentro è per così dire una media vettoriale, ponderata secondo la massa, delle posizioni di tutte le masse in gioco.

Facciamo un esempio a due dimensioni.



Si considerino le seguenti 3 masse,

$m_1 = 3,0\,kg$, $m_2 = 2,0\,kg$ e $m_3 = 2,5\,kg$

posizionate in

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2,0\,m \\ -1,0\,m \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 5,0\,m \\ 2,0\,m \end{pmatrix} e\ \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 2,6\,m \\ 2,6\,m \end{pmatrix}$$

Il baricentro vale:

$$\vec{r}_B = \frac{3,0\,kg \cdot \begin{pmatrix} 2,0\,m \\ -1,0\,m \end{pmatrix}_1 + 2,0\,kg \cdot \begin{pmatrix} 5,0\,m \\ 2,0\,m \end{pmatrix} + 2,5\,kg \cdot \begin{pmatrix} 2,6\,m \\ 2,6\,m \end{pmatrix}}{3,0\,kg + 2,0\,kg + 2,5\,kg} = \begin{pmatrix} 3,0\,m \\ 1,0\,m \end{pmatrix}$$

Nel disegno a lato la posizione del baricentro è indicata con una freccia (vettore) tratteggiata.

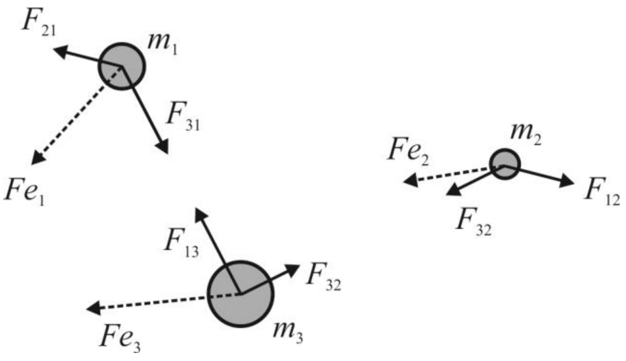
Più semplice ancora è calcolare il centro di massa di due corpi. Avendo solo due corpi il problema è riducibile ad una sola dimensione perciò si può scrivere:

$$x_B = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}.$$

Ad esempio consideriamo due corpi di massa $m_1 = 5,0\,kg$ e $m_2 = 2,0\,kg$ posti in $x_1 = 0,0\,m$ e $x_2 = 3,5\,m$;

il baricentro si trova in:

$$x_B = \frac{5,0\,kg \cdot 0,0\,m + 2,0\,kg \cdot 3,5\,m}{5,0\,kg + 2,0\,kg} = 1,0\,m.$$



Prendiamo ora in considerazione un sistema di particelle.

Per semplicità ci limitiamo ad in sistema composto da soli tre corpi. La generalizzazione ad un sistema composto da enne corpi è immediato.

Su ciascuno dei tre corpi agiscano forze interne, vale a dire le forze dovute all'interazione reciproca fra i corpi, e forze esterne che per ciascun corpo verranno indicate semplicemente come forza esterna. Il disegno a lato aiuta a comprendere meglio la situazione (per meglio distinguere fra forze interne e forze esterne si sono usati il tratto pieno per le forze interne e quello tratteggiato per quelle esterne).

Dalla definizione di baricentro possiamo scrivere:

$$\left(m_1+m_2+m_3\right)\cdot\vec{r}_B=m_1\cdot\vec{r}_1+m_2\cdot\vec{r}_2+m_3\cdot\vec{r}_3 .$$

Definendo la massa del baricentro come la somma di tutte le masse e cioè $m_B=m_1+m_2+m_3$, la formula precedente può essere riscritta come segue:

$$m_B\cdot\vec{r}_B=m_1\cdot\vec{r}_1+m_2\cdot\vec{r}_2+m_3\cdot\vec{r}_3 .$$

Prendiamo ora in considerazione la posizione del baricentro e delle singole masse all'istante t e all'istante $t+\Delta t$.

$$m_B\cdot\vec{r}_B\left(t\right)=m_1\cdot\vec{r}_1\left(t\right)+m_2\cdot\vec{r}_2\left(t\right)+m_3\cdot\vec{r}_3\left(t\right) \quad \text{e}$$

$$m_B\cdot\vec{r}_B\left(t+\Delta t\right)=m_1\cdot\vec{r}_1\left(t+\Delta t\right)+m_2\cdot\vec{r}_2\left(t+\Delta t\right)+m_3\cdot\vec{r}_3\left(t+\Delta t\right).$$

Facendo la differenza membro a membro della seconda uguaglianza con la prima e sostituendo per tutte le masse $\Delta\vec{r}=\vec{r}\left(t+\Delta t\right)-\vec{r}\left(t\right)$ si ottiene:

$$m_B\cdot\Delta\vec{r}_B=m_1\cdot\Delta\vec{r}_1+m_2\cdot\Delta\vec{r}_2+m_3\cdot\Delta\vec{r}_3 .$$

Se si divide per Δt si ha:

$$m_B\cdot\frac{\Delta\vec{r}_B}{\Delta t}=m_1\cdot\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}+m_2\cdot\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}+m_3\cdot\frac{\Delta\vec{r}_3}{\Delta t} .$$

