Il moto dei satelliti (la gravitazione universale)

Le conoscenze attuali di meccanica celeste sono sicuramente superiori a quelle che avevano gli studiosi della natura dell'antichità o del medioevo o anche solo di cento anni fa.

Oggi noi sappiamo che la Terra è un pianeta roccioso (classificato come pianeta di tipo terrestre), quasi sferico, di diametro $d_{\text{Terra}} = 12,75 \cdot 10^3\, km$ e massa $m_{\text{Terra}} = 5,97 \cdot 10^{24}\, kg$ che ruota attorno al Sole, una stella classificata come una nana gialla di diametro $d_{\text{Sole}} = 1,4 \cdot 10^6\, km$ e massa $m_{\text{Sole}} = 2,0 \cdot 10^{30}\, kg$ su un'orbita quasi circolare di raggio $r = 149,6 \cdot 10^6\, km$ (in astronomia questa distanza viene usata come unità di misura e indicata come unità astronomica: $1UA = 149,6 \cdot 10^6\, km$). Attorno al Sole orbitano una infinità di altri corpi fra cui altri tre pianeti di tipo terrestre (Mercurio, Venere e Marte), quattro giganti gassosi (Giove, Saturno, Urano e Nettuno) classificati come pianeti di tipo gioviano, diversi corpi indicati come pianeti nani (fra questi c'è Plutone), migliaia di corpi rocciosi ancora più piccoli detti asteroidi, comete e altro ancora. Tutto questo insieme di corpi celesti forma il sistema solare. Dare una dimensione a questa struttura non è evidente. Per farvi un'idea, l'ultimo pianeta, Nettuno, orbita attorno al Sole ad una distanza media di circa $30UA$.

Il Sole è una delle circa 200 miliardi (qualche astronomo sostiene che siano addirittura 400 miliardi) di stelle appartenenti ad un agglomerato di stelle chiamato Galassia o Via Lattea. Le dimensioni della Galassia, la cui forma è quella di un disco con un rigonfiamento al centro, è di circa centomila anni luce (un anno luce è la distanza percorsa dalla luce in un anno e vale circa $9,5 \cdot 10^{12}\, km$; per confronto una unità astronomica vale circa 8 minuti luce) e uno spessore al centro di circa diecimila anni luce.

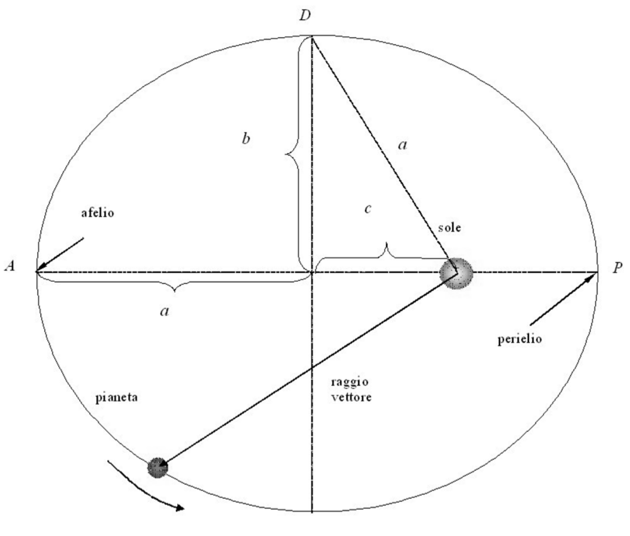
La Via Lattea è una delle 100 miliardi di galassie che formano l'universo conosciuto la cui dimensioni si esprimono in miliardi di anni luce.

Queste conoscenze sono relativamente recenti, alcune risalgono al secolo scorso, una qualcuna addirittura è di pochi decenni fa. Fino al sedicesimo secolo si credeva che la Terra fosse il centro dell'universo e che gli altri corpi conosciuti vi girassero attorno. Osservazioni e idee di uomini illustri come Galileo (cui dobbiamo l'introduzione del metodo scientifico), Copernico, Keplero e infine Newton hanno posto le basi per la formulazione del modello cosmologico oggi ampiamente accettato dalla comunità scientifica.

