Matematica con le Tecnologie

settore servizi commerciali - web community

Istituto Scipione de Sandrinelli – Trieste

PUBBLICATO PRESSO L'ISTITUTO 'DA VINCI - CARLI - SANDRINELLI' DI TRIESTE

http://www.davincicarli.edu.it

Prima edizione, agosto 2024

Indice

1. Per cominciare

1.1 Di cosa parleremo

Il 22 maggio 2018 ha rappresentato una data molto importante per le scuole; in quella data infatti il Consiglio dell'Unione Europea ha emanato una raccomandazione (`https://bit.ly/3h57Tpi`, rappresentata qui sopra sotto forma di *word cloud*) denominata Quadro di riferimento europeo relativo alle **competenze chiave per l'apprendimento permanente**. Si tratta di un documento che individua i principi fondanti di quello che i cittadini devono essere in grado di fare nella loro vita: continuare ad apprendere, 'imparare ad imparare'. Non a caso, una decina di anni prima, l'INDIRE (l'istituto italiano di didattica che si era occupato di riformare l'insegnamento della matematica negli Istituti Professionali) scriveva esplicitamente che:

> al termine del ciclo di istruzione professionale, viene richiesto agli allievi di riuscire ad utilizzare in modo flessibile i concetti e gli strumenti fondamentali dell'asse culturale matematico **per affrontare e risolvere problemi non completamente strutturati**, riferiti a **situazioni applicative relative al settore di riferimento**, individuando strategie risolutive ottimali, anche utilizzando strumenti e applicazioni informatiche avanzate.

In queste unità didattiche, che dedicheremo al nostro settore di riferimento, ossia il mondo delle *Web Community*, recupereremo molti concetti che abbiamo appreso in questi anni, e li approfondiremo applicandoli a dei contesti che a prima vista possono sembrare lontani dalla matematica. Ci occuperemo di temi interdisciplinari quali il 'cambiamento climatico', la 'comunicazione', la 'cronologia dello sviluppo tecnologico' nel mondo contemporaneo. Ed impareremo anche ad usare nuovi software, lavorando a gruppi in laboratorio.

La prima unità didattica di apprendimento è stata denominata **Climate fiction**, *dall'Agenda 2030 ai mondi distopici generati dai cambiamenti climatici*. Si tratta di un'unità di apprendimento molto articolata, che ha un obiettivo preciso legato alla celebrazione della Giornata mondiale della Terra (il 22 aprile di ogni anno) e che ci vedrà attivamente impegnati nel Digital Storytelling, `https://en.wikipedia.org/wiki/Digital_storytelling`.

> **Approfondimento interdisciplinare 1.1.1 — Approfondimento interdisciplinare.** Commentate con i vostri insegnanti di lingue e di storia questo importante articolo, *How the largest environmental movement in history was born*: `https://bit.ly/3FjKcSR`

La seconda unità didattica di apprendimento, più ridotta, che coinvolge la Tecnica Professionale dei Servizi Commerciali, è denominata **Il ciclo di vita del prodotto**: ne abbiamo già parlato molto lo scorso anno, ed ora concluderemo ciò che avevamo lasciato in sospeso.

La terza unità didattica di apprendimento è denominata **Dalla comunicazione di massa ai Social media**: in essa non solo ci avvicineremo agli aspetti che caratterizzato la letteratura italiana e quella europea contemporanea, nelle loro diverse fasi storiche e negli aspetti legati alla propaganda, alla pubblicità, al marketing, al mondo della televisione e di internet, nei contesti aziendali ed in quelli legati al turismo. In tutti questi scenari dobbiamo essere consapevoli che quando parliamo di *comunicazione* abbiamo anche a disposizione un contesto matematico che la descrive e che rappresenta il substrato teorico su cui ogni forma di telecomunicazione si appoggia.

Una quarta unità didattica, la **Linea del tempo interattiva**, ci aiuterà a 'tenere sotto mano' gli sviluppi tecnologici ed artistici che hanno caratterizzato il diciannovesimo ed il ventesimo secolo, soprattutto quando verso la fine dell'anno scolastico vorremo essere pronti per il colloquio d'Esame. Questa unità didattica ci consentirà di connettere la conoscenza storica generale agli sviluppi delle scienze e delle tecnologie nel nostro specifico campo professionale di riferimento, la comunicazione nel web.

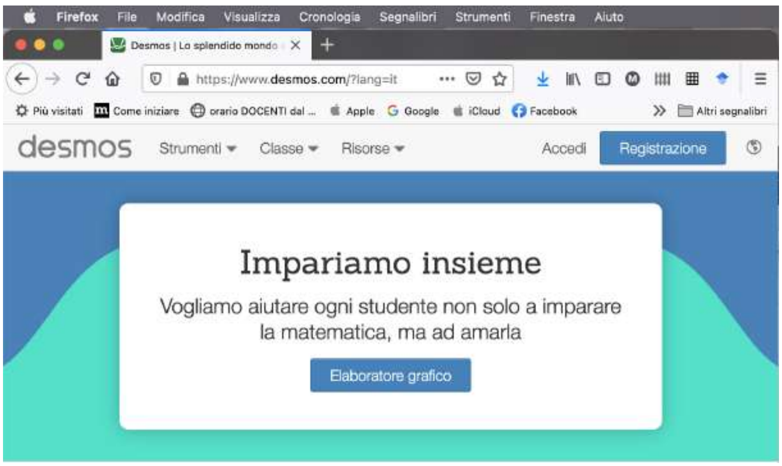
E, prima che ciò avvenga, dovremo affrontare un'altra insidia: la prova INVALSI di matematica, la prova nazionale che valuta le nostre conoscenze e le nostre abilità matematiche; ecco lo scopo della ultima sezione di questo libro, intitolata **Sapersi valutare**.

1.2 Di cosa avremo bisogno a lezione

Ovviamente, per prima cosa, abbiamo bisogno di procurarci **Desmos Graphing Calculator**, una app che potete installare gratuitamente sul vostro telefonino (e che vi consumerà pochissima memoria) o sul vostro tablet: sarà sufficiente cercare nel vostro app-store questa icona qui:

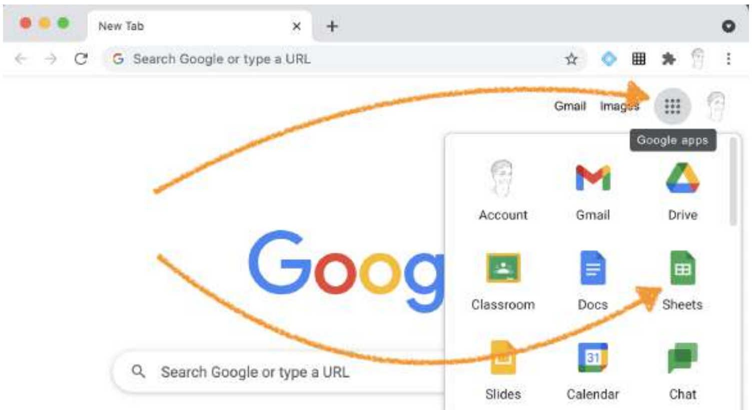
Dopo avere installato l'applicazione, apritela e vedrete un qualcosa di questo genere:

Impareremo a mano a mano ad utilizzare tutte le funzionalità di questo calcolatore grafico; si tratta di un software che consente di svolgere le medesime azioni delle calcolatrici grafiche che il Ministero consente di utilizzare durante l'Esame di Stato[1], senza doversi connetersi in wireless ad alcuna rete (ossia, potete usare Desmos 'in modalità aereo').
Se invece utilizzate un computer connesso alla rete, per esempio quando siete a scuola in laboratorio di informatica, vi potrete collegare all'**Elaboratore grafico** dell'indirizzo `https://www.desmos.com`:

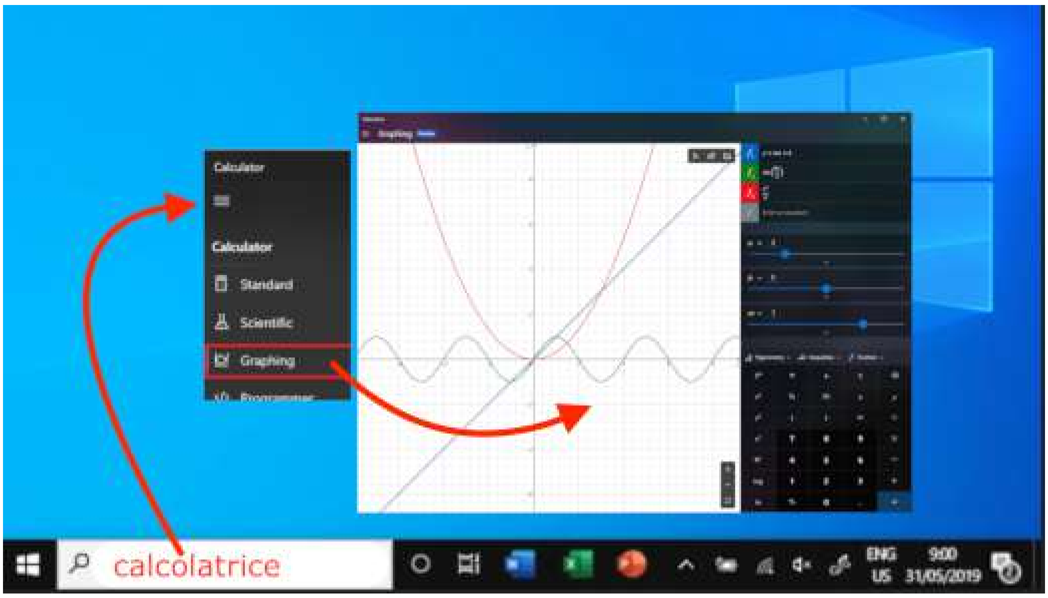


[1]Cfr. ad esempio `https://bit.ly/3ogyU8r`.