Scegliendo inoltre un Δt molto piccolo, piccolo a piacimento, la relazione precedente diventa:

$$m_B\cdot\vec{v}_B\left(t\right)=m_1\cdot\vec{v}_1\left(t\right)+m_2\cdot\vec{v}_2\left(t\right)+m_3\cdot\vec{v}_3\left(t\right).$$

La medesima sequenza di passaggi può essere fatta anche sulla velocità del baricentro e delle singole masse. Quello che si ottiene è una relazione fra le accelerazioni del baricentro e delle singole masse e cioè:

$$m_B\cdot\vec{a}_B\left(t\right)=m_1\cdot\vec{a}_1\left(t\right)+m_2\cdot\vec{a}_2\left(t\right)+m_3\cdot\vec{a}_3\left(t\right).$$

Per la legge di Newton il prodotto massa per accelerazione corrisponde alla forza risultante, la quale a sua volta è la somma di tutte le forze applicate ad un corpo, quindi:

$$\vec{F}ris_B=\vec{F}ris_1+\vec{F}ris_2+\vec{F}ris_3=\left(\vec{F}e_1+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{31}\right)+\left(\vec{F}e_2+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{32}\right)+\left(\vec{F}e_3+\vec{F}_{23}+\vec{F}_{13}\right).$$

La terza di legge di Newton (il principio di azione e reazione) afferma che $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, $\vec{F}_{13}=-\vec{F}_{31}$ e $\vec{F}_{32}=-\vec{F}_{23}$; perciò:

$$\vec{F}ris_B=\left(\vec{F}e_1+\cancel{\vec{F}_{21}}+\cancel{\vec{F}_{31}}\right)+\left(\vec{F}e_2+\cancel{\vec{F}_{12}}+\cancel{\vec{F}_{32}}\right)+\left(\vec{F}e_3+\cancel{\vec{F}_{23}}+\cancel{\vec{F}_{13}}\right)=\vec{F}e_1+\vec{F}e_2+\vec{F}e_3=\vec{F}e_{tot} .$$

Che cosa succede ora se prendiamo in considerazione un sistema isolato, un insieme cioè di corpi soggetti solo a forze di interazione reciproca? un sistema di corpi sui quali non agiscono forze esterne? un sistema per cui $\vec{F}e_{tot} = 0$?

Molto semplicemente questo significa che la forza risultante sul baricentro è nulla e quindi che il baricentro o è fermo oppure si muove di moto lineare uniforme, cioè di un moto a velocità costante.

Dal punto di vista della quantità di moto questo sta a significare che la quantità di moto si mantiene costante cioè che la variazione della quantità di moto tra due istanti diversi è pari a zero, vale a dire:

$\Delta\vec{p}_B = 0$, oppure $\vec{p}_{Bi} = \vec{p}_{Bf}$; a parole significa che la quantità di moto iniziale del baricentro è pari alla quantità di moto finale del baricentro stesso. Ma dato che:

$m_B \cdot \vec{v}_B = \vec{p}_B = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$, si ottiene:

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 =$ costante .

Questa relazione prende nome di **principio di conservazione della quantità di moto**. Questo principio afferma che, in un sistema isolato, la quantità di moto totale si mantiene costante.

Chiaramente quanto abbiamo fatto per un sistema formato da tre corpi, può essere generalizzato a un numero qualsiasi, e pertanto per un sistema isolato composto da enne corpi si può scrivere:

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N =$ costante .

Come per la legge di conservazione dell'energia meccanica, questa nuovo principio di conservazione permette di porre una uguaglianza tra la somma delle quantità di moto di ciascun corpo in momenti diversi.

Vedremo che questo tornerà parecchio utile nell'affrontare le situazioni legate agli urti.

A differenza della legge di conservazione dell'energia meccanica, che vale solo in presenza di forze conservative, la conservazione della quantità di moto vale sempre anche in presenza di forze non conservative (d'altro canto quando abbiamo posto le basi per il nostro ragionamento non abbiamo messo delle limitazioni alle forze di reciproca interazione fra i corpi).

Nelle prossime righe si vuole verificare che questo fatto è vero, risolvendo un piccolo problema in cui la forza interna di reciproca interazione fra due corpi è la forza di attrito (forza non conservativa). Lo si farà utilizzando la legge di Newton, calcolando poi la quantità di moto all'inizio e alla fine, e verificando che sono uguali.

La situazione sia la seguente: si consideri un lungo piano la cui superficie superiore sia suddivisa in due parti, la prima liscia (non c'è attrito) e la seconda scabra (con attrito); esso può scivolare senza attrito in orizzontale (sistema isolato, non ci sono forze esterne); su questo piano è appoggiato un corpo che può muoversi rispetto al piano. Inizialmente il piano sia fermo e il corpo si muova sulla parte liscia con una certa velocità; quando il corpo incontra la parte scabra la forza di attrito inizierà ad agire rallentando il corpo e, per la legge di azione e reazione, accelerando il piano. L'intervallo di tempo durante il quale agisce la forza di attrito è pari al tempo necessario per fare in modo che il corpo sopra il piano sia fermo rispetto al piano stesso, cioè che i due abbiano la stessa velocità.