Famose e importanti per questo corso sono le tre regolarità o leggi di Keplero a proposito del moto dei pianeti attorno al Sole che possono essere formulate in questo modo[1] :

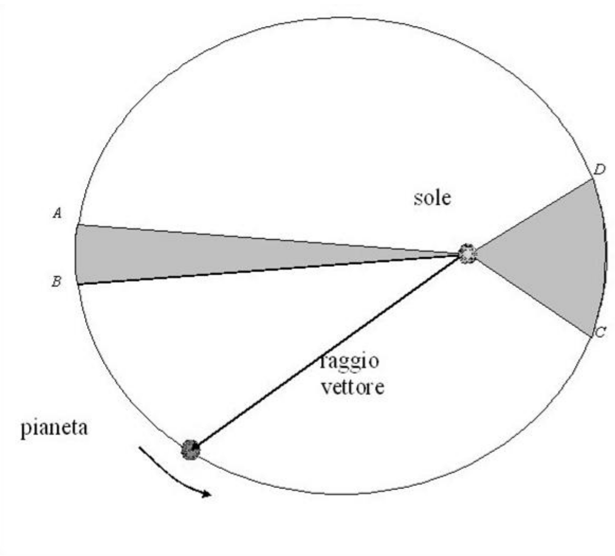
1. *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

Per la prima volta nella storia della scienza Keplero elimina dall'astronomia le sfere celesti e ipotizza per i pianeti un moto diverso da quello circolare. Osserviamo che, poiché l'ellisse è una figura piana, i moti dei pianeti avvengono in un piano, detto piano orbitale. Per la Terra tale piano è detto eclittica. Nella figura a fianco è rappresentata un'orbita ellittica, con indicati i suoi parametri caratteristici: semiasse maggiore (a), semiasse minore (b), semi-distanza focale (c).



[1] Formulazione tratta da Wikipedia (http://it.wikipedia.org/wiki/Leggi_di_Keplero)

2. Il raggio vettore che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.



La velocità orbitale non è costante, ma varia lungo l'orbita. Le due aree evidenziate nella figura qui a fianco sono uguali e vengono quindi percorse nello stesso tempo. In prossimità del perielio, dove il raggio vettore è più corto che all'afelio, l'arco di ellisse è corrispondentemente più lungo. Ne segue quindi che la velocità orbitale è massima al perielio e minima all'afelio.

3. I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono direttamente proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle loro orbite.

Questa legge può essere formulata matematicamente in questo modo:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{costante}\,.$$

Si faccia attenzione che in questa formula a rappresenta il semiasse maggiore dell'orbita e che la costante è la stessa per tutti i corpi che girano attorno al Sole (questa legge è evidentemente applicabile anche a tutti i corpi che orbitano attorno ad un altro corpo centrale, ad esempio ai satelliti della Terra, Luna compresa. La costante assumerà chiaramente un altro valore).

Un'ultima osservazione: va specificato che le leggi di Keplero sono precise nella misura in cui sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella del Sole;
- si possono trascurare le interazioni tra diversi pianeti (tali interazioni portano a leggere perturbazioni sulla forma delle orbite).

Mezzo secolo più tardi la formulazione delle leggi di Keplero, Isaac Newton pubblicò la **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** (in italiano: I principi matematici della filosofia naturale), un'opera considerata una delle più importanti del pensiero scientifico. In essa Newton enunciò le leggi della dinamica e la legge di gravitazione universale.

La legge di gravitazione universale rappresenta una prima importante unificazione vale a dire in essa si afferma che le cause del moto sulla Terra sono le stesse che muovono i corpi celesti. La stessa forza di gravità che fa cadere al suolo una mela mantiene in orbita la Luna attorno alla Terra.

Newton mostrò che una forza in grado di generare orbite in accordo con le leggi di Keplero doveva essere di tipo attrattivo, essere diretta lungo il raggio vettore, essere proporzionale sia alla massa del pianeta che a quella del Sole (in generale alle masse dei due corpi coinvolti nel movimento) e inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza del raggio vettore, vale a dire per quel che riguarda l'intensità:

$$F_g = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}\,,$$

dove con M si indica la massa del corpo maggiore (ad esempio il Sole), con m quella del corpo in orbita, con r la lunghezza del raggio vettore, la distanza fra i centri dei due corpi, e con G la costante universale di gravità che oggi noi sappiamo valere: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Mostrare che le leggi di Keplero sono una conseguenza diretta della legge di gravitazione universale in generale non è cosa facile. Diventa relativamente semplice se prendiamo in considerazione un corpo la cui orbita è circolare. Un cerchio è una ellisse un po' particolare. Il semiasse maggiore e quello minore sono uguali e sono pari al raggio del cerchio. I due fuochi coincidono nel centro del cerchio. In questa situazione la seconda legge di Keplero è banale: un arco di circonferenza percorso in un determinato intervallo di tempo è sempre lo stesso e quindi anche l'area del corrispondente settore circolare. Per mostrare invece la relazione fra la terza legge di Keplero e quella di gravitazione universale facciamo il seguente ragionamento. L'unica forza in grado di mantenere il corpo in orbita circolare è quella di gravità che è forza risultante ma soprattutto forza centripeta e pertanto.