Vedrete che Desmos è particolarmente adatto per realizzare i grafici delle funzioni. Desmos consente anche di costruire delle tabelle numeriche, ma in questo àmbito il **foglio elettronico** è certamente un software molto più performante. Per antonomasia, il foglio elettronico che tutti hanno in mente si chiama **Excel**™ ed è un prodotto commerciale venduto della Microsoft. Noi invece utilizzeremo sempre i prodotti gratuiti, e la Scuola a tale proposito ci offre - tramite le nostre credenziali `nome.cognome@dcstrieste.it` - l'utilizzo di Google Workspace: come vedete nella figura, avete sempre accesso gratuito alla applicazione **Sheets** che si trova all'interno del 'mosaico' delle Google apps:



Sappiamo anche che vi sono ancora delle resistenze (forse dovute ad una scarsa conoscenza delle leggi italiane) all'uso della calcolatrice grafica durante le prove d'esame e delle prove Invalsi. Al contrario, ricordiamo che durante le prove Invalsi è chiaramente indicato che, `https://bit.ly/41QO4Vm`, che *è consentito l'uso di qualsiasi tipo di calcolatrice a condizione essa non sia quella dei telefoni cellulari e che non sia collegabile né alla rete internet né a qualsiasi altro strumento tramite bluetooth, wireless, eccetera*. Dunque, se ne deduce che è possibile utilizzare la **calcolatrice grafica di Windows**, il sistema operativo in uso presso i laboratori informatici della nostra scuola.



1.3 Come è scritto questo libro

Questo libro è scritto in maniera colloquiale, anche perché questo non è un *vero* libro di matematica: sono solamente le chiacchiere che facciamo a lezione, ricopiate in italiano.

Pagina dopo pagina, osserverete che abbiamo cercato di mantenere alcune convenzioni grafiche. Innanzitutto, le **parole importanti da ricordare** sono scritte in grassetto; se poi ci sono delle formule molto importanti, le scriveremo dentro ad una Definizione, tipo questa:

Definizione 1.3.1 — da imparare a memoria. Quando vedrete qualcosa scritto in colore smeraldo:

$$formula\ importante \tag{1.1}$$

significa che siete obbligati a impararlo e ricordarlo per sempre, senza fallo.

Ogni concetto nuovo verrà sempre spiegato con un:

Esempio 1.3.1 — da fare assieme. Infatti, per capire bene gli argomenti sarà quasi sempre necessario prendere Desmos e provare a fare un grafico, o una tabella di numeri, e riuscire a capire quello che si è fatto, interpretandolo e magari ricopiandolo sul quaderno.

Quando avremo discusso assieme questo Esempio 1.3.1, allora toccherà a voi a provare a fare da soli, in aula o a casa, qualche semplice

■ **Esercizio 1.1 — sul vostro quaderno.** Di solito, per risolvere questo Esercizio, sarà necessario aver saputo fare con sicurezza il precedente Esempio. La cosa piacevole è che, se alla fine avrete qualche dubbio sull'esito dell'esercizio, potrete sfogliare le pagine del libro alla ricerca delle **Soluzioni**. ■

E.S. Quando incontrerete questo bollino, **E.S.**, provate ad esercitarvi in maniera autonoma, facendo finta di essere in sede di **Esame di Stato** e di dover raccontare alla Commissione d'Esame gli argomenti in questione.

Di quando in quando, ci saranno anche dei collegamenti interessanti con le altre discipline scolastiche: la Storia, le Lingue, l'Economia, ... Avremo dunque l'occasione di compiere un

Approfondimento interdisciplinare 1.3.2 — Chi l'avrebbe mai detto. I concetti matematici di cui stiamo discutendo incredibilmente trovano una spiegazione oppure una applicazione in qualche altro fenomeno di cui si occupa ad esempio il Marketing, oppure il Diritto, oppure la Psicologia Sociale. Sarà opportuno parlarne con le professoresse che ci insegnano quella disciplina e chiedere il loro parere.

Occasionalmente, incontreremo anche qualche importante

Teorema 1.3.3 — da imparare bene. Qui metteremo in evidenza una legge generale. Di regola, i Teoremi possiedono (almeno) una **Dimostrazione** - ma noi non ce ne occuperemo.

Cambiamento climatico

2. Il calcolo differenziale

2.1 Il tredicesimo obiettivo

Il sito web del Centro Regionale di Informazione delle Nazioni Unite `https://bit.ly/3ZoCbW3` ci ricorda che nell'Agenda 2030 l'obiettivo numero 13 si intitola *Promuovere azioni, a tutti i livelli, per combattere il cambiamento climatico*.

> Il cambiamento climatico interessa i paesi di tutti i continenti. Esso sta sconvolgendo le economie nazionali, con costi alti per persone, comunità e paesi oggi, e che saranno ancora più gravi un domani. Le persone stanno sperimentando gli impatti significativi del cambiamento climatico, quali ad esempio il mutamento delle condizioni meteorologiche, l'innalzamento del livello del mare e altri fenomeni meteorologici ancora più estremi. Le emissioni di gas a effetto serra, derivanti dalle attività umane, sono la forza trainante del cambiamento climatico e continuano ad aumentare. Attualmente sono al loro livello più alto nella storia. Se non si prendono provvedimenti, si prevede che la temperatura media della superficie terrestre aumenterà nel corso del XXI secolo e probabilmente aumenterà di 3 gradi centigradi in questo secolo - alcune aree del pianeta sono destinate a un riscaldamento climatico ancora maggiore. Le persone più povere e vulnerabili sono le più esposte.

In questa importante unità didattica di apprendimento la matematica e la statistica giocano un ruolo essenziale, perché chi si deve occupare di ciò che non è ancora avvenuto, ma di ciò che accadrà, è chiamate a formulare previsioni quantitative in condizioni di incertezza. Innanzitutto, cominciamo ad osservare con attenzione questa **rappresentazione grafica**, apparsa recentemente sulla rivista Nature:

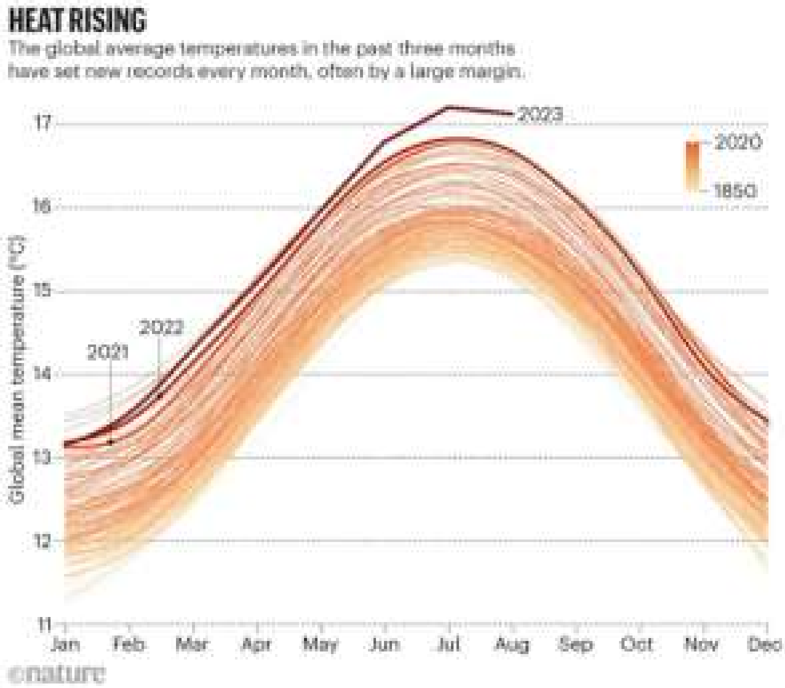


Figura 2.1: `https://www.nature.com/articles/d41586-023-02995-7`

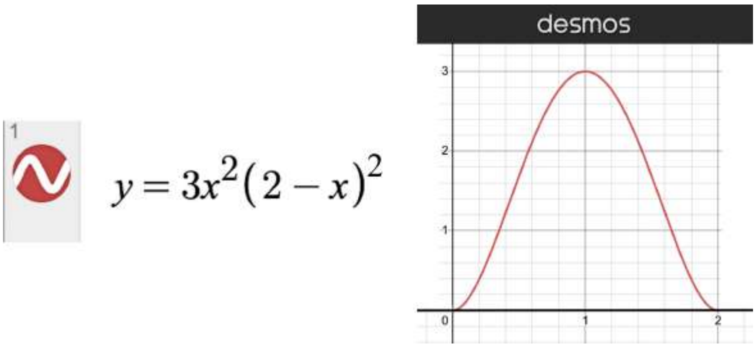
■ **Esercizio 2.1 — Discutiamo.** Quali sono gli elementi di questa figura e cosa ci descrive? Cosa significano le parole ed i colori che vengono utilizzati? ■

Questa figura ci sarà da guida, da modello, in un importante percorso di apprendimento che riguarda l'analisi del comportamento delle **funzioni**. Abbiamo già imparato in quarta a riconoscerne parecchi aspetti; ma nei prossimi mesi dobbiamo diventare degli esperti nei seguenti àmbiti:

1. distinguere il **dominio** e l'**immagine** di una funzione
2. riconoscerne le eventuali **simmetrie**
3. valutare la pendenza di un grafico per mezzo della **derivata**
4. individuare i **punti di massimo e di minimo** mediante la derivata
5. individuare i **punti di flesso** mediante la **derivata seconda**

2.2 Le funzioni: cosa sappiamo

2.2.1 il dominio, il codominio e l'immagine



Lo avevamo già accennato lo scorso anno, quando parlavamo nel Capitolo 4 di 'andamenti periodici'. In matematica, una **funzione** è caratterizzata da tre entità, da tre oggetti.

