La lampada ad incandescenza

In quest'ultimo paragrafo si cercherà di sviluppare un modello per trovare una relazione matematica fra corrente e tensione nel caso di una lampadina ad incandescenza.

Si tratta di un modello molto semplificato con numerose approssimazioni, ma che porta ad un risultato soddisfacente dal punto di vista delle conferme sperimentali.

Punti fermi per questo modello sono le relazioni fra tensione, corrente elettrica e potenza, vale a dire:

$P = U \cdot I$, $P = R \cdot I^2$ e $P = \frac{U^2}{R}$.

Sappiamo inoltre che:

$R(\vartheta) = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0)\right)$.

E a questo punto arriva la prima approssimazione.

Se noi prolunghiamo a ritroso il grafico e scegliamo la scala Kelvin per rappresentarlo possiamo riscrivere la relazione fra resistenza e temperatura nel seguente modo:

$R(T) \cong \text{costante} \cdot T$

(In realtà, anche rappresentando la resistenza in funzione della temperatura secondo la scala Kelvin, il grafico non passa per zero ma si ha una ordinata all'origine diversa da zero; il suo valore è comunque sufficientemente piccolo da ritenerlo trascurabile, soprattutto se si pensa che le temperature che ci interessano sono molto lontane dallo zero.)

Quando una lampadina è accesa (sia che la si allaccia alla sua tensione nominale, sia quando la si collega ad una tensione più piccola – evitate di collegarla ad una tensione più altra perché “brucia”), la potenza elettrica, vale a dire l'energia elettrica “consumata” nell'unità del tempo, viene dissipata soprattutto per irraggiamento secondo la legge:

$P = \text{costante} \cdot \left(T^4 - T_0^4\right) \cong \text{costante} \cdot T^4$

Ed è questa la seconda approssimazione, limitarci all'irraggiamento come modalità di dissipazione dell'energia e trascurare il termine T_0^4 perché decisamente più piccolo di T^4 ($T_0 \cong 300\,K$, temperatura ambiente, mentre le temperature del filamento della lampadina quando inizia a diventare incandescente sono maggiori di $1200\,K$, cioè almeno 4 volte più grandi; data la potenza di 4, già all'inizio del processo che ci interessa, il primo termine è 256 più grande del secondo, rapporto che cresce all'aumentare delle temperatura).

Fatte queste premesse possiamo cominciare trovare le relazioni che ci interessano.

Dato che le due costanti delle relazioni che abbiamo appena scritto sono costanti diverse, riscriviamo le due relazioni nel seguente modo:

$R(T) = c_1 \cdot T$ e $P = c_2 \cdot T^4$.

Sostituendo queste relazioni nelle prime esse diventano:

$P = R \cdot I^2$ diventa $c_2 \cdot T^4 = c_1 \cdot T \cdot I^2$ e quindi $I^2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{T^4}{T} = \frac{c_2}{c_1} \cdot T^3$ da cui $T = \left(\frac{c_1}{c_2} \cdot I^2 \right)^{1/3} = k_1 \cdot I^{2/3}$

$P = \frac{U^2}{R}$ diventa $c_2 \cdot T^4 = \frac{U^2}{c_1 \cdot T}$ e quindi $U^2 = c_1 \cdot c_2 \cdot T^4 \cdot T = c_1 \cdot c_2 \cdot T^5$ da cui $T = \left(\frac{U^2}{c_1 \cdot c_2} \right)^{1/5} = k_2 \cdot U^{2/5}$

Finalmente si possono paragonare i valori di T del due relazioni precedenti e si ricava:

$k_1 \cdot I^{2/3} = k_2 \cdot U^{2/5}$ da cui segue $I = \left(\frac{k_2}{k_1} \cdot U^{2/5} \right)^{3/2}$ e per finire $I = \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{3/2} \cdot U^{3/5}$

