Elettrologia

Nel corso dei diversi capitoli fino a qui trattati ci siamo imbattuti in numerosi tipi di forza: forza di gravità, forza di tensione del filo, forze di attrito, spinta di Archimede, ecc… . Ma quante sono le forze fondamentali della natura?

Le conoscenze attuali portano alla costruzione di un modello nel quale sono sufficienti 4 forze fondamentali per spiegare il comportamento della natura. Due di queste hanno raggio di azione infinito e sono: la **forza di gravità**, della quale abbiamo già discusso, e le **forze elettriche**, che iniziamo a trattare in questo capitolo. Le altre due hanno raggio di azione molto piccolo e sono le cosiddette forze nucleari, e più precisamente l' **interazione nucleare forte**, responsabile della stabilità del nucleo atomico, e l' **interazione nucleare debole**, che media alcuni tipi di decadimento radioattivo.

Cenni di elettrostatica

Alcuni esperimenti introduttivi

Iniziamo il nostro corso con alcune esperienze che sono facilmente riproducibili anche a casa.

Prendete un palloncino e gonfiatelo, strofinatelo contro il vostro maglione e avvicinatelo ad una parete o, meglio ancora, al soffitto. Con vostra meraviglia noterete che vi rimarrà "appiccicato".

Se strofinate una riga di plastica riuscirete a sollevare un pezzettino di carta unicamente avvicinandovi la riga.

Aprite il rubinetto dell'acqua in modo che l'acqua scorra in modo molto regolare e avvicinate al filo d'acqua una riga che avete appena strofinato. L'acqua verrà attirata verso la riga così che il flusso di acqua si piega.

Ed ora una esperienza un po' più impegnativa. Prendete una pallina da ping-pong, rivestitela con un foglio di alluminio e appendetela tramite un filo di cotone. Se vi avvicinate con una riga che avete appena strofinato, vedrete la pallina essere attratta dalla riga, ma attenzione, se la pallina e la riga si toccano, la pallina verrà respinta della riga.

Ed ora alcune esperienze che richiedo del materiale da laboratorio.

Prendete due bacchette, una di plastica e una di vetro, con un piccolo foro al centro in modo che possano essere posizionate su dei puntali (potranno così ruotare come fossero aghi di una bussola).

Strofinate una seconda bacchetta di plastica e avvicinatela alla bacchetta di plastica o a quella di vetro. Entrambe verranno attirate dalla bacchetta che avete in mano. Ripetete l'esperienza con la bacchetta di vetro e otterrete lo stesso risultato. Strofinate ora anche le bacchette che avete posizionato sui puntali. Se avvicinate alla bacchetta di vetro l'altra bacchetta di vetro vi sarà repulsione. La stessa cosa avverrà se le bacchette sono entrambe di plastica. Al contrario vetro con plastica produrrà attrazione.

Avvicinate ora alle bacchette che avete strofinato lo straccio o la pelliccia che avete usato per strofinarle e osserverete il seguente comportamento: la straccio (o la pelliccia) con cui avete strofinato la plastica attirerà la plastica e respingerà il vetro e, viceversa, quello con cui avete strofinato il vetro attirerà il vetro e respingerà la plastica.

Ancora una osservazione. Se avete strofinato le bacchette che avete posizionato sul puntale solo ad una estremità osserverete quanto segue: se la bacchetta è quella di vetro avremo dalla parte strofinata attrazione con la bacchetta di plastica e repulsione con la bacchetta di vetro e attrazione con entrambe le bacchette alla estremità non strofinata. D'altro canto la pallina ricoperta di alluminio una volta che è stata toccata da una bacchetta strofinata sentirà la repulsione da parte della bacchetta che l'ha strofinata e attrazione da parte dell'altra bacchetta indipendentemente dal punto in cui è stata toccata.

Un'ultima osservazione. Attrazione e repulsione sembrano essere più intense minore è la distanza fra gli oggetti coinvolti nel fenomeno.

Per cercare di spiegare questi comportamenti occorre far capo ad una parte della fisica chiamata **elettrostatica**.

La carica elettrica e alcune sue caratteristiche

Studiando la forza di gravità eravamo arrivati alla conclusione che la materia doveva possedere una caratteristica, che avevamo chiamato massa, che esercitava una forza attrattiva su un'altra massa.

Gli esperimenti che abbiamo appena compiuto mostrano che la materia deve possedere un'altra caratteristica attraverso la quale è possibile osservare azioni attrattive e repulsive fra corpi. Di questa nuova caratteristica, che chiameremo **carica elettrica** (o più semplicemente carica), devono esistere due tipi diversi, quella che caratterizza il vetro strofinato detta **carica vetrosa** o **positiva** e quella della plastica strofinata detta **carica resinosa**[1] o **negativa**. Cariche dello stesso tipo si respingono, cariche di tipo diverso si attraggono.

Normalmente non si osservano fenomeni elettrici (al contrario della gravità che è sempre presente) e pertanto la materia deve presentarsi di norma priva di carica in uno stato chiamato **neutro**. L'espressione "priva di carica" non è del tutto corretta, meglio sarebbe "priva di carica in eccesso". Un corpo si trova in uno stato elettricamente neutro quando in esso il numero di cariche positive e quello delle cariche negative si equivalgono.

Strofinando un pezzo di plastica o uno di vetro non si fa altro che passare delle cariche da un corpo (la plastica o il vetro) all'altro (lo straccio o la pelliccia). In questa situazione un corpo si dice elettricamente carico.

Questo fatto è associato ad una importante legge della natura: la legge della **conservazione della carica**. Caricando un corpo per strofinio non si creano cariche ma si spostano cariche da un corpo all'altro.

In alcuni casi le cariche rimangono localizzate (se si strofina una bacchetta ad una sola estremità il suo comportamento è diverso dall'estremità non strofinata). In altri casi le cariche si distribuiscono su tutto il corpo (la pallina rivestita di alluminio si carica in maniera omogenea se viene a contatto con una bacchetta carica). Esistono pertanto corpi che permettono alle cariche di muoversi (o almeno permettono ad un tipo di carica di muoversi) e altri invece no. Corpi che permettono alle cariche di spostarsi sono composti da materiali detti **conduttori**, corpi che non permettono alle cariche di muoversi sono composti da materiali **isolanti**.

Nella fisica moderna la carica elettrica è stata identificata come una proprietà caratteristica delle particelle elementari. In un famoso esperimento, Millikan dimostrò che la carica elettrica presente su un corpo qualsiasi è un multiplo intero di una **carica elementare** corrispondente appunto alla carica di un protone (carica positiva) e di un elettrone (carica negativa). Questa caratteristica è detta **quantizzazione della carica**.

Negli esperimenti effettuati in classe non è possibile osservare questa caratteristica in quanto il numero di cariche che vengono coinvolte è enorme al punto tale che sembra possibile caricare un corpo in modo continuo invece che in maniera granulare.

[1] Il termine resinoso deriva da ambra, resina fossile. I primi studi dei fenomeni risalgono probabilmente al filosofo greco Talete, che studiò le proprietà elettriche dell'ambra, la resina fossile che se viene sfregata attrae altri pezzetti di materia: il suo nome greco era electron (ἤλεκτρον), e da questo termine deriva la parola «elettricità».

La legge di Coulomb

Ma quanto è grande la forza di attrazione o repulsione fra cariche?

Alla fine del diciottesimo secolo Charles Augustin de Coulomb pubblicò i risultati dei suoi esperimenti, effettuati con uno strumento chiamato bilancia di torsione, sulle forze fra cariche elettriche. Egli osservò che tali forze erano proporzionali alle cariche presenti su un corpo, alle cariche presenti sull'altro corpo e inversamente proporzionali all'inverso della distanza al quadrato.

Egli non fece altro che verificare che la legge di forza fra cariche elettriche aveva la stessa forma della legge di gravità enunciata da Newton più di un secolo prima.

Chiamata Q_1 la carica presente su un corpo e Q_2 quella presente sul secondo corpo la forza elettrica fra le due cariche è data dalla seguente formula:

$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$, dove d è la distanza fra le cariche.

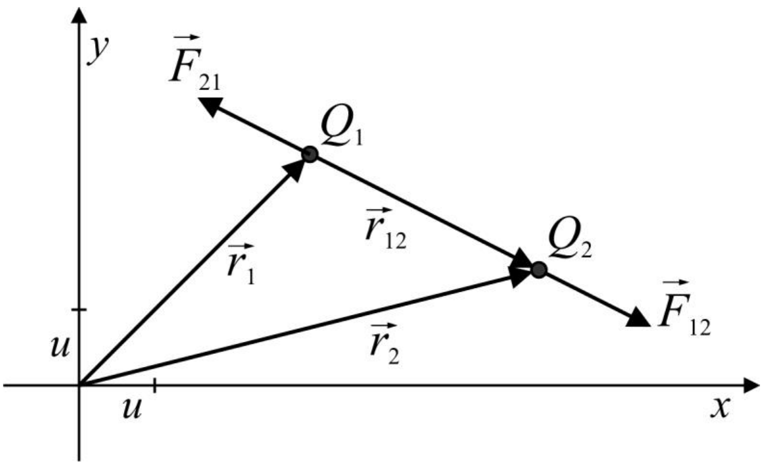
La costante k dipende dall'unità di misura scelta per la carica elettrica. Utilizzando il sistema internazionale e quindi il coulomb (simbolo del coulomb: C) quale unità di misura per la carica il valore della costante è:

$k = 8{,}98755 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2}$, spesso approssimata a $k = 9 \cdot 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{C^2}$.

Come ben sappiamo, la forza elettrica, come tutte le forze, è una grandezza vettoriale. La formula che abbiamo scritto poche righe sopra ci fornisce solo il modulo. Dato che le cariche possono essere sia positive che negative e che il modulo di una forza è sempre un valore positivo, avremmo fatto meglio a scrivere:

$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$, oppure, chiamato $\vec{r}_{12}$ il vettore fra la carica Q_1 e la carica Q_2, scriviamo la forma vettoriale della forza elettrica esercitata da Q_1 su Q_2 in questo modo:

$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$, dove $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$ è un vettore unitario con direzione quella del segmento che unisce le due cariche e verso da Q_1 su Q_2.



Con questa formulazione i segni delle cariche diranno se la forza è repulsiva o attrattiva.

Nel disegno a lato è rappresentata la situazione in cui le due cariche sono dello stesso tipo, entrambe positive o negative così che la forza elettrica risulta repulsiva.

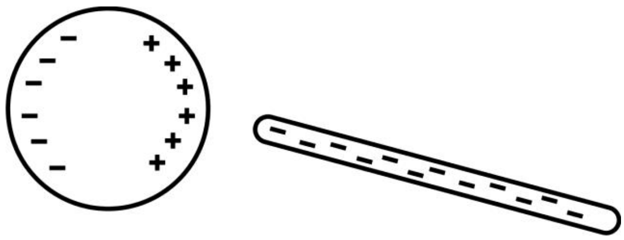
Useremo la notazione vettoriale solo quando risultasse essere indispensabile a facilitare i calcoli. In tutti gli altri casi calcoleremo il modulo della forza senza preoccuparci dei segni delle cariche e decideremo la direzione e da che parte (verso) agisce la forza in base ai dati del problema.

L'induzione elettrostatica

La legge di Coulomb permette di comprendere in maniera molto diretta la maggior parte dei fenomeni presi in considerazione negli esempi iniziali. In particolare da una spiegazione sulla presenza di forze attrattive e repulsive (cariche dello stesso tipo si respingono, di tipo diverso si attraggono) e sull'intensità della forza in funzione della distanza (essa decresce con l'inverso del quadrato) quando i due corpi in esame sono elettricamente carichi.

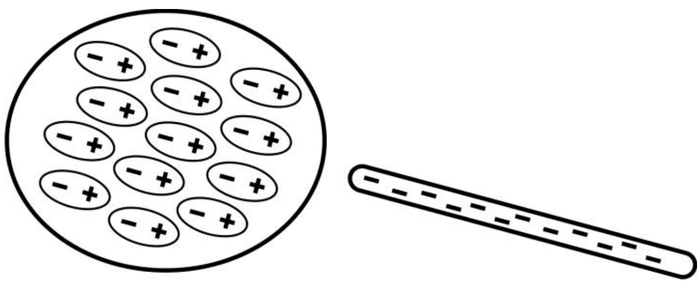
Un po' meno immediata è la comprensione dei fenomeni di attrazione e repulsione in presenza di un solo corpo elettricamente carico.

Cominciamo con il considerare il caso in cui il corpo non elettricamente carico sia composto da materiale conduttore. Quando avvicinavamo la bacchetta elettricamente carica alla pallina rivestita di un foglio di alluminio (conduttore) osservavamo che la pallina era attratta dalla bacchetta elettricamente carica sia che essa fosse fatta di vetro oppure di plastica.



La spiegazione è la seguente. Supponiamo che la bacchetta fosse quella di plastica, caricata cioè con carica negativa. Quando avviciniamo la bacchetta carica, essa esercita una forza attrattiva sulle cariche positive del conduttore e repulsiva sulle sue cariche negative. In un conduttore le cariche possono muoversi (in realtà in un metallo a muoversi sono solo le cariche negative, cioè gli elettroni, ma il risultato è lo stesso). Di conseguenza assisteremo ad una migrazione di cariche (negative) che porta ad un eccesso di carica negativa nella parte del conduttore lontana dalla bacchetta e ad un eccesso di carica positiva (in realtà ad un difetto di carica negativa) nella zona del conduttore vicino alla bacchetta fino a che si ristabilisce una situazione di equilibrio, vale a dire che su ciascuna singola carica la forza risultante è nulla. In questa nuova situazione la distanza media fra le cariche positive nel conduttore e quelle negative della bacchetta risulta minore della distanza media fra quelle negative del conduttore e della bacchetta. Dato che le cariche, benché non più omogeneamente distribuite, restano nel conduttore, e che la forza fra cariche decresce con il quadrato della distanza, si assiste globalmente ad un fenomeno di attrazione, dovuto ad una maggiore forza attrattiva sulle cariche positive rispetto a quella repulsiva sulle cariche negative.

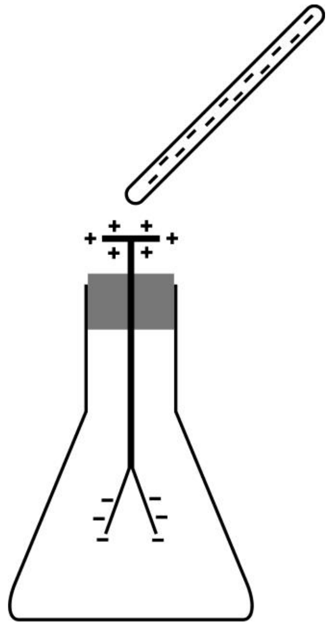
Questo fenomeno è chiamato **induzione elettrostatica**.



Si prenda ora in considerazione un corpo composto da materiale isolante. Avvicinando a questo una bacchetta elettricamente carica (supponiamo ancora la bacchetta di plastica) non assistiamo ad una migrazione macroscopica di cariche come invece avveniva nel caso del corpo conduttore. Quello che avviene è che le cariche si muovono all'interno delle molecole che costituiscono il materiale isolante oppure (per esempio nel caso dell'acqua) le molecole si orientano in modo tale che all'interno di ogni molecola la parte carica positivamente è più vicina alla bacchetta caricata negativamente che non la parte negativa. Il risultato globale è analogo in quanto la posizione media delle cariche negative è più vicina della corrispondente posizione media delle cariche negative e quindi globalmente abbiamo una attrazione maggiore rispetto alla repulsione.

L’elettroscopio

Uno strumento di semplice costruzione in grado di individuare la presenza di cariche, il loro tipo e, in una certa misura, anche la quantità e l’**elettroscopio**.



Nella sua forma più semplice è costituito da una beuta con un tappo di gomma (sia il vetro che la gomma sono materiali isolanti) nel quale è stato inserito un conduttore alla cui estremità sono disposte due lamine molto sottili e pieghevoli (nelle prime versioni erano lamine d’oro) e quindi mobili.

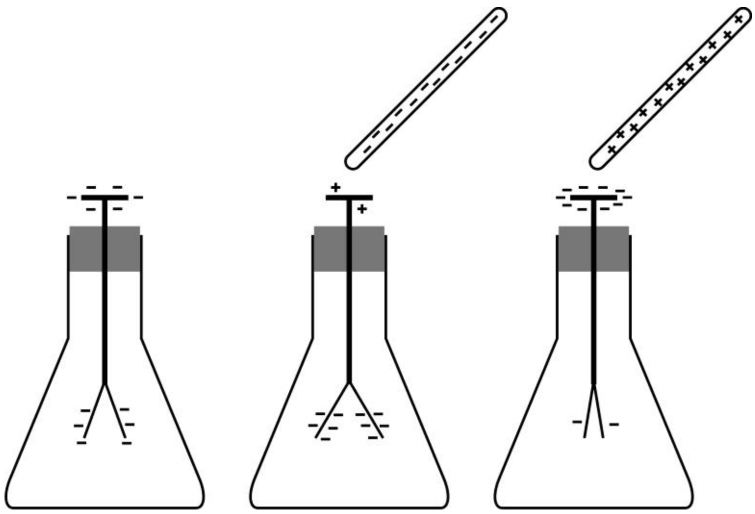
Avvicinando all’estremità esterna un corpo carico (la solita bacchetta di plastica) assisteremo, per induzione elettrostatica, alla migrazione di cariche negative verso le lamine.