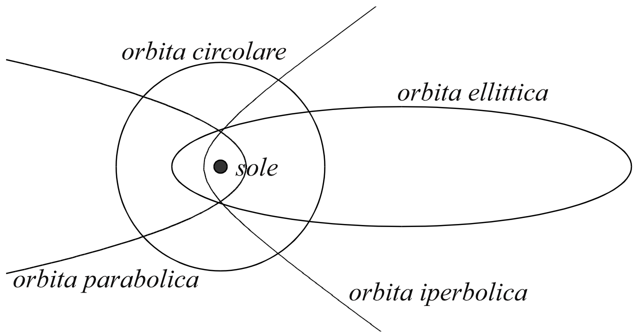
$$\left.\begin{aligned} m\,a = F_{ris} = F_g = G\frac{M\,m}{r^2} \\ a = \frac{4\pi^2}{T^2} r \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad m\frac{4\pi^2}{T^2} r = G\frac{M\,m}{r^2},$$

che riscritta in modo diverso diventa:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M},$$

cioè proprio la terza legge di Keplero dato che ciò che si trova a destra del segno di uguale è formato da grandezze costanti.

Rifare lo stesso percorso anche per orbite ellittiche va molto al di là della capacità di uno studente di seconda liceo. Interessante è comunque osservare che la legge di gravitazione universale assieme alle leggi della dinamica prevede che il moto di corpi attorno al Sole non solo può essere ellittico (eventualmente circolare) ma che esistono pure orbite paraboliche e iperboliche.



Alcuni esempi di applicazione della terza legge di Keplero e della legge di gravitazione universale.

- Quanto vale il semiasse maggiore dell'orbita di Giove sapendo che la percorre in circa 12 anni?

  È noto che la Terra percorre la sua orbita in un anno e che il semiasse maggiore della sua orbita è una unità astronomica, perciò:

$$\frac{T^2_{\text{Terra}}}{a^3_{\text{Terra}}} = \frac{T^2_{\text{Giove}}}{a^3_{\text{Giove}}} \Rightarrow a_{\text{Giove}} = a_{\text{Terra}} \cdot \sqrt[3]{\frac{T^2_{\text{Giove}}}{T^2_{\text{Terra}}}} = 1UA \cdot \sqrt[3]{\frac{(12\,anni)^2}{(1anno)^2}} = 5,2UA.$$

- Calcolare la distanza all'afelio della cometa di Encke sapendo che la distanza al perielio vale $0,33UA$ e che il suo periodo di rotazione attorno al sole vale 3,3 anni.

  Si procede come per il problema precedente applicando la terza legge di Keplero determinando così il semiasse maggiore dell'orbita della cometa vale a dire:

$$\frac{T^2_{\text{Terra}}}{a^3_{\text{Terra}}} = \frac{T^2_{\text{Encke}}}{a^3_{\text{Encke}}} \Rightarrow a_{\text{Encke}} = a_{\text{Terra}} \cdot \sqrt[3]{\frac{T^2_{\text{Encke}}}{T^2_{\text{Terra}}}} = 1UA \cdot \sqrt[3]{\frac{(3,3\,anni)^2}{(1anno)^2}} = 2,22UA.$$

  In base alla definizione dell'ellisse vale che:

$$2 \cdot a = d_A + d_P \quad \Rightarrow \quad d_P = 2 \cdot a - d_A = 2 \cdot 2,22UA - 0,33UA = 4,11UA.$$

- Determinare la velocità di un satellite in orbita circolare attorno alla Terra ad una quota di $320\,km$ dalla superficie.

  In principio è possibile sfruttare di nuovo la terza legge di Keplero a partire dai dati conosciuti di periodo e semiasse maggiore dell'orbita di un altro satellite della Terra (ad esempio della Luna), determinare il periodo del satellite e infine calcolare la velocità come rapporto fra la lunghezza della circonferenza dell'orbita e il periodo. Vogliamo arrivarci direttamente uguagliando la forza di gravità (l'unica forza presente e quindi la forza risultante) con la forza necessaria per ottenere un moto circolare (forza centripeta) scritta nella forma contenente la grandezza velocità, vale a dire:

$$\left.\begin{aligned} F_{ris} &= F_g = G\frac{M\,m}{r^2} \\ F_{ris} &= m\cdot\frac{v^2}{r} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}\,.$$