1. il **dominio**, che si chiama anche dominio di definizione oppure campo di esistenza e che è un insieme di punti sull'asse delle ascisse x, ossia l'insieme $\mathbf{R}$ dei **numeri reali**.
2. il **codominio**, che è invece l'insieme $\mathbf{R}$ dei **numeri reali** sull'asse delle ordinate y
3. il **grafico** della funzione, un insieme di punti del piano cartesiano $\mathbf{R}^2$ tale che per ogni punto x del dominio

Di solito scriviamo che $y = f(x)$ e leggiamo che y è una funzione di x. Nell'esempio qui sopra, $f(x) = 3x^2(2-x)^2$. Avevamo anche aggiunto che il codominio ospita l'**immagine** della funzione, che di solito comprende i valori della funzione compresi tra il **minimo** ed il **massimo** della funzione.

Esempio 2.2.1 Nella figura qui sopra vediamo che:

1. il **dominio** è l'intervallo sull'asse delle x che va da zero a due. Possiamo scrivere così $0 \leq x \leq 2$, oppure così, $x \in [0,2] \subset \mathbf{R}$.
2. il **codominio** è sempre l'insieme $\mathbf{R}$ sull'asse delle y
3. il **grafico** della funzione, la curva rossa, va ad individuare l'**immagine** $0 \leq y \leq 3$. Possiamo anche scrivere che $f([0,2]) = [0,3]$

■ **Esercizio 2.2 — con Desmos.** Rispondete: è vero o è falso?

- $x^2 + y^2 = 1$ è una funzione?
- $x = y^2$ è una funzione?

■

E.S. Riferendosi alla rappresentazione grafica 2.1 'Heat Rising', descrivete il dominio e l'immagine del grafico delle funzione, mettendo in evidenza cosa è successo in questi ultimi centocinquanta anni.

2.2.2 le simmetrie

Può succedere che il grafico di una funzione, come in questo caso, possegga un **asse di simmetria**. Nel nostro esempio guida, possiamo prendere in considerazione la retta verticale $x = 1$. Cosa comporta concretamente il fatto di avere un asse di simmetria? Comporta che se considero due punti che stanno, simmetricamente, da una parte e dall'altra dell'asse di simmetria blu (un pochino più avanti ed un pochino più indietro):

A $1+x$
B $1-x$

e calcolo il loro valore nella funzione:

A $y = 3(1+x)^2(2-(1+x))^2 = 3(1+x)^2(1-x)^2$
B $y = 3(1-x)^2(2-(1-x))^2 = 3(1-x)^2(1+x)^2$

ottengo il medesimo risultato.

■ **Esercizio 2.3 — con Desmos.** Inventate un polinomio in cui tutti gli esponenti siano **pari**. Ad esempio:
- $y = 3x^2 - y^4 + x^8$

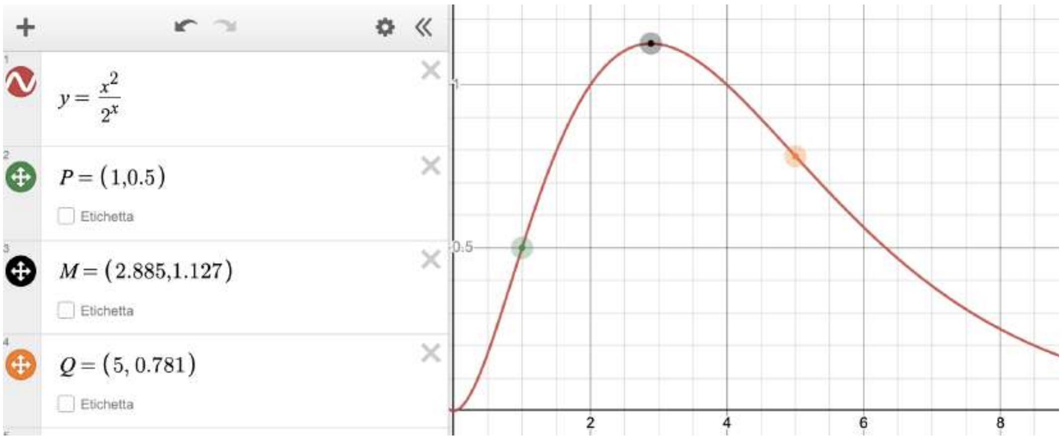
ed osservate che il suo grafico è **simmetrico rispetto all'asse y**. ■

■ **Esercizio 2.4 — con Desmos.** Ora scrivete un polinomio in cui tutti gli esponenti siano **dispari**. Ad esempio:
- $y = 2x - y^7 + x^9$

ed osservate che il suo grafico è **simmetrico rispetto al centro degli assi, il punto origine O**. ■

E.S. Riferendosi alla rappresentazione grafica 2.1 'Heat Rising', mettete in evidenza il suo asse di simmetria, giustificandolo.

2.3 Perché studieremo le derivate



Ripartiamo da quanto avevamo detto alla fine dell'anno scorso, relativamente al **ciclo di vita di un prodotto**: avevamo detto che si possono distinguere almeno quattro fasi (l'introduzione del prodotto sul mercato, la fase di crescita, la fase della maturità ed infine la fase del declino). Come vediamo nel punto P di colore verde la funzione ha un andamento crescente, e possiamo intuire come la **pendenza** del grafico sia ovviamente diversa, e potremmo forse dire opposta, da quella del punto Q di colore arancione situato nella fase di declino. Nel punto di massimo M di colore nero, localmente, possiamo pensare che il grafico sia praticamente 'piatto' e la pendenza sia nulla. In questo capitolo impareremo che la funzione **derivata** è l'oggetto matematico adatto a descrivere questi cambiamenti di pendenza. Impararemo che la derivata si può calcolare usando le 'antiche' tecniche di calcolo algebrico (ossia, a mano con carta e matita); ma potremo anche utilizzare Desmos, oppure il foglio elettronico, per giungere al medesimo risultato (e non solo dal punto di vista numerico).

E.S. Spiegate con un semplice disegno come possiamo calcolare la pendenza approssimativa del grafico 2.1 'Heat Rising', in ogni punto interno al dominio.

2.4 La regola dei tre punti

Prima di procedere, recuperiamo una nozione fondamentale affrontando questo problema: supponiamo che verso la fine di agosto del 2023 il calciatore Cristiano Ronaldo avesse circa 601.5 milioni di follower su Instagram, e verso la fine di settembre ne avesse circa 605 milioni. Quanti follower potremmo stimare egli potrebbe raggiungere verso la fine di ottobre?

E.S. Abbiamo incontrato questo argomento nel Capitolo 2 del libro di terza, di colore arancione. Vi viene richiesto di saper individuare la pendenza m e la quota q di una retta. Andate a rivederlo se qualcosa vi sfugge.
`https://sites.google.com/dcstrieste.it/massimoborelli`.

Definizione 2.4.1 — pendenza della retta. Dati i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2), la retta che li congiunge ha pendenza:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.2}$$

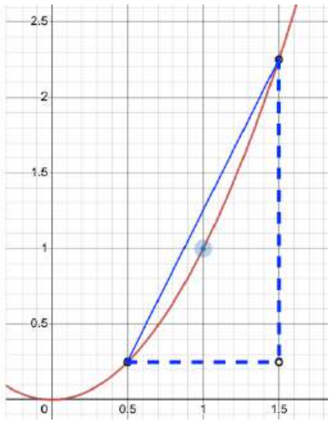
Sono trascorsi quasi esattamente due anni da quando avevamo scritto sulla lavagna e sui nostri quaderni questa importante formula, che spiegava come calcolare la pendenza di una retta se conosciamo due punti di essa.

Ora vogliamo 'adattare' questa formula al caso generale che riguarda la pendenza di un grafico qualsiasi, non solo quello della retta: la chiameremo **formula dei tre punti**. Per capirla bene, cominciamo a semplificare la funzione di nostro interesse e partiamo dalla semplice parabola $y = x^2$.

Esempio 2.4.1 — da fare assieme. Disegnate con Desmos la parabola $y = x^2$ e segnate anche il punto $P = (1, 1)$.

Adesso facciamo un ragionamento rispetto a quel triangolo blu tratteggiato: lo abbiamo ottenuto spostando 'un pochino più avanti' ed 'un pochino più indietro' il punto P. Cosa significa 'un pochino'? Vedremo che non ha alcuna importanza, ma per esempio proviamo con 0.5. Sulla parabola ora ci sono tre punti (da cui, il nome della formula). Calcoliamo la pendenza m del segmento blu:

	A	B
1	x	y = x^2
2	0,5	0,25
3	1	1
4	1,5	2,25



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.25 - 0.25}{1.5 - 0.5} = \frac{2}{1} = 2$$

Quindi, il segmento di retta blu ha una pendenza $m = 2$. Vogliamo mostrare che questa può anche essere pensata come la pendenza della parabola $y = x^2$ nel punto $P = (1,1)$. A tale proposito, procediamo in questo modo:

Esempio 2.4.2 — da fare assieme. Dopo aver disegnato con Desmos la parabola $y = x^2$ ed il punto $P = (1,1)$, disegnate la retta $y = 2x + q$, aggiungendo uno slider per q. Muovete q fino a sovrapporla al punto P. Successivamente, 'zoomate' lo schermo parecchie volte osservando che la retta verde si confonde con la parabola rossa, come in questo video `https://youtu.be/Ps5tHnu3gFc`

Conclusione: con la regola dei tre punti siamo riusciti a calcolare che nel punto $P = (1,1)$ la parabola $y = x^2$ ha pendenza 2. Ora siamo pronti per passare al concetto più generale di **funzione derivata**. Ma prima, impariamo a memoria due simboli

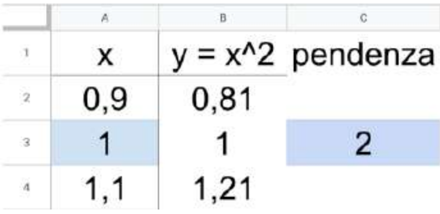
Definizione 2.4.1 — da imparare a memoria. Con il simbolo Δy indicheremo sempre il **numeratore** della formula dei tre punti, mentre con il simbolo Δx indicheremo sempre il **denominatore**.