Si conoscano i seguenti dati: massa del piano $M = 4,0\,kg$; massa del corpo $m = 1,0\,kg$; velocità iniziale del corpo $v = 5,0\,\frac{m}{s}$; forza di attrito $F_A = 2,0\,N$.

Con l'aiuto della legge di Newton si può scrivere:

$m \cdot a_m = Fris_m = F_A$, che inserendo i valori numerici diventa: $1,0\,kg \cdot a_m = 2,0\,N$, da cui $a_m = \dfrac{2,0\,N}{1,0\,kg} = 2,0\,\frac{m}{s^2}$;

$M \cdot a_M = Fris_M = F_A$, cioè $4,0\,kg \cdot a_M = 2,0\,N$, da cui $a_M = \dfrac{2,0\,N}{4,0\,kg} = 0,5\,\frac{m}{s^2}$.

Si può ricavare la velocità dei due corpi con l'aiuto di ciò che conosciamo sul moto uniformemente accelerato.

$v_m = 5{,}0 \frac{m}{s} + \left(-2{,}0 \frac{m}{s^2}\right) \cdot t$ e $v_M = 0 \frac{m}{s} + 0{,}5 \frac{m}{s^2} \cdot t$.

Il segno "-" davanti all'accelerazione della prima formula sta evidentemente a significare che, rispetto al sistema di riferimento scelto, il corpo sta rallentando.

Come abbiamo già detto l'intervallo di azione della forza di attrito corrisponde al tempo necessario per fare in modo che i due corpi abbiano la stessa velocità, e quindi:

$5{,}0 \frac{m}{s} + \left(-2{,}0 \frac{m}{s^2}\right) \cdot t = 0 \frac{m}{s} + 0{,}5 \frac{m}{s^2} \cdot t$, da cui $t = 2{,}0\, s$.

Possiamo ora ricavare la velocità dei due corpi alla fine che vale: $v_m(2{,}0\, s) = v_M(2{,}0\, s) = 1{,}0 \frac{m}{s}$.

Siamo in grado a questo punto di calcolare la quantità di moto all'inizio e alla fine che vale:

$ptot_i = p_{mi} + p_{Mi} = m \cdot v_{mi} + M \cdot v_{Mi} = 1{,}0\, kg \cdot 5{,}0 \frac{m}{s} + 4{,}0\, kg \cdot 0 \frac{m}{s} = 5{,}0\, kg \frac{m}{s}$ e

$ptot_f = p_{mf} + p_{Mf} = m \cdot v_{mf} + M \cdot v_{Mf} = 1{,}0\, kg \cdot 1{,}0 \frac{m}{s} + 4{,}0\, kg \cdot 1{,}0 \frac{m}{s} = 5{,}0\, kg \frac{m}{s}$.

Come si può verificare i due valori sono uguali.

Gli urti

Come già anticipato, la legge di conservazione della quantità di moto permette un approccio relativamente facile al problema degli urti fra corpi, in particolare quando le forze agenti durante l'urto non sono semplici da analizzare (spesso non se ne conosce la variazione nel tempo oppure, anche se la si conosce, una analisi dettagliata comporta conoscenze matematiche che non abbiamo ancora). Di solito quello che si cerca è la situazione prima e dopo l'urto.

Gli urti si dividono in due categorie: gli **urti elastici** e quelli **anelastici**. Per entrambe le categorie vale evidentemente la conservazione delle quantità di moto mentre per quelli elastici vale pure la conservazione dell'energia meccanica.

Cominciamo ad analizzare gli urti ad una sola dimensione e iniziamo con un urto anelastico fra due corpi.

Consideriamo un carrello di massa m_1 che, muovendosi su un binario ad aria (il binario ad aria garantisce che non agiscono forze esterne) alla velocità v_{1i}, urta in modo anelastico un secondo carrello di massa m_2 inizialmente fermo (la caratteristica di urto anelastico è garantita per esempio da un rivestimento di velcro nel punto di contatto così che i due carrellini rimangano uniti alla fine dell'urto).

Le quantità di moto iniziale e finale del sistema valgono:

$ptot_i = p_{1i} + p_{2i} = m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v_{1i}$ rispettivamente

$ptot_f = p_{1f} + p_{2f} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f} = (m_1 + m_2) \cdot v_f$ dato che entrambi hanno la stessa velocità finale.

La legge di conservazione della quantità di moto ci dice che le due quantità di moto sono uguali. Si può pertanto ricavare la sola grandezza che non si conosce, cioè la velocità finale che vale:

$$v_f = \frac{m_1 \cdot v_{1i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} .$$

Trattandosi di un urto anelastico l'energia meccanica non si conserverà. Lo si può facilmente verificare.

L'energia meccanica è semplicemente l'energia cinetica dei carrelli prima e dopo l'urto, vale a dire:

$Ecin_{tot\,i} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 = Ecin_{1i}$ e

$$Ecin_{tot\,f} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_f^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_f^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_f^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \right)^2 =$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot Ecin_{1i}$$

Ma dato che $\frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1$ vale: $Ecin_{tot\,f} < Ecin_{tot\,i}$.

