Moto circolare (uniforme)

Il secondo movimento di cui vogliamo occuparci è il moto la cui traiettoria risulta essere una circonferenza.

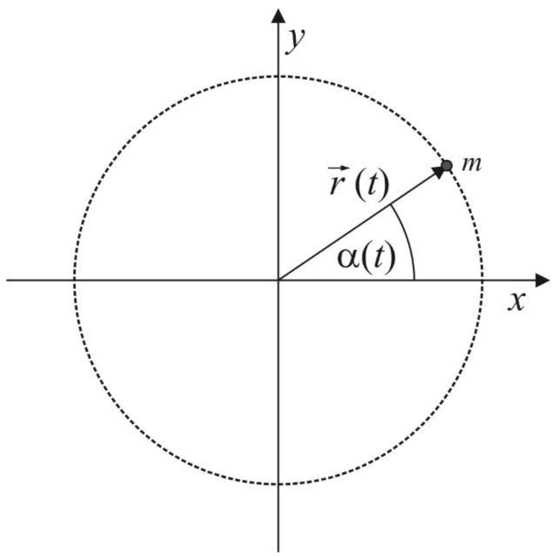
Molti sono le situazioni nelle quali questo moto si ottiene; qualsiasi corpo che ruota attorno ad un perno fisso genera un moto circolare. Come nel caso del moto parabolico occorre conoscere la legge oraria vale a dire $\vec{r}(t)$.

Se nel caso del moto parabolico la scelta dell'origine del sistema di riferimento non aveva grande importanza (porre l'inizio del movimento nell'origine significa semplicemente che $\vec{r}_0 = 0$, la legge oraria non cambia nella sua forma). Una scelta oculata dell'origine del sistema di riferimento nel caso del moto circolare semplifica decisamente la sua descrizione.

La circonferenza possiede una proprietà geometrica importante, quella per cui tutti i punti appartenenti ed essa si trovano alla stessa distanza dal centro. Scegliere allora il centro della circonferenza come origine del sistema di riferimento ci assicura che il valore assoluto di $\vec{r}(t)$ è costante cioè: $\|\vec{r}(t)\| = r = \text{costante}$. Per questo motivo fisseremo il centro della circonferenza all'origine del sistema di riferimento.

Inizieremo con il descrivere il movimento non a partire dalle componenti $x(t)$ e $y(t)$ ma utilizzeremo la lunghezza del vettore e l'angolo rispetto all'asse x, vale a dire:

invece di $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ utilizzeremo $\vec{r}(t) = \big(r(t); \alpha(t)\big)$



che nel caso del moto circolare diventa:

$\vec{r}(t) = \big(r; \alpha(t)\big)$.

Questo significa che per descrivere il moto è sufficiente conoscere il raggio della circonferenza e come l'angolo cambia al variare del tempo.

Diventa a questo punto importante definire una nuova grandezza: la **velocità angolare**, vale a dire la rapidità con la quale l'angolo varia. In primo luogo occorre ricordare che, come a matematica, normalmente si sceglie come variazione positiva dell'angolo una variazione che avviene in senso antiorario.

Cominciamo con il definire la velocità angolare media e cioè:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}.$$

L'unità di misura della velocità angolare è:

$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]} = \frac{rad}{s} = \frac{1}{s}$, dato che il radiante è privo di unità di misura.

Nel caso che stiamo trattando, cioè quello del moto circolare uniforme, la velocità angolare è costante ed è evidentemente pari alla velocità angolare media. Perciò:

$\Delta\alpha = \omega \cdot \Delta t$ cioè $\alpha(t) - \alpha_0 = \omega \cdot (t - t_0)$ e quindi $\alpha(t) = \alpha_0 + \omega \cdot (t - t_0)$.

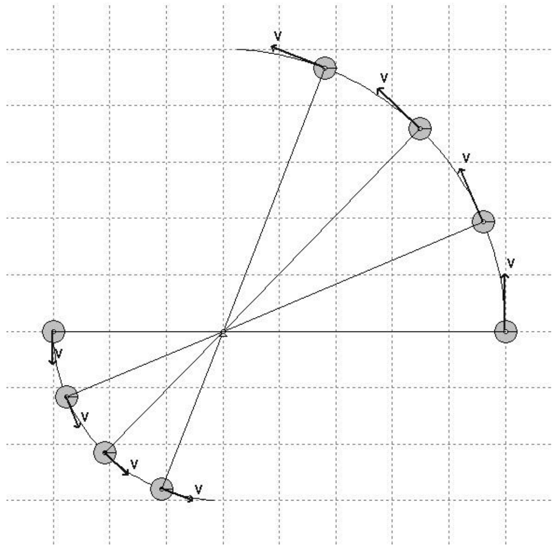
Noterete la somiglianza fra questa legge oraria e quella della posizione nel caso del moto lineare e uniforme.