La repulsione fra cariche dello stesso tipo allontanerà le lamine in misura tanto maggiore tanto più grande è la presenza di cariche. Man mano che si avvicina la bacchetta, le lamine si separeranno sempre di più. Se si allontana la bacchetta, le lamine torneranno ad avvicinarsi fino a tornare alla loro posizione di partenza quando la bacchetta è stata allontanata del tutto dall’elettroscopio.

Ripetendo il processo con una bacchetta di vetro carica avviene la stessa cosa.

Usando in questo modo l’elettroscopio si individua la presenza di cariche, in una certa qual misura anche la quantità, ma non si può distinguerne il tipo.

Toccando con la bacchetta carica l’elettroscopio si cede parte delle cariche ad esso. Anche allontanando la bacchetta, l’eccesso di carica fa in modo che le lamine restino in qualche misura separate.



In questa situazione l’elettroscopio è pronto per distinguere il tipo di carica, o quanto meno per distinguere il tipo di carica se se ne conosce il tipo con cui era caricato il corpo che ha toccato l’elettroscopio.

Avvicinando all’elettroscopio un corpo caricato con lo stesso tipo di carica si aumenta la carica sulle lamine separandole maggiormente. Al contrario, avvicinando all’elettroscopio un corpo caricato con carica di tipo opposto, si diminuisce la carica sulle lamine che di conseguenza si avvicinano.

Forze fra cariche

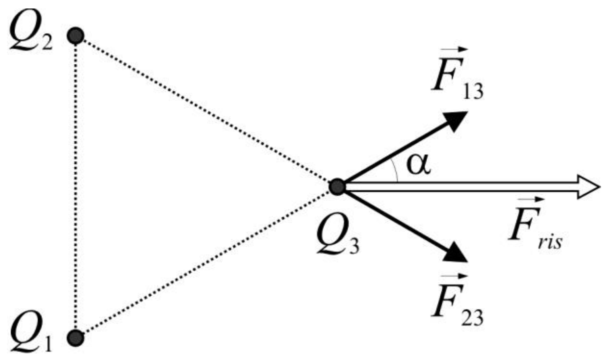
In questo paragrafo tratteremo alcuni esempi di forza fra cariche.

- Determinare la forza elettrica di repulsione fra due cariche positive[2] di valore $Q = 2,5\,\mu C$ e distanti $20\,cm$.

$$F = k\frac{Q \cdot Q}{d^2} = 9 \cdot 10^9\,\tfrac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{2,5 \cdot 10^{-6} C \cdot 2,5 \cdot 10^{-6} C}{\left(0,20\,m\right)^2} = 1,41\,N$$

- Calcolare la forza elettrica esercitata da due cariche positive di carica $Q = 2,5\,\mu C$ su una terza carica anch'essa di valore $Q = 2,5\,\mu C$ se disposti sui vertici di un triangolo equilatero di lato $20\,cm$.

  Dato che non è indicato diversamente, disponiamo le cariche come nel disegno.



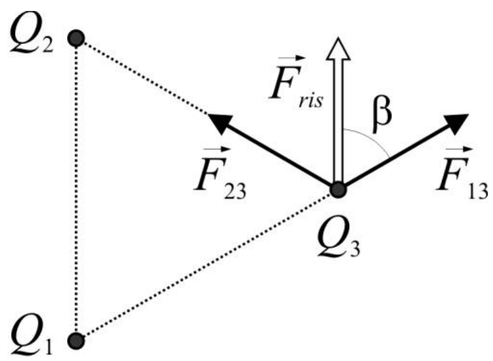
  Il modulo della forza che ciascuna delle prime due cariche esercita sulla terza è uguale ed è già stato calcolato nell'esempio precedente e vale:

  $F = 1,41\,N$.

  La simmetria della situazione permette di dire che la forza risultante è orizzontale e il suo modulo vale 2 volte la componente x della forza di ciascuna carica. Di conseguenza essa vale:

  $F_{ris} = 2 \cdot F_{13,x} = 2 \cdot F_{13} \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot 1,41\,N \cdot \cos(30°) = 2,44\,N$.

- Come cambia la forza risultante se una delle due cariche, pur mantenendo lo stesso valore, diventa negativa?

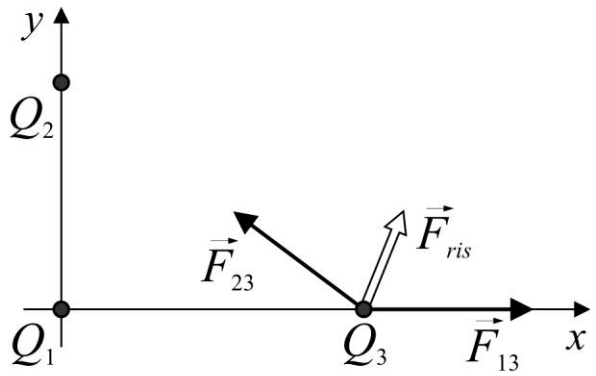


  La risposta è semplice. Ammettiamo che sia Q_2 a diventare negativa. Osserviamo il disegno e calcoliamo la forza risultante.

  Nuovamente la simmetria della situazione permette di dire che la forza risultante è verticale e il suo modulo vale 2 volte la componente y della forza di ciascuna carica. Di conseguenza essa vale:

  $F_{ris} = 2 \cdot F_{13,y} = 2 \cdot F_{13} \cdot \cos(\beta) = 2 \cdot 1,41\,N \cdot \cos(60°) = 1,41\,N$.

- Analizziamo ora una situazione con minore simmetria. In un sistema di riferimento xy siano poste tre cariche nei seguenti punti:



  $Q_1 = 4,0\,\mu C$ in $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0\,m \\ 0\,m \end{pmatrix}$,

  $Q_2 = -6,0\,\mu C$ in $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0\,m \\ 0,30\,m \end{pmatrix}$, e

  $Q_3 = 3,0\,\mu C$ in $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0,40\,m \\ 0\,m \end{pmatrix}$.

  Determinare la forza esercitata dalle prime due cariche sulla terza.

---

[2] Se non indicato diversamente le cariche saranno sempre considerate puntiformi.

Troviamo inizialmente il modulo della forza, in seguito le componenti e infine la risultante.

$$F_{13} = k\frac{|Q_1|\cdot|Q_3|}{r_{13}^2} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{4,0\cdot 10^{-6}C\cdot 3,0\cdot 10^{-6}C}{(0,40\,m)^2} = 0,675\,N$$

$$F_{23} = k\frac{|Q_2|\cdot|Q_3|}{r_{23}^2} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{6,0\cdot 10^{-6}C\cdot 3,0\cdot 10^{-6}C}{(0,40\,m)^2+(0,30\,m)^2} = 0,648\,N$$

Con l'aiuto della trigonometria calcoliamo le due forze nella forma vettoriale:

$$\vec{F}_{13} = \begin{pmatrix} 0,675\,N \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{23} = \begin{pmatrix} -0,518\,N \\ 0,389\,N \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \vec{F}_{ris} = \begin{pmatrix} 0,157\,N \\ 0,389\,N \end{pmatrix}.$$

- Si consideri ora la seguente situazione: due corpi (puntiformi) di massa $m = 15\,g$ e carica $Q = 1,2\,\mu C$ sono posti uno sopra l'altro alla distanza di $25\,cm$. Calcolare la forza risultante agente sul corpo posizionato sopra (indicare con m_1 la massa del corpo sotto rispettivamente con m_2 quello sopra) .

$$F_{12} = k\frac{|Q_1|\cdot|Q_2|}{d_{12}^2} = 9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{1,2\cdot 10^{-6}C\cdot 1,2\cdot 10^{-6}C}{(0,25\,m)^2} = 0,207\,N\ , \quad F_{g2} = 0,015\,kg\cdot 9,8\,\tfrac{N}{kg} = 0,147\,N\ .$$

Da cui segue: $F_{ris2} = 0,207\,N - 0,147\,N = 0,060\,N$ verso l'alto.

Se fosse stata richiesta la forza risultante sulla massa posta sotto il risultato sarebbe stato:

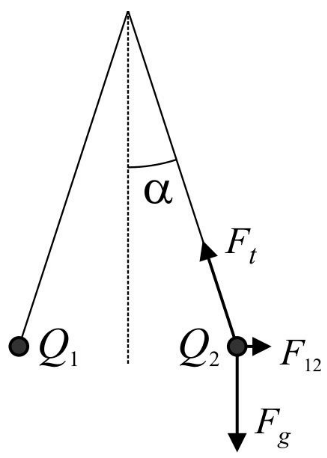
$F_{ris1} = 0,207\,N + 0,147\,N = 0,354\,N$ verso il basso.

Ammettiamo ora che il corpo sotto sia fisso e che quello sopra possa muoversi ma solo lungo l'asse verticale. Calcolare la distanza fra i due corpi per fare in modo che il secondo si trovi in una posizione di equilibrio.

La forza risultante in un corpo nella sua posizione di equilibrio deve essere pari a zero e perciò in modulo la forza elettrica (verticale e diretta verso l'alto) deve essere uguale a quella di gravità (verticale e diretta verso il basso). Vale pertanto la seguente relazione:

$$k\frac{|Q_1|\cdot|Q_2|}{d_{12}^2} = m_2\cdot g\ , \quad \text{da cui:} \quad d_{12} = \sqrt{k\frac{|Q_1|\cdot|Q_2|}{m_2\cdot g}} = \sqrt{9\cdot 10^9\ \tfrac{Nm^2}{C^2}\cdot\frac{1,2\cdot 10^{-6}C\cdot 1,2\cdot 10^{-6}C}{0,147\,N}} = 0,297\,m\ .$$

- Da ultimo consideriamo due corpi puntiformi di massa $12,0\,g$, elettricamente carichi con una carica dello stesso tipo e valore, legati ad un unico punto tramite due fili isolanti di lunghi $l = 80\,cm$. Si osserva che i due fili sono separati da un angolo di $36°$. Determinare il valore della carica presente sui corpi.



Data la simmetria del problema i due fili formano entrambi un angolo $\alpha = 18°$ rispetto alla verticale. Dal principio di inerzia vale:

$$0 = \vec{F}_{ris} = \vec{F}_g + \vec{F}_{12} + \vec{F}_t\ , \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t\cdot\sin(\alpha) \\ F_t\cdot\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \text{ da cui:}$$

$$F_t = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \quad \text{e}$$

$$F_{12} = F_t\cdot\sin(\alpha) = \frac{mg}{\cos(\alpha)}\cdot\sin(\alpha) = mg\cdot\tan(\alpha) = 0,012\,kg\cdot 9,8\,\tfrac{N}{kg}\cdot\tan(18°) = 38,2\cdot 10^{-3}\,N\ .$$

Con: $d_{12} = 2 \cdot l \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot 0,80\,m \cdot \sin(18°) = 0,494\,m$ segue:

$$|Q_1| = |Q_2| = \sqrt{\frac{d_{12}^2 \cdot F_{12}}{k}} = \sqrt{\frac{(0,494\,m)^2 \cdot 38,2 \cdot 10^{-3}\,N}{9 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}} = 1,02\,\mu C\,.$$

La simmetria della situazione rispetto alla verticale da quali fattori dipende?

È necessario che sia massa che carica dei due corpi devono essere uguali oppure è sufficiente che siano le masse ad essere uguali e non le cariche o viceversa devono essere uguali le cariche ma non necessariamente le masse? Provate a riflettere sulla situazione.

Una variante del problema pone la carica Q_1 fissa sotto la verticale del punto di aggancio. Ancora una volta l'angolo fra i due fili è di $36°$. Da determinare è sempre la carica presente sui due corpi. Secondo voi otterremo per la carica lo stesso risultato?

Il concetto di campo[3]

Nelle formulazioni usate finora per la legge della forza di gravità ed elettrica, queste forze appaiono come azioni a distanza tra masse o cariche elettriche. La descrizione è accurata, ma non viene spiegato come avvenga questa azione istantanea. Ai tempi di Newton l'idea era nuova e suscitò varie difficoltà, tanto che egli dovette scusarsi di presentare solo una descrizione matematica. Col tempo gli scienziati ci si sono abituati e la scoperta della legge di Coulomb confermò questo modo di pensare.

Nel corso del diciannovesimo secolo, per influsso specialmente di Faraday, si è diffusa un'altra interpretazione: una carica elettrica (o una massa) influisce sullo spazio circostante: esso diventa sede di un campo elettrico (o gravitazionale); una carica (o una massa) che si trova nel campo subisce una forza.

L'interazione tra due cariche (o masse) è, per così dire, descritta in due fasi:

I fase: la prima carica (o massa) crea il campo attorno a sé,

II fase: il campo produce una forza, che agisce sulla seconda carica (o massa).

Il concetto di campo facilita molto la descrizione di situazioni complesse, ma esso non è solo un artificio matematico: progressivamente si è compreso che il campo è una grandezza fisica reale e che esso è il concetto basilare per descrivere tutte le interazioni. Per es. il campo attorno a una carica (o massa) non si crea istantaneamente, ma si propaga alla velocità della luce.

Da quanto detto risulta chiaro che la definizione di campo è possibile sia per l'interazione gravitazionale che per quella elettrica. Studieremo ora in dettaglio il campo elettrico, osservandone di tanto in tanto l'analogia con il campo gravitazionale.

Il campo elettrico e le sue rappresentazioni

Siano date le cariche Q_1, Q_2, fino a Q_N disposte in $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, … $\vec{r}_N$ e una carica positiva q_0 detta “esplorativa”, così piccola da non influenzare la distribuzione di cariche data. Ciascuna delle cariche elettriche eserciterà su q_0 una forza elettrica che indicheremo con $\vec{F}_{10}$ per Q_1, $\vec{F}_{20}$ per Q_2, fino a $\vec{F}_{N0}$ per la carica Q_N.

Chiamiamo $\vec{F}_e = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + ... + \vec{F}_{N0}$ la forza totale esercitata dalla distribuzione delle N cariche su q_0.

Il campo elettrico nel punto $\vec{r}$ in cui si trova q_0 é definito da:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}.$$

L’unità di misura del campo elettrico è $\frac{N}{C}$.

Per analogia il campo di gravità è definito come il rapporto fra la forza di gravità esercitata da una massa (o più masse, nel qual caso le singole forze vanno sommate) su una massa m_0.

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}.$$

In prossimità della superficie terrestre il campo di gravità è un vettore costante diretto verso il basso di intensità pari a $g = 9{,}8\,\frac{N}{kg}$.

Vediamo ora alcuni esempi di campo elettrico e come è possibile rappresentarli.

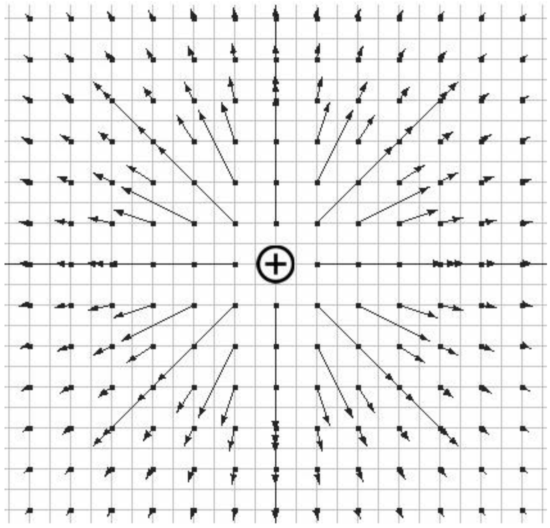
[3] Paragrafo tratto da “dispense di Fisica” della SUPSI

Iniziamo con il campo elettrico generato da una singola carica Q (positiva per la rappresentazione nei due disegni che seguono).

Per comodità poniamo la carica all'origine del sistema di riferimento.

La forza elettrica di Q su q_0 posta in un punto qualsiasi $\vec{r}$ vale (è necessario adottare la notazione vettoriale):

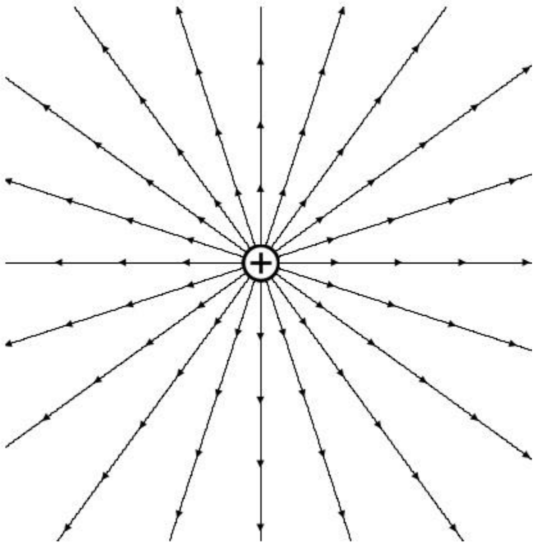
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} = k\frac{Q\cdot \cancel{q_0}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{q_0}} = k\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = k\frac{Q}{r^3}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$



Per rappresentare il campo elettrico si possono usare diverse modalità. In questa sede ne verranno mostrate solo due, concentrandoci in particolare sulla seconda. In rete trovate parecchi siti con delle applet (piccoli programmi che girano in java) in grado di rappresentare il campo elettrico in varie situazioni sia nelle due modalità che trattiamo sia in altri modi.

