Le Leggi di Ohm

Costruiamo un semplice circuito formato da un generatore di differenza di potenziale (ddp) e da un consumatore (ad esempio una lampadina). Prendiamo ad esempio la lampadina del faro dell'automobile già incontrata nel paragrafo 8.1.1, collegata allo stesso generatore di ddp, la batteria a $12,0V$. Come abbiamo già avuto modo di calcolare e verificare, quando la lampadina è collegata alla batteria in essa scorre una corrente di $4,00\,A$. Se alla stessa batteria colleghiamo una lampadina di minore potenza (ad esempio una lampadina da $6,0W$ di una luce interna dell'auto) si osserva e si può calcolare che la corrente che scorre in essa diventa:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{6,0W}{12V} = 0,50\,A.$$

Domanda: per quale motivo collegando alla stessa ddp due lampadine diverse la corrente in esse è diversa? quale caratteristica delle due lampadine cambia?

Che cosa, in altre parole, governa il passaggio della corrente?

La grandezza fisica che definisce con che facilità e meno un consumatore (in questo caso il filamento della lampadina) lascia passare la corrente prende il nome di **resistenza elettrica**, è indicata con il simbolo R, ed è definita dalla relazione:

$$R = \frac{U}{I}.$$

L'unità di misura della resistenza:

$$\left[R\right] = \frac{\left[U\right]}{\left[I\right]} = \frac{V}{A} = \Omega,$$ dove Ω sta per ohm.

In altre parole, se collegando ad un generatore di ddp di $1V$ un consumatore, in esso scorre una corrente di $1A$, allora la sua resistenza elettrica è di 1Ω.

Che cosa succede se colleghiamo la solita nostra lampadina ad un generatore di ddp con tensione diversa?

In primo luogo occorre fare attenzione a non collegare la lampadina ad una tensione maggiore altrimenti "brucia".

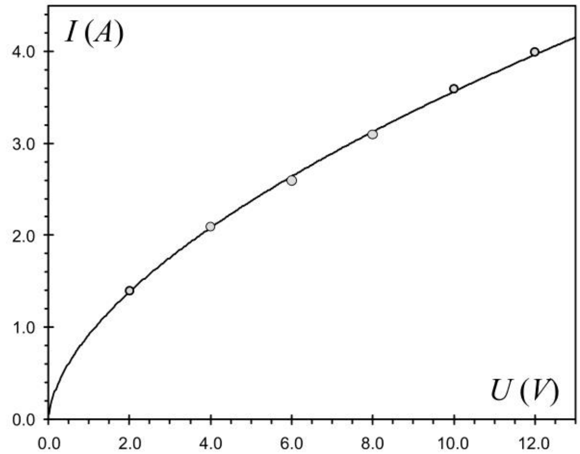
$U(V)$	$I(A)$	$R(\Omega)$
2,0	1,4	1,4
4,0	2,1	1,9
6,0	2,6	2,3
8,0	3,1	2,6
10,0	3,6	2,8
12,0	4,0	3,0

Al nostro scopo possiamo perciò prendere un generatore di ddp variabile e collegare la lampadina al generatore variando la tensione da $2,0V$ fino a $12,0V$ a passi di $2,0V$.

La tabella a lato mostra le misure di tensione e corrente (colonna 1 e colonna 2) e il valore calcolato della resistenza (colonna 3). Si può subito notare che la resistenza della lampadina cambia al cambiare dei valori di tensione e corrente. Questo potrebbe significare che o non è possibile stabilire una relazione fra corrente e tensione oppure che questa è di difficile da determinare.

Se si rappresenta la corrente in funzione della ddp si ottiene il grafico riprodotto alla pagina seguente.

Il grafico così ottenuto rappresenta la curva caratteristica del consumatore con cui si ha a che fare.



Una curva come quella rappresentata non è di facile interpretazione, così come il fatto che la resistenza cambia al cambiare dei valori di tensione e corrente non ci facilita il compito.

Che cosa cambia nella lampadina al cambiare della tensione oltre a corrente e resistenza?