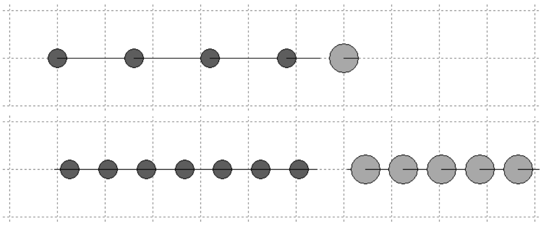
La relazione fra le quantità di moto appena analizzata può valere in diverse situazioni. Una piccola esperienza che può essere realizzata consiste nel voler determinare la velocità con cui è sparato il proiettile di un'arma ad aria compressa. Sul solito carrellino appoggiato sul binario ad aria viene fissato un bersaglio fatto di materiale deformabile (ad esempio dello stucco o della plastilina); si spara su quel bersaglio inizialmente fermo con la pistola ad aria compressa e si misura infine la velocità finale del carrellino e il proiettile incastrato nel bersaglio.

Sono dati questi valori:

massa del proiettile $m = 0{,}54\,g$; massa del carrellino $M = 197{,}8\,g$; velocità finale $v_f = 0{,}186\,\frac{m}{s}$.

Risolvendo ora rispetto alla velocità iniziale invece che rispetto a quella finale si ottiene:

$$v_{mi} = \frac{m + M}{m} \cdot v_f = \frac{0{,}54\,g + 197{,}8\,g}{0{,}54\,g} \cdot 0{,}186\,\frac{m}{s} = 68{,}3\,\frac{m}{s} .$$



Prendiamo ora in esame un urto elastico. Il disegno a lato da un'idea della situazione. Un corpo di massa m_1 si sta muovendo verso destra alla velocità v_{1i} e urta elasticamente un corpo di massa m_2 inizialmente fermo.

La parte superiore del disegno mostra la posizione del primo corpo (il pallino piccolo grigio scuro) in movimento e il secondo corpo (il pallino più grande grigio chiaro) fermo prima dell'urto; la parte inferiore i due corpi in movimento dopo l'urto (si è presa in considerazione la situazione in cui il primo corpo sia più leggero del secondo).

La legge di conservazione della quantità di moto ci permette di scrivere:

$ptot_i = p_{1i} + p_{2i} = m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot v_{1i}$ rispettivamente

$ptot_f = p_{1f} + p_{2f} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f}$, da cui:

$m_1 \cdot v_{1i} = m_1 \cdot v_{1f} + m_2 \cdot v_{2f}$.

Quella di conservazione dell'energia ci dice quanto segue:

$Etot_i = Ecin_{1i} + Ecin_{2i} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 + 0$ rispettivamente

$Etot_f = Ecin_{1f} + Ecin_{2f} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2f}^2$, da cui:

$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2f}^2$.

Dalla legge di conservazione della quantità di moto si ricava ad esempio v_{1f} e cioè:

$$v_{1f} = \frac{m_1 \cdot v_{1i} - m_2 \cdot v_{2f}}{m_1} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} \cdot v_{2f}.$$

Sostituendo quanto appena ricavato nella legge di conservazione dell'energia si ottiene una equazione di secondo grado che ha come incognita la velocita finale v_{2f} della massa m_2. Lasciando agli allievi il compito di risolvere l'equazione, si possono analizzare i risultati, e cioè:

$$v_{2f} = \frac{2 \cdot m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = 0 \quad , \text{ rispettivamente } \quad v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{1f} = v_{1i}.$$

Evidentemente la coppia di soluzioni $v_{2f} = 0$ e $v_{1f} = v_{1i}$ si riferiscono alla situazione prima dell'urto.

Supponiamo di avere questa situazione particolare (che riflette in buona approssimazione il disegno in alto):

$m_1 = 1,0\,kg$, $m_2 = 3,0\,kg$ e $v_{1i} = 1,6\,\frac{m}{s}$.

Le velocità finali saranno: $v_{1f} = -0,8\,\frac{m}{s}$ rispettivamente $v_{2f} = 0,8\,\frac{m}{s}$ (il segno "-" davanti alla velocità finale della massa m_1 sta a indicare che si sta muovendo a ritroso rispetto al senso positivo).

Se avessimo avuto due corpi con la stessa massa avremmo ottenuto che la velocità finale del primo corpo sarebbe stata pari a zero mentre quella del secondo pari alla velocita iniziale del primo.

Che cosa sia successo durante l'urto non è conosciuto, vale a dire non si conosce quale forza abbia mediato l'urto. Si sa solo che deve essere una forza conservativa. L'urto elastico poteva essere garantito da due calamite fisse sui carrellini che hanno lo stesso polo sulle estremità dei carrellini che si urtano, oppure l'urto era mediato da una molla, oppure ancora da un anello elastico. Tutto ciò non ha importanza. Quello che conta è semplicemente che la forza in gioco sia conservativa.