Il modo più semplice di rappresentare un campo elettrico consiste nel costruire una griglia, in ogni punto di essa calcolare il vettore campo elettrico e disegnare la freccia corrispondente. Per una carica puntiforme positiva il risultato è più o meno quello del disegno a lato.

L'intensità del campo in un punto è proporzionale alla lunghezza dei vettori mentre direzione e verso son quelli dei vettori.



L'altra possibilità consiste nel disegnare le **linee di campo**.

Per disegnare una linea di campo è sufficiente procedere come segue: a partire da un punto qualsiasi (di solito vicino ad una carica) si determina la direzione e verso del campo, ci si sposta di una piccola quantità (più piccola è meglio è) nella direzione e verso appena determinati. A partire dalla nuova posizione si ripete il procedimento fino a costruire la linea di campo. La direzione in cui ci si muove, che corrisponde al verso del vettore campo elettrico, è indicata con una freccia sulla linea. Si riempie lo spazio con un certo numero di linee con la convenzione che la "densità" delle linee è indice dell'intensità del campo. Per il campo elettrico generato da una singola carica (positiva) la rappresentazione è quella a lato.

Calcoliamo ora il campo generato da due cariche puntiformi Q, entrambe positive, dello stesso valore e distanti fra di loro una distanza d.

Per semplificare al massimo il calcolo, che risulta comunque più complesso del caso precedente, poniamo le due cariche sull'asse x, la prima in $x_1 = -\frac{1}{2}d$ e la seconda in $x_2 = \frac{1}{2}d$.

Poniamo la carica di prova in un punto qualsiasi $\vec{r} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Sia $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix}x-\left(-\frac{1}{2}d\right)\\y-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}d\\y\end{pmatrix}$ il vettore che unisce la prima carica con la carica di prova.

Sia $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}$ il vettore che unisce la seconda carica con la carica di prova.

$r_1 = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2}$ è la distanza fra la carica di prova e la prima carica,

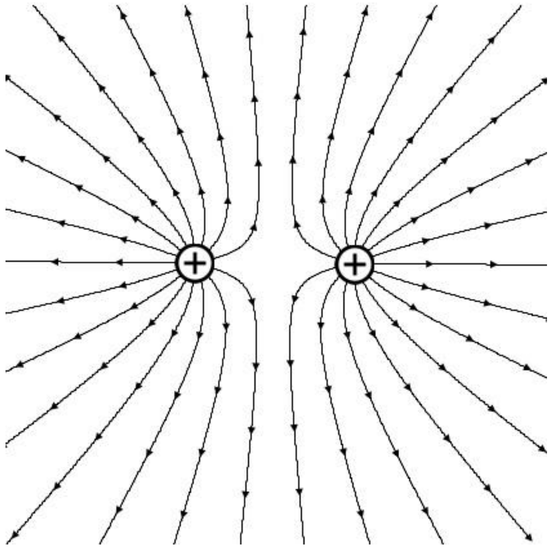
$r_2 = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2}$ è la distanza fra la carica di prova e la seconda carica.

Il campo elettrico generato dalla prima carica vale pertanto:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{r_1^2} \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} = k \cdot \frac{Q}{r_1^3} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$

Quello generato dalla seconda:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$



Il campo elettrico totale lo si ottiene sommando i campi elettrici delle singole cariche. Il disegno a lato mostra la rappresentazione con le linee di campo.

In un punto qualsiasi la somma dei due campi non porta ad ottenere delle particolari semplificazioni e pertanto è sufficiente scrivere che $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Più interessante è analizzare il valore dell'intensità del campo lungo gli assi.

Iniziamo con il calcolare il campo nell'origine.

$$\vec{E}_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^3} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La somma dei due vettori dà zero come era facile aspettarsi. In effetti l'origine degli assi si trova equidistante dalle due cariche e sul segmento che le unisce. Di conseguenza sulla carica esplorativa esse esercitano una forza di uguale intensità, uguale direzione ma verso opposto.

Analizziamo ora il caso di un punto sull'asse x, cioè con $y = 0$, e per $x > \frac{1}{2}d$.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2 \cdot k \cdot Q \frac{x^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot \left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da notare che, quando $x \gg \frac{1}{2}d$, per il valore dell'intensità del campo si può usare l'approssimazione:

$$E \cong \frac{2 \cdot k \cdot Q}{x^2},$$

che equivale al campo generato da una carica posta all'origine di valore doppio rispetto alle due cariche di partenza.

Per ultimo calcoliamo il campo lungo l'asse y (cioè con $x = 0$) con $y > 0$.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{2 \cdot k \cdot Q}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot y}{\left(\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esattamente come prima è da notare che, quando $y \gg \frac{1}{2}d$, per il valore dell'intensità del campo si può usare l'approssimazione:

$$E \cong \frac{2 \cdot k \cdot Q}{y^2},$$

che ancora una volta equivale al campo generato da una carica posta all'origine di valore doppio rispetto alle due cariche di partenza.

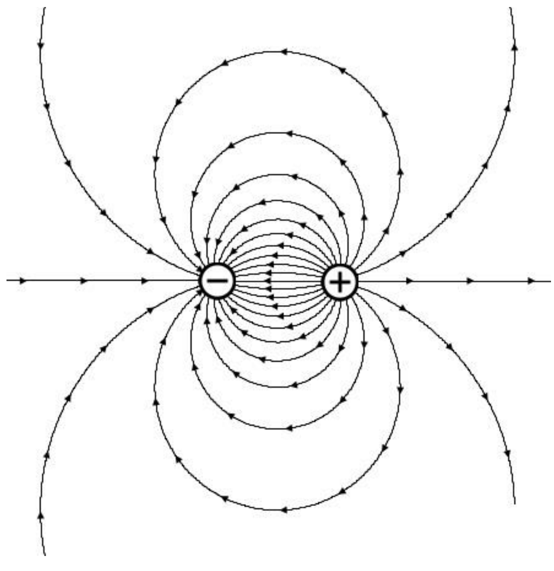
Un caso analogo è quello del **dipolo**, cioè di due cariche di uguale valore ma di segno opposto, distanti d. Sia negativa la carica posta in $x_1 = -\frac{1}{2}d$.

Si procede esattamente come nel caso precedente.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{-Q}{\left(\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_2 = k \cdot \frac{Q}{\left(\left(x-\frac{1}{2}d\right)^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}d \\ y \end{pmatrix}.$$

Come nel caso precedente il campo elettrico totale lo si ottiene sommando i campi elettrici delle singole cariche. Il disegno a lato mostra la rappresentazione con le linee di campo.

Ancora una volta in un punto qualsiasi la somma dei due campi non porta ad ottenere delle particolari semplificazioni e pertanto basta scrivere che $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.



Anche nel caso del dipolo è interessante analizzare il valore dell'intensità del campo lungo gli assi.

Non è il caso di affrontare il calcolo nei dettagli come fatto per la situazione precedente. Si osservi solo che lungo l'asse x come pure lungo l'asse y per la simmetria della disposizione il vettore campo elettrico totale abbia la componente y pari a zero. L'intensità del campo e quindi pari alla sola componente x.

All'origine degli assi essa vale: $E = \dfrac{2 \cdot k \cdot Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2}$.

Da osservare che il campo è diretto dalla carica positiva a quella negativa e perciò il vettore campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot k \cdot Q}{\left(\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In un punto sull'asse x e per $x > \frac{1}{2}d$ l'intensità del campo vale:

$$E = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot d \cdot x}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \left(x-\frac{1}{2}d\right)^2}, \quad \text{da cui segue che } \vec{E} = \frac{2 \cdot k \cdot Q \cdot d \cdot x}{\left(x+\frac{1}{2}d\right)^2 \left(x-\frac{1}{2}d\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

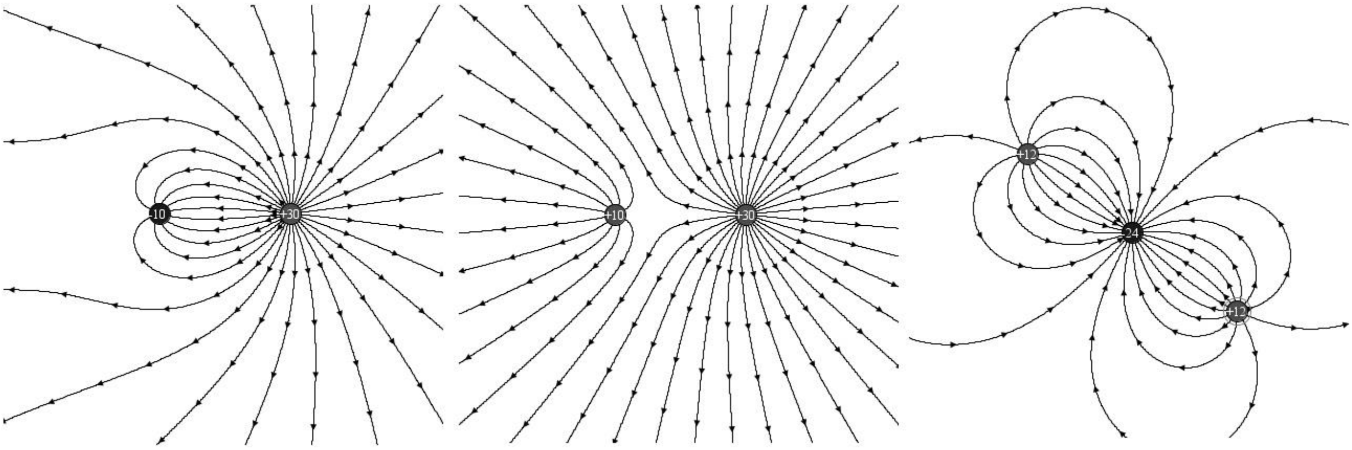
In un punto sull'asse y l'intensità del campo vale:

$E = \dfrac{k \cdot Q \cdot d}{\left(y^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, da cui segue che $\vec{E} = \dfrac{k \cdot Q \cdot d}{\left(y^2 + \left(\frac{1}{2}d\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un'ultima osservazione: l'intensità del campo elettrico lontano dal dipolo può essere approssimata in:

$E = \dfrac{2 \cdot k \cdot Q \cdot d}{x^3}$ lungo l'asse x, rispettivamente $E = \dfrac{k \cdot Q \cdot d}{y^3}$ lungo l'asse y.

Nelle immagini che seguono sono rappresentati dei campi elettrici per alcune distribuzioni di carica. Da notare che i valori scritti sulle cariche ne indicano il valore in unità arbitrarie.



Spesso la distribuzione delle cariche, sorgente del campo elettrico, viene considerata continua (la struttura "granulare" delle cariche elettriche porterebbe a calcoli comprendenti un numero enorme di particelle).

In questi casi si introducono opportune **densità di carica**.

Nel caso di un filo carico si definisce la **carica lineica** o carica per unità di lunghezza, indicata con il simbolo λ ($[\lambda] = \frac{C}{m}$) ; nel caso di un piano si ha la **carica areica** o carica per unità di superficie, indicata con σ ($[\sigma] = \frac{C}{m^2}$).

Fra i molti casi possibili, interessanti e relativamente facili da calcolare sono il campo elettrico generato da un filo rettilineo, infinito e omogeneamente carico e quello di una lastra piana infinita e omogeneamente carica.

Relativamente facili non significa alla portata di allievi di seconda liceo, in quanto la matematica necessaria è in programma in quarta. Riportiamo di seguito unicamente i risultati di questi calcoli.

Il campo elettrico generato da un filo rettilineo, infinito e omogeneamente carico è un campo perpendicolare al filo la cui intensità decresce con l'inverso della distanza. Per il modulo vale:

$E = \dfrac{2 \cdot k \cdot \lambda}{r}$ con r la distanza dal filo.

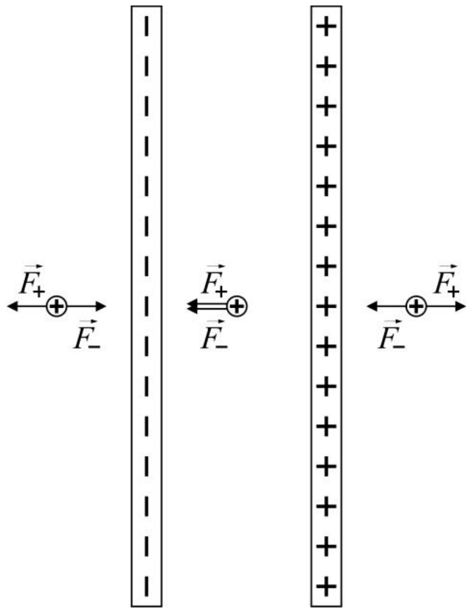
Il campo generato da una lastra piana infinita e omogeneamente carica è un campo perpendicolare alla piastra e costante in modulo che vale:

$E = 2\pi \cdot k \cdot \sigma$.

Quest'ultimo è un caso interessante perché un corpo elettricamente carico che si muove in un campo elettrico costante (un campo di questo tipo viene anche detto uniforme o omogeneo) è soggetto ad una forza costante (in modulo, direzione e verso). Il moto di questo corpo avrà la stessa cinematica di una massa che si muove in prossimità della superficie terrestre soggetta alla sola forza peso.

Essere confrontati con situazioni reali di fili infiniti o piastre infinite non è evidentemente possibile.

È possibile realizzare una situazione in cui i risultati ottenuti precedentemente sono applicabili con una grande approssimazione: è il caso del **condensatore piano**.

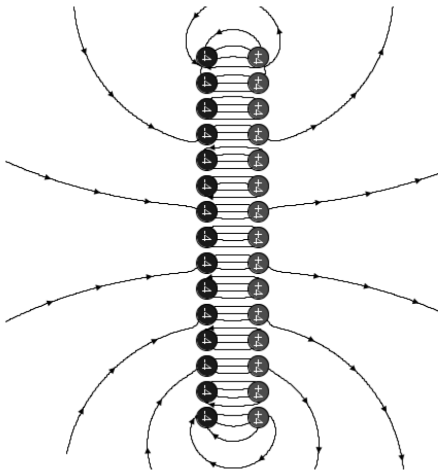


Un condensatore piano è formato da due piastre identiche, piane, finite, parallele fra di loro separate da una distanza solitamente molto più piccola delle dimensioni delle piastre e caricate con una quantità di carica uguale ma di segno opposto.

In un punto all'interno delle piastre o subito all'esterno il campo elettrico generato dalle due piastre prese singolarmente non si discosta molto da quello generato da piastre di dimensione infinita caricate con la stessa carica areica. Il campo totale lo si ottiene sommando i campi delle singole piastre. Il disegno accanto ci aiuta a visualizzare il verso del campo delle singole piastre e poi quello totale nei vari punti interessanti.

Come si può osservare all'esterno del condensatore i campi sono di uguale intensità, direzione ma verso opposto e quindi si annullano. All'interno i campi si sommano producendo un campo omogeneo di intensità pari al doppio del campo di ciascuna piastra, cioè:

$E_{\text{est}} = 0; \quad E_{\text{int}} = 4\pi \cdot k \cdot \sigma$.



Se ci si allontana dal condensatore o ci si pone ai bordi ci sono delle piccole differenze fra quanto calcolato e la situazione reale sia per quel che riguarda l'intensità del campo sia per la sua direzione.

L'immagine a lato è la simulazione di un "condensatore" formato da singole cariche allineate. Osservate che all'esterno il campo non è completamente nullo e la direzione è perpendicolare solo al centro. Il campo è quasi omogeneo solo all'interno del condensatore.

Alcune ultime osservazioni:

- Il campo elettrico all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico, le cui cariche cioè sono ferme, è nullo. In caso contrario le cariche libere per effetto del campo sarebbero accelerate e quindi non in equilibrio. Il raggiungimento dell'equilibrio è un fenomeno praticamente istantaneo.
- Se il conduttore è carico, le cariche si disporranno alla superficie dello stesso. Essendo il campo nullo, all'interno non vi sono linee di campo e quindi neppure cariche (sorgenti di linee di campo).
- Il campo elettrico sulla superficie di un conduttore (per es. un metallo) in equilibrio elettrostatico è sempre perpendicolare alla superficie stessa: se esistesse una componente non nulla tangenziale alla superficie, le cariche sarebbero accelerate e quindi non in equilibrio.

L'energia potenziale elettrica e il potenziale elettrico

La forza elettrica, come quella gravitazionale, è una forza conservativa (vi ricordo una forza è detta conservativa quando il suo lavoro non dipende dal percorso ma solo dai punti di partenza e di arrivo).

Vale pertanto la relazione:

$$\Delta E_{p,e} = -W\left(\vec{F}_e\right).$$

Si tratta ora di calcolare il lavoro nelle varie situazioni.

Iniziamo con il calcolare l'energia potenziale elettrica di una carica Q_0 dovuta ad una distribuzione di N cariche (la stessa situazione che abbiamo già incontrato all'inizio del capitolo).

Sia $\vec{F}_e = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + ... + \vec{F}_{N0}$.

Per un noto teorema, già incontrato nel capitolo "Lavoro e Energia", il lavoro della forza elettrica totale è pari alla somma del lavoro della forza elettrica delle singole cariche, cioè:

$$W\left(\vec{F}_e\right) = W\left(\vec{F}_{10}\right) + W\left(\vec{F}_{20}\right) + ... + W\left(\vec{F}_{N0}\right).$$

Si tratta ora di calcolare il lavoro della forza elettrica esercitata su Q_0 da ogni singola carica.