A questo punto conosciamo il raggio, che è costante, e la legge oraria per determinare l'angolo. Possiamo perciò calcolarci facilmente la posizione $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t) = (r;\alpha(t)) = (r;\alpha_0 + \omega\cdot(t-t_0)).$$

Con l'aiuto della trigonometria si ricava facilmente anche la posizione a partire dalle componenti $x(t)$ e $y(t)$. Per semplicità porremo $\alpha_0 = 0$ e $t_0 = 0$ così che abbiamo:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\alpha(t)) \\ r\cdot\sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ r\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} \cos(\omega\cdot t) \\ \sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix}.$$



Prossima grandezza cinematica da determinare è la velocità da non confondere con la velocità angolare.

Una analisi qualitativa, grazie alla simulazione, del movimento di due corpi in moto circolare uniforme aventi la stessa velocità angolare e raggio diverso ci permette fare le seguenti osservazioni: il vettore velocità è tangente alla traiettoria (ma questo era già stato discusso a livello generale quando si era definita la traiettoria), è costante in modulo (ma non in direzione e verso) e, a parità di velocità angolare, è maggiore nel caso di raggio più grande.

Determinare quantitativamente il vettore velocità a partire dalle relazioni fra $\vec{r}(t)$ e $\vec{v}(t)$ viste nel capito 7.2 non è così evidente.

Possiamo arrivarci in ogni caso prendendo una strada meno diretta ma decisamente più percorribile.

Cominciamo con il definire una nuova grandezza chiamata **periodo**, indicata con il simbolo T che rappresenta l'intervallo di tempo necessario per compiere un giro completo. Il modulo del vettore velocità è perciò determinabile semplicemente nel seguente modo: la velocità (in modulo) è pari al rapporto fra la lunghezza della circonferenza (il percorso corrispondente ad un giro completo) e il periodo, vale a dire:

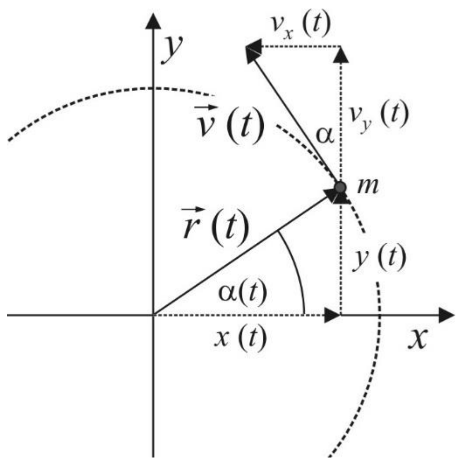
$$v = \frac{2\pi\cdot r}{T}.$$

La relazione fra il periodo T e la velocità angolare ω è presto calcolata. Nell'intervallo di tempo di un periodo il corpo ha compiuto un giro completo, vale a dire che la variazione angolare è stata di $360°$ o meglio di 2π, quindi:

$2\pi = \omega\cdot T$ da cui $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ e per finire $v = \dfrac{\cancel{2\pi}\cdot r}{\frac{\cancel{2\pi}}{\omega}} = r\cdot\omega$,

in perfetto accordo con le osservazioni qualitative di poc'anzi.

Che cosa dire ora di direzione e verso?



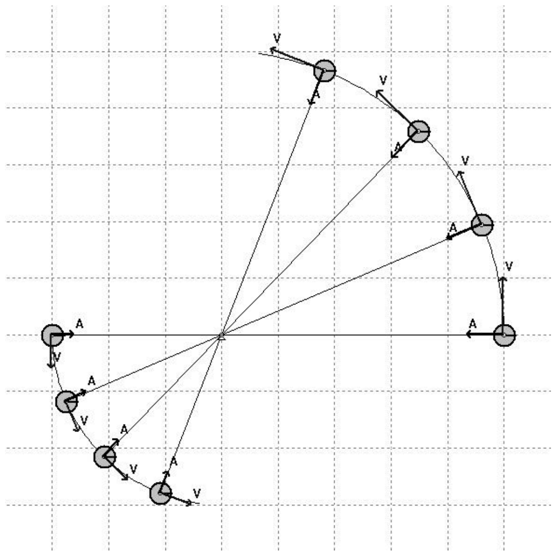
Il fatto che la velocità sia tangente alla traiettoria e che quest'ultima sia una circonferenza ci permette di affermare che il vettore posizione (raggio della circonferenza) e il vettore velocità siano perpendicolari fra di loro. I triangoli rettangoli costituiti dal vettore posizione e le sue componenti e il vettore velocità e le sue componenti sono simili e ruotati di $90°$. L'angolo α è adiacente alla componente x e opposto a quella y del triangolo costruito sul vettore posizione e le sue componenti mentre è adiacente alla componente v_y e opposto alla componente v_x del triangolo costruito sul vettore velocità.