■ **Esercizio 2.5 — con Desmos.** Riprendiamo la funzione $y = 3x^2 \cdot (2-x)^2$; con la regola dei tre punti calcolate la pendenza m in $x = 0.5$. Dopo aver calcolato m, disegnate la retta $y = mx + q$. Muovete lo slider q sino a -0.562 ed eseguite uno zoom. Cosa osservate? ■

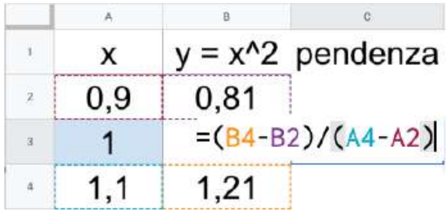
2.5 Dalla pendenza alla derivata

Adesso, aiutiandoci con il foglio elettronico, ci chiediamo: come cambia la pendenza se mi muovo lungo il grafico della funzione? Riprendiamo l'esempio precedente:

Esempio 2.5.1 — da fare assieme. Consideriamo la parabola $y = x^2$. Creiamo un foglio elettronico mediante il quale inserendo un punto x qualsiasi si ottenga la pendenza della parabola in quel punto, usando la formula dei tre punti (per esempio con incremento ± 0.1).



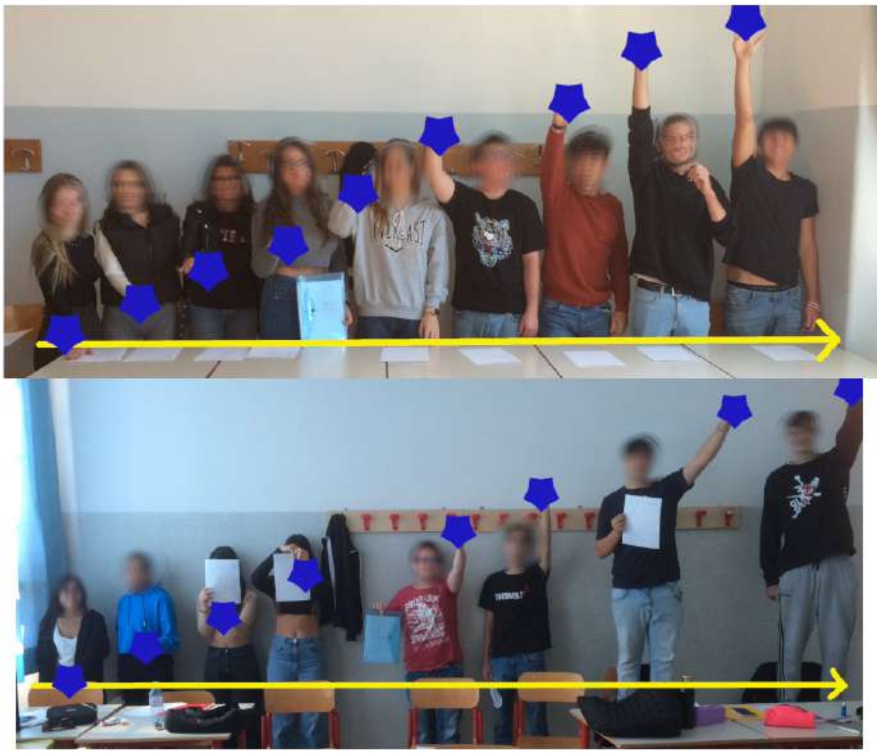
	A	B	C
1	x	y = x^2	pendenza
2	0,9	0,81	
3	1	1	2
4	1,1	1,21	



	A	B	C
1	x	y = x^2	pendenza
2	0,9	0,81	
3	1	=(B4-B2)/(A4-A2)	
4	1,1	1,21	

Grazie a questo foglio elettronico possiamo completare una tabella simile a questa e visualizzarla in classe, come hanno fatto la quinta O e la quinta P:

x	pendenza
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



Abbiamo sottomano un'intuizione importante, che possiamo persino formalizzare in maniera solenne, come si usava fare quando la matematica si faceva con 'carta e matita':

Teorema 2.5.2 — la derivata di x al quadrato. La derivata di $y = x^2$ è la funzione $y = 2x$.

Noi possiamo facilmente dimostrare questo teorema, se ricordiamo un po' di algebra del biennio. Dovremo infatti ricordarci del fatto che $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

Dimostrazione FACOLTATIVA. Applichiamo la regola dei tre punti a questa tabella 'astratta'

x	y
$x-h$	$(x-h)^2$
x	x^2
$x+h$	$(x+h)^2$

Calcoliamo:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{(x+h)-(x-h)} =$$

$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 - (x^2 - 2xh + h^2)}{(x+h-x+h)}$$

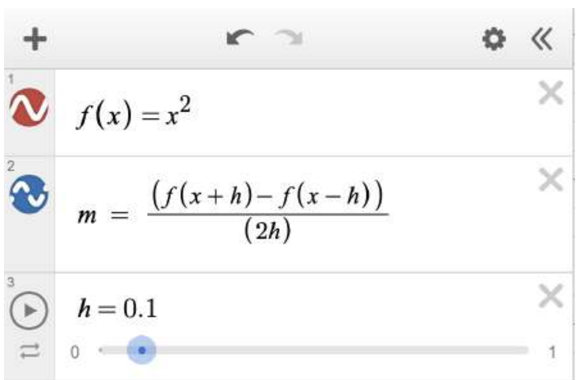
$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2 + 2xh - h^2}{(h+h)}$$

$$\frac{2xh + 2xh}{2h}$$

$$\frac{4xh}{2h} = 2x$$

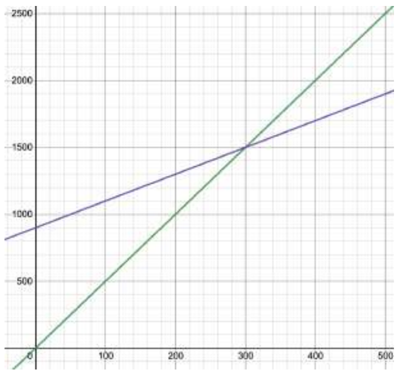
Abbiamo concluso la dimostrazione: in un qualsiasi punto x della parabola $y = x^2$ la pendenza vale $2x$, il doppio di x. In breve, si dice che: *la derivata di x^2 è $2x$* . Molto spesso, la derivata si indica anche con y'.

■ **Esercizio 2.6 — con Desmos.** Al posto di scrivere y, inserite la parabola usando il simbolo di funzione $f(x) = x^2$ ed inserite la regola dei tre punti m, aggiungendo uno slider per h. Cosa ottenete? Cosa succede se muovete lo slider h? ■



2.6 La derivata di una retta

Nel teorema 2.5.2 abbiamo imparato che la derivata della parabola $y = x^2$ è la retta $y = 2x$. Chiediamoci: e se fossimo invece partiti da una retta, chi sarebbe stata la sua derivata? Vi ricordate l'esempio del break even point e della pizzeria Massimino Pomodorino:



Ad esempio, la retta viola dei costi aveva equazione $y = 2x + 900$, perché avevamo un costo fisso $q = 900$ (lo stipendio mensile del pizziolo) e un costo variabile $m = 2$, il prezzo degli ingredienti per confezionare una pizza. Ma abbiamo appena imparato che la **derivata** rappresenta il cambiamento della **pendenza** di una funzione; e la pendenza di una retta è individuata dal **coefficiente angolare** m. Quindi, nell'esempio della pizza, la derivata di $y = 2x + 900$ è esattamente $y' \equiv m = 2$.

■ **Esercizio 2.7 — sul vostro quaderno.** Nella pizzeria Massimino Pomodorino la retta dei costi era $y = 5x$. Quanto vale la sua derivata? ■

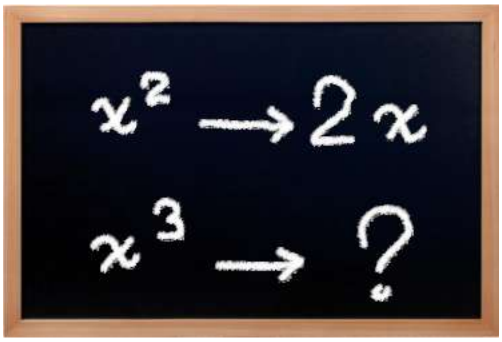
■ **Esercizio 2.8 — sul vostro quaderno.** Ricordate questo segnale stradale? Cosa c'entra questo segnale con la derivata? ■

■ **Esercizio 2.9 — per i volontari della carta e della matita.** Provate a ripetere la Dimostrazione del teorema 2.5.2 adattandolo alla retta viola dei costi $y = 2x + 900$. Cosa ottenete? ■

2.7 Alla scoperta di alcune derivate

2.7.1 la derivata delle potenze

Abbiamo imparato sinora che la derivata di $y = x^2$ è $y = 2x$. Lo scriviamo sulla lavagna e chiediamo alla classe di provare a fare qualche congettura sul seguente problema: quale potrebbe essere la derivata di $y = x^3$?



Aiutiamo la classe (con ad esempio il foglio elettronico o con Desmos, implementando la regola dei tre punti) a compilare una tabella come questa

x	pendenza
1	3
2	12
3	27
4	48

Aiutiamo ad osservare che i numeri che abbiamo ottenuto 'sono nella tabellina del tre', e proviamo a dividerli per tre:

x	pendenza	pendenza/3
1	3	1
2	12	4
3	27	9
4	48	16

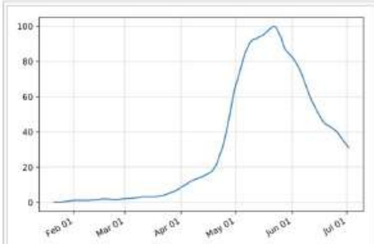
Aiutiamo ora ad osservare che i numeri che otteniamo sono i quadrati di x, e conduciamo la classe alla congettura che la derivata di x^3 sia $3x^2$.