  Inserendo il valore della massa della Terra $M = 5,97\cdot 10^{24}\,kg$, del raggio dell'orbita pari al raggio della Terra più la quota misurata dalla superficie, vale a dire $r = R_0 + h = 6,38\cdot 10^6\,m + 0,32\cdot 10^6\,m = 6,70\cdot 10^6\,m$, ed infine la costante universale di gravità $G = 6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$ si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\,kg}{6,70\cdot 10^6\,m}} = 7,71\cdot 10^3\,\tfrac{m}{s} = 27,7\cdot 10^3\,\tfrac{km}{h}\,.$$

- Verificare che la massa del Sole vale $2,0\cdot 10^{30}\,kg$.

  La terza legge di Keplero va scritta utilizzando la legge di gravitazione universale e cioè:

  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G\,M}$ e risolvere rispetto a M che appunto è la massa del Sole:

$$M = \frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{4\pi^2}{G} = \frac{\left(1,496\cdot 10^{11}\,m\right)^3}{\left(1\cdot 365,25\cdot 24\cdot 3600\,s\right)^2}\cdot\frac{4\pi^2}{6,67\cdot 10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}} = 1,99\cdot 10^{30}\,kg\,.$$

Si osservi che negli ultimi due esempi sono state utilizzate per le varie grandezze le unità di misura del SI ed inoltre che è stato necessario conoscere il valore della costante universale di gravità, valore di cui non avevamo avuto bisogno negli esempi precedenti.

Da osservare inoltre che il valore della costante universale di gravità fu misurato la prima volta da Henry Cavendish nel 1798 più di cento anni dopo la pubblicazione dei Principia Matematica di Newton (1687).

Energia potenziale gravitazionale, energia di legame e velocità di fuga

Un tempo si affermava che tutto ciò che sale prima o poi deve scendere. Non è necessariamente vero. Se lanciamo verso l'alto ad un oggetto con una velocità sufficientemente alta esso non farà più ritorno. Quanto deve essere grande questa velocità?

Per rispondere a questa e ad altre domande occorre estendere il concetto di energia potenziale gravitazionale al di là della superficie terrestre.

Nel capitolo 2.1.4 e in seguito nel capitolo 5.1.3 avevamo inizialmente determinato che l'energia legata alla forza peso era calcolabile con la formula $E_{p,g} = m \cdot g \cdot h$ e in seguito dimostrato che a questo risultato si poteva pervenire a partire del calcolo del lavoro della forza di gravità. Avevamo scoperto che la forza di gravità è una forza conservativa e che, come per tutte le forze conservative, è possibile definire una funzione di stato (una funzione legata cioè alla posizione) associata al lavoro chiamata appunto energia potenziale (gravitazionale).

La linearità della crescita dell'energia potenziale è in questo caso attribuibile al fatto che, in prossimità della superficie terrestre, la forza peso è praticamente costante in modulo direzione e verso (il valore di g è pari a $9{,}8\frac{N}{kg}$ e il vettore associato è verticale e diretto verso il basso).

Come possiamo estendere questo concetto anche a grandi distanze?

Per prima cosa occorre ricordare che la forza di gravità non è costante ma varia secondo la legge universale di gravità e in modulo vale:

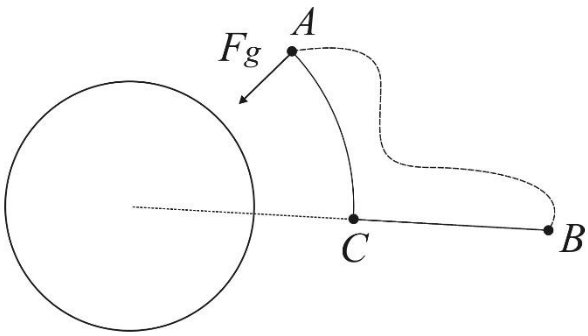
$$F_g = G\,\frac{M \cdot m}{r^2}.$$

La direzione di questa forza è inoltre quella della retta congiungente i centri di massa dei due corpi in esame ed è sempre attrattiva.