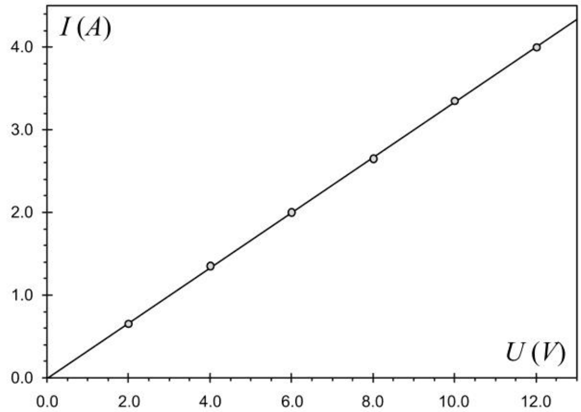
In primo luogo osserviamo che quando la tensione è molto bassa la lampadina non fa luce. Poi man mano che aumentiamo la tensione il filamento inizia a diventare incandescente e il suo colore passa da un rosso cupo fino ad un bianco brillante. Il colore del filamento è un indice della sua temperatura. Il variare della temperatura significa avere a che fare con un nuovo parametro che cambia, parametro tra l'altro che non siamo in grado di misurare.

Meglio sarebbe poter vedere che relazione esiste fra corrente e tensione in un conduttore a temperatura costante.

A questo scopo prendiamo un **resistore**, vale a dire un conduttore la cui temperatura cambia poco al variare della corrente o la cui resistenza cambia poco o nulla al cambiare della temperatura, e rifacciamo la stessa esperienza fatta con la lampadina.

$U(V)$	$I(A)$
2,0	0,65
4,0	1,35
6,0	2,0
8,0	2,65
10,0	3,35
12,0	4,0

La tabella a lato mostra i risultati che sono stati ottenuti e in seguito utilizzati per costruire il relativo grafico. Si può subito osservare che esiste una relazione di proporzionalità diretta tra la tensione e la corrente.



Possiamo pertanto scrivere:

$I \propto U$.

Dato che abbiamo definito la resistenza elettrica come il rapporto fra la tensione e la corrente, il fattore di proporzionalità fra la tensione e la corrente è pari all'inverso della resistenza elettrica cioè:

$I = \frac{1}{R} \cdot U$, solitamente scritta nella forma: $U = R \cdot I$.

Questa relazione è conosciuta come la **prima legge di Ohm**. Conduttori che seguono questa legge vengo appunto detti resistori o conduttori ohmici.

La potenza elettrica assorbita da un consumatore abbiamo visto che vale:

$P = I \cdot U$.

Se il consumatore è un resistore si può scrivere:

$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$.

Nel caso del resistore usato per la nostra esperienza si può dire che la sua resistenza vale $R = 3,0\,\Omega$. Se lo colleghiamo ad una ddp di $6,0\,V$ in esso scorre una corrente di:

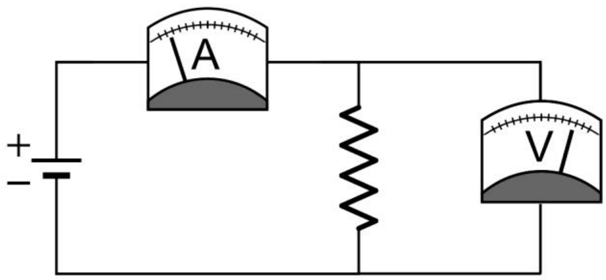
$I = \frac{6,0\,V}{3,0\,\Omega} = 2,0\,A$.

La potenza elettrica assorbita dal resistore vale perciò:

$$P = 3{,}0\Omega \cdot (2{,}0\,A)^2 = \frac{(6{,}0\,V)^2}{3{,}0\Omega} = 12{,}0\,W\,.$$

La misura della resistenza passa pertanto attraverso la misura di tensione e corrente.

Lo schema è quello del disegno a lato. Ancora una volta si ammetta che i due strumenti di misura non abbiano alcuna influenza sul circuito e che i fili che collegano i vari elementi del circuito non abbiano resistenza elettrica o che sia trascurabile rispetto alla resistenza elettrica del resistore.



Come si può osservare nel disegno, se il consumatore è un resistore si usa una simbologia diversa.

Solitamente la misura di una resistenza elettrica di un resistore viene effettuata direttamente con uno strumento chiamato **ohmetro**.

Se un resistore è costituito da un filo di lunghezza l, sezione A e fatto da un certo materiale conduttore, ci si deve porre la domanda: come questi parametri influenzano la resistenza del filo?

Per rispondere a questa domanda è sufficiente misurare la resistenza di fili in cui di volta in volta si cambia la lunghezza, la sezione, e il materiale che compone il filo.

In laboratorio abbiamo a disposizione dei fili di costantana di diversa lunghezza e sezione che servono allo scopo. Le seguenti tabelle riportano i risultati di due serie di misure, la prima cambiando la lunghezza e la seconda cambiando la sezione.