Con l'aiuto della trigonometria e tenendo presente che la componente v_x del vettore velocità e la componente x del vettore posizione hanno verso opposto si può finalmente scrivere;

$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cdot\left(-\sin\left(\alpha(t)\right)\right) \\ v\cdot\cos\left(\alpha(t)\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cdot\omega\cdot\left(-\sin\left(\omega\cdot t\right)\right) \\ r\cdot\omega\cdot\cos\left(\omega\cdot t\right) \end{pmatrix}=r\cdot\omega\cdot\begin{pmatrix} -\sin\left(\omega\cdot t\right) \\ \cos\left(\omega\cdot t\right) \end{pmatrix}.$$

Cosa dire ora dell'accelerazione? Potrebbe essere nulla come nel caso del moto lineare uniforme? In fin dei conti la velocità rimane costante. Facciamo attenzione ad un fatto importantissimo, la velocità rimane costante solo in modulo e non in direzione e verso. Il vettore velocità è in continuo cambiamento. Il vettore cambiamento di velocità $\Delta\vec{v}$ è in generale un vettore diverso da zero e pertanto il vettore accelerazione media definito come:

$\vec{a}_{12}=\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ è un vettore pure diverso da zero.

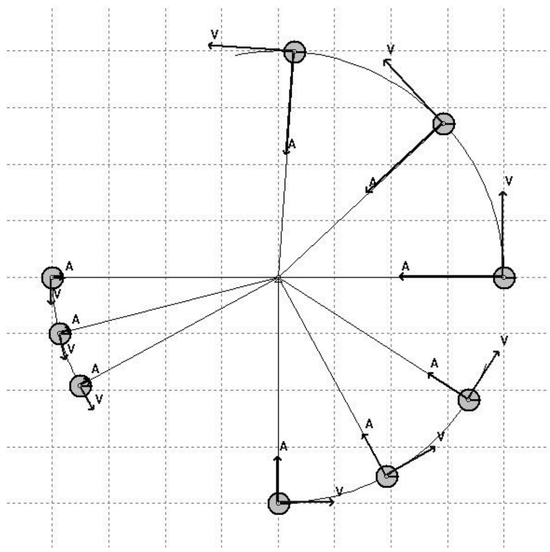


Anche per l'accelerazione iniziamo con una analisi qualitativa. La simulazione mostra due situazioni. In un primo caso si prende in esame il moto di due corpi aventi la stessa velocità angolare ma raggio di rotazione diverso. Nel secondo esempio tre corpi hanno lo stesso raggio di rotazione ma il secondo gira con una velocità angolare doppia del primo e il terzo con velocità angolare tripla.

Quali informazioni possiamo ricavare da queste simulazioni?

In primo luogo osserviamo che in tutti i casi l'accelerazione è un vettore costante in modulo, parallelo al raggio di rotazione e diretto verso il centro.

Nel primo disegno, quello in cui la velocità angolare è la stessa per i due moti, si nota che la lunghezza del vettore accelerazione cresce in modo direttamente proporzionale con il raggio della circonferenza.



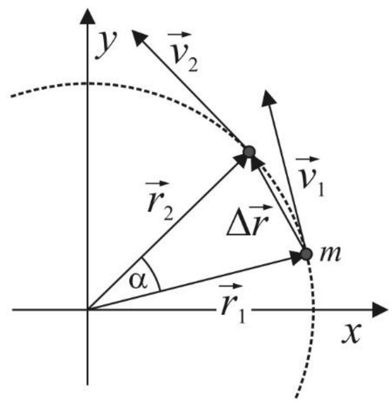
Nel secondo caso l'accelerazione cresce all'aumentare della velocità angolare e dal disegno si osserva come questo aumento sia più che proporzionale. La misura sull'immagine dei vettori accelerazione dà questi valori (unità di misura arbitraria espressa in quadretti):

$a_1=0,2=0,2\cdot 1$, $a_2=0,8=0,2\cdot 4$ e $a_3=1,8=0,2\cdot 9$.