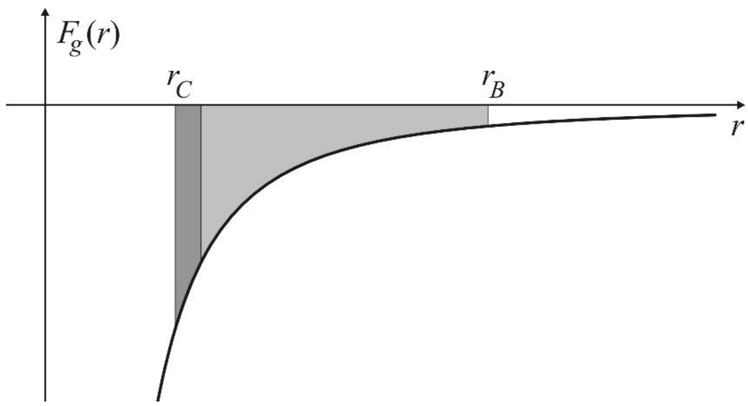
In base a quanto studiato nel capitolo 5 per determinare l'energia potenziale associata ad una forza occorre:

- calcolare il lavoro della forza fra due punti qualsiasi,
- verificare che la forza sia di tipo conservativo,
- associare al lavoro la corrispondente variazione dell'energia potenziale.

A differenza dal caso relativo al calcolo del lavoro della forza di gravità in prossimità della superficie terrestre, determinare il lavoro da A a B quando la forza varia sia in modulo che in direzione non è così facile, soprattutto se il percorso da A a B è un percorso qualsiasi (linea tratteggiata nel disegno). Scegliendo un percorso un po' particolare si semplifica un pochino il problema. Andiamo da A a B passando per C con un percorso con le seguenti caratteristiche: da A a C il percorso è un arco di circonferenza a distanza costante dalla Terra (la forza di gravità è in questo modo sempre perpendicolare al percorso che chiamiamo tangenziale); il tratto da C e B è rettilineo e radiale (la forza di gravità è sempre parallela – o antiparallela – al percorso). Il lavoro lungo il primo tratto è nullo; il lavoro lungo il secondo tratto va calcolato ma il tutto è riconducibile ad un caso ad una sola dimensione.



Come abbiamo visto nel caso del calcolo della forza elastica il lavoro è determinabile a partire dal calcolo di un'area. Il problema consiste nel fatto che non è così facile calcolare quest'area.



La figura mostra l'area di cui dobbiamo calcolare il valore. Come già visto è sempre possibile suddividere la figura in tanti pezzettini, calcolare l'area di ciascuno e poi sommare il tutto. Se la suddivisione è sufficientemente grande ciascun pezzettino è assimilabile ad un trapezio la cui area è facilmente calcolabile (nella figura è stato disegnato in grigio scuro il primo di questi pezzettini).

Cominciamo con il calcolare l'area del pezzettino grigio scuro che è un trapezio con base maggiore pari a $F_g\left(r_C\right)$, base minore $F_g\left(r_C+\Delta r\right)$ e altezza pari a Δr.

Rinominiamo il punto di partenza e chiamiamolo r_0, mentre sia $r_C+\Delta r=r_1$. Δr vale perciò r_1-r_0.

L'area di un trapezio si calcola con:

$$A=\tfrac{1}{2}\left(B+b\right)\cdot h\,.$$

Le due basi del trapezio, come à già stato detto, corrispondono al valore della forza di gravità nei punti r_0 (base maggiore) e r_1 (base minore) e valgono:

$F_g\left(r_0\right)=-G\dfrac{M\cdot m}{r_0^2}$ rispettivamente $F_g\left(r_1\right)=-G\dfrac{M\cdot m}{r_1^2}$ (il segno $-$ sta a indicare che la forza è attrattiva).

L'altezza h corrisponde a $\Delta r=r_1-r_0$.

Il lavoro della forza di gravità da r_0 a r_1 è, con approssimazione tanto maggiore quanto più Δr è piccolo, pari a:

$$W_{r_0\to r_1}=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\left(-G\frac{M\cdot m}{r_0^2}\right)+\left(-G\frac{M\cdot m}{r_1^2}\right)\right)\cdot\left(r_1-r_0\right)=$$

$$=-\tfrac{1}{2}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)\cdot\left(r_1-r_0\right)=-\tfrac{1}{2}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\frac{r_1^2+r_0^2}{r_0^2\cdot r_1^2}\cdot\left(r_1-r_0\right)\ .$$

Se Δr è piccolo, e noi sappiamo che Δr può essere piccolo quanto vogliamo (più Δr è piccolo, maggiore sarà semplicemente il numero di trapezi di cui dovremo calcolare l'area), r_1 e r_0 sono molto simili e vale sicuramente questa approssimazione[2]:

$$r_1^2+r_0^2\approx 2\cdot\left(r_0\cdot r_1\right)$$

Con questa approssimazione segue:

$$W_{r_0\to r_1}\approx-\tfrac{1}{\cancel{2}}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{r_0}\cdot\cancel{r_1}}{r_0^{\cancel{2}}\cdot r_1^{\cancel{2}}}\cdot\left(r_1-r_0\right)=-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{r_1-r_0}{r_0\cdot r_1}=-G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}\right).$$