Infine, proviamo a far intuire quali possano essere la derivata di x^4, o di x^5, arrivando alla congettura finale:

$$\boxed{D(x^n) = nx^{n-1}}$$

Scheda di lavoro.

Supponiamo che il *fidget spinner* abbia avuto un ciclo di vita del prodotto della durata di un anno soltanto, con un periodo di vendite elevato attorno alla stagione estiva, e con un rapido declino autunnale.



Google Search popularity of fidget spinners in early 2017.

Supponiamo che la funzione adatta a descrivere questo fenomeno sia:

1

$$y = x^2 - x^3$$

Per favore, **1.** calcolate il punto $P = (x, y)$ della funzione sapendo che $x = 0.8$

$P = ($ 0.8 , ________ $)$

Poi, **2.** mediante la *formula dei tre punti* calcolate la pendenza del grafico nel punto *P,* usando un incremento h = 0.01

x	$x^2 - x^3$
0.79	
0.8	
0.81	

Per favore, **3.** calcolate con il metodo algebrico la derivata della funzione, e successivamente valutatela in $x = 0.8$.

$$D\left(x^2 - x^3\right) =$$

Da ultimo, **4.** per gentilezza, spiegate a voce cosa succede se eseguiamo questi grafici con Desmos.

1 $f(x) = x^2 - x^3$

2 $m = \dfrac{\left(f(x + 0.01) - f(x - 0.01)\right)}{0.02}$

3 $D = 2x - 3x^2$

2.8 Cosa abbiamo capito fino a qui

Realizziamo una mappa concettuale di tutto quello che abbiamo imparato dall'inizio dell'anno a proposito della derivata di una funzione:

A questo punto siamo in grado di realizzare una tabella, che attaccheremo al muro della nostra aula, la quale collezioni i risultati che abbiamo finora visto (e anche quelli che non abbiamo visto, ma si sta poco a verificarli, usando Desmos):

funzione	**derivata**
$f(x) = k$	$y = 0$
$f(x) = x$	$y = 1$
$f(x) = x^2$	$y = 2x$
$f(x) = x^n$	$y = nx^{n-1}$

Questa tabella ci sarà molto utile adesso che dobbiamo impratichirci con le cosiddette regole di derivazione, le quali ci permettono di calcolare qualsiasi derivata 'in maniera simbolica'. Vediamo come.

E.S. Alla Commissione d'Esame spiegate con sicurezza cosa vuol dire, ad esempio, che la derivata di x^2 è $2x$.

2.9 Regole di derivazione: il calcolo simbolico

2.9.1 derivata della somma

Abbiamo accennato al fatto che il ciclo di vita del prodotto del giocattolo 'fidget spinner' si può provare a descrivere come 'somma' di due funzioni, la funzione x^2 e la funzione x^3, ed abbiamo verificato con un esempio che la derivata $D(x^2 - x^3)$ era proprio uguale a $2x - 3x^2$, ossia alla 'somma' delle due derivate. Non ci stupisce dunque che possa valere questa regola generale:

$$\boxed{D\left(f(x) + g(x)\right) = Df(x) + Dg(x)}$$

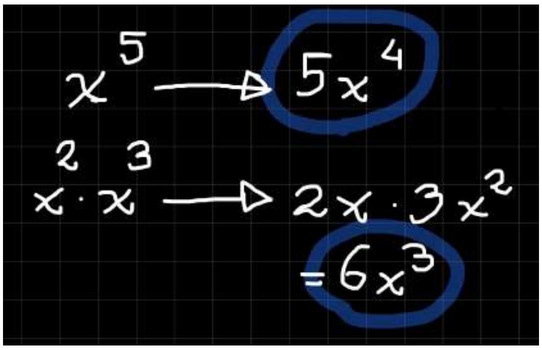
■ **Esercizio 2.10 — sul vostro quaderno.** Servitevi della tabella precedente per calcolare simbolicamente:

- $D\left(\sin(x) + \exp(x)\right)$
- $D\left(\ln(x) + \cos(x)\right)$
- $D\left(\sqrt{x} + x^6\right)$

■

2.9.2 derivata del prodotto

Qui le cose si complicano, di parecchio. Partiamo dal fatto che sappiamo che $x^2 \cdot x^3 = x^5$ e che la derivata di x^2 vale $2x$, quella di x^3 vale $3x^2$ ed infine che quella di x^5 vale $5x^4$. Cosa c'è di sbagliato allora in questa lavagna?



C'è di sbagliato, purtroppo, che non è vero che $D\left(f(x) \cdot g(x)\right) = Df(x) \cdot Dg(x)$; ossia la derivata del prodotto non è il prodotto delle derivate. Ma vale invece una regola apparentemente incomprensibile:

$$\boxed{D\left(f(x) \cdot g(x)\right) = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)}$$

E dunque, sulla lavagna avremmo dovuto scrivere:

$$D\left(x^2 \cdot x^3\right) = D\left(x^2\right) \cdot x^3 + x^2 \cdot D\left(x^3\right) = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$$

Esempio 2.9.1 — con Desmos. Cercate di capire, passo per passo, cosa sta succedendo qui: `https://www.desmos.com/calculator/ldu5wvi9n6?lang=it`

Spiegazione facoltativa. Se volete capire il perché di questa strana formula, possiamo ripetere i passaggi della dimostrazione del Teorema 2.5.2, adattandoli al nostro caso. Vogliamo qui verificare che, in base alla regola dei tre punti:

$$D\left(x^2 \cdot x^3\right) = D\left(x^2\right) \cdot x^3 + x^2 \cdot D\left(x^3\right) =$$

Partiamo da sinistra, applicando la regola dei tre punti:

$$D\left(x^2 \cdot x^3\right) = \frac{(x+h)^2 \cdot (x+h)^3 - (x-h)^2 \cdot (x-h)^3}{2h}$$

Ora facciamo un trucco; al numeratore aggiungiamo e togliamo (in colore blu) la medesima quantità:

$$= \frac{(x+h)^2 \cdot (x+h)^3 - (x-h)^2 \cdot (x+h)^3 + (x-h)^2 \cdot (x+h)^3 - (x-h)^2 \cdot (x-h)^3}{2h}$$

Separiamo la frazione in due parti e spostiamo un poco i pezzettini della formula, raccogliendoli a fattore comune:

$$= \frac{(x+h)^2 \cdot (x+h)^3 - (x-h)^2 \cdot (x+h)^3}{2h} + \frac{(x-h)^2 \cdot (x+h)^3 - (x-h)^2 \cdot (x-h)^3}{2h} =$$

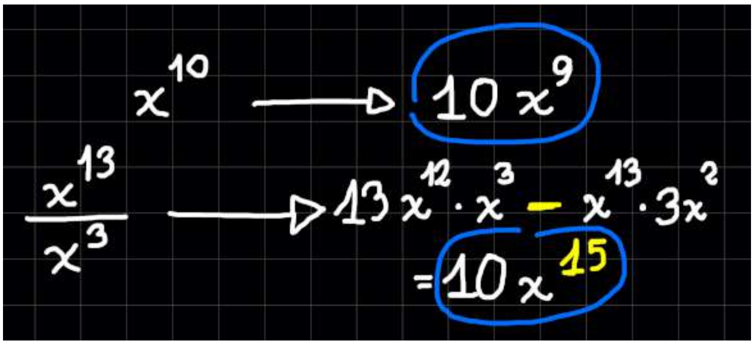
$$= \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{2h} \cdot (x+h)^3 + \frac{(x+h)^3 - (x-h)^3}{2h} \cdot (x-h)^2 =$$

$$\approx D(x^2) \cdot (x+h)^3 + D(x^3) \cdot (x-h)^2 \approx D(x^2) \cdot x^3 + D(x^3) \cdot x^2$$

Abbiamo concluso la verifica, accettando l'approssimazione $x-h \approx x \approx x+h$, che è ragionevolmente valida quando consideriamo ad esempio $h = 0.001$.

2.9.3 derivata del quoziente

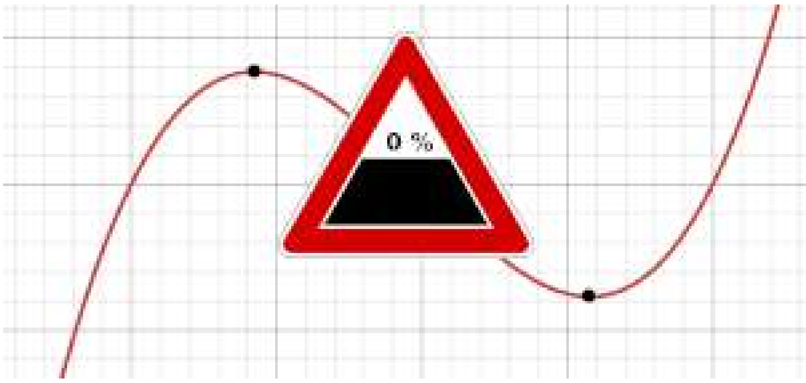
Ci chiediamo se possiamo provare a modificare la formula della derivata del prodotto per ottenere una regola che ci permetta di calcolare $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$. Se cerchiamo di adattare le relazione del prodotto, magari mettendo un meno al posto del più, vediamo che con i coefficienti le cose andrebbero bene, ma non con gli esponenti:



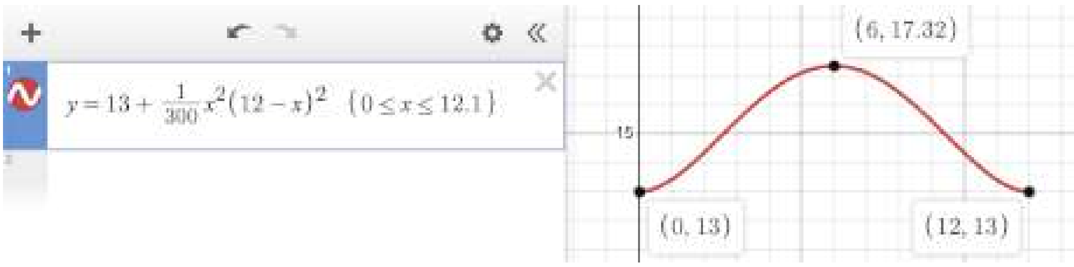
Potremmo fare altri tentativi, considerando x^14/x^4, x^15/x^5. Oppure, provare a considerare la derivata di x^11 ed il quoziente x^14/x^3, la derivata di x^12 ed il quoziente x^15/x^3 .. Ci accorgiamo e possiamo intuire che solamente dividendo per x^6 i conti tornano nel primo caso. E forse ci potrebbe venire in mente di dividere per il **quadrato** del denominatore, arrivando alla seguente formula finale, veramente strana. Vedremo un'importante applicazione di questa formula quando riparleremo di ciclo di vita del prodotto:

$$\boxed{D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{(Df(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot (Dg(x))}{(g(x))^2}}$$

2.10 Cosa succede se la derivata è uguale a zero?



Il segnale stradale di *pendenza zero* ovviamente non esiste; tuttavia, non sarebbe sbagliato metterlo in cima ad una collina, o nel fondo di una valle. Ci sembra infatti del tutto intuitivo che in un grafico, quando ci troviamo in una situazione di **massimo** o di **minimo** (per esempio quando 'gli affari' smettono di andar bene ed iniziano ad andar male, o viceversa), la pendenza del grafico sia nulla, ovvero, che **la derivata sia uguale a zero**.

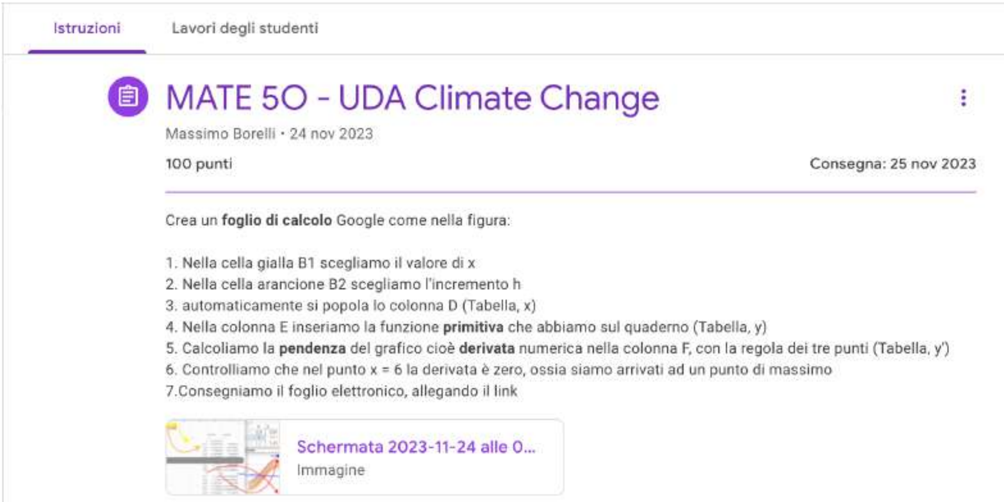


Esempio 2.10.1 — innalzamento della temperatura globale. Nel paragrafo 2.1 abbiamo visto la figura 2.1 apparsa su Nature, denominata 'Heat rising'. Proviamo a modellarla con Desmos come vediamo qui sopra, ipotizzando che la **funzione primitiva** $y = 13 + \frac{1}{300} \cdot x^2 \cdot (12-x)^2$ sul dominio $x \in [0,12]$ (nel disegno abbiamo leggermente imbrogliato per far comparire il punto di coordinate $(12,13)$). Provate a fare il calcolo, carta e matita, della derivata prima. Poi rappresentate la **funzione derivata** che avete ottenuto si annulla in $x = 6$. Giusto? Come spiegate questo fatto?

Esempio 2.10.2 — innalzamento della temperatura globale /2. In laboratorio di informatica, inserite in un foglio Google Sheet la **funzione primitiva** $y = 13 + \frac{1}{300} \cdot x^2 \cdot (12-x)^2$ in una tabella che scandisca il dominio $x \in [0,12]$ a passo 0.01. Calcolate con la regola dei tre punti 2.4 la derivata numerica della primitiva. Ritrovate quello che abbiamo appena visto? Caricate il vostro lavoro in `https://classroom.google.com/c/NTU5NDY2MTMyODM0/a/NTMwNzQxMTQxNzQ5/details`

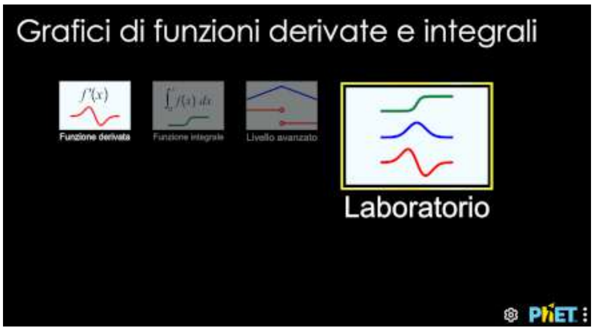
2.11 Cosa succede se la derivata seconda è uguale a zero?

Attenzione, con la derivata uguale a zero non è tutto così banale. Prendete Desmos e disegnate il grafico della funzione $y = x^3$. Vi sembra che lo zero sia un massimo o un minimo? Eppure, se



calcolate la derivata $y' = 3x^2$ essa, in $x = 0$ vale zero. Quindi non è sempre detto che se la derivata è uguale a zero siamo in presenza di un punto di massimo o di minimo, perché avevamo imparato lo scorso anno che esistono anche i **punti di flesso**, dove una funzione da **concava** diventava **convessa**, o viceversa.

Esempio 2.11.1 — primitiva e derivata. Esercitiamoci in laboratorio con PhET, il sito web della Università del Colorado `https://phet.colorado.edu/it/simulations/calculus-grapher` ad intuire che 'forma' possono avere le funzioni derivate, se conosciamo qualitativamente il grafico delle funzioni primitive. Vedrete anche che è possibile calcolare 'la derivata della derivata', che è la funzione che permette di individuare in maniera precisa i **flessi** di una funzione.



E.S. Riferendosi alla rappresentazione grafica 2.1 'Heat Rising', alla Commissione d'Esame spiegate dove il grafico è concavo, dove è convesso e dove sono localizzati i punti di flesso.

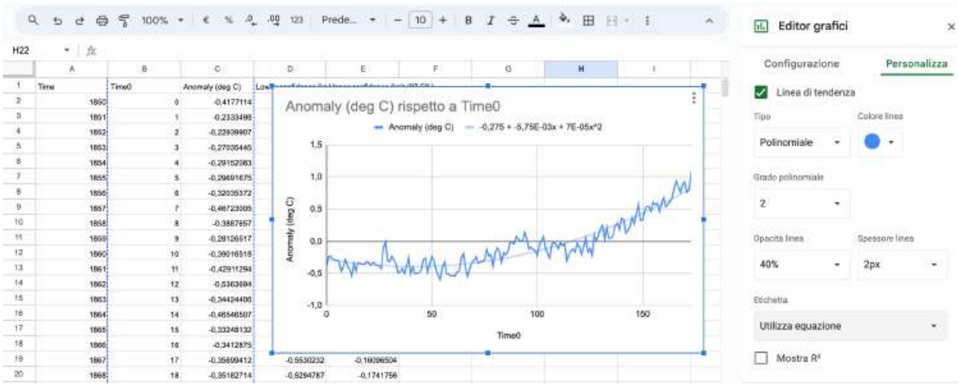
3. Il campionamento e l’inferenza

3.1 Il campionamento

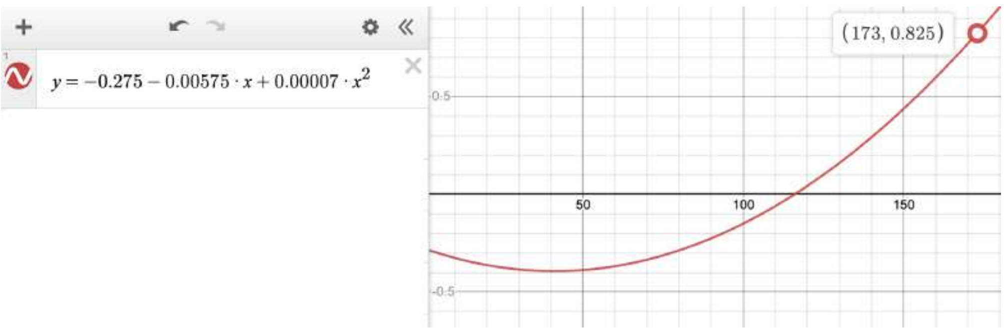
Per seguire l’andamento della temperatura terrestre, non potendo ovviamente misurarlo in ogni luogo del pianeta ad ogni istante, si procede con un **campionamento**: significa, per esempio, che un’ente scientifico raccoglie qualche migliaio di dati, per esempio mese per mese; e sulla base della media di questi dati formula l’**ipotesi** (quindi un pensiero, una congettura, non la realtà) che questa media corrisponda alla reale temperatura media del pianeta. Questo tipo di ragionamento statistico rappresenta un esempio di **inferenza induttiva**: partendo da un piccolo insieme di misure, valutandone la loro **affidabilità**, si calcola un **consuntivo** e si stima il valore ignoto di interesse, con un determinato **grado di fiducia**.