Siano A a B il punto di partenza rispettivamente quello di arrivo. Possiamo pertanto scrivere che, ad esempio per $\vec{F}_{10}$, il lavoro da A a B vale:

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{10}\right) = W_{A\to B}\left(k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_0}{r_{10}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{10}}{r_{10}}\right).$$

La forza elettrica dovuta ad una carica puntiforme, descrivibile dalla legge di Coulomb, è, come abbiamo visto, analoga a quella di gravità. Non è quindi più necessario ripetere il calcolo che avevamo già fatto nel capitolo dedicato all'energia potenziale gravitazionale a grandi distanze. È sufficiente riprendere i risultati e adeguarli alla situazione.

Il lavoro della forza di gravità della massa m_1 su una massa m_0, fatto lungo un percorso che porta m_0 da A a B, è calcolabile con la formula:

$$W_{A\to B} = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right),$$

dove $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ sono il vettore posizione relativo al punto di partenza A rispettivamente al punto di arrivo B della massa m_0, vettori che coincidono con il vettore che lega la massa m_1 con la massa m_0 al punto di partenza rispettivamente al punto di arrivo in quanto la massa m_1 è posta all'origine degli assi.

Genericamente, ponendo m_1 in un punto qualsiasi, la formula precedente va riscritta in questo modo:

$$W_{A\to B} = -G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right).$$

Per ottenere il lavoro della forza che la carica Q_1 esercita su Q_0 lungo un percorso che porta Q_0 da A a B si deve semplicemente sostituire G con k, m_1 con Q_1 e m_0 con Q_0, eliminare il segno "$-$" dovuto al fatto che la forza di gravità è sempre attrattiva mentre per la forza elettrica attrazione o repulsione sono associate al prodotto dei segni della cariche. Si avrà così:

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{10}\right) = k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right),$$ …da cui

$$\Delta E_{p,e10} = -W_{A\to B}\left(\vec{F}_{10}\right) = -k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}}\right) = k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \left(\frac{1}{r_{1B}} - \frac{1}{r_{1A}}\right).$$

Ancora una volta, con le stesse argomentazioni del caso gravitazionale, poniamo l'energia potenziale elettrica al valore di zero quando la distanza fra le cariche è pari all'infinito. A questo punto possiamo dire che l'energia potenziale elettrica della carica Q_0 posta in $\vec{r}_0$, dovuta alla carica Q_1 posta in $\vec{r}_1$ è calcolabile con:

$$E_{p,e10} = k \cdot Q_1 \cdot Q_0 \cdot \frac{1}{r_{10}}.$$

Dato che l'energia è una grandezza scalare, l'energia elettrica totale dovuta alle N cariche elettriche è semplicemente la somma delle energie dovute alle singole cariche.

Ed ora un qualche esempio.

- Determinare l'energia necessaria per portare tre cariche elettriche di valore $Q = 4,0\,\mu C$ da molto lontano tra di loro (in pratica a distanza infinita l'una dall'altra) sui vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 20\,cm$.

  Dato che l'energia iniziale è zero (le cariche sono all'infinito e sono supposte ferme), l'energia quando si troveranno nella posizione data corrisponde a quella che devo fornire per portarcele.

  Cominciamo con il portare la prima carica. In assenza di qualsiasi forza non occorre nessuna energia (si può diversamente pensare che una carica si trovi già al vertice del triangolo).

  Portiamo la seconda carica in posizione. L'energia necessaria è:

  $$E_{p,e12} = k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{r_{12}} = k \cdot \frac{Q^2}{l} = 9 \cdot 10^9 \,\tfrac{Nm^2}{C^2} \cdot \frac{\left(4,0 \cdot 10^{-6} C\right)^2}{0,20\,m} = 0,72\,J.$$

  Portiamo ora la terza carica in posizione. Evidentemente occorre tenere presente che ci sono già due cariche e perciò l'energia necessaria è la somma dell'energia elettrica dovuta sia alla prima che alla seconda. Data la simmetria del problema il valore è lo stesso di quello appena calcolato così che alla fine abbiamo:

  $$E_{p,e(1,2)3} = E_{p,e13} + E_{p,e23} = 2 \cdot E_{p,e12} = 2 \cdot 0,72\,J = 1,44\,J.$$

  L'energia totale è data dalla somma del primo risultato più il secondo cioè tre volte $0,72\,J$, vale e dire $2,16\,J$.

- Si considerino due corpi di massa $m_1 = m_2 = m = 2,5\,kg$, entrambi caricati con carica $Q = 4,0\,\mu C$. Il primo è fisso mentre il secondo, inizialmente fermo e ad una distanza $d = 20\,cm$ dal primo (indichiamo questo punto con A), è libero di muoversi su un piano senza attrito. Calcolare la velocità del secondo corpo quando dista dal primo $x = 50\,cm$ (B) e quando si trova a grande distanza (C) dal primo.

  Per risolvere il problema è sufficiente applicare la legge di conservazione dell'energia e cioè:

  $$E_{tot}(A) = E_{tot}(B) = E_{tot}(C).$$

  L'unica energia potenziale in gioco è quella elettrica e perciò:

  $$E_{cin}(A) + E_{p,e12}(A) = 0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{d} = E_{cin}(B) + E_{p,e12}(B) = \tfrac{1}{2} m \cdot v_B^2 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{x} =$$
  $$= E_{cin}(C) + E_{p,e12}(C) = \tfrac{1}{2} m \cdot v_C^2 + 0$$

  Risolvendo rispetto alla velocità sia la prima che la seconda uguaglianza si ottiene:

  $$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{m} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \,\tfrac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(4,0 \cdot 10^{-6} C\right)^2}{2,5\,kg}\left(\frac{1}{0,20\,m} - \frac{1}{0,50\,m}\right)} = 0,59\,\tfrac{m}{s}$$, rispettivamente

  $$v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot Q_1 \cdot Q_2}{m} \cdot \frac{1}{d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \,\tfrac{Nm^2}{C^2} \cdot \left(4,0 \cdot 10^{-6} C\right)^2}{2,5\,kg} \frac{1}{0,20\,m}} = 0,76\,\tfrac{m}{s}.$$

Interessante sarebbe aggiungere un piccolo attrito. Supponiamo che sia di tipo radente con coefficiente pari a $\mu = 0,05$. La prima domanda potrebbe essere la stessa cioè quanto vale la velocità del secondo corpo quando dista dal primo $x = 50\,cm$ (B). La seconda potrebbe invece diventare: fino a distanza dal primo si allontana il secondo corpo?

La lagge sull'energia diventa allora:

$E_{tot}(B) - E_{tot}(A) = W_{A\to B}(\vec{F}_A)$ per la prima domanda, rispettivamente:

$E_{tot}(C) - E_{tot}(A) = W_{A\to C}(\vec{F}_A)$ per la seconda.

La prima uguaglianza diventa:

$$\left(\tfrac{1}{2} m \cdot v_B^2 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{x}\right) - \left(0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{d}\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (x - d),$$

che risolta rispetto alla velocità porta a $v_B = 0,48\,\tfrac{m}{s}$.

La seconda diventa:

$$\left(0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{x_{\text{max}}}\right) - \left(0 + k \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \frac{1}{d}\right) = -\mu \cdot m \cdot g \cdot (x_{\text{max}} - d),$$

che risolta rispetto a x_{max} porta a due soluzioni, la prima $x_{\text{max}} = 0,20\,m$ corrisponde al punto di partenza, mentre la seconda, che è quella che ci interessa, da $x_{\text{max}} = 1,47\,m$.

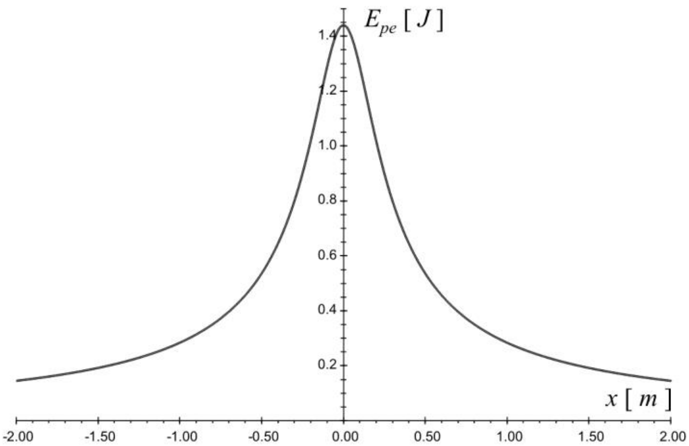
- Ed ora un esempio un po' più complesso. Consideriamo un sistema composto da due cariche positive di valore $Q = 4,0\,\mu C$ fissate su un piano alla distanza $d = 40\,cm$ una dall'altra e un corpo di massa $m = 250\,g$ e di carica pure $Q = 4,0\,\mu C$ libero di muoversi unicamente lungo l'asse del segmento che unisce le cariche. Per chiarire meglio la situazione poniamo le due cariche fisse sull'asse y in $y_1 = -0,20\,m$ e $y_2 = +0,20\,m$. La terza carica potrà allora muoversi solo sull'asse x. Da determinare è l'energia potenziale elettrica della terza carica rispetto alle altre due e la velocità minima che deve avere quando si trova infinitamente lontana a sinistra per riuscire a superare il punto $x = 0$ per poi allontanarsi verso destra.

  Come abbiamo già avuto modo di costatare l'energia potenziale dipende in maniera inversamente proporzionale alla distanza. Essendo l'asse x anche l'asse del segmento che unisce le cariche, la carica libera di muoversi sarà sempre equidistante dalle due cariche fisse e questa distanza vale:

  $$r = \sqrt{x^2 + y_1^2} = \sqrt{x^2 + y_2^2} = \sqrt{x^2 + \left(\tfrac{d}{2}\right)^2}.$$

  L'energia potenziale elettrica totale vale pertanto:

  $$E_{p,e} = 2 \cdot k \cdot Q \cdot Q \cdot \frac{1}{r} = 2 \cdot k \cdot Q \cdot Q \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(\tfrac{d}{2}\right)^2}}.$$

  Qui a lato una rappresentazione grafica.

  Per quel che riguarda la seconda domanda basta porre una uguaglianza fra l'energia al punto di partenza e quella in $x = 0$ dove la velocità viene posta pari a zero.

  $$\tfrac{1}{2} m \cdot v^2 + 0 = 0 + 2 \cdot k \cdot Q \cdot Q \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\tfrac{d}{2}\right)^2}},$$ da cui: $v = 3,39\,\tfrac{m}{s}$.

Passiamo ora alla definizione di potenziale elettrico.

Per meglio comprenderne il significato cominciamo con il caso gravitazionale.

Se si sposta una massa m_0, ad esempio verso l'alto, la sua energia potenziale gravitazionale varia (in questo caso aumenta) di una quantità pari a:

$$\Delta E_{p,g} = -W\left(\vec{F}_g\right).$$

È possibile definire la **variazione di potenziale gravitazionale** e indicarla con ΔU_g quale nuova grandezza fisica determinabile la variazione dell'energia potenziale gravitazionale per unità di massa, vale a dire:

$$\Delta U_g = \frac{\Delta E_{p,g}}{m_0}.$$

Questa nuova grandezza dipende dalla massa (o dalle masse) che genera il campo gravitazionale ma non dalla massa m_0 che viene spostata. La sua unità di misura è il $\frac{J}{kg}$.

Parimenti può essere definita la **variazione di potenziale elettrico** e indicata con ΔU_e la variazione dell'energia potenziale elettrica per unità di carica, cioè:

$$\Delta U_e = \frac{\Delta E_{p,e}}{q_0}.$$

Questa nuova grandezza dipende dalla carica (o dalle cariche) che genera il campo elettrico ma non dalla carica q_0 che viene spostata. La sua unità di misura è il $\frac{J}{C} = V$ dove V sta per volt.

Determinare la variazione di potenziale elettrico a partire dal campo elettrico a cui è associato è facile nella misura in cui risulta facile calcolare la variazione dell'energia potenziale a sua volta associata al calcolo di un lavoro.

Spesso risulta molto più facile misurarlo. Per farlo basta collegare ad uno strumento chiamato voltometro i due punti interssati e leggerne il valore.

Ad esempio, supponiamo di avere un elettrone (massa dell'elettrone pari a $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg$ e carica pari alla carica elementare $q_e = -1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$) che si muove nel vuoto a velocità termica $v_0 \cong 0$. Esso passa da un punto A ad un punto B fra i quali è presente una differenza di potenziale pari a $\Delta U_e = 3{,}0\,kV$. Calcolare la velocità dell'elettrone in B. Dal teorema di conservazione dell'energia possiamo affermare che la variazione dell'energia totale deve essere pari a zero, vale a dire:

$\Delta E_e + \Delta E_{cin} = 0$, cioè: $q_e \cdot \Delta U_e + \left(\frac{1}{2} m\cdot v^2 - 0\right) = 0$ vale a dire: $\frac{1}{2} m\cdot v^2 = -q_e \cdot \Delta U_e$ da cui

$$v = \sqrt{-\frac{2\cdot q_0 \cdot \Delta U_e}{m_e}} = \sqrt{-\frac{2\cdot\left(-1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\right)\cdot 3{,}0\cdot 10^{3}\,V}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg}} = 3{,}25\cdot 10^{7}\,\tfrac{m}{s}.$$

Se in questo esempio la differenza di potenziale è generata da un condensatore a lastre piane e parallele, all'interno delle quali il campo può essere considerato omogeneo, allora diventa facile calcolare il valore del campo, infatti:

$\Delta E_e = -W\left(F_e\right) = -F_e \cdot \Delta x = -q_0 \cdot E \cdot \Delta x$, da cui

$$E = \frac{\Delta E_e}{-q_0 \cdot \Delta x} = -\frac{\Delta E_e}{q_0}\cdot\frac{1}{\Delta x} = -\frac{\Delta U_e}{\Delta x} = -\frac{3{,}0\,kV}{2{,}0\,cm} = -1{,}5\,\tfrac{kV}{cm} = -1{,}5\cdot 10^{5}\,\tfrac{V}{m}$$

Il segno "$-$" sta a indicare che il punto A si trova sulla piastra caricata negativamente mentre il punto B si trova sull'altra e che l'elettrone si muove rispinto dalle cariche negative della prima piastra e attratto da quelle positive della seconda piastra. Si presti grande attenzione a non confondere il simbolo E riferito al campo elettrico col lo stesso simbolo che rappresenta l'energia. Solitamente per evitare qualsiasi pericolo di confusione si usa la notazione vettoriale per il campo elettrico.

Dato che abbiamo considerato il campo omogeneo possiamo continuare con questa approssimazione e calcolare la distribuzione di carica sulle piastre (sempre nella approssimazione che sia omogenea). Dato che fra due piastre il campo si calcola con $E = 4\pi \cdot k \cdot \sigma$ ne segue che:

$$\sigma = \frac{|E|}{4\pi \cdot k} = \frac{1,5 \cdot 10^5 \, \frac{V}{m}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}} = 1,3 \frac{\mu C}{m^2} .$$

Alcune ultime considerazioni.

- Di solito nella fisica delle particelle elementari ed in fisica nucleare si usa esprimere l'energia in eV (elettronvolt). L'energia di $1eV$ corrisponde alla variazione d'energia potenziale elettrica di una carica elementare (indicata di solito con e o q_e) che viene spostata fra due punti dello spazio con differenza di potenziale elettrico di $1V$.

  Nel SI $1eV$ corrisponde a $1,602 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 1V = 1,602 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 1\frac{J}{C} = 1,602 \cdot 10^{-19}\, J$.
- Se si considera la superficie di un metallo nel caso elettrostatico (quindi con cariche ferme), si osserva che il potenziale su di essa è costante: infatti il lavoro della forza elettrica (che corrisponde alla variazione dell'energia potenziale elettrica, a meno del segno) da sempre valore nullo per ogni spostamento lungo la superficie metallica, essendo nulla la componente tangenziale del campo elettrico (e quindi della forza). Si dice che la superficie è equipotenziale.

Le correnti elettriche

In questo capitolo ci occuperemo di aspetti più “pratici” riguardanti l’elettricità.

Parleremo di corrente elettrica, circuiti, potenza elettrica, tensione, …, insomma di tutto quello che serve per comprendere che cosa succede quando colleghiamo la spina della lampada del nostro comodino, di una stufetta elettrica e in generale di un consumatore qualsiasi alla presa di corrente.

Circuiti a corrente continua

In linea di principio, collegando tramite un conduttore due corpi che si trovano in una differenza di potenziale elettrico, ad esempio due corpi metallici uno carico positivamente e l’altro carico negativamente, si assiste alla migrazione di cariche elettriche da un corpo all’altro fino a che la differenza di potenziale si annulla.

La quantità di carica elettrica che scorre nel conduttore nell’unità del tempo viene chiamata **corrente elettrica** e viene definita da:

$$I = \frac{Q}{\Delta t}.$$

L’unità di misura della corrente elettrica è pertanto:

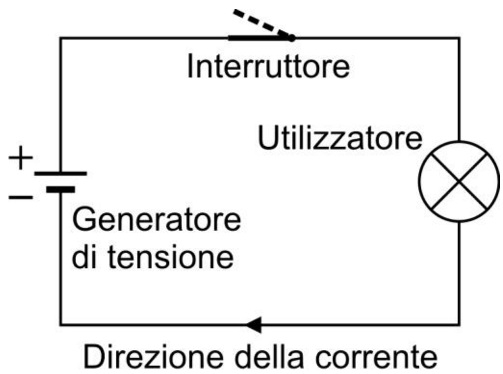
$[I] = \frac{[Q]}{[\Delta t]} = \frac{C}{s} = A$, dove A sta per ampère.