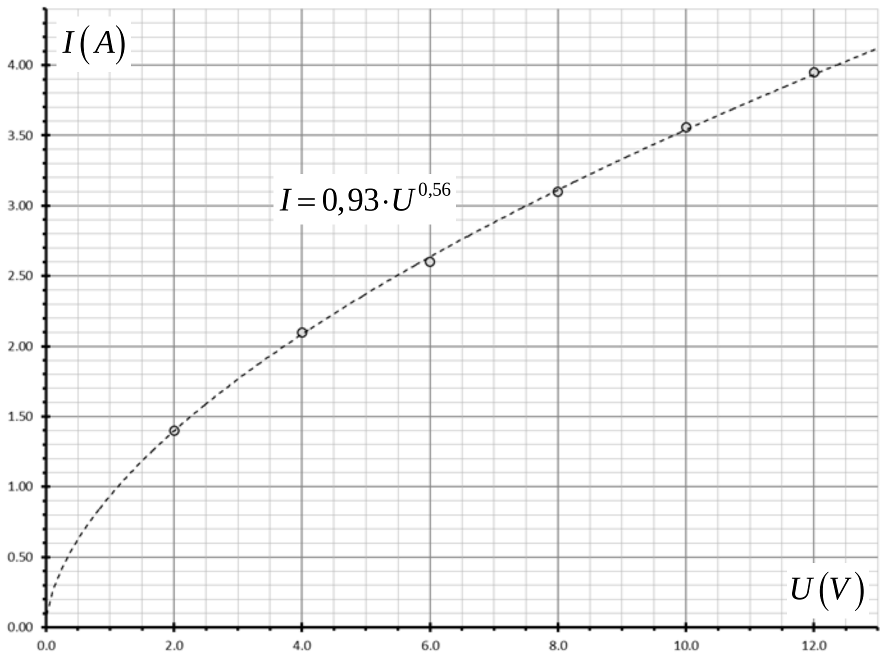
Semplificando diventa:

$I = \text{costante} \cdot U^{3/5} = \text{costante} \cdot U^{0,6}$.

Analizziamo ora i dati riguardanti la lampadina utilizzata all'inizio di questo capitolo.

Riportiamo nuovamente la tabella e il relativo grafico.

$U(V)$	$I(A)$
2,0	1,4
4,0	2,1
6,0	2,6
8,0	3,1
10,0	3,6
12,0	4,0



Come si può osservare dalla miglior curva che si può tracciare si ottengono valori molto vicini al formula associata al modello teorico.

Come si fa a calcolare la costante e l'esponente della formula riportata sul grafico?

Evidentemente si possono utilizzare le varie funzioni presenti nel foglio di calcolo con il quale abbiamo realizzato il grafico. Dovendo invece procedere con un grafico fatto a mano il problema si fa un pochino più complesso.

Se il grafico in esame è da associare ad una retta, si procede come abbiamo imparato fin dall'inizio. Si traccia la miglior retta possibile passante per i punti e dal grafico si determinano i due coefficienti che caratterizzano la retta, vale a dire la sua pendenza e l'ordinata all'origine.

Se il grafico non è una retta, lo si linearizza; ad esempio se le due grandezze sono una inversamente proporzionale all'altra si rappresentano una grandezza in funzione dell'inverso dell'altra (ad esempio per verificare la legge di Boyle si rappresenta la pressione in funzione dell'inverso del volume); se una grandezza dipende dal quadrato dell'altra si rappresenta la prima in funzione del quadrato della seconda (per verificare il moto uniformemente accelerato nel caso della caduta libera si rappresenta lo spazio di caduta in funzione del tempo al quadrato).

E nel caso in esame come si procede?

Per poter linearizzare la funzione in esame si calcola il logaritmo dei termini a sinistra e a destra dell'uguaglianza, vale a dire:

$I = \text{costante} \cdot U^m$ (dove da determinare sono la costante e l'esponente m) diventa

$\ln(I) = \ln\left(\text{costante} \cdot U^m\right) = \ln(\text{costante}) + \ln\left(U^m\right) = \ln(\text{costante}) + m \cdot \ln(U)$ cioè

$$\underbrace{\ln(I)}_{y} = \underbrace{\ln(\text{costante})}_{b} + \underbrace{m}_{a} \cdot \underbrace{\ln(U)}_{x} .$$

Una volta calcolate la pendenza e l'ordinata all'origine della miglior retta che si può tracciare sul grafico $\ln(I)$ in funzione di $\ln(U)$ si ricava il coefficiente m, che equivale alla pendenza, e la costante semplicemente risolvendo la relazione:

$b = \ln(\text{costante})$ …vale a dire: $\text{costante} = e^b$.