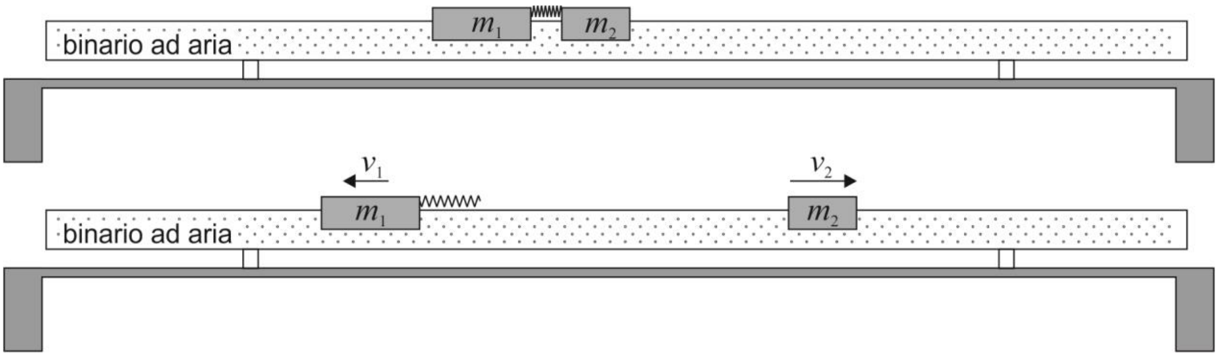
Se si conosce il tipo di forza che agisce durante l'urto si possono analizzare (entro certi limiti legati alle vostre conoscenze di matematica) alcuni momenti dell'urto stesso. Cominciamo ad analizzare il caso in cui l'urto è mediato da una molla.

Iniziamo con una situazione che proprio un urto non lo si può considerare ma che viene affrontato allo stesso modo.

Si prendano in considerazione due carrellini di massa m_1 rispettivamente m_2 inizialmente fermi; essi sono separati da una molla di costante elastica k schiacciata di una quantità Δl.

Permettendo alla molla di rilassarsi, essa spingerà i due carrellini uno a destra e l'altro a sinistra.

Da calcolare le velocita dei due carrellini.



Per la quantità di moto vale:

$$0+0=m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2.$$

Per l'energia si può scrivere:

$$\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot\Delta l^2+0+0=0+\tfrac{1}{2}\cdot m_1\cdot v_1^2+\tfrac{1}{2}\cdot m_2\cdot v_2^2.$$

Dall'equazione sulle quantità di moto si ricava che:

$$v_1=-\frac{m_2}{m_1}\cdot v_2.$$

sostituendo questo risultato dell'equazione sulle energie si trova infine:

$$v_2=\Delta l\cdot\sqrt{\frac{k}{m_2\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}\quad \text{rispettivamente}\quad v_1=-\Delta l\cdot\sqrt{\frac{k}{m_1\cdot\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)}}$$

Un esempio numerico: sia la massa dei due carrellini pari a $m_1=500\,g$ rispettivamente $m_2=300\,g$; la molla abbia costante elastica $k=48{,}0\,\frac{N}{m}$ e sia schiacciata di $\Delta l=4{,}0\,cm$. Le leggi di conservazione della quantità di moto e della conservazione dell'energia meccanica scritte numericamente (per praticità non sono sta inserite le unità di misura) diventano:

$$0=0{,}500\cdot v_1+0{,}300\cdot v_2,$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot 48{,}0\cdot 0{,}040^2=\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}500\cdot v_1^2+\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}300\cdot v_2^2.$$

Le soluzioni sono:

$v_1=-0{,}240\,\frac{m}{s}$ e $v_2=0{,}400\,\frac{m}{s}$ oppure $v_1=0{,}240\,\frac{m}{s}$ e $v_2=-0{,}400\,\frac{m}{s}$ (nelle due uguaglianze non può figurare chi si trova a destra e chi si trova a sinistra).

A questo punto possiamo analizzare un vero e proprio urto mediato da una molla.

Anche in questo caso prendiamo in considerazione un corpo di massa m_1 che, muovendosi a velocità iniziale v_{1i}, urta elasticamente, tramite una molla di costante k, un corpo di massa m_2 inizialmente fermo.

Quello che capita prima e dopo l'urto lo abbiamo già analizzato nel primo esempio di urto elastico. A noi interessa a questo punto il massimo schiacciamento della molla durante l'urto.

C'è da comprendere in quale momento la molla è schiacciata al massimo prima di scrivere le leggi di conservazione.

Un analisi qualitativa della situazione ci fa capire che il massimo schiacciamento della molla avviene quando le due masse hanno la stessa velocità. Infatti la prima massa arriva a contatto con la molla con la sua velocità iniziale mentre la seconda massa è ancora ferma; la prima massa inizia a schiacciare la molla che la rallenta mentre la seconda massa inizia ad accelerare; la prima continuerà ad avvicinarsi alla seconda fino a quando la sua velocità è maggiore di quella delle seconda; più le due masse sono vicine più la molla è schiacciata; quando la seconda massa comincerà a muoversi più velocemente della prima la molla comincerà a rilassarsi; il massimo schiacciamento avverrà dunque quando le due masse hanno la stessa velocità.