Generalmente, nella situazione descritta all’inizio, il tempo necessario per portare i due corpi allo stesso potenziale elettrico è relativamente piccolo e una volta terminato il processo non succede più niente.

Nelle situazioni di cui vogliamo occuparci la differenza di potenziale viene solitamente mantenuta costante e si assiste ad un flusso continuo di cariche (corrente).

Per realizzare questo tipo di situazione occorre costruire un **circuito elettrico** composto da:

- un **generatore di tensione**, cioè un apparato in grado di mantenere costante la differenza di potenziale (ad esempio una pila (batteria)),
- un **utilizzatore** attraverso il quale far passare la corrente (ad esempio una lampadina),
- eventuali cavi di collegamento per unire i vari elementi del nostro circuito,
- un **interruttore** per aprire e chiudere il circuito.



Nel disegno a lato la schematizzazione del circuito elettrico.

Per convenzione il verso della corrente elettrica coincide con quello in cui si muovono le cariche positive, la corrente elettrica scorre cioè dal polo positivo del generatore di tensione a quello negativo. Nei conduttori allo stato solido (sarà praticamente sempre con questo tipo conduttori che avremo a che fare) le cariche positive non si muovono. Gli unici portatori di carica a muoversi sono gli elettroni. Essi si muoveranno in senso opposto a quello convenzionale della corrente.

Quando una corrente elettrica passa attraverso un consumatore, le cariche elettriche passano da un potenziale elettrico alto verso un potenziale elettrico basso (se il consumatore è collegato direttamente al generatore di tensione, la **caduta di tensione** ai capi del consumatore (indicata solitamente con U) è pari alla differenza di potenziale dovuta al generatore). La differenza di energia potenziale di tutte le cariche che passano attraverso il consumatore nell’unità del tempo corrisponde all'energia che il consumatore trasforma nell'unità del tempo da elettrica in energia di tipo diverso che dipende dal tipo di consumatore (ad esempio una lampadina trasforma l'energia elettrica in energia termica che riscalda il filamento della lampadina fino a farlo diventare incandescente, un motore trasforma energia elettrica in energia meccanica).

Si definisce potenza elettrica di un consumatore il prodotto fra la caduta di tensione ai sui capi e la corrente elettrica che lo attraversa infatti:

$$P=\frac{\Delta E_{p,e}}{\Delta t}=\frac{Q\cdot\Delta U_e}{\Delta t}=\frac{Q}{\Delta t}\cdot\Delta U_e=I\cdot U\ .$$

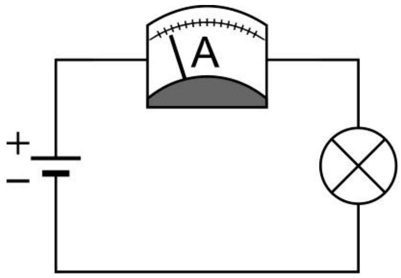
Verifichiamo le unità di misura della formula:

$$\left[I\cdot U\right]=A\cdot V=\frac{\cancel{C}}{s}\cdot\frac{J}{\cancel{C}}=\frac{J}{s}=W\ ,$$ che corrisponde all'unità di misura della potenza.

Per esempio consideriamo una lampadina del faro di un'automobile di potenza $P=48W$. Essa è collegata alla batteria dell'auto ai cui poli si misura una differenza di potenziale di $12V$. Nella lampadina scorre una corrente di:

$$I=\frac{P}{U}=\frac{48W}{12V}=4,0\,A.$$

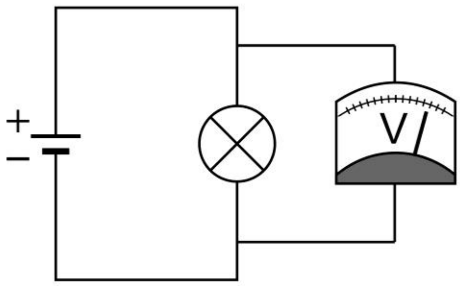
La misura di corrente e di tensione



Per misurare le due grandezze fondamentali, vale a dire corrente e tensione, si utilizzano: l'**amperometro** per la corrente e il **voltometro** (o voltmetro) per la tensione.

L'amperometro va sempre sistemato in serie con l'utilizzatore, vale a dire uno dopo l'altro, mentre il voltometro deve essere sempre posto in parallelo all'utilizzatore.

Il disegno a lato mostra come disporre i due strumenti.



Generalmente si ha a disposizione uno strumento chiamato multimetro in grado di fungere sia da amperometro che da voltometro. Occorre solo fare attenzione a come viene collegato al circuito.

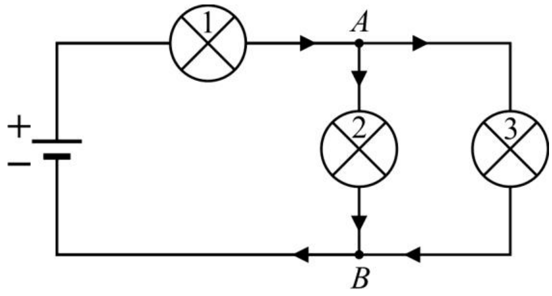
Solitamente si assume che gli strumenti di misura non influenzino il circuito. Essi sono considerati con strumenti ideali. Analizzeremo in seguito situazioni in cui occorre tenere in considerazione la presenza dello strumento.

Le leggi di Kirchhoff

Le situazioni incontrate finora sono così semplici e così evidenti che è stato dato per scontato che la corrente elettrica che scorre nel filo è la stessa che passa nell'utilizzatore come pure è sempre la stessa che nel generatore di differenza di potenziale porta le cariche da un polo all'altro. È pure evidente che la differenza di potenziale del generatore è la stessa, a meno del segno, che si misura ai capi dell'utilizzatore (i fili sono al momento considerati ideali e servono solo a collegare i vari elementi del circuito senza che lunghezza o sezione influiscano sul circuito). Se si collega il voltometro ai poli del generatore in modo che segni un valore positivo e poi si collegano i capi dell'utilizzatore seguendo il verso della corrente, cioè facendo in modo che il filo del voltometro che prima era collegato al polo "$-$" della batteria sia collegato prima dell'utilizzatore e quello al polo "$+$" dopo, si leggerà una differenza di potenziale negativa, una caduta di potenziale. Spesso si preferisce invertire il collegamento in modo da leggere in positivo la caduta di potenziale.

In situazioni appena un po' più complesse, ad esempio con più utilizzatori (vedi disegno), occorre conoscere cosa capita alla corrente quando incontra un nodo (punto di biforcazione) e quanto vale la caduta di tensione su ciascun utilizzatore.

Nella situazione schematizzata a lato vogliamo conoscere come si ripartisce la corrente che, dal generatore di tensione, attraverso il primo utilizzatore, passa attraverso l'utilizzatore no 2 e no 3, che cosa capita cioè al nodo A.



Analogamente dobbiamo conoscere la caduta di tensione ai capi dei tre utilizzatori.

Per la legge di conservazione della carica, la corrente elettrica che arriva dall'utilizzatore no 1, indicata con I_1, deve essere pari alla somma delle correnti che vanno verso l'utilizzatore no 2 (I_2) e no 3 (I_3). Possiamo pertanto scrivere:

$I_1 = I_2 + I_3$.

Questa relazione, nota come il **primo principio di Kirchhoff** o **legge dei nodi**, può essere generalizzata in:

$I_{e1} + I_{e2} + ... + I_{eN} = I_{u1} + I_{u2} + ... + I_{uN}$,

dove l'indice "e" sta a indicare corrente entrante e l'indice "u" corrente uscente. In parole si può dire che la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.

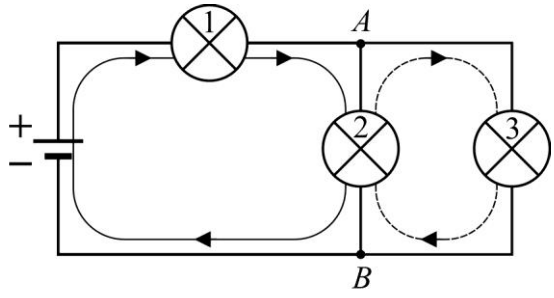
Scegliendo un senso di percorrenza e attribuendo un segno negativo alle correnti che si muovono in senso contrario, si può scrivere la legge dei nodi in questo modo:

$I_1 + I_2 + ... + I_N = 0$.

Che cosa si può dire ora delle cadute di tensione?

Anche in questo caso prendiamo come esempio il circuito precedente. La forza elettrica, responsabile dei fenomeni che stiamo analizzando, è, come abbiamo già verificato, una forza conservativa. La variazione di energia potenziale seguendo un percorso che si richiude su sé stesso, vale a dire seguendo un percorso che da un punto ritorna al punto stesso, vale zero. Questo discorso vale evidentemente anche per il potenziale.

Se come percorso chiuso prendiamo ad esempio quello indicato con una linea piena possiamo dire che, dato che la somma di tutte le differenze di potenziale deve dare zero, la differenza di potenziale del generatore (generalmente indicato con U_0) è pari alla somma delle cadute di tensione ai consumatori no 1 e no 2, cioè:



$U_0 = U_1 + U_2$.

Dato che le cadute di potenziale hanno lo stesso valore ma segno opposto rispetto alle differenze di potenziale la relazione appena scritta, che prende il nome di **secondo principio di Kirchhoff** o **legge delle maglie**, può essere generalizzata e scritta nella forma:

$\Delta U_1 + \Delta U_2 + ... + \Delta U_N = 0$.

Risulta chiaro che, prendendo in considerazione la seconda maglia del circuito, quella rappresentata dalla linea tratteggiata, la differenza di potenziale (ed evidentemente anche la caduta di potenziale) ai capi dell'utilizzatore no 2 e no 3 è la stessa se si va da A a B, ma risulta opposta ai capi dell'utilizzatore no 2 seguendo il percorso della maglia. Faremo degli esempi numerici appena saremo in grado di determinare come i singoli utilizzatori influenzano il circuito.

Le Leggi di Ohm

Costruiamo un semplice circuito formato da un generatore di differenza di potenziale (ddp) e da un consumatore (ad esempio una lampadina). Prendiamo ad esempio la lampadina del faro dell'automobile già incontrata nel paragrafo 8.1.1, collegata allo stesso generatore di ddp, la batteria a $12,0V$. Come abbiamo già avuto modo di calcolare e verificare, quando la lampadina è collegata alla batteria in essa scorre una corrente di $4,00\,A$. Se alla stessa batteria colleghiamo una lampadina di minore potenza (ad esempio una lampadina da $6,0W$ di una luce interna dell'auto) si osserva e si può calcolare che la corrente che scorre in essa diventa:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{6,0W}{12V} = 0,50\,A.$$

Domanda: per quale motivo collegando alla stessa ddp due lampadine diverse la corrente in esse è diversa? quale caratteristica delle due lampadine cambia?

Che cosa, in altre parole, governa il passaggio della corrente?

La grandezza fisica che definisce con che facilità e meno un consumatore (in questo caso il filamento della lampadina) lascia passare la corrente prende il nome di **resistenza elettrica**, è indicata con il simbolo R, ed è definita dalla relazione:

$$R = \frac{U}{I}.$$

L'unità di misura della resistenza:

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega,$$ dove Ω sta per ohm.

In altre parole, se collegando ad un generatore di ddp di $1V$ un consumatore, in esso scorre una corrente di $1A$, allora la sua resistenza elettrica è di 1Ω.

Che cosa succede se colleghiamo la solita nostra lampadina ad un generatore di ddp con tensione diversa?

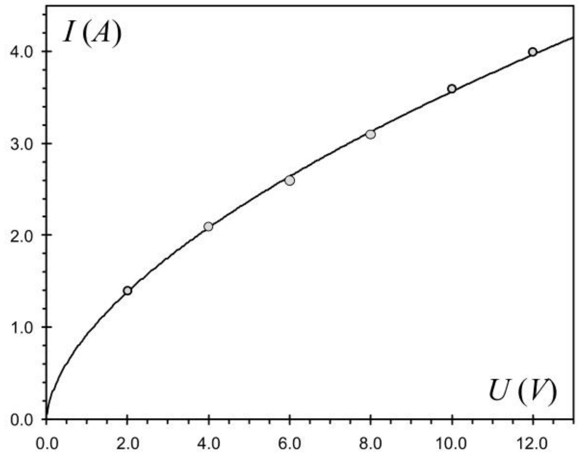
In primo luogo occorre fare attenzione a non collegare la lampadina ad una tensione maggiore altrimenti "brucia".

$U(V)$	$I(A)$	$R(\Omega)$
2,0	1,4	1,4
4,0	2,1	1,9
6,0	2,6	2,3
8,0	3,1	2,6
10,0	3,6	2,8
12,0	4,0	3,0

Al nostro scopo possiamo perciò prendere un generatore di ddp variabile e collegare la lampadina al generatore variando la tensione da $2,0V$ fino a $12,0V$ a passi di $2,0V$.

La tabella a lato mostra le misure di tensione e corrente (colonna 1 e colonna 2) e il valore calcolato della resistenza (colonna 3). Si può subito notare che la resistenza della lampadina cambia al cambiare dei valori di tensione e corrente. Questo potrebbe significare che o non è possibile stabilire una relazione fra corrente e tensione oppure che questa è di difficile da determinare.

Se si rappresenta la corrente in funzione della ddp si ottiene il grafico riprodotto alla pagina seguente.



Il grafico così ottenuto rappresenta la curva caratteristica del consumatore con cui si ha a che fare.

Una curva come quella rappresentata non è di facile interpretazione, così come il fatto che la resistenza cambia al cambiare dei valori di tensione e corrente non ci facilita il compito.

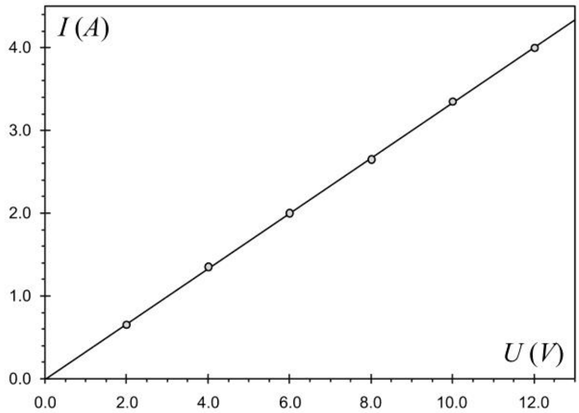
Che cosa cambia nella lampadina al cambiare della tensione oltre a corrente e resistenza?

In primo luogo osserviamo che quando la tensione è molto bassa la lampadina non fa luce. Poi man mano che aumentiamo la tensione il filamento inizia a diventare incandescente e il suo colore passa da un rosso cupo fino ad un bianco brillante. Il colore del filamento è un indice della sua temperatura. Il variare della temperatura significa avere a che fare con un nuovo parametro che cambia, parametro tra l'altro che non siamo in grado di misurare.

Meglio sarebbe poter vedere che relazione esiste fra corrente e tensione in un conduttore a temperatura costante.

A questo scopo prendiamo un **resistore**, vale a dire un conduttore la cui temperatura cambia poco al variare della corrente o la cui resistenza cambia poco o nulla al cambiare della temperatura, e rifacciamo la stessa esperienza fatta con la lampadina.

$U(V)$	$I(A)$
2,0	0,65
4,0	1,35
6,0	2,0
8,0	2,65
10,0	3,35
12,0	4,0



La tabella a lato mostra i risultati che sono stati ottenuti e in seguito utilizzati per costruire il relativo grafico. Si può subito osservare che esiste una relazione di proporzionalità diretta tra la tensione e la corrente.

Possiamo pertanto scrivere:

$I \propto U$.

Dato che abbiamo definito la resistenza elettrica come il rapporto fra la tensione e la corrente, il fattore di proporzionalità fra la tensione e la corrente è pari all'inverso della resistenza elettrica cioè:

$I = \frac{1}{R} \cdot U$, solitamente scritta nella forma: $U = R \cdot I$.

Questa relazione è conosciuta come la **prima legge di Ohm**. Conduttori che seguono questa legge vengo appunto detti resistori o conduttori ohmici.

La potenza elettrica assorbita da un consumatore abbiamo visto che vale:

$P = I \cdot U$.

Se il consumatore è un resistore si può scrivere:

$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$.

Nel caso del resistore usato per la nostra esperienza si può dire che la sua resistenza vale $R = 3,0\,\Omega$. Se lo colleghiamo ad una ddp di $6,0V$ in esso scorre una corrente di:

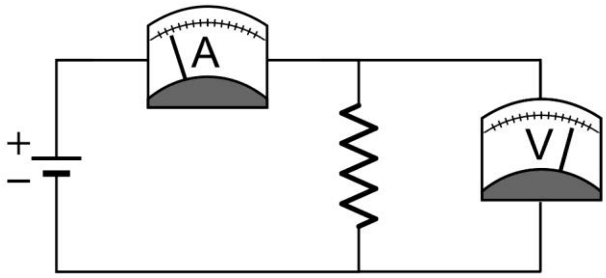
$I = \frac{6,0V}{3,0\Omega} = 2,0\,A$.