Da queste osservazioni possiamo dedurre che l'accelerazione dipende in modo lineare dal raggio di rotazione e dal quadrato della velocità angolare. Quest'ultimo aspetto lo si deduce dal fatto che le tre accelerazioni sono in proporzione 1,4,9 tra di loro mentre le velocità lo sono in proporzione 1,2,3 .

Come per la velocità la via diretta per determinare il vettore accelerazione non è evidente.

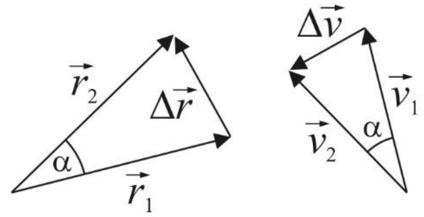
Faremo capo al seguente ragionamento.



Per definizione $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ quando Δt è un intervallo piccolo a piacimento. Inoltre da quanto abbiamo detto in precedenza il vettore $\vec{v}_2$ è perpendicolare a $\vec{r}_2$ e il vettore $\vec{v}_1$ è perpendicolare a $\vec{r}_1$. Questo significa che l'angolo fra i vettori $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_1$ è lo stesso che fra i vettori $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$.

Da ciò segue che il triangolo costruito con i vettori posizione e spostamento, e quello costruito con i vettori velocità e variazione di velocità sono isosceli e simili da cui: $\dfrac{\Delta r}{r} = \dfrac{\Delta v}{v}$ e perciò, per quel che riguarda i moduli:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t}\frac{\Delta v}{v} = \frac{v}{\Delta t}\frac{\Delta r}{r} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}.$$



Ma dato che, per valori molto piccoli di Δt, $\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = v$ segue che

$$a = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r}v = \frac{v^2}{r}.$$

Per quel che riguarda la direzione e il verso dell'accelerazione appare evidente che per valori molto piccoli di Δt il vettore $\Delta \vec{v}$ è perpendicolare al vettore $\vec{v}$ che a sua volta è perpendicolare al vettore $\vec{r}$ e quindi il vettore $\vec{a}$ è antiparallelo (cioè parallelo ma di verso opposto) al vettore $\vec{r}$.

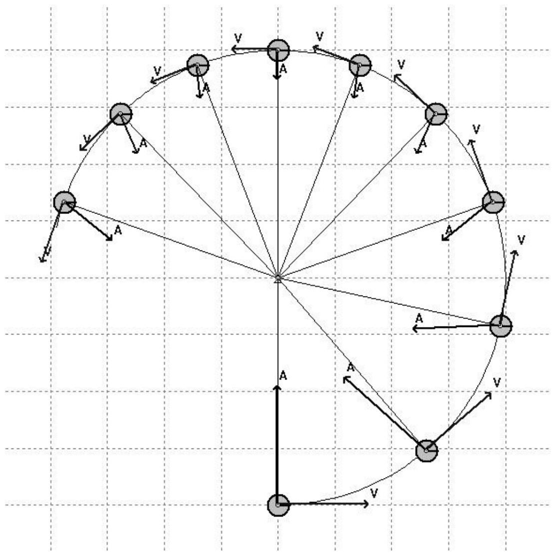
È inoltre possibile trovare altre relazioni interessanti per il modulo del vettore accelerazione, infatti:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{oppure ancora:} \quad a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

La relazione $a = \omega^2 \cdot r$ è in perfetto accordo con quanto "osservato" grazie alle simulazioni.

Il moto circolare (uniforme) è così frequente che all'accelerazione responsabile di questo moto viene dato il nome di **accelerazione centripeta**, cioè diretta verso il centro.

Finora abbiamo discusso solo di moto circolare uniforme.



Facessimo ruotare verticalmente un corpo legato ad una fune (se lo lanciamo dal basso dobbiamo conferirgli una velocità iniziale tale da permettere al corpo di compiere un giro completo) osserveremmo che la velocità diminuisce durante la fase di salita e aumenta in discesa (in perfetto accordo con la legge di conservazione dell'energia). In questa situazione (e in tutte le altre in cui il moto è circolare ma non uniforme) l'accelerazione non è centripeta o meglio non è unicamente centripeta. Il vettore accelerazione può essere scomposto in una componente centripeta calcolabile esattamente come appena visto (si faccia solo attenzione che, non essendo né la velocità e quindi nemmeno la velocità angolare costanti, si devono usare il valore istantaneo di queste grandezze per calcolare il valore istantaneo della componente centripeta dell'accelerazione) e una componente tangenziale responsabile della variazione del modulo della velocità.