A questo punto le leggi di conservazione si possono scrivere:

$m_1 \cdot v_{1i} = \left(m_1 + m_2\right) \cdot v_f$ per la quantità di moto,

$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta l^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(m_1 + m_2\right) \cdot v_f^2$ per l'energia.

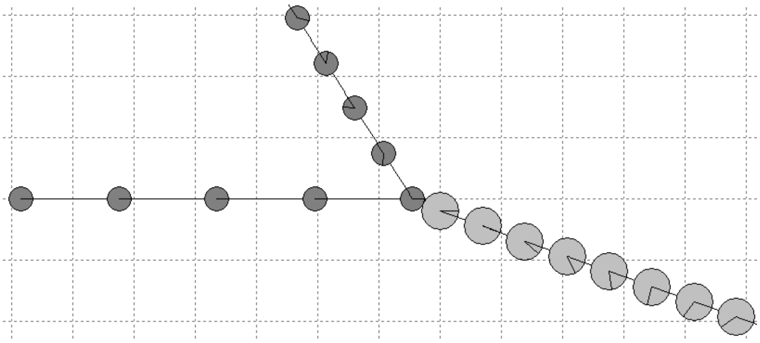
Da cui:

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_{1i} \quad \text{e} \quad \Delta l = v_{1i} \cdot \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Riprendendo i valori del primo urto elastico analizzato e cioè $m_1 = 1,0\,kg$, $m_2 = 3,0\,kg$ e $v_{1i} = 1,6\,\frac{m}{s}$, con una molla che media l'urto di costante elastica $k = 48,0\,\frac{N}{m}$ si ottiene:

$$v_f = \frac{1,0\,kg}{\left(1,0 + 3,0\right) kg} \cdot 1,6\,\tfrac{m}{s} = 0,40\,\tfrac{m}{s} \quad \text{e} \quad \Delta l = 1,6\,\tfrac{m}{s} \cdot \sqrt{\frac{1}{48,0\,\frac{N}{m}} \cdot \frac{1,0\,kg \cdot 3,0\,kg}{\left(1,0 + 3,0\right) kg}} = 0,20\,m.$$

Prendiamo ora in considerazione un urto a due dimensioni.



Un corpo di massa m_1, che si muove con velocità iniziale $\vec{v}_{1i}$, urta in modo elastico un corpo di massa m_2 inizialmente fermo. Contrariamente alla situazione che abbiamo analizzato nelle pagine precedenti, l'urto non è centrale.

Il disegno a lato mostra la situazione.

Per la legge della conservazione dell'energia non è cambiato assolutamente nulla; si può quindi scrivere nuovamente:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2f}^2.$$

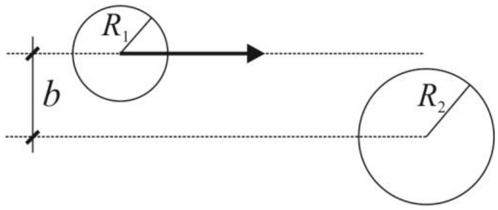
Per la conservazione della quantità di moto è necessario tenere conto dell'aspetto vettoriale, cioè:

$m_1 \cdot \vec{v}_{1i} = m_1 \cdot \vec{v}_{1f} + m_2 \cdot \vec{v}_{2f}$, che diventa:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_{1ix} &= m_1 \cdot v_{1fx} + m_2 \cdot v_{2fx} \\ m_1 \cdot v_{1iy} &= m_1 \cdot v_{1fy} + m_2 \cdot v_{2fy} \end{aligned}.$$

Anche tenendo conto del fatto che $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, ci ritroviamo con tre equazioni e quattro incognite.

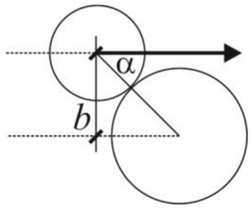
Per poter risolvere il problema, calcolare cioè le velocità finali dei due corpi (che significa conoscere per i due corpi la velocità vettoriale, quindi sia la componente x che la componente y) risulta necessario avere informazioni su come il primo corpo va ad urtare il secondo.



Questa informazione la si ottiene con quello che viene chiamato **parametro d'urto**.

Il disegno spiega bene il significato di questa nuova grandezza.

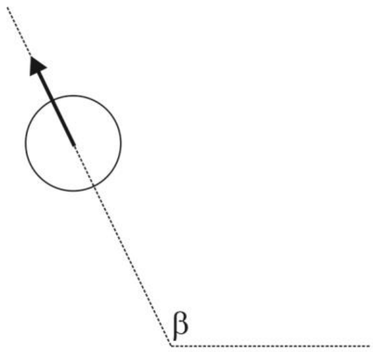
Il parametro d'urto b è la distanza fra la retta passante per il centro del primo corpo avente la direzione della sua velocità e una seconda retta (evidentemente parallela alla prima) passante per il centro del secondo corpo. Chiaramente per fare in modo che l'urto avvenga deve valere la seguente relazione:



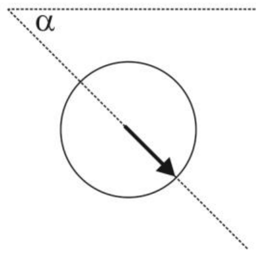
$b < R_1 + R_2$.