La potenza elettrica assorbita dal resistore vale perciò:

$$P = 3,0\Omega \cdot (2,0\,A)^2 = \frac{(6,0\,V)^2}{3,0\Omega} = 12,0\,W\ .$$

La misura della resistenza passa pertanto attraverso la misura di tensione e corrente.

Lo schema è quello del disegno a lato. Ancora una volta si ammetta che i due strumenti di misura non abbiano alcuna influenza sul circuito e che i fili che collegano i vari elementi del circuito non abbiano resistenza elettrica o che sia trascurabile rispetto alla resistenza elettrica del resistore.



Come si può osservare nel disegno, se il consumatore è un resistore si usa una simbologia diversa.

Solitamente la misura di una resistenza elettrica di un resistore viene effettuata direttamente con uno strumento chiamato **ohmetro**.

Se un resistore è costituito da un filo di lunghezza l, sezione A e fatto da un certo materiale conduttore, ci si deve porre la domanda: come questi parametri influenzano la resistenza del filo?

Per rispondere a questa domanda è sufficiente misurare la resistenza di fili in cui di volta in volta si cambia la lunghezza, la sezione, e il materiale che compone il filo.

In laboratorio abbiamo a disposizione dei fili di costantana di diversa lunghezza e sezione che servono allo scopo. Le seguenti tabelle riportano i risultati di due serie di misure, la prima cambiando la lunghezza e la seconda cambiando la sezione.

$d = 0,7\,mm$	
$l(m)$	$R(\Omega)$
0,50	0,64
1,00	1,27
1,50	1,91
2,00	2,55

$l = 2,00\,m$		
$d(mm)$	$A(mm^2)$	$R(\Omega)$
0,35	0,096	10,2
0,5	0,20	4,99
0,7	0,38	2,55
1,0	0,79	1,25

Come si può facilmente osservare e come era facile prevedere la resistenza aumenta con l'aumentare della lunghezza e diminuisce con l'aumentare della sezione. Una analisi un pochino più approfondita mostra che esiste una relazione di proporzionalità diretta con la lunghezza e di proporzionalità inversa con l'area della sezione, vale a dire:

$R \propto l$ e $R \propto \frac{1}{A}$.

Il fattore di proporzionalità è una caratteristica che dipende dal materiale e prende il nome di resistività (elettrica) e ha come simbolo ρ (la lettera greca rho).

La resistenza di un filo conduttore di lunghezza l, sezione A è determinabile con la seguente relazione:

$R = \rho \frac{l}{A}$, che prende il nome di **seconda legge di Ohm**.

Da entrambe le tabelle si può ricavare che il valore di resistività della costantana vale:

$\rho = 0,49 \cdot 10^{-6}\,\Omega m$.

Ripetendo le misurazioni con fili conduttori composti da altri materiali si ottengono evidentemente valori diversi di resistività. La tabella alla pagina seguente fornisce il valore della resistività di alcuni materiali (in particolare metalli). Dato che questo valore cambia al cambiare della temperatura è importante indicare il valore di quest'ultima.

Nel nostro caso i valori sono stati misurati a $20°C$.

Materiale	$\rho(\Omega m)$
Argento	$1{,}62\cdot10^{-8}$
Rame	$1{,}68\cdot10^{-8}$
Alluminio	$2{,}75\cdot10^{-8}$

Materiale	$\rho(\Omega m)$
Tungsteno	$5{,}25\cdot10^{-8}$
Ferro	$9{,}68\cdot10^{-8}$
Platino	$10{,}6\cdot10^{-8}$

Materiale	$\rho(\Omega m)$
Acciaio	$2\cdot10^{-7}$
Costantana	$4{,}9\cdot10^{-7}$
Carbonio	$3{,}6\cdot10^{-5}$

Come abbiamo già avuto modo di costatare (in particolare quando abbiamo sperimentato con la lampadina), la resistenza elettrica e di conseguenza anche la resistività varia al variare della temperatura.

Per molti materiali (in particolare per quelli a cui fa riferimento la tabella precedente) l'andamento della variazione della resistività al variare della temperatura è lineare. È quindi giustificabile una relazione del tipo:

$\rho(\vartheta)-\rho_0=\rho_0\cdot\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)$, dove con ρ_0 si intende la resistività alla temperatura ϑ_0 e con α il coefficiente di temperatura associato ad ogni materiale. Scritta in altri termini la relazione diventa:

$\rho(\vartheta)=\rho_0\left(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)\right)$.

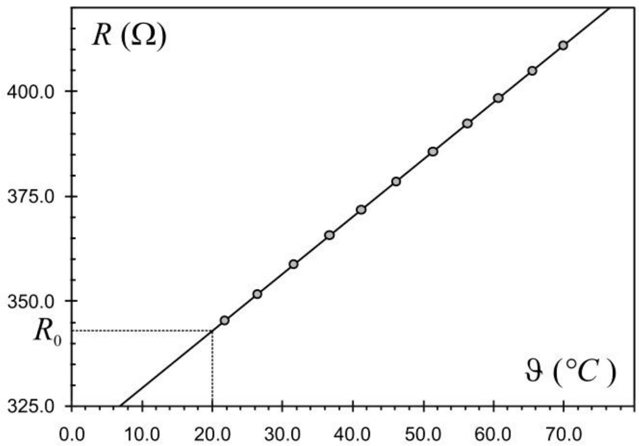
Data la seconda legge di Ohm, che in un filo conduttore mette in relazione la resistività, la lunghezza e l'area della sezione, la relazione fra resistenza e temperatura vale:

$R(\vartheta)=R_0\left(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)\right)$, dove con R_0 si intende la resistenza alla temperatura ϑ_0.

$\vartheta(°C)$	$R(\Omega)$
21,8	345,5
26,4	351,8
31,6	358,9
36,7	365,8
41,2	371,9
46,2	378,7
51,4	385,8
56,3	392,6
60,7	398,6
65,5	405,1
69,9	411,2

Tutto questo è facilmente verificabile con la seguente esperienza. Misuriamo la resistenza di un lungo e sottile filo di rame ($l=40{,}0\,m$ e $d=0{,}05\,mm$) dalla temperatura ambiente fino a circa $70°C$ a passi di circa $5°C$.

La tabella a lato e il relativo grafico mostrano le misure effettuate da un gruppo di studenti della Supsi.



È possibile ricavare il valore di R_0 con il calcolo o semplicemente leggendolo sul grafico:

$R_0=343{,}0\,\Omega$.

Note lunghezza e area della sezione si può calcolare la resistività:

$$\rho_0=R_0\cdot\frac{A}{l}=343{,}0\,\Omega\cdot\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\cdot0{,}05\cdot10^{-3}\,m\right)^2}{40{,}0\,m}=1{,}68\cdot10^{-8}\,\Omega m.$$

Facilmente determinabile è pure il valore della pendenza dal quale è possibile calcolare il coefficiente α.

$$\left.\begin{array}{l}\text{pendenza}=\dfrac{\Delta R}{\Delta\vartheta}=1{,}36\,\frac{\Omega}{°C}\\ \text{pendenza}=R_0\cdot\alpha\end{array}\right\},\quad\text{da cui}\quad\alpha=\frac{\text{pendenza}}{R_0}=\frac{1{,}36\,\frac{\Omega}{°C}}{343{,}0\,\Omega}=3{,}9\cdot10^{-3}\,\frac{1}{°C}$$

La tabella seguente fornisce il valore del coefficiente di temperatura di alcuni materiali (quasi tutti quelli della tabella precedente).

Anche in questo caso i valori si riferiscono a $20°C$.

Materiale	$\alpha\left(\frac{1}{°C}\right)$
Argento	$3{,}8\cdot 10^{-3}$
Rame	$3{,}9\cdot 10^{-3}$
Alluminio	$4\cdot 10^{-3}$

Materiale	$\alpha\left(\frac{1}{°C}\right)$
Tungsteno	$4{,}5\cdot 10^{-3}$
Ferro	$5\cdot 10^{-3}$
Platino	$4\cdot 10^{-3}$

Materiale	$\alpha\left(\frac{1}{°C}\right)$
Nichelcromo	$0{,}05\cdot 10^{-3}$
Costantana	$0{,}008\cdot 10^{-3}$
Carbonio	$-0{,}5\cdot 10^{-3}$

Si osservi subito la “perfetta” corrispondenza del valore sperimentale del rame sia per quel che riguarda il valore della resistività che per quella del coefficiente di temperatura.

Si noti il basso valore del coefficiente α della costantana (il nome costantana deriva proprio dal fatto che la resistività di questo materiale è praticamente costante al variare della temperatura). E da ultimo il valore negativo del coefficiente α del carbonio. La resistività del carbonio diminuisce al crescere della temperatura.

Riprendiamo in considerazione una delle due lampadine incontrate in precedenza, ad esempio quella da $6{,}0W$ (si tenga presente che quando si parla di una lampadina da $6{,}0W$ si intende un consumatore che assorbe $6{,}0W$ di potenza solo se collegato ad una ddp per la quale è stato costruito). Come già misurato e calcolato, in condizioni di utilizzo normale nella lampadina passano $0{,}50\,A$ di corrente per cui possiamo calcolarci immediatamente il valore della resistenza del filamento quando la lampadina è accesa:

$$R=\frac{U}{I}=\frac{12{,}0V}{0{,}50\,A}=24{,}0\,\Omega.$$

Collegando la lampadina direttamente all’ohmetro si può leggere la resistenza del filamento quando esso si trova alla temperatura ambiente (di solito molto vicina a $20°C$) che chiamiamo R_0 e vale $1{,}8\,\Omega$.

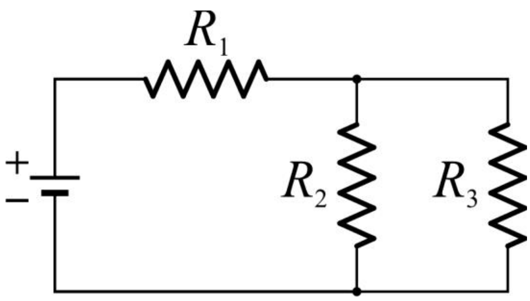
Sappiamo che il filamento è fatto di tungsteno e perciò abbiamo tutti i dati per calcolarci la temperatura quando è incandescente. Risolvendo infatti rispetto alla temperatura la relazione $R(\vartheta)=R_0\left(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0)\right)$ otteniamo:

$$\vartheta=\vartheta_0+\frac{R-R_0}{\alpha\cdot R_0}=20°C+\frac{24{,}0\,\Omega-1{,}8\,\Omega}{4{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{°C}\cdot 1{,}8\,\Omega}=2760°C.$$

La temperatura tipica di un filamento incandescente è $2800°C$ in buon accordo con il valore trovato.

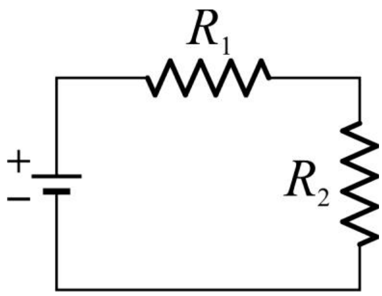
Resistenze in serie e in parallelo

A questo punto siamo in grado di analizzare nel dettaglio un circuito come quello di pagina 21 quando i consumatori sono dei resistori.



Conosciuta la differenza di potenziale U_0 ai capi della batteria (ddp) e noti i valori delle tre resistenze si chiede di calcolare la caduta di potenziale ai capi di ciascuna resistenza e la corrente che attraversa ciascuna resistenza.

Per meglio comprendere come affrontare il problema conviene semplificarlo, cominciando con due sole resistenze disposte in un caso una dopo l'altra e nell'altro una accanto all'altra.



Cominciamo con un circuito con due resistenze una dopo l'altra, cioè con due resistenze **in serie**.

Chiamiamo U_1 la caduta di potenziale sulla resistenza R_1 e U_2 quella su R_2. Per la legge delle maglie vale la seguente relazione:

$$U_0 = U_1 + U_2 .$$

La legge di Ohm afferma d'altro canto che:

$$U_1 = R_1 \cdot I \quad \text{e} \quad U_2 = R_2 \cdot I .$$

Evidentemente la corrente I è la stessa nelle due resistenze.

Mettendo assieme la relazione ottenuta dalla legge delle maglie con le due ottenute dalla legge di Ohm si ottiene:

$$U_0 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = \left(R_1 + R_2\right) \cdot I = R_{tot} \cdot I .$$

La resistenza totale si calcola come la somma delle due resistenze, vale a dire:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 .$$

Conosciuta la resistenza totale si calcola facilmente la corrente I e in seguito U_1 e U_2.

Se al posto di due resistenze ne avessimo N tutte in serie la legge delle maglie diventa:

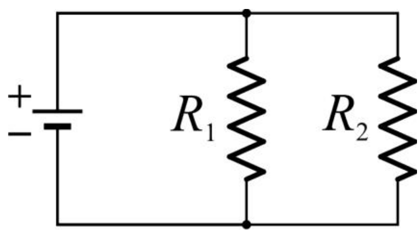
$$U_0 = U_1 + U_2 + \cdots + U_N .$$

Ripetendo le stesse sostituzioni fatte precedentemente otteniamo:

$$U_0 = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \cdots + R_N \cdot I = \left(R_1 + R_2 + \cdots + R_N\right) \cdot I = R_{tot} \cdot I .$$

Si può pertanto concludere che N resistenze in serie si comportano come una sola resistenza il cui valore è pari alla somma dei valori delle N resistenze, cioè:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N .$$



Analizziamo ora il caso in cui due resistenze si trovino affiancate nel circuito. Si parla allora di resistenze **in parallelo**.

La legge delle maglie ci permette di affermare che la caduta di potenziale ai capi delle due resistenze (sempre indicata con U_1 e U_2) è la stessa ed è pari alla ddp U_0 della batteria. Chiamiamo I_1 la corrente che passa attraverso la resistenza R_1 e I_2 quella attraverso R_2.

Dalla legge di Ohm ricaviamo:

$U_0 = U_1 = R_1 \cdot I_1$ e $U_0 = U_2 = R_2 \cdot I_2$, da cui: $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0}{R_1}$ rispettivamente $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_0}{R_2}$.

Dalla legge dei nodi si deduce d'altro canto che:

$$I = I_1 + I_2 .$$

Unendo assieme le ultime relazioni otteniamo:

$$I = \frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U_0 .$$

Analogamente a quanto fatto per le due resistenze in serie chiamiamo R_{tot} la resistenza che inserita al posto delle due riproduce un circuito equivalente e scriviamo la legge di Ohm "risolvendola" rispetto alla corrente:

$$I = \frac{U_0}{R_{tot}} .$$

Da tutto questo possiamo dedurre che: $I = \frac{U_0}{R_{tot}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U_0$.

In altri termini possiamo affermare che:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

Questa uguaglianza stabilisce una relazione fra la resistenza totale o equivalente e le singole resistenze nel caso siano in parallelo e, a parole, afferma che l'inverso della resistenza totale è pari alla somma degli inversi delle singole resistenze. Essa può essere generalizzata al caso di N resistenze (la dimostrazione è lasciata a voi) in:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} .$$

È facile verificare che, nel caso di resistenze in serie, la resistenza totale o equivalente è maggiore della più grande delle resistenze prese singolarmente, mentre nel caso di resistenze in parallelo, la resistenza equivalente è minore della più piccola delle singole resistenze

Ritorniamo ora al caso iniziale che può essere visto come la somma di una resistenza in serie con due in parallelo:

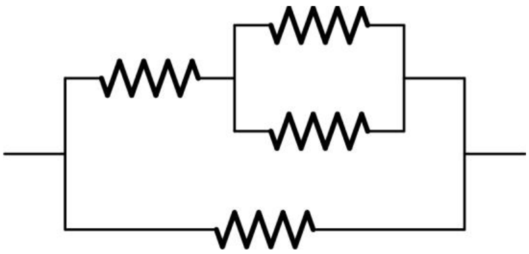
Chiamiamo R_{23} la resistenza equivalente delle resistenze R_2 e R_3.

La resistenza totale è data dalla somma di R_1 con R_{23} dato che sono resistenze in serie. Da tutto ciò segue che, dato che R_2 e R_3 son resistenze in parallelo:

$$R_{tot} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} .$$

Nel caso in cui: $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ e $R_3 = 30\,\Omega$ segue: $R_{tot} = 27\,\Omega$.

Si possono fare molti esempi di combinazione di resistenze. Ci limitiamo al seguente caso lasciando agli studenti di analizzarne altri presenti sulle schede degli esercizi o sui vari libri.



La situazione è quella rappresentata nel disegno a lato nel quale tutte le resistenze hanno lo stesso valore. La domanda è: quanto vede valere ciascuna resistenza per fare in modo che la resistenza totale o equivalente sia pari a $R_{tot} = 15\,\Omega$? La risposta si trova risolvendo rispetto a R la seguente equazione:

$$R_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}}} = \frac{3}{5}R.$$

Da cui $R = 25\,\Omega$.