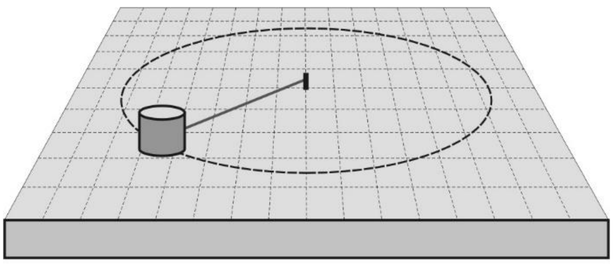
Non è compito di questo corso approfondire questo tema. Si osservi semplicemente che, nel caso preso come esempio, esistono due istanti in cui la accelerazione ha unicamente componente centripeta, nel punto più in basso e in quello più in alto. In quelle situazione il moto può essere trattato come fosse circolare e uniforme.

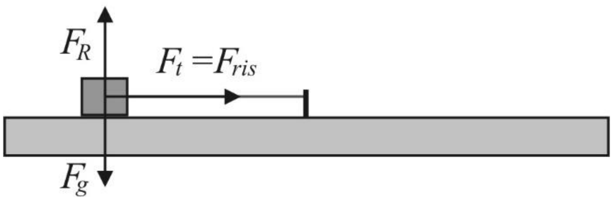
Finora ci siamo occupati solo della cinematica del moto circolare. Che cosa possiamo dire delle forze che danno luogo ad un moto di questo tipo? Limitandoci al caso uniforme (modulo della velocità costante) possiamo tranquillamente affermare che per soddisfare la legge di Newton, deve valere:

$\vec{F}_{ris} = m \cdot \vec{a}$ con $\vec{a}$ sempre diretta verso il centro della circonferenza e di modulo $\omega^2 r$.

Come già per l'accelerazione si è dato un nome particolare a questo tipo di forza risultante, la si è chiamata **forza centripeta**. A scanso di equivoci va subito ricordato che, pur avendo un nome particolare, resta pur sempre una forza risultante, somma vettoriale di tutte le forze agenti che, in questo caso, danno luogo ad un moto circolare uniforme. Ecco alcuni esempi.

Su un piano orizzontale senza attrito un disco si muove di moto circolare uniforme grazie ad un filo agganciato ad un piolo posto al centro del piano. Quali sono le forze agenti sul disco? quanto vale la forza di tensione del filo?





Le forze agenti sono tre: la forza peso, la reazione del piano di appoggio e la forza di tensione del filo. Le prime due sono verticali, di uguale intensità e di verso opposto e pertanto si equilibrano vicendevolmente. La forza di tensione del filo è la sola forza orizzontale ed è di conseguenza la forza risultante. Il moto è circolare uniforme e pertanto:

$$\left.\begin{array}{r} F_t = F_{ris} \\ F_{ris} = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow F_t = m \cdot \omega^2 \cdot r \, .$$

Una automobile affronta una curva circolare a velocità costante. Quali sono le forze agenti sull'automobile? quali di queste diventa forza risultante centripeta?

Anche in questo caso sono presenti due forze verticali che si equilibrano a vicenda. L'unica forza orizzontale presente, responsabile del moto circolare, è la forza di attrito fra gli pneumatici e la strada. È quest'ultima la forza risultante e quindi forza centripeta. Analogamente a quanto visto prima vale.

$$\left.\begin{array}{r} F_A = F_{ris} \\ F_{ris} = m \cdot a = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow F_A = m \cdot \frac{v^2}{r} \, .$$

Se la domanda fosse stata: qual è la massima velocità con la quale una automobile può affrontare una curva circolare di raggio $r = 75m$ se il coefficiente di attrito di stacco tra gli pneumatici e la strada vale $\mu_0 = 0{,}85$?

La massima velocità, prima di perdere aderenza e quindi uscire di strada, è quella ottenibile grazie al valore più grande possibile dell'attrito statico (si faccia attenzione che uno pneumatico non scivola in condizioni normali di marcia ma la porzione che è in contatto con la strada è ferma rispetto a quest'ultima) e cioè l'attrito di stacco. Pertanto:

$$\left.\begin{array}{r} F_{A0} = \mu_0 \cdot F_R = \mu_0 \cdot F_g = \mu_0 \cdot m \cdot g \\ F_{A0} = m \cdot \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_0 \cdot g \cdot r} = \sqrt{0{,}85 \cdot 9{,}8 \tfrac{m}{s^2} \cdot 75m} = 25 \tfrac{m}{s} = 90 \tfrac{km}{h} \, .$$