Inoltre se $b = 0$ l'urto è centrale e il tutto si riconduce al caso a una dimensione.

La domanda a questo punto è: come ci torna utile questa grandezza?



Nel nostro caso, dato che il secondo corpo è inizialmente fermo, il parametro b permette di calcolare l'angolo α vale a dire l'angolo della direzione dell'azione della forza che il primo corpo esercita sul secondo durante l'urto; esso determina quindi la direzione dell'accelerazione del secondo corpo. Dato che questo secondo corpo è inizialmente fermo la direzione dall'accelerazione, che corrisponde a quella della variazione delle velocità, è pure la direzione della velocità finale del secondo corpo.



A questo punto, utilizzando gli angoli per determinare le componenti delle velocità finali, abbiamo come incognite solo i valori assoluti delle velocità e l'angolo β che determina la direzione della velocità finale del primo corpo, quindi tre equazioni e tre incognite.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1i}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{2f}^2 \\ m_1 \cdot v_{1i} = m_1 \cdot v_{1f} \cdot \cos(\beta) + m_2 \cdot v_{2f} \cdot \cos(\alpha) \\ 0 = m_1 \cdot v_{1f} \cdot \sin(\beta) + m_2 \cdot v_{2f} \cdot \sin(\alpha) \end{cases},$$

con $|\alpha| = \sin^{-1}\left(\dfrac{b}{R_1 + R_2}\right)$.

(Si faccia attenzione che, nella situazione rappresentata nel disegno, α deve assumere valore negativo.)

La risoluzione algebrica del sistema non è delle più semplici. Nelle situazioni concrete si risolve il tutto inserendo i valori numerici.

Ad esempio consideriamo l'urto tra due corpi aventi la stessa massa che si urtano elasticamente con parametro d'urto tale che l'angolo $|\alpha| = 30°$. Dato che $m_1 = m_2 = m$, e ponendo $v_{1i} = 1\frac{m}{s}$ per semplificare i calcoli, le tre equazioni si semplificano nel seguente modo:

$$\begin{cases} \left(1\frac{m}{s}\right)^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \\ 1\frac{m}{s} = v_{1f} \cdot \cos(\beta) + v_{2f} \cdot \cos(-30°) \\ 0 = v_{1f} \cdot \sin(\beta) + v_{2f} \cdot \sin(-30°) \end{cases}$$

che, tralasciando le unità di misura, diventa:

$$\begin{cases} 1^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 & (1) \\ 1 = v_{1f} \cdot \cos(\beta) + v_{2f} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \\ 0 = v_{1f} \cdot \sin(\beta) + v_{2f} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) & (3) \end{cases}.$$

Dalla (3) si ricava: $v_{2f} = 2 \cdot v_{1f} \cdot \sin(\beta)$;

inserendo la (3) nella (2) si ottiene:

$1 = v_{1f} \cdot \cos(\beta) + 2 \cdot v_{1f} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\beta) = v_{1f} \cdot \left(\cos(\beta) + \sqrt{3} \cdot \sin(\beta)\right)$, da cui

$$v_{1f} = \frac{1}{\cos(\beta) + \sqrt{3} \cdot \sin(\beta)} \quad \text{e} \quad v_{2f} = \frac{2 \cdot \sin(\beta)}{\cos(\beta) + \sqrt{3} \cdot \sin(\beta)}.$$

Finalmente si possono inserire i valori delle due velocità finali (che sono funzioni dell'angolo β) nella (1) e otteniamo:

$$1^2 = \left(\frac{1}{\cos(\beta) + \sqrt{3} \cdot \sin(\beta)}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \sin(\beta)}{\cos(\beta) + \sqrt{3} \cdot \sin(\beta)}\right)^2 = \frac{1^2 + \left(2 \cdot \sin(\beta)\right)^2}{\left(\cos(\beta) + \sqrt{3} \cdot \sin(\beta)\right)^2}.$$

Si ottiene così una equazione in β che ha due soluzioni:

$\beta = 0$ e $\beta = 60°$. A noi interessa la seconda.

Interessante notare che con $m_1 = m_2$ i due corpi si lasciano, dopo l'urto, con un angolo di $90°$ e questo è sempre vero indipendentemente dall'angolo α legato al parametro b.

Questa affermazione può essere dimostrata in questo modo: le relazioni associate alla conservazione dell'energia e alla conservazione della quantità di moto si semplificano in questo modo:

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$$
$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}.$$

Se inseriamo il termine della velocità iniziale ricavabile della uguaglianza delle quantità di moto in quella dell'energia, quest'ultima diventa:

$$\left(\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}\right)^2 = \left(\vec{v}_{1f}\right)^2 + 2 \cdot \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} + \left(\vec{v}_{2f}\right)^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2.$$

Ma dato che $\left(\vec{v}_{1f}\right)^2 = v_{1f}^2$ e $\left(\vec{v}_{2f}\right)^2 = v_{2f}^2$, si può semplificare in questo modo:

$\cancel{v_{1f}^2} + 2 \cdot \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} + \cancel{v_{2f}^2} = \cancel{v_{1f}^2} + \cancel{v_{2f}^2}$ che diventa: $2 \cdot \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0$.