A questo punto l'area del prossimo trapezio, e di conseguenza il lavoro da r_1 a r_2, vale:

$$W_{r_1\to r_2}=-G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Per determinare il lavoro dall'inizio alla fine basta sommare tutti i valori parziali cioè:

[2] Per fare un esempio numerico: sia $r_1=100{,}5$ e $r_0=99{,}5$.
$100{,}5^2+99{,}5^2=20000{,}5\approx 19999{,}5=2\cdot\left(100{,}5\cdot 99{,}5\right)$.

$$W_{r_C \to r_B} = W_{r_0 \to r_1} + W_{r_1 \to r_2} + W_{r_2 \to r_3} + \cdots =$$
$$= \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \right) + \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right) + \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \right) \cdots =$$
$$= -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \cancel{\frac{1}{r_1}} + \cancel{\frac{1}{r_1}} - \cancel{\frac{1}{r_2}} + \cancel{\frac{1}{r_2}} - \frac{1}{r_3} + \cdots \right) \quad .$$

A due a due tutti i termini nella parentesi si annullano tranne il primo e l'ultimo e, tornando a sostituire r_0 con r_C, si ottiene:

$$W_{r_C \to r_B} = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Per definizione la variazione dell'energia potenziale è pari "-" (leggere meno) la variazione del lavoro della forza associata e pertanto:

$$\Delta E_{p,g} = -W_{r_C \to r_B} = -\left(-G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_B} \right) \right) = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C} \right) =$$
$$= \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_B} \right) - \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r_C} \right) = E_{p,g}(B) - E_{p,g}(C) \quad .$$

Possiamo perciò concludere che in un punto qualsiasi vale:

$$E_{p,g}(r) = -G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r}.$$

La relazione appena scritta presuppone in realtà di aver già compiuta una scelta per la posizione in cui si attribuisce il valore zero all'energia potenziale gravitazionale. Questa scelta è caduta per una posizione posta ad una distanza infinita, cioè:

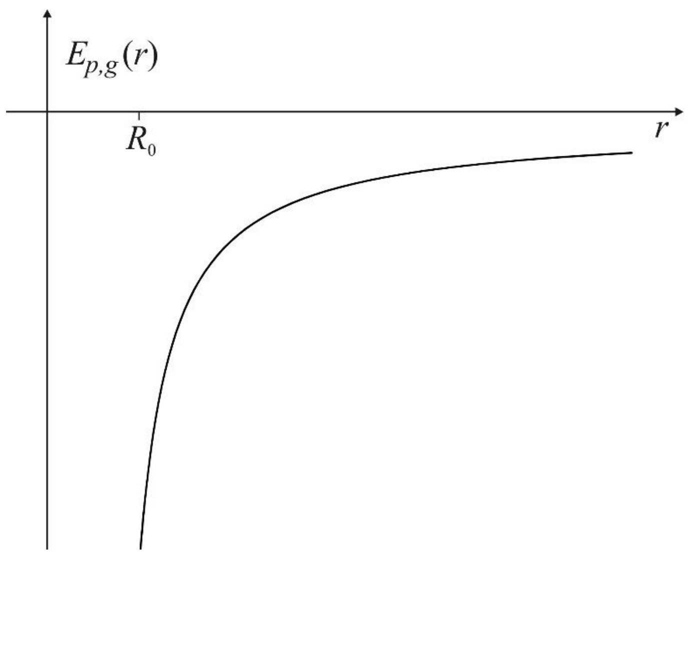
$$E_{p,g}(r \to \infty) = 0.$$

Avessimo scelto diversamente (ad esempio di porre lo zero in prossimità della superficie terrestre) avremmo dovuto aggiungere una costante (da calcolare).

Si tratta comunque della migliore scelta possibile che rende i calcoli i più semplici possibili.

L'unico "inconveniente" consiste nel fatto che le energie potenziali gravitazionali sono sempre negative.

Il grafico a lato mostra l'andamento dell'energia potenziale gravitazionale a partire da R_0.



A questo punto è possibile rispondere a parecchie domande relative all'energia potenziale.

- Cominciamo con il verificare che l'espressione calcolata per l'energia potenziale gravitazionale vicino alla superficie terrestre pari a $Ep,g(h)=m\cdot g\cdot h$ è riconducibile, come caso particolare, alla relazione generica appena calcolata.