	A	B	C	D
1	Time	Anomaly (deg C)	Lower confidence limit (2,5%)	Upper confidence limit (97,5%)
2	1850	-0,42	-0,59	-0,25
3	1851	-0,23	-0,41	-0,05
4	1852	-0,23	-0,41	-0,05
5	1853	-0,27	-0,43	-0,11
6	1854	-0,29	-0,43	-0,15
7	1855	-0,30	-0,44	-0,15
8	1856	-0,32	-0,47	-0,17
9	1857	-0,47	-0,62	-0,32
10	1858	-0,39	-0,54	-0,24
11	1859	-0,28	-0,42	-0,14
12	1860	-0,39	-0,54	-0,24

Come vedete nel foglio elettronico `https://bit.ly/3RySYSv`, l’università di Norwich pubblica all’indirizzo `https://bit.ly/4861DDf` i dati delle variazioni (’anomalie’) annuali della temperatura, dal 1850 ad oggi. Sfrutteremo questo campione di dati pensando che questo sia rappresentativo della temperature media della nostra Terra per un’attività di laboratorio; prima però dobbiamo riprendere un concetto che abbiamo introdotto in quarta, nella unità didattica dedicata alle 'smart cities': il concetto di **linea di tendenza**, ma questa volta applicato ad una **serie temporale**.



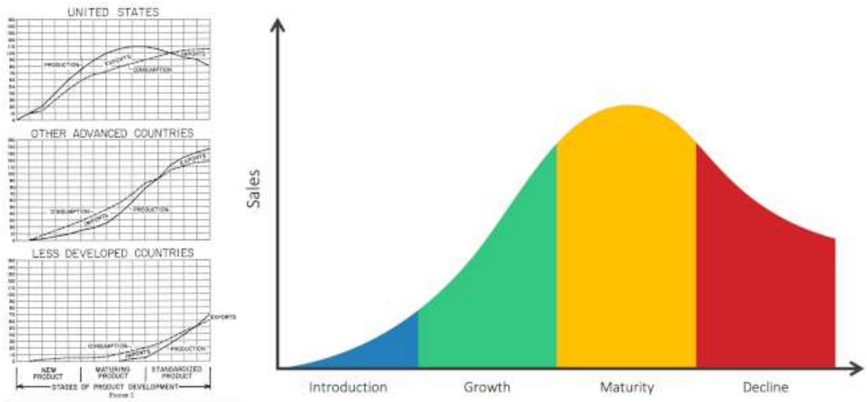
Dopo aver introdotto una colonna di numeri interi che fissano a 0 l'anno di partenza (il 1850) modifichiamo il grafico con il menu Personalizza | Serie aggiungendo una Linea di tendenza di tipo Polinomiale di grado 2, e come Etichetta chiediamo di mostrare l'equazione della linea di tendenza. Se inseriamo quella equazione in Desmos, possiamo mettere in evidenza che per il 2023 ci saremmo potuti aspettare una 'anomalia' di circa 0.8 gradi centigradi (in effetti, il dato osservato è ben più preoccupante, $+1.1$ gradi centigradi).



Il ciclo di vita del prodotto

4. L'area di un grafico

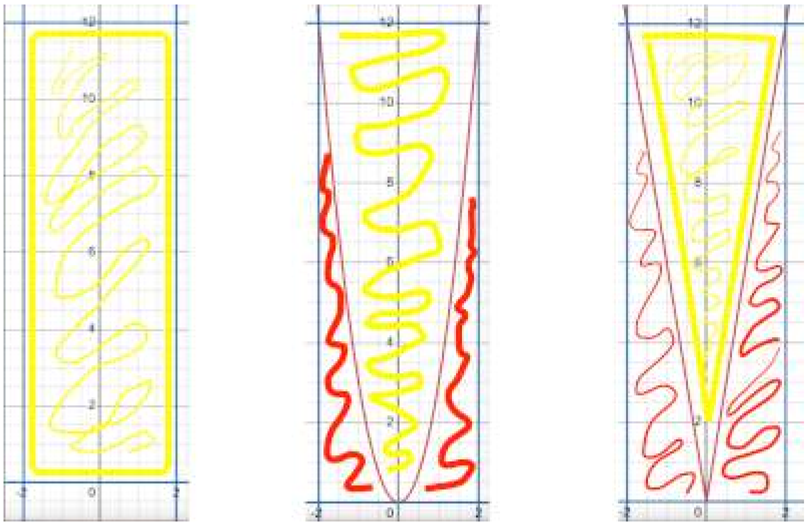
4.1 Stimare la percentuale della produzione: inizio



Siamo giunti al momento fatidico, la conclusione del discorso che avevamo iniziato lo scorso anno: avevamo detto che, di solito, nel ciclo di vita del prodotto ideato da Raymond Vernon si distinguono quattro fasi (introduzione, crescita, maturità e declino) ma che risulta estremamente impegnativo riuscire a calcolare la percentuale di produzione del bene nella fase azzurra, o in quella verde, o in quella gialla o infine in quella rossa. Anche perché riusciamo immediatamente ad intuire che si tratterebbe di calcolare l'area di quelle quattro regioni colorate, e non ci ricordiamo di alcuna maestra o professoressa di matematica che, sinora, ce ne abbia parlato. Prima di procedere però, studiamo una funzione che rappresenti un ipotetico ciclo di vita del prodotto.

■ **Esercizio 4.1 — sul vostro quaderno.** Rappresentate con Desmos la funzione $y = \frac{x^2}{\exp(x)}$ sul dominio $0 \leq x \leq 10$. Poi utilizzate il sito web `https://www.derivative-calculator.net/` per calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione. Calcolate anche gli 'zeri' delle derivate per individuare con precisione il massimo ed i due flessi. ■

4.2 Il problema dell'area



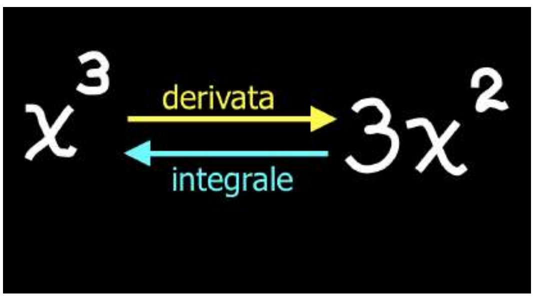
Cominciamo da una cosa facilissima: calcolare l'area della figura gialla a sinistra. È banale, si tratta di un rettangolo, e tutti conosciamo la formula $A = b \cdot h$. L'area della superficie gialla vale dunque $4 \cdot 12 = 48$. Adesso, passiamo alla figura di destra. Quanto misura l'area gialla e quanto misurano quindi le due aree rosse? Beh, possiamo usare la formula dell'area del triangolo, $\frac{b \cdot h}{2}$; oppure ragionare per simmetria e riconoscere quattro triangoli rettangoli che hanno la medesima forma e le medesime dimensioni. Fatto sta che l'area gialla vale 24, e le due aree rosse 12 ciascuna.

Ma ecco che se ci chiediamo quanto valgono le aree rosse e l'area gialle nella figura di mezzo siamo tutti in difficoltà. Eppure, il problema di calcolare le aree ed i volumi di oggetti 'curvilinei' ha avuto da sempre una enorme importanza.

> **Approfondimento interdisciplinare 4.2.1 — Chi l'avrebbe mai detto.** Cercate in rete: di che cosa ci si occupa nel libro intitolato *Nova stereometria doliorum vinariorum*? In che anno è stato pubblicato? Chi è l'autore? Ed infine, quale era il vero 'mestiere' dell'autore? Tenete bene a mente questa ultima informazione, le recuperiamo fra pochissimo.

4.3 Il teorema di Torricelli

Sono stati tanti i matematici di ogni tempo che si sono occupati di questo problema (Keplero, Newton, Leibniz, ...) ma agli italiani piace ricordare il contributo del fisico Evangelista Torricelli, che assieme allo scozzese Isaac Barrow ci ha insegnato a collegare il calcolo dell'area di un grafico con quello della derivata, per mezzo del concetto di **integrale**, inteso come l'azione inversa della derivata:



Ricordando che questi matematici hanno vissuto in pieno periodo barocco, non dobbiamo meravigliarci che la notazione utilizzata per dire che l'integrale di $3x^2$ è x^3 è molto arzigogolata:

$$\int 3x^2\,dx = x^3$$

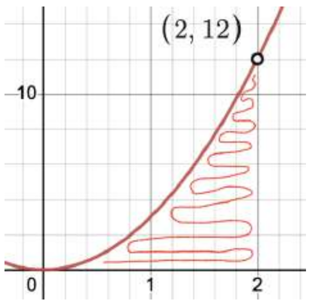
Si dice anche che x^3 è una funzione **primitiva** di $3x^2$, ed il teorema di Torricelli stabilisce che se voglio calcolare l'area di uno di quei due triangoli curvi del paragrafo precedente, ossia se voglio calcolare

$$\int_0^2 3x^2\,dx$$

basta che io calcoli la differenza dei valori della primitiva negli estremi di integrazione, ossia $2^3 - 0^3 = 8$:

$$\int_0^2 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8$$

In conclusione, l'area del 'triangolo curvilineo' qui sotto tratteggiato vale 8. E per simmetria, possiamo concludere che la figura gialla del paragrafo introduttivo misurava $48 - 2\cdot 8 = 48 - 16 = 32$.



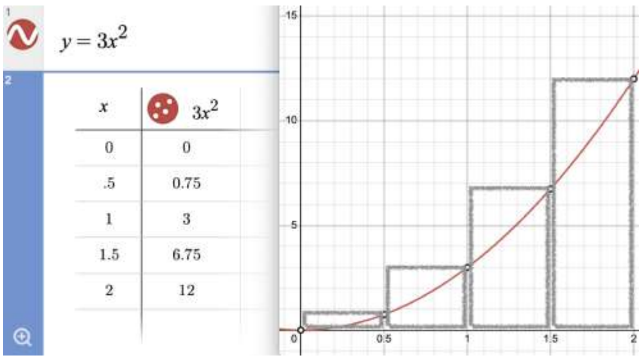
4.4 Calcolare numericamente un integrale

Quinto anno	
Conoscenze	***Abilità***
Il calcolo integrale nella determinazione delle aree e dei volumi. Sezioni di un solido. Principio di Cavalieri. Concetti di algoritmo iterativo e di algoritmo ricorsivo. Cardinalità di un insieme. Insiemi infiniti. Insiemi numerabili e insiemi non numerabili. Probabilità totale, condizionata, formula di Bayes.	Calcolare aree e volumi di solidi e risolvere problemi di massimo e di minimo. Calcolare l'integrale di funzioni elementari, per parti e per sostituzione. Calcolare integrali definiti in maniera approssimata con metodi numerici.