Quando un prodotto scalare fra due vettori è pari a zero?

In primo luogo quando uno dei due vettori è un vettore nullo (o anche entrambi). Questo può voler dire che:

se ad essere vettore nullo è $\vec{v}_{2f}$ o l'urto non è ancora avvenuto oppure non avverrà (parametro $b > 1$);

se ad essere vettore nullo è $\vec{v}_{1f}$ allora $\vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1i}$, quindi abbiamo un urto centrale ($b = 0$).

Più interessante è il caso in cui, con vettori non nulli, il prodotto scalare è comunque uguale a zero; questo avviene se i due vettori sono perpendicolari fra di loro, e questo era proprio ciò che si voleva dimostrare.

A questo punto dovrebbe sorgere spontanea la domanda: e se i due corpi sono entrambi in movimento?

Evidentemente in questo caso l'angolo α determinabile con il parametro d'urto non è più l'angolo con cui si muove il corpo 2 dopo l'urto. Il tutto si risolve con un cambiamento del sistema di riferimento. Il moto dei due corpi andrà descritto con un sistema di riferimento che si muove con il moto iniziale di uno dei due corpi (ad esempio il corpo due). In questo modo il corpo 2 risulta fermo e verrà urtato dal corpo 1 in movimento, ritornando così alla situazione analizzata in precedenza. Per ottenere il risultato finale si ritornerà al classico sistema di riferimento solo alla fine.

Per meglio capire che cosa si intende con cambiamento del sistema di riferimento, analizziamo un caso ad una sola dimensione. Si prendano in considerazione due corpi, il primo di massa $m_1 = 4,0\,kg$ che si muove verso destra alla velocità $v_{1i} = 2,0\,\frac{m}{s}$, il secondo di massa $m_1 = 1,0\,kg$ che si muove verso sinistra con velocità $v_{2i} = -5,0\,\frac{m}{s}$.

Risolviamo inizialmente il problema nel sistema di riferimento "classico".

$$\begin{cases} 4,0\,kg \cdot 2,0\,\frac{m}{s} + 1,0\,kg \cdot \left(-5,0\,\frac{m}{s}\right) = 4,0\,kg \cdot v_{1f} + 1,0\,kg \cdot v_{2f} \\ \frac{1}{2} \cdot 4,0\,kg \cdot \left(2,0\,\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,0\,kg \cdot \left(-5,0\,\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,0\,kg \cdot v_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,0\,kg \cdot v_{2f}^2 \end{cases}$$

che, semplificata e tralasciando le unità di misura, diventa:

$$\begin{cases} 3,0 = 4,0 \cdot v_{1f} + 1,0 \cdot v_{2f} \\ 20,5 = 2,0 \cdot v_{1f}^2 + 0,5 \cdot v_{2f}^2 \end{cases}.$$

Le due coppie di soluzioni sono:

$v_{1f} = 2,0\,\frac{m}{s}$ e $v_{2f} = -5,0\,\frac{m}{s}$ (i valori iniziali, che non ci interessano) e

$v_{1f} = -0,8\,\frac{m}{s}$ e $v_{2f} = 6,2\,\frac{m}{s}$ (quello che cercavamo).

Rifacciamo il tutto cambiando il sistema di riferimento. Si scelga un sistema che si muove a velocità costante pari a quella del secondo corpo cioè pari a $v_S = -5,0\,\frac{m}{s}$. A questo punto i due corpi si muoveranno alla velocità $v_{i*} = v_i - v_S$ e perciò $v_{1i*} = 2,0\,\frac{m}{s} - \left(-5,0\,\frac{m}{s}\right) = 7,0\,\frac{m}{s}$ rispettivamente $v_{2i*} = 0,0\,\frac{m}{s} = -5,0\,\frac{m}{s} - \left(-5,0\,\frac{m}{s}\right)$.

Le uguaglianze per la quantità di moto e l'energia diventano:

$$\begin{cases} 4,0 \cdot 7,0 + 0 = 4,0 \cdot v_{1f*} + 1,0 \cdot v_{2f*} \\ \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 7,0^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot v_{1f*}^2 + \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot v_{2f*}^2 \end{cases}.$$

La soluzione che ci interessa è: $v_{1f*} = 4,2\,\frac{m}{s}$ e $v_{2f*} = 11,2\,\frac{m}{s}$.

Ritornando al sistema di riferimento di partenza, cioè con $v_f = v_{f*} + v_S$, la soluzione torna quella che avevamo calcolato prima, e cioè: $v_{1f} = 4,2\,\frac{m}{s} + \left(-5,0\,\frac{m}{s}\right) = -0,8\,\frac{m}{s}$ rispettivamente $v_{2f} = 11,2\,\frac{m}{s} + \left(-5,0\,\frac{m}{s}\right) = 6,2\,\frac{m}{s}$.

Terminiamo questo capitolo osservando che gli urti elastici e quelli anelastico sono i due "estremi" di tutta una categoria di urti non completamente elastici. La trattazione di questi casi non fa parte di questo corso.