La Resistenza interna

Negli esempi numerici dei paragrafi precedenti non avevamo posto nessuna limitazione alla corrente elettrica che poteva essere erogata da un generatore di ddp. Esso era un apparato ideale che garantiva una ddp costante in qualsiasi situazione. Ad esempio se la ddp del generatore vale $12,0V$ e la resistenza totale del circuito vale $R = 6,0\Omega$ circola una corrente totale pari a:

$$I = \frac{12,0V}{6,0\Omega} = 2,0A.$$

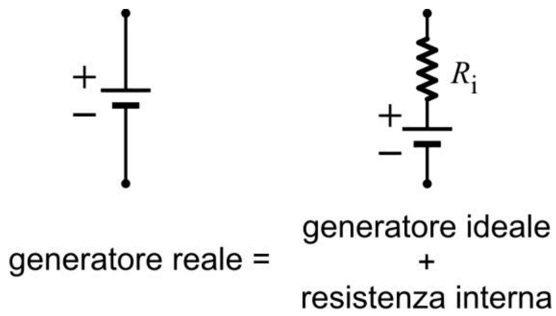
Se la resistenza fosse solo di $0,60\Omega$ allora la corrente varrebbe $20,0A$. Se collegassimo i due capi del generatore ad un filo di resistenza trascurabile, vale a dire tendente a zero (meglio non provarci perché potrebbe essere pericoloso), realizzando così quello che viene detto **cortocircuito**, il calcolo della corrente porterebbe ad un valore che tende all'infinito (ad esempio utilizzando quale collegamento un filo di rame di sezione $2,5mm^2$ e lunghezza $50cm$, di resistenza pari a $3,4m\Omega$ la corrente calcolata varrebbe $3,5\cdot 10^3 A$, decisamente poco probabile).

Quello che succede in realtà è qualcosa di diverso.

Collegando ad un generatore di ddp, ad esempio ad una batteria, un circuito con resistenza totale via via più piccola, si assiste ad una progressiva diminuzione della tensione ai capi del generatore. Facciamo un esempio.

Se misuriamo la ddp ai capi di una batteria di una automobile (tensione nominale pari a $12,0V$) quando non vi è collegato nessun consumatore possiamo leggere una tensione pari a $13,20V$. Se apriamo la portiera si accendono le luci interne e il voltometro segna $13,15V$. Accendiamo le luci di posizione e la tensione scende ancora arrivando a $12,97V$. Aumentiamo il carico (accendendo ad esempio le luci anabbaglianti) e la tensione diventa $12,55V$. Accendiamo l'automobile azionando il motorino di avviamento e per qualche secondo si legge $9,20V$.

Quanto avviene è spiegabile ammettendo che il generatore di ddp ha una sua **resistenza interna** generalmente indicata con R_i, resistenza che si somma alla resistenza totale del circuito. Il generatore di ddp **reale** viene perciò assimilato ad un generatore di ddp **ideale** con in serie la sua resistenza interna.



La sola difficoltà consiste nel fatto che quando colleghiamo il generatore di ddp ad un voltometro la resistenza interna non può essere esclusa dalla misura.

Per poter determinare quello che capita realmente collegando un resistore ad un generatore di ddp occorre pertanto conoscere anche la resistenza interna del generatore, oppure va calcolata a partire da misura effettuate su situazioni conosciute.

Ritornando alle situazioni descritte sopra, consideriamo ad esempio il caso in cui sono accese le luci di posizione. In questa situazione la corrente erogata del generatore vale $4,51A$. Facendo osservare che quando si misura la tensione ai capi del generatore in assenza di carico non si fa altro che determinare la ddp del generatore ideale in quando, non scorrendo nessuna corrente, non vi è caduta di potenziale sulla resistenza interna, è possibile risolvere il seguente sistema di equazioni con incognite la resistenza interna e quella del circuito esterno.

$\begin{cases} U_0 = (R + R_i)\cdot I \\ U = R\cdot I \end{cases}$, che numericamente diventa: $\begin{cases} 13,20V = (R + R_i)\cdot 4,51A \\ 12,97V = R\cdot 4,51A \end{cases}$.

La soluzione da: $R = 2,88\Omega$ e $R_i = 0,05\Omega$.

La potenza delle luci di posizione è pertanto: $P = R\cdot I^2 = 2,88\Omega\cdot(4,51A)^2 = 58,5W$.

A questo punto diventa facile rispondere ad altre domande quali ad esempio: quanto vale la potenza del motorino di avviamento nelle condizioni di utilizzo descritte sopra?

Il sistema di equazioni è ancora quello precedente solo che ora le incognite sono I e R. Sottraendo membro a membro si ottiene:

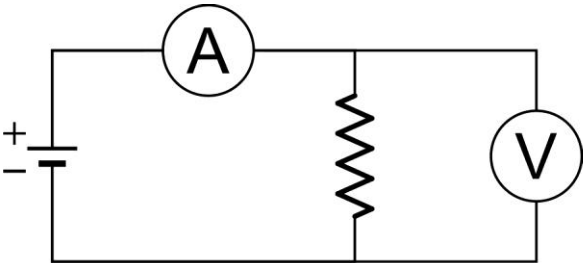
$U_0 - U = R_i \cdot I$ da cui

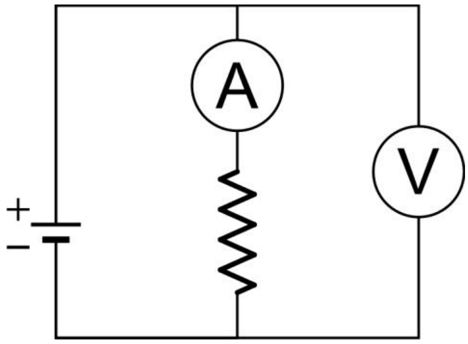
$I = \dfrac{13,2V - 9,2V}{0,05\Omega} = 80\,A$ e di conseguenza $P = U \cdot I = 9,2V \cdot 80\,A = 736W$.

Strumenti di misura (amperometro e voltometro) reali

Come per i generatori di ddp anche con gli strumenti di misura abbiamo sempre operato come se non avessero alcun influsso sul circuito. In realtà anche amperometri e voltometri, per poter funzionare, hanno una loro resistenza detta **resistenza interna** degli strumenti. Potremmo allora porci questa domande:

- Come influenza il circuito la presenza di strumenti di misura?
- Per quale motivo non ne abbiamo tenuto conto fino ad ora?
- Che caratteristiche devono avere gli strumenti di misura per influenzare il circuito nel minor misura possibile?
- Come devo allacciare gli strumenti al circuito per ridurre la loro influenza al minimo?





Volendo misurare corrente e tensione ai capi di una resistenza posso utilizzare questi due schemi che solitamente risultano essere equivalenti.

Nel primo caso il voltometro misura esattamente la caduta di tensione ai capi della resistenza mentre l'amperometro misura la somma della corrente che passa nella resistenza più quella che passa nel voltometro.

Nel secondo caso è l'amperometro a misurare esattamente la corrente mentre il voltometro misura la caduta di tensione ai capi del sistema composto da resistenza più amperometro.

Strumenti ideali non influenzano la misura perciò nel primo caso nel voltometro non deve passare alcuna corrente così che la corrente misurata nell'amperometro coincida con quella che passa nella resistenza. Tutto questo succede solo se la resistenza del voltometro è infinita. Pur non essendo infinita la resistenza di un voltometro è molto grande, a seconda dei modelli da $100\,k\Omega$ a $1M\Omega$ o anche di più (in alcuni modelli nei quali il fondo scala viene scelto attraverso una manopola la resistenza può variare in funzione del fondo scala).

Nel secondo caso affinché la tensione misurata dal voltometro coincida con quella ai capi della resistenza non ci deve essere caduta di tensione ai capi dell'amperometro, quindi idealmente la sua resistenza deve essere nulla. Solitamente la resistenza di un amperometro è inferiore ad 1Ω.

Ora che conosciamo il valore caratteristico delle resistenze interne degli strumenti di misura verifichiamo come normalmente non è necessario tenere in considerazione la presenza degli strumenti stessi e come la loro disposizione sia indifferente.

Supponiamo di avere una resistenza da $500\,\Omega$, un generatore di ddp (ideale) da $50,0V$ e strumenti di misura con resistenza $R_V = 750\,k\Omega$ per il voltometro e $R_A = 0,25\,\Omega$ per l'amperometro.

Per determinare corrente e tensione effettiva sulla resistenza e ciò che i due strumenti misurano sia nel primo che nel secondo caso si può procedere in diversi modi. Si può calcolare ad esempio la resistenza equivalente del circuito e poi applicando a seconda dei casi la legge delle maglie o quella dei nodi risalire a tutti i valori di corrente e tensione sui tre elementi del circuito. In alternativa è possibile scrivere un numero sufficiente di equazioni scegliendo in modo opportuno fra quelle ricavabili dalla legge delle maglie e da quella dei nodi in modo da avere un sistema con tante equazioni (indipendenti) quante sono le incognite.

Deve essere chiaro fin da subito che ciò che noi possiamo ricevere come informazione sono semplicemente la corrente che passa nell'amperometro e la tensione ai capi del voltometro.

Lasciando agli allievi il compito di affrontare nel migliore dei modi il problema ecco i risultati.

Cominciamo con il circuito numero 1:

Tensione letta sul voltometro: $U_V = 50,0V$; (valore a 5 cifre significative: $U_V = 49,975V$).

Corrente letta sull'amperometro: $I_A = 100\,mA$; (valore a 5 cifre significative: $I_A = 100,01\,mA$).

Valore calcolabile della resistenza: $R = \dfrac{50,0V}{0,100\,A} = 500\,\Omega$

Per il circuito numero 2 vale:

Tensione letta sul voltometro: $U_V = 50,0V$; (valore a 5 cifre significative: $U_V = 50,000V$).

Corrente letta sull'amperometro: $I_A = 100\,mA$; (valore a 5 cifre significative: $I_A = 99,95\,mA$).

Valore calcolabile della resistenza: $R = \dfrac{50,0V}{0,100\,A} = 500\,\Omega$

Come si può notare non vi è nessuna differenza misurabile. I due circuiti risultano equivalenti. Gli strumenti si comportano come strumenti ideali.

Che cosa capita ora se il valore della resistenza risulta essere dello stesso ordine di grandezza delle resistenze interne degli strumenti di misura?

La tabella seguente riassume in uno schema ciò che verrebbe calcolato a partire da dati letti negli strumenti di misura in due casi con resistenza pari a $250\,k\Omega$ rispettivamente pari a $1,00\,\Omega$.

$R = 250\,k\Omega$	$U(V)$	$I(mA)$	$R_{\text{calcolata}}(k\Omega)$
Circuito no. 1	50,0	0,267	187
Circuito no. 2	50,0	0,200	250

$R = 1,00\,\Omega$	$U(V)$	$I(A)$	$R_{\text{calcolata}}(\Omega)$
Circuito no. 1	40,0	40,0	1,00
Circuito no. 2	50,0	40,0	1,25

Appare subito evidente che gli strumenti non possono essere considerati ideali e che la loro disposizione sul circuito determina la correttezza del risultato.

La lampada ad incandescenza

In quest'ultimo paragrafo si cercherà di sviluppare un modello per trovare una relazione matematica fra corrente e tensione nel caso di una lampadina ad incandescenza.

Si tratta di un modello molto semplificato con numerose approssimazioni, ma che porta ad un risultato soddisfacente dal punto di vista delle conferme sperimentali.

Punti fermi per questo modello sono le relazioni fra tensione, corrente elettrica e potenza, vale a dire:

$P = U \cdot I$, $P = R \cdot I^2$ e $P = \frac{U^2}{R}$.

Sappiamo inoltre che:

$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0))$.

E a questo punto arriva la prima approssimazione.

Se noi prolunghiamo a ritroso il grafico e scegliamo la scala Kelvin per rappresentarlo possiamo riscrivere la relazione fra resistenza e temperatura nel seguente modo:

$R(T) \cong \text{costante} \cdot T$

(In realtà, anche rappresentando la resistenza in funzione della temperatura secondo la scala Kelvin, il grafico non passa per zero ma si ha una ordinata all'origine diversa da zero; il suo valore è comunque sufficientemente piccolo da ritenerlo trascurabile, soprattutto se si pensa che le temperature che ci interessano sono molto lontane dallo zero.)

Quando una lampadina è accesa (sia che la si allaccia alla sua tensione nominale, sia quando la si collega ad una tensione più piccola – evitate di collegarla ad una tensione più altra perché "brucia"), la potenza elettrica, vale a dire l'energia elettrica "consumata" nell'unità del tempo, viene dissipata soprattutto per irraggiamento secondo la legge:

$P = \text{costante} \cdot (T^4 - T_0^4) \cong \text{costante} \cdot T^4$

Ed è questa la seconda approssimazione, limitarci all'irraggiamento come modalità di dissipazione dell'energia e trascurare il termine T_0^4 perché decisamente più piccolo di T^4 ($T_0 \cong 300\,K$, temperatura ambiente, mentre le temperature del filamento della lampadina quando inizia a diventare incandescente sono maggiori di $1200\,K$, cioè almeno 4 volte più grandi; data la potenza di 4, già all'inizio del processo che ci interessa, il primo termine è 256 più grande del secondo, rapporto che cresce all'aumentare delle temperatura).

Fatte queste premesse possiamo cominciare trovare le relazioni che ci interessano.

Dato che le due costanti delle relazioni che abbiamo appena scritto sono costanti diverse, riscriviamo le due relazioni nel seguente modo:

$R(T) = c_1 \cdot T$ e $P = c_2 \cdot T^4$.

Sostituendo queste relazioni nelle prime esse diventano:

$P = R \cdot I^2$ diventa $c_2 \cdot T^4 = c_1 \cdot T \cdot I^2$ e quindi $I^2 = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{T^4}{T} = \frac{c_2}{c_1} \cdot T^3$ da cui $T = \left(\frac{c_1}{c_2} \cdot I^2 \right)^{1/3} = k_1 \cdot I^{2/3}$

$P = \frac{U^2}{R}$ diventa $c_2 \cdot T^4 = \frac{U^2}{c_1 \cdot T}$ e quindi $U^2 = c_1 \cdot c_2 \cdot T^4 \cdot T = c_1 \cdot c_2 \cdot T^5$ da cui $T = \left(\frac{U^2}{c_1 \cdot c_2} \right)^{1/5} = k_2 \cdot U^{2/5}$

Finalmente si possono paragonare i valori di T del due relazioni precedenti e si ricava:

$k_1 \cdot I^{2/3} = k_2 \cdot U^{2/5}$ da cui segue $I = \left(\frac{k_2}{k_1} \cdot U^{2/5} \right)^{3/2}$ e per finire $I = \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{3/2} \cdot U^{3/5}$

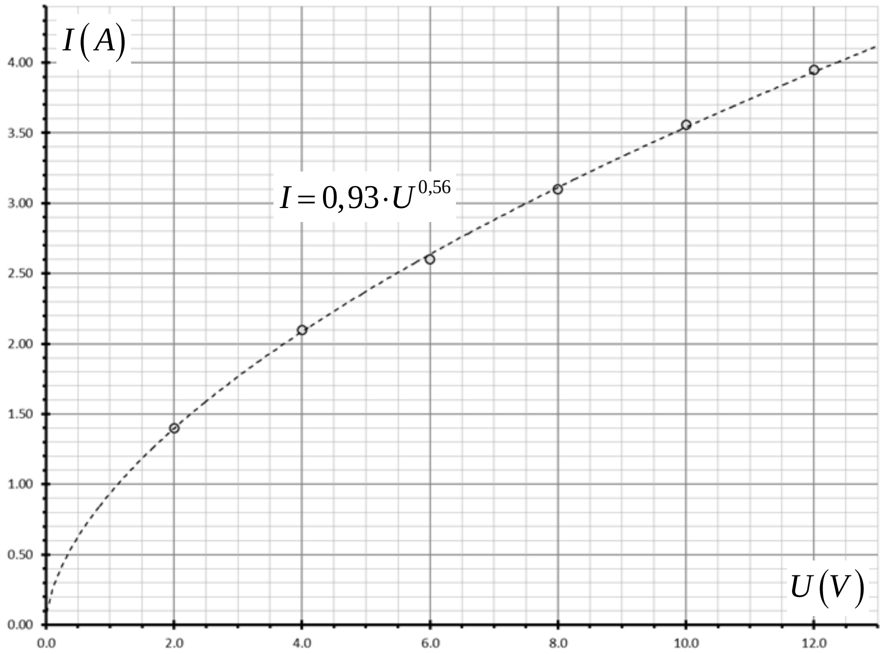
Semplificando diventa:

$I = \text{costante} \cdot U^{3/5} = \text{costante} \cdot U^{0,6}$.

Analizziamo ora i dati riguardanti la lampadina utilizzata all'inizio di questo capitolo.

Riportiamo nuovamente la tabella e il relativo grafico.

$U(V)$	$I(A)$
2,0	1,4
4,0	2,1
6,0	2,6
8,0	3,1
10,0	3,6
12,0	4,0



Come si può osservare dalla miglior curva che si può tracciare si ottengono valori molto vicini al formula associata al modello teorico.

Come si fa a calcolare la costante e l'esponente della formula riportata sul grafico?

Evidentemente si possono utilizzare le varie funzioni presenti nel foglio di calcolo con il quale abbiamo realizzato il grafico. Dovendo invece procedere con un grafico fatto a mano il problema si fa un pochino più complesso.

Se il grafico in esame è da associare ad una retta, si procede come abbiamo imparato fin dall'inizio. Si traccia la miglior retta possibile passante per i punti e dal grafico si determinano i due coefficienti che caratterizzano la retta, vale a dire la sua pendenza e l'ordinata all'origine.