$d = 0{,}7\,mm$	
$l(m)$	$R(\Omega)$
0,50	0,64
1,00	1,27
1,50	1,91
2,00	2,55

$l = 2{,}00\,m$		
$d(mm)$	$A(mm^2)$	$R(\Omega)$
0,35	0,096	10,2
0,5	0,20	4,99
0,7	0,38	2,55
1,0	0,79	1,25

Come si può facilmente osservare e come era facile prevedere la resistenza aumenta con l'aumentare della lunghezza e diminuisce con l'aumentare della sezione. Una analisi un pochino più approfondita mostra che esiste una relazione di proporzionalità diretta con la lunghezza e di proporzionalità inversa con l'area della sezione, vale a dire:

$R \propto l$ e $R \propto \dfrac{1}{A}$.

Il fattore di proporzionalità è una caratteristica che dipende dal materiale e prende il nome di resistività (elettrica) e ha come simbolo ρ (la lettera greca rho).

La resistenza di un filo conduttore di lunghezza l, sezione A è determinabile con la seguente relazione:

$R = \rho\dfrac{l}{A}$, che prende il nome di **seconda legge di Ohm**.

Da entrambe le tabelle si può ricavare che il valore di resistività della costantana vale:

$\rho = 0{,}49 \cdot 10^{-6}\,\Omega m$.

Ripetendo le misurazioni con fili conduttori composti da altri materiali si ottengono evidentemente valori diversi di resistività. La tabella alla pagina seguente fornisce il valore della resistività di alcuni materiali (in particolare metalli). Dato che questo valore cambia al cambiare della temperatura è importante indicare il valore di quest'ultima.

Nel nostro caso i valori sono stati misurati a $20°C$.

Materiale	$\rho(\Omega m)$
Argento	$1,62\cdot10^{-8}$
Rame	$1,68\cdot10^{-8}$
Alluminio	$2,75\cdot10^{-8}$

Materiale	$\rho(\Omega m)$
Tungsteno	$5,25\cdot10^{-8}$
Ferro	$9,68\cdot10^{-8}$
Platino	$10,6\cdot10^{-8}$

Materiale	$\rho(\Omega m)$
Acciaio	$2\cdot10^{-7}$
Costantana	$4,9\cdot10^{-7}$
Carbonio	$3,6\cdot10^{-5}$

Come abbiamo già avuto modo di costatare (in particolare quando abbiamo sperimentato con la lampadina), la resistenza elettrica e di conseguenza anche la resistività varia al variare della temperatura.

Per molti materiali (in particolare per quelli a cui fa riferimento la tabella precedente) l'andamento della variazione della resistività al variare della temperatura è lineare. È quindi giustificabile una relazione del tipo:

$\rho(\vartheta)-\rho_0=\rho_0\cdot\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)$, dove con ρ_0 si intende la resistività alla temperatura ϑ_0 e con α il coefficiente di temperatura associato ad ogni materiale. Scritta in altri termini la relazione diventa:

$\rho(\vartheta)=\rho_0\left(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)\right)$.

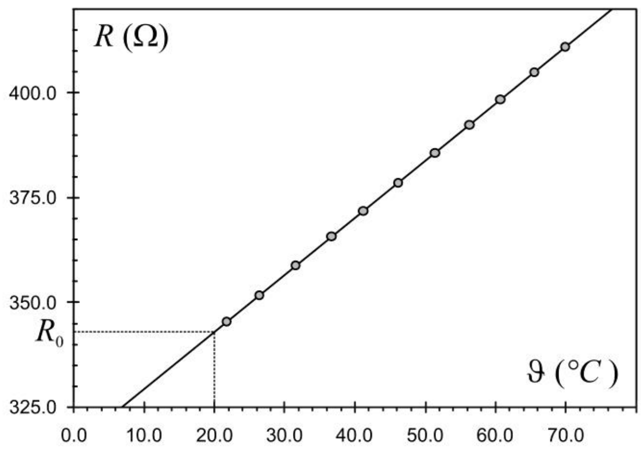
Data la seconda legge di Ohm, che in un filo conduttore mette in relazione la resistività, la lunghezza e l'area della sezione, la relazione fra resistenza e temperatura vale:

$R(\vartheta)=R_0\left(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)\right)$, dove con R_0 si intende la resistenza alla temperatura ϑ_0.