  Innanzitutto occorre verificare che il campo gravitazionale in prossimità della superficie terrestre, pari a $g=9{,}81\frac{N}{kg}$, è ricavabile con la legge di gravitazione universale.

  Data $Fg(r)=G\cdot\dfrac{M\cdot m}{r^2}$ segue che in prossimità della superficie terrestre vale:

  $$Fg(R_0)=G\cdot\frac{M\cdot m}{R_0^2}=m\cdot g \quad\Rightarrow\quad g=\frac{G\cdot M}{R_0^2}.$$

  Calcoliamo il valore della costante g inserendo nella formula il valore della massa della Terra, la costante universale di gravità e il raggio medio della Terra pari a $R_0=6{,}37\cdot10^6\,m$.

  $$g=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}\cdot5{,}97\cdot10^{24}kg}{\left(6{,}37\cdot10^6m\right)^2}=9{,}81\tfrac{N}{kg}.$$

  A questo punto si può scrivere che:

  $$Ep,g(h)=Ep,g(R_0+h)-Ep,g(R_0)=\left(-G\cdot\frac{M\cdot m}{R_0+h}\right)-\left(-G\cdot\frac{M\cdot m}{R_0}\right)=-G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_0+h}-\frac{1}{R_0}\right)$$

  $$=-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{R_0-(R_0+h)}{(R_0+h)\cdot R_0}=-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{-h}{(R_0+h)\cdot R_0}=G\cdot M\cdot m\cdot\frac{h}{(R_0+h)\cdot R_0}$$

  Dato che $h\ll R_0$ segue che $(R_0+h)\cdot R_0\approx R_0^2$.

  Inserendo questa approssimazione nella formula precedente si ottiene:

  $$Ep,g(h)=G\cdot M\cdot m\cdot\frac{h}{(R_0+h)\cdot R_0}\approx G\cdot M\cdot m\cdot\frac{h}{R_0^2}=m\cdot\underbrace{\frac{G\cdot M}{R_0^2}}_{g}\cdot h=m\cdot g\cdot h$$

- Determinare l'energia totale di un corpo di massa m in orbita circolare di raggio $r=R_0+h$ attorno alla Terra.
  Cominciamo con il dire che l'energia totale si calcola sommando l'energia cinetica all'energia potenziale gravitazionale, vale a dire:

  $$E_{tot}=E_{cin}+E_{p,g}=\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+\left(-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}\right)$$

  La velocità di un corpo in orbita circolare è già stata determinate nel capitolo precedente e vale:

  $$v=\sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

  Inserendo questo valore nella formula precedente si ottiene:

  $$E_{tot}=\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2+\left(-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{GM}{r}+\left(-G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}\right)=-\tfrac{1}{2}\cdot G\cdot M\cdot m\cdot\frac{1}{r}.$$

  Questo valore che è pari alla metà dell'energia potenziale gravitazionale è detto anche energia di legame.

- Calcolare la velocità di fuga dal pianeta Terra, dalla Luna o da qualsiasi corpo celeste.

  Per velocità di fuga si intende il valore minimo che un corpo deve avere per non fare più ritorno sulla Terra (o su un qualsiasi altro pianeta o corpo celeste in esame). Questo significa che deve allontanarsi indefinitamente, raggiungere cioè una posizione a distanza infinita. In quel punto la sua velocità può essere pari a zero. Dal punto di vista del teorema di conservazione dell'energia si può scrivere:

  $$E_{tot} = E_{cin}\left(R_0\right) + E_{p,g}\left(R_0\right) = E_{cin}\left(r \to \infty\right) + E_{p,g}\left(r \to \infty\right) = 0 + 0 = 0 .$$

  Dato che:

  $$E_{tot} = E_{cin} + E_{p,g} = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \left(-G \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{R_0} \right) = 0$$

  si può concludere che:

  $$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G\, M}{r}} .$$

  Nel caso del pianeta Terra abbiamo:

  $$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \, kg}{6,38 \cdot 10^6 \, m}} = 11,2 \cdot 10^3 \, \tfrac{m}{s} = 11,2 \, \tfrac{km}{s} = 40,2 \cdot 10^3 \, \tfrac{km}{h} .$$

- Determinare la massima dimensione di un corpo celeste con massa pari a quella del Sole per diventare un buco nero.