Se il grafico non è una retta, lo si linearizza; ad esempio se le due grandezze sono una inversamente proporzionale all'altra si rappresentano una grandezza in funzione dell'inverso dell'altra (ad esempio per verificare la legge di Boyle si rappresenta la pressione in funzione dell'inverso del volume); se una grandezza dipende dal quadrato dell'altra si rappresenta la prima in funzione del quadrato della seconda (per verificare il moto uniformemente accelerato nel caso della caduta libera si rappresenta lo spazio di caduta in funzione del tempo al quadrato).

E nel caso in esame come si procede?

Per poter linearizzare la funzione in esame si calcola il logaritmo dei termini a sinistra e a destra dell'uguaglianza, vale a dire:

$I = \text{costante} \cdot U^m$ (dove da determinare sono la costante e l'esponente m) diventa

$\ln(I) = \ln(\text{costante} \cdot U^m) = \ln(\text{costante}) + \ln(U^m) = \ln(\text{costante}) + m \cdot \ln(U)$ cioè

$\underbrace{\ln(I)}_{y} = \underbrace{\ln(\text{costante})}_{b} + \underbrace{m}_{a} \cdot \underbrace{\ln(U)}_{x}$.

Una volta calcolate la pendenza e l'ordinata all'origine della miglior retta che si può tracciare sul grafico $\ln(I)$ in funzione di $\ln(U)$ si ricava il coefficiente m, che equivale alla pendenza, e la costante semplicemente risolvendo la relazione:

$b = \ln(\text{costante})$ …vale a dire: $\text{costante} = e^b$.

Sebbene la legge di dipendenza della resistenza in funzione della temperatura espressa nella forma $R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0))$ poi approssimata a $R(T) \cong \text{costante} \cdot T$ possa essere considerata solitamente una buona approssimazione, nel caso del tungsteno, materiale con il quale sono fatti i filamenti delle lampadine ad incandescenza, non lo è del tutto. Modelli più accurati portano ad una formula di questo tipo:

$R(T) \cong \text{costante} \cdot T^k$, dove l'esponente k vale circa 1,2.

Rifacendo i calcoli della pagina precedente per determinare la relazione fra corrente e tensione tendendo conto di questa nuova formula otteniamo:

$$I = \text{costante} \cdot U^{\frac{4-k}{4+k}} \underset{k=1,2}{=} \text{costante} \cdot U^{0,54}$$

questa formula si adatta meglio ai risultati sperimentali.

Si faccia attenzione che le due costanti nelle ultime due formule non sono le stesse.

Facciamo qualche esempio.

Determinare la temperatura del filamento di una lampadina allacciata a una tensione di $115V$ sapendo che se collegata alla rete di casa ($U = 230V$) ha una potenza di $60W$.

Si ipotizzi che in quest'ultima situazione la temperatura del filamento sia $T \cong 3000\,K$ (temperatura tipica).

In base a quanto visto in questo capitolo possiamo calcolare:

$$R(3000\,K) = \frac{(230V)^2}{60W} = 882\,\Omega$$

$R(T) = \text{costante} \cdot T^{1,2}$, da cui segue: $\text{costante} = 0,0593$ (chiamiamo questa costante c_1)

D'altro canto sappiamo che $I = \text{costante} \cdot U^{0,54} = c_2 \cdot U^{0,54}$, $I = \frac{P}{U} = \frac{60W}{230V} = 0,261A$ da cui

$$c_2 = \frac{I}{U^{0,54}} = \frac{0,261}{230^{0,54}} = 0,0138$$

$I(115V) = 0,0138 \cdot 115^{0,54} = 0,179\,A$, da cui $R(T_x) = \frac{115V}{0,179\,A} = 641\Omega$.

Perciò: $T_x = \left(\frac{641}{0,0593}\right)^{\frac{1}{1,2}} = 2300\,K$.

Un esempio un pochino più complesso.

Si prendano in considerazione due lampadine A e B da $40W$ rispettivamente da $100W$ quando sono allacciate in parallelo alla rete $(U = 230V)$.

Si determini la caduta di tensione su entrambe se collegate in serie.

In primo luogo si devono calcolare le due costanti c_2 delle due lampadine; $c_{2A} = 0,0092$, $c_{2B} = 0,0231$.

Per la legge delle maglie vale che $230 = U_A + U_B$; con $U = \left(\frac{I}{c_2}\right)^{\frac{1}{0,54}}$, si ricava la seguente equazione:

$$230 = \left(\frac{I}{0,0092}\right)^{\frac{1}{0,54}} + \left(\frac{I}{0,0231}\right)^{\frac{1}{0,54}}, \text{ da cui } I = 0,159\,A\ .$$

La caduta di tensione ai capi di ciascuna lampadina diventa perciò:

$$U_A = \left(\frac{0,159}{0,0092}\right)^{\frac{1}{0,54}} = 194,4V \quad \text{e} \quad U_B = \left(\frac{0,159}{0,0231}\right)^{\frac{1}{0,54}} = 35,6V\ .$$

Il trasporto di energia elettrica

Negli esempi dei paragrafi precedenti abbiamo visto l'influsso su un circuito di un generatore di ddp reale rispetto a uno ideale così come degli strumenti di misura. D'altro canto abbiamo invece sempre considerato i cavi di collegamento come ideali, cioè come se non avessero una loro resistenza.

Eppure anche questi ultimi possono influire sul circuito. Vediamo alcuni esempi.

Cominciamo con un caso nel quale il loro influsso è trascurabile.

Supponiamo di alimentare un consumatore di potenza $120W$ con un generatore di ddp da $12,0V$ (ad esempio alimentiamo i due fari anabbaglianti di un'auto). Si supponga che siano collegati alla batteria con un cavo di rame lungo $l = 2,00m$ e sezione $A = 6,0mm^2$ (dalla seconda legge di Ohm ricaviamo che $R_{\text{cavi}} = 5,6 \cdot 10^{-3}\,\Omega$).

Calcoliamo ora la resistenza del nostro consumatore pari a:

$$R = \frac{U^2}{P} = 1,20\Omega\,.$$

Sommando assieme le due resistenze (resistenze in serie) otteniamo una resistenza totale pari a $1,2056\Omega$ praticamente uguale alla resistenza del consumatore. I cavi di collegamento possono essere considerati ideali.

Un calcolo accurato indicherebbe che il consumatore sarebbe alimentato con una tensione di $11,94V$, con una potenza pari a $119W$ e potenza "persa" nei cavi di circa $0,5W$.

Un discorso diverso lo abbiamo quando il consumatore si trova a una distanza più grande, per esempio a $l = 200m$. Se la sezione del cavo non cambia, allora la resistenza dei cavi diventa 100 volte più grande, vale a dire: $R_{\text{cavi}} = 0,56\Omega$, che è paragonabile a quella del consumatore. Rifacendo gli stessi calcoli di prima vedremmo che la resistenza totale è pari a $1,76\Omega$ (ammesso e non concesso che la resistenza del consumatore sia costante), la tensione al consumatore diventa di $8,18V$, la potenza pari a $56W$ (meno della metà) e una potenza "persa" nei cavi di $26W$. Tutto questo è inaccettabile anche perché al di sotto di una certa tensione molti consumatori non funzionano (senza contare poi le perdite che rappresentano circa un terzo della potenza erogata dal generatore di ddp).

Come possiamo rimediare?

Idealmente lo si può fare aumentando la sezione del cavo in modo da riportare la sua resistenza ai valori di prima. Per riuscirci dobbiamo aumentare la sezione di 100 volte, vale a dire aumentare di 10 volte il diametro (passare cioè da un cavo di diametro $d = 2,8mm$ a un cavo di $d = 28mm$ (quasi $3,0cm$ di diametro)).

Vi immaginate cosa vuol dire?

In alternativa si potrebbe pensare a un impianto alimentato con una tensione più alta fin dall'inizio, per esempio con una tensione di $240V$.

Rifacciamo i calcoli e vediamo cosa succede.

Primo caso: potenza del consumatore pari a $120W$, corrente elettrica $0,500\,A$, resistenza del consumatore 240Ω; resistenza dei cavi di $2,0\,m$ di lunghezza uguale a $5,6\cdot 10^{-3}\,\Omega$; resistenza totale uguale a $240,0056\Omega$.

Secondo caso: potenza del consumatore pari a $120W$, corrente elettrica $0,500\,A$, resistenza del consumatore 240Ω; resistenza dei cavi di $200\,m$ di lunghezza uguale a $0,56\Omega$; resistenza totale uguale a $240,56\Omega$.

Come potete notare l'aver aumentato la tensione di alimentazione fa in modo che la resistenza dei cavi risulti trascurabile in entrambi i casi. Quindi è una buona soluzione.

Ma che cosa succede se si deve alimentare un intero quartiere (potenza necessaria $2,0\,MW$) trasportando l'energia elettrica da distanze molto più grandi di quelle che abbiamo calcolato nel secondo caso, per esempio da $200\,km$?

Il problema si ripresenta anche utilizzano cavi di diversi centimetri di diametro.

È pensabile alimentare il tutto con tensioni ancora più alte?

La risposta è no. Sarebbe troppo pericoloso.

Che cosa fare allora?

La soluzione diventa allora quella di trovare un sistema che permette il trasporto ad alta tensione (dalla formula per calcolare la potenza si evince che aumentando la tensione diminuisce in proporzione la corrente e quindi la potenza “persa” nei cavi ($P = R_{\text{cavi}} \cdot I^2$)) potendola poi distribuire a tensione più bassa.

Per fare tutto ciò si ricorre a quegli apparati chiamati trasformatori.

Prima di affrontare le problematiche legate all'uso dei trasformatori, occorre fare una distinzione fra correnti continue e correnti alternate.

Durante la fase sperimentale in classe non ci siamo mai soffermati sul fatto che stessimo alimentando i nostri consumatori (che erano sempre delle resistenze, sia che si trattasse di lampadine oppure di resistori) con un generatore di ddp in corrente continua o alternata. Solo il docente sceglieva, là dove necessario, i vari selettori del multimetro in modo appropriato. I risultati cui siamo pervenuti non erano influenzati.

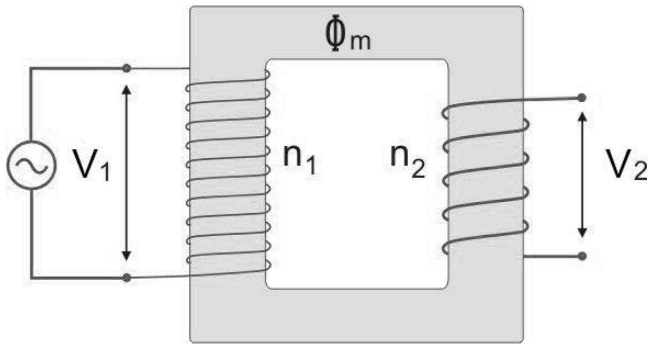
Che differenza esiste allora fra i due tipi di alimentazione?

Fondamentalmente un generatore di ddp in corrente continua (ad esempio una batteria) mantiene una differenza di potenziale costante (la batteria di una automobile garantisce una differenza di potenziale di $12,0V$) mentre la rete di distribuzione domestica (le prese di corrente tanto per intenderci) garantisce un potenziale efficace (non vogliamo soffermarci sul significato di potenziale efficace) di $230V$ oscillando secondo una funzione sinusoidale fra le tensioni di picco (anche su questo concetto non vogliamo soffermarci) 50 volte al secondo (in altri paesi valgono altre tensioni efficaci e anche la frequenza può essere diversa).

I trasformatori funzionano solo con correnti alternate.

Nelle prossime poche righe si cercherà di spiegare in modo molto semplificato e tutt'altro che esaustivo il motivo perché un trasformatore funziona solo con correnti alternate.

Quando un filo è percorso da corrente elettrica, esso diventa sorgente di un campo magnetico (il concetto di campo magnetico verrà trattato nel corso di FAM o nel corso di OC Fisica). Un campo magnetico interagisce con le cariche di un altro conduttore, un altro filo, solo se si muovono (scorre una corrente elettrica o è il filo stesso ad essere in movimento) oppure se il campo magnetico varia nel tempo. Questa seconda situazione è quella utilizzata per costruire un trasformatore.



Un trasformatore funziona pertanto nel seguente modo: un generatore di ddp in alternata alimenta una bobina (un filo che si avvolge a spirale) detta primaria all'interno della quale vi è un elemento di ferro in grado di convogliare quello che viene chiamato flusso magnetico (anche questo concetto verrà studiato nei corsi di FAM o OC Fisica) ad un'altra bobina, detta secondaria, nella quale viene indotta una corrente. Lo schema a lato mostra la situazione. Nello schema è indicato con V_1 il potenziale in alternata del primario, con V_2 il potenziale del secondario, con n_1 e con n_2 il numero di avvolgimenti (spire) del primario rispettivamente del secondario e infine con Φ_m il flusso magnetico.

Una analisi di dettaglio mostra che vale la seguente relazione:

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \quad \text{cioè} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

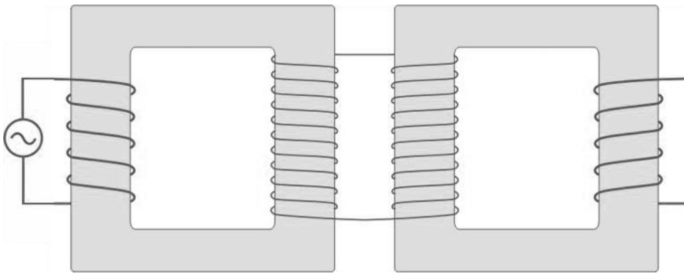
Nel caso di un trasformatore ideale deve valere inoltre:

$P_1 = P_2$, vale a dire $V_1 \cdot I_1 = V_2 \cdot I_2$ e di conseguenza

$$I_2 = \frac{V_1}{V_2} \cdot I_1 = \frac{n_1}{n_2} \cdot I_1 .$$

Torniamo allora al problema iniziale che è quello nel quale dobbiamo alimentare un consumatore di potenza $P=120W$ con un generatore di ddp $V=12V$ in corrente alternata (utilizziamo il simbolo V per la differenza di potenziale al posto del simbolo U così da distinguere fra corrente alternata e corrente continua) a una distanza tale che i cavi di collegamento hanno una resistenza pari a $R_{\text{cavi}}=0,56\Omega$.

Grazie a due trasformatori innalziamo la tensione per il trasporto per poi riabbassarla al valore desiderato al consumatore. Lo schema dei due trasformatori è indicato nel disegno a lato.



Nel caso più semplice i due trasformatori sono simmetrici, vale a dire che il rapporto fra il numero di spire del primario e quelle del secondario è lo stesso, evidentemente invertito.

Se i due trasformatori son ideali deve valere, per il principio di conservazione dell'energia, la seguente relazione:

$Pp = Pf + Pc$ dove:

Pp è la potenza alla produzione,

Pf è la potenza persa nel trasporto (dove f sta per fili),

Pc è la potenza al consumatore.

Nel caso di trasformatori simmetrici, indicando con I la corrente al produttore e sapendo che:

$If = \frac{I}{k}$, dove $k = \frac{n_2}{n_1}$ è il rapporto fra il numero di avvolgimenti del secondario e quelli del primario al primo trasformatore (al secondo trasformatore sarà il suo inverso) si può scrivere:

$$\begin{aligned} Vp \cdot I &= Rf \cdot \left(\frac{I}{k}\right)^2 + Pc = \frac{Rf}{k^2} \cdot I^2 + Pc \\ &= Rf \cdot \left(\frac{I}{k}\right)^2 + Vc \cdot I = \frac{Rf}{k^2} \cdot I^2 + Vc \cdot I \\ &= Rf \cdot \left(\frac{I}{k}\right)^2 + Rc \cdot I^2 = \frac{Rf}{k^2} \cdot I^2 + Rc \cdot I^2 \end{aligned}$$

Si osservi che la corrente al consumatore è uguale a quella al produttore solo nel caso di trasformatori simmetrici e che per fare in modo che la tensione durante il trasporto di energia elettrica sia più alta che al consumo il fattore k deve essere maggiore di 1 e generalmente molto grande.

Riprendiamo ora il caso in cui si deve alimentare un consumatore di potenza nominale $120W$ quando è allacciato ad un generatore di ddp in alternata di tensione $12,0V$ a $200m$ di distanza (si prenda in considerazione gli stessi cavi di prima con $Rf = 0,56\Omega$).

Come abbiamo già avuto modo di calcolare, senza passare attraverso un sistema di innalzamento della tensione di trasporto, la situazione diventa insostenibile.

Vediamo cosa succede se si usa un sistema di trasformazione con $k = 10$. Se la resistenza al consumatore vale $Rc = 1,2\Omega$, si può scrivere:

$$12,0V \cdot I = \frac{0,56\Omega}{10^2} \cdot I^2 + 1,2\Omega \cdot I^2$$

da cui si ricava: $I = 9,95A$.

Tutto questo significa che

la tensione al consumatore vale: $V = 11,94V$,

la potenza al produttore vale: $Pp = 119,4W$,

la potenza al consumatore vale: $Pc = 118,8W$ e

la potenza “persa” nel trasporto vale: $Pf = 0,55W$.

Confrontando questi risultati con gli esempi precedenti si può notare che questa situazione corrisponde a quella con i cavi di collegamento di lunghezza $2,0m$ senza trasformatori.