Sebbene la legge di dipendenza della resistenza in funzione della temperatura espressa nella forma $R(\vartheta) = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0)\right)$ poi approssimata a $R(T) \cong \text{costante} \cdot T$ possa essere considerata solitamente una buona approssimazione, nel caso del tungsteno, materiale con il quale sono fatti i filamenti delle lampadine ad incandescenza, non lo è del tutto. Modelli più accurati portano ad una formula di questo tipo:

$R(T) \cong \text{costante} \cdot T^k$, dove l'esponente k vale circa 1,2.

Rifacendo i calcoli della pagina precedente per determinare la relazione fra corrente e tensione tendendo conto di questa nuova formula otteniamo:

$$I = \text{costante} \cdot U^{\frac{4-k}{4+k}} \underset{k=1,2}{=} \text{costante} \cdot U^{0,54}$$

questa formula si adatta meglio ai risultati sperimentali.

Si faccia attenzione che le due costanti nelle ultime due formule non sono le stesse.

Facciamo qualche esempio.

Determinare la temperatura del filamento di una lampadina allacciata a una tensione di $115V$ sapendo che se collegata alla rete di casa ($U = 230V$) ha una potenza di $60W$.

Si ipotizzi che in quest'ultima situazione la temperatura del filamento sia $T \cong 3000\,K$ (temperatura tipica).

In base a quanto visto in questo capitolo possiamo calcolare:

$$R(3000\,K) = \frac{(230V)^2}{60W} = 882\,\Omega$$

$R(T) = \text{costante} \cdot T^{1,2}$, da cui segue: $\text{costante} = 0,0593$ (chiamiamo questa costante c_1)

D'altro canto sappiamo che $I = \text{costante} \cdot U^{0,54} = c_2 \cdot U^{0,54}$, $I = \frac{P}{U} = \frac{60W}{230V} = 0,261A$ da cui

$$c_2 = \frac{I}{U^{0,54}} = \frac{0,261}{230^{0,54}} = 0,0138$$

$I(115V) = 0,0138 \cdot 115^{0,54} = 0,179\,A$, da cui $R(T_x) = \frac{115V}{0,179\,A} = 641\Omega$.

Perciò: $T_x = \left(\frac{641}{0,0593} \right)^{\frac{1}{1,2}} = 2300\,K$.

Un esempio un pochino più complesso.

Si prendano in considerazione due lampadine A e B da $40W$ rispettivamente da $100W$ quando sono allacciate in parallelo alla rete $(U = 230V)$.

Si determini la caduta di tensione su entrambe se collegate in serie.

In primo luogo si devono calcolare le due costanti c_2 delle due lampadine; $c_{2A} = 0,0092$, $c_{2B} = 0,0231$.

Per la legge delle maglie vale che $230 = U_A + U_B$; con $U = \left(\frac{I}{c_2} \right)^{\frac{1}{0,54}}$, si ricava la seguente equazione:

$$230 = \left(\frac{I}{0,0092} \right)^{\frac{1}{0,54}} + \left(\frac{I}{0,0231} \right)^{\frac{1}{0,54}}, \quad \text{da cui} \quad I = 0,159\,A \ .$$

La caduta di tensione ai capi di ciascuna lampadina diventa perciò:

$$U_A = \left(\frac{0,159}{0,0092} \right)^{\frac{1}{0,54}} = 194,4V \quad \text{e} \quad U_B = \left(\frac{0,159}{0,0231} \right)^{\frac{1}{0,54}} = 35,6V \ .$$