$\vartheta(°C)$	$R(\Omega)$
21,8	345,5
26,4	351,8
31,6	358,9
36,7	365,8
41,2	371,9
46,2	378,7
51,4	385,8
56,3	392,6
60,7	398,6
65,5	405,1
69,9	411,2

Tutto questo è facilmente verificabile con la seguente esperienza. Misuriamo la resistenza di un lungo e sottile filo di rame ($l=40,0\,m$ e $d=0,05\,mm$) dalla temperatura ambiente fino a circa $70°C$ a passi di circa $5°C$.

La tabella a lato e il relativo grafico mostrano le misure effettuate da un gruppo di studenti della Supsi.



È possibile ricavare il valore di R_0 con il calcolo o semplicemente leggendolo sul grafico:

$R_0=343,0\,\Omega$.

Note lunghezza e area della sezione si può calcolare la resistività:

$$\rho_0=R_0\cdot\frac{A}{l}=343,0\,\Omega\cdot\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\cdot0,05\cdot10^{-3}\,m\right)^2}{40,0\,m}=1,68\cdot10^{-8}\,\Omega m.$$

Facilmente determinabile è pure il valore della pendenza dal quale è possibile calcolare il coefficiente α.

$$\left.\begin{aligned}&\text{pendenza}=\frac{\Delta R}{\Delta\vartheta}=1,36\,\tfrac{\Omega}{°C}\\&\text{pendenza}=R_0\cdot\alpha\end{aligned}\right\},\quad\text{da cui}\quad\alpha=\frac{\text{pendenza}}{R_0}=\frac{1,36\,\frac{\Omega}{°C}}{343,0\,\Omega}=3,9\cdot10^{-3}\,\tfrac{1}{°C}$$

La tabella seguente fornisce il valore del coefficiente di temperatura di alcuni materiali (quasi tutti quelli della tabella precedente).

Anche in questo caso i valori si riferiscono a $20°C$.

Materiale	$\alpha\left(\frac{1}{°C}\right)$
Argento	$3{,}8\cdot10^{-3}$
Rame	$3{,}9\cdot10^{-3}$
Alluminio	$4\cdot10^{-3}$

Materiale	$\alpha\left(\frac{1}{°C}\right)$
Tungsteno	$4{,}5\cdot10^{-3}$
Ferro	$5\cdot10^{-3}$
Platino	$4\cdot10^{-3}$

Materiale	$\alpha\left(\frac{1}{°C}\right)$
Nichelcromo	$0{,}05\cdot10^{-3}$
Costantana	$0{,}008\cdot10^{-3}$
Carbonio	$-0{,}5\cdot10^{-3}$

Si osservi subito la "perfetta" corrispondenza del valore sperimentale del rame sia per quel che riguarda il valore della resistività che per quella del coefficiente di temperatura.

Si noti il basso valore del coefficiente α della costantana (il nome costantana deriva proprio dal fatto che la resistività di questo materiale è praticamente costante al variare della temperatura). E da ultimo il valore negativo del coefficiente α del carbonio. La resistività del carbonio diminuisce al crescere della temperatura.

Riprendiamo in considerazione una delle due lampadine incontrate in precedenza, ad esempio quella da $6{,}0W$ (si tenga presente che quando si parla di una lampadina da $6{,}0W$ si intende un consumatore che assorbe $6{,}0W$ di potenza solo se collegato ad una ddp per la quale è stato costruito). Come già misurato e calcolato, in condizioni di utilizzo normale nella lampadina passano $0{,}50\,A$ di corrente per cui possiamo calcolarci immediatamente il valore della resistenza del filamento quando la lampadina è accesa:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{12{,}0V}{0{,}50\,A} = 24{,}0\,\Omega\,.$$

Collegando la lampadina direttamente all'ohmetro si può leggere la resistenza del filamento quando esso si trova alla temperatura ambiente (di solito molto vicina a $20°C$) che chiamiamo R_0 e vale $1{,}8\Omega$.

Sappiamo che il filamento è fatto di tungsteno e perciò abbiamo tutti i dati per calcolarci la temperatura quando è incandescente. Risolvendo infatti rispetto alla temperatura la relazione $R(\vartheta) = R_0\left(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)\right)$ otteniamo:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{R-R_0}{\alpha\cdot R_0} = 20°C + \frac{24{,}0\,\Omega - 1{,}8\,\Omega}{4{,}5\cdot10^{-3}\,\frac{1}{°C}\cdot1{,}8\,\Omega} = 2760°C\,.$$

La temperatura tipica di un filamento incandescente è $2800°C$ in buon accordo con il valore trovato.