  Per definizione un buco nero è una zona dello spazio dalla quale non può fuggire niente, nemmeno la luce. Generalmente si pensa ad un corpo celeste estremamente denso, dotato di un'attrazione gravitazionale talmente elevata da non permettere l'allontanamento di alcunché dalla propria superficie. Questa condizione si ottiene quando la velocità di fuga dalla sua superficie è superiore alla velocità della luce. Pertanto il massimo raggio deve valere:

  $$R_{\max} = \frac{2 \cdot G\, M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \, \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \, kg}{\left(3,0 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}\right)^2} \approx 3,0 \, km .$$

  Questa distanza del centro di massa viene anche detta raggio di Schwarzschild.

  In queste condizioni un corpo possiede una grande densità superiore a quella presente nei nuclei atomici il cui ordine di grandezza è pari a $10^{18} \, \frac{kg}{m^3}$.

- Calcolare la velocità all'afelio e al perielio di una cometa, ad esempio della cometa di Encke, o di qualsiasi altro corpo che possiede un'orbita ellittica (attorno al Sole o a qualsiasi altro corpo centrale), di cui si conoscono le distanze all'afelio e al perielio (apoastro e periastro).

  Per risolvere questo problema occorre tenere in considerazione il principio di conservazione dell'energia e la seconda legge di Keplero.

  Il principio di conservazione dell'energia permette di scrivere:

  $$E_{cin}\left(r_a\right)+E_{p,g}\left(r_a\right)=E_{cin}\left(r_p\right)+E_{p,g}\left(r_p\right)$$, cioè:

  $$\tfrac{1}{2}mv_a^2+\left(-G\frac{M\,m}{r_a}\right)=\tfrac{1}{2}mv_p^2+\left(-G\frac{M\,m}{r_p}\right).$$

  La seconda legge di Keplero (quella delle aree), applicata durante un piccolo intervallo di tempo ai due estremi dell'orbita, perielio (periastro) e afelio (apoastro) appunto, quando cioè velocità orbitale e raggio vettore sono perpendicolari può essere scritta, con approssimazione tanto maggiore quanto più piccolo è l'intervallo di tempo, nel modo seguente: si approssima l'area da calcolare ad un triangolo con base il pezzettino di traiettoria Δr e con altezza il raggio vettore r , vale a dire:

  $$\tfrac{1}{2}\Delta r_a\cdot r_a=\tfrac{1}{2}\Delta r_p\cdot r_p\;\Rightarrow\;\cancel{\tfrac{1}{2}}v_a\cdot\cancel{\Delta t}\cdot r_a=\cancel{\tfrac{1}{2}}v_p\cdot\cancel{\Delta t}\cdot r_p\;\Rightarrow\;v_a\cdot r_a=v_p\cdot r_p\,.$$

  Sostituendo nell'uguaglianza precedente la velocità all'afelio con $v_a=v_p\cdot\frac{r_p}{r_a}$ segue:

  $$\tfrac{1}{2}\cancel{m}v_p^2\cdot\frac{r_p^2}{r_a^2}+\left(-G\frac{M\,\cancel{m}}{r_a}\right)=\tfrac{1}{2}\cancel{m}v_p^2+\left(-G\frac{M\,\cancel{m}}{r_p}\right)$$

  $$\tfrac{1}{2}v_p^2\left(\frac{r_p^2}{r_a^2}-1\right)=\frac{GM}{r_a}-\frac{GM}{r_p}$$

  $$v_p^2\,\frac{r_p^2-r_a^2}{r_a^{\cancel{2}}}=2GM\,\frac{r_p-r_a}{r_p\cdot\cancel{r_a}}$$

  $$v_p^2\,\frac{\cancel{\left(r_p-r_a\right)}\left(\overbrace{r_p+r_a}^{\cancel{2}a}\right)}{r_a}=\cancel{2}GM\,\frac{\cancel{r_p-r_a}}{r_p}$$

  $$v_p^2=\frac{r_a}{r_p}\frac{GM}{a}\quad .$$

  La velocità al perielio vale pertanto:

  $$v_p=\sqrt{\frac{r_a}{r_p}\frac{GM}{a}}$$ e, per simmetria, quella all'afelio: $$v_a=\sqrt{\frac{r_p}{r_a}\frac{GM}{a}}\,.$$

  Per la cometa di Encke vale:

  $$v_p=\sqrt{\frac{665\cdot10^9\,m}{49\cdot10^9\,m}\cdot\frac{6,67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot1,99\cdot10^{30}\,kg}{332\cdot10^9\,m}}=70,6\,\tfrac{km}{s}$$ e $v_a=5,7\,\tfrac{km}{s}$.