Adesso che abbiamo imparato il concetto basilare, ossia che calcolare l'integrale richiede di saper eseguire l'operazione inversa della derivata, arrivano le brutte notizie: salvo pochi casi fortunati, se abbiamo una funzione $y = f(x)$ non riusciremo mai a trovare una primitiva $y = F(x)$, la cui derivata sia appunto $y = f(x)$, a meno che la funzione di partenza $y = f(x)$ sia una **funzione elementare**, una di quelle poche che abbiamo pazientemente imparato a calcolare nel Capitolo 2. Ma gli astronomi dei secoli passati dovevano fare dei calcoli tutt'altro che elementari; e come dicevamo, il consumo dell'energia elettrica è del tutto 'irregolare' ma di certo la società fornitrice non si arrende se deve calcolarne il prezzo della fattura bimestrale. Impariamo allora due **metodi numerici** che consentono di calcolare, in maniera sorprendentemente semplice, qualsiasi (dico qualsiasi) **integrale definito**.

4.4.1 il metodo dei rettangoli

Vi ricordate lo schema che abbiamo realizzato nella sezione 2.8? Lo schema ci diceva che abbiamo un modo simbolico, esatto, per calcolare la derivata di una funzione. Oppure, potevano accontentarci di un metodo approssimato, la regola dei tre punti. Anche per il calcolo integrale possiamo procedere in questo modo: cercando di usare i metodi simbolici, esatti, come nell'esempio precedente (spoiler: i metodi simbolici sono quasi sempre molto difficili, e spesso accade che non si sappia nemmeno come si debba procedere); oppure usare dei metodi approssimati. Il metodo più semplice prende il nome di **metodo dei rettangoli**, ed è molto semplice da illustrare: si suddivide l'intervallo di integrazione in un certo numero di segmenti, si considerano le altezze dei rettangoli semplicemente calcolando i valori della funzione $f(x)$ e si sommano le aree assieme:



■ **Esercizio 4.2 — con il foglio elettronico.** Con il foglio elettronico è piuttosto semplice implementare questo metodo. Proviamo a farlo assieme, come in questo esempio: `https://bit.ly/3yTtztS` ■

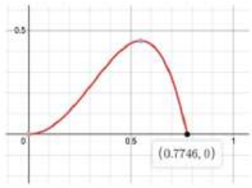
4.5 Stimare la percentuale della produzione: conclusione

Adesso che abbiamo sottomano addirittura due metodi rapidi per il calcolo numerico degli integrali, possiamo dare facilmente risposta alla domanda che abbiamo posto ad inizio di questo capitolo: per esempio, quanto vale l'area 'verde' del ciclo di vita del prodotto? Basterà procedere in questo modo: considerare una funzione $y = f(x)$ il cui grafico sia adatto al nostro scopo, e calcolare con un metodo numerico l'integrale A di tutto il dominio del grafico, e poi ripetere lo stesso calcolo solamente sull'intervallo $[a,b]$: troveremo un'area ovviamente minore, che chiamiamo per esempio I. Calcolando il rapporto percentuale I/A avremo stimato la percentuale di produzione occorsa il quel determinato intervallo temporale. Vediamolo con una scheda di lavoro.

Nome e Cognome: ______________________

Per gentilezza, calcola l'integrale del 'ciclo di vita del prodotto':

$$y = 3x^2 - 5x^4$$



per $0 < x < 0.7746$

Poi, per piacere, calcola lo stesso integrale per $0.2 < x < 0.5$

Fai un disegno schematico di quello che hai trovato.

Infine, calcola il rapporto percentuale tra le due aree.

Riassunto

Ci dovremo ricordare, con sicurezza, che:

1. l'integrale è l'operazione inversa della derivata: lo garantisce il teorema di Torricelli
2. calcolare l'integrale può essere difficile, se non impossibile (a parte alcuni casi elementari)
3. ma ogni integrale si può sempre approssimare con metodi numerici, ad esempio il metodo dei rettangoli

E.S. Riferendovi ad una azienda che avete studiato, descrivete alla Commissione d'Esame il ciclo di vita del prodotto, mettendo in evidenza perché alla rappresentazione grafica 2.1 'Heat Rising', alla Commissione d'Esame spiegate dove il grafico è concavo, dove è convesso, dove sono localizzati i punti di flesso.

Dalla comunicazione di massa ai Social media

IV

La nostra linea del tempo

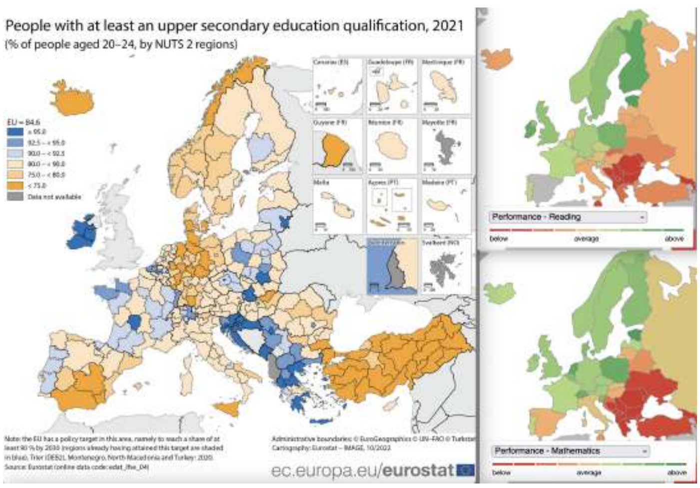
V

Sapersi valutare

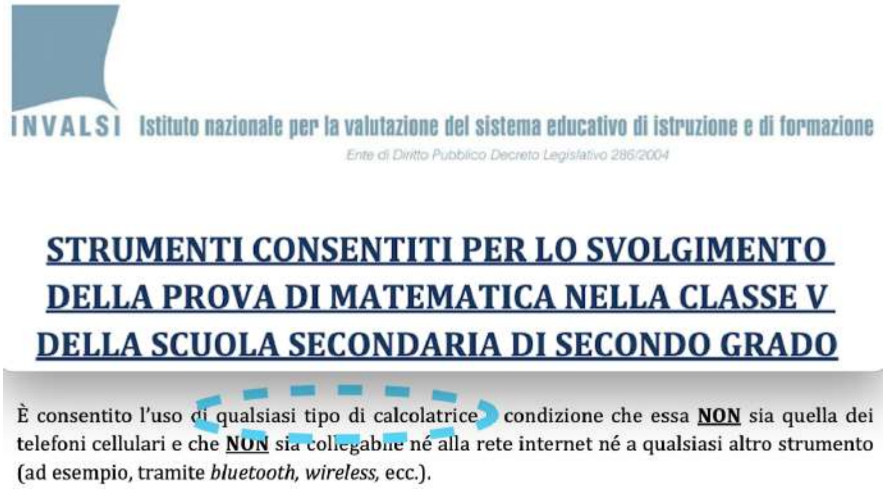
5. Sapersi valutare

5.1 Valutare significa 'dare valore'

Guardiamo assieme queste mappe, che a sinistra evidenziano la percentuale dei cittadini delle varie Regioni europee che hanno conseguito il diploma di scuola secondaria. A destra invece vediamo, a livello nazionale, le competenze linguistiche e matematiche raggiunte secondo il monitoraggio denominato 'Pisa-Ocse', che noi comunemente indichiamo con la parola **prova Invalsi**. Vi accorgete che i grafici sembrano esser in disaccordo; quindi deduciamo che se usiamo i 'risultati Invalsi' per verificare il livello medio di istruzione di un Paese, oppure per stimarne il tasso di abbandono scolastico, potremmo andare fuori strada. Viceversa, la prova Invalsi deve per noi rappresentare una positiva occasione di autovalutazione, laddove il verbo valutare viene usato nella accezione di **dare valore a noi stessi**, mettere in luce i nostri punti di forza, sia mostrando ciò che abbiamo ben appreso, sia che siamo capaci di affrontare un problema che non conosciamo con i mezzi ed i metodi di cui ci siamo impadroniti.



Vogliamo qui rilevare un punto cruciale: se andiamo a leggere con attenzione le istruzioni Invalsi `https://bit.ly/41QO4Vm` della prova, vediamo che è *consentito l'uso di **qualsiasi** tipo di calcolatrice*, che però non sia collegabile alla rete Internet:

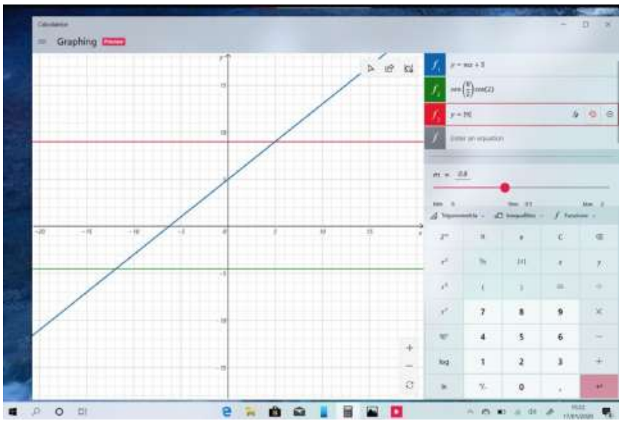

INVALSI Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione

Ente di Diritto Pubblico Decreto Legislativo 286/2004

STRUMENTI CONSENTITI PER LO SVOLGIMENTO DELLA PROVA DI MATEMATICA NELLA CLASSE V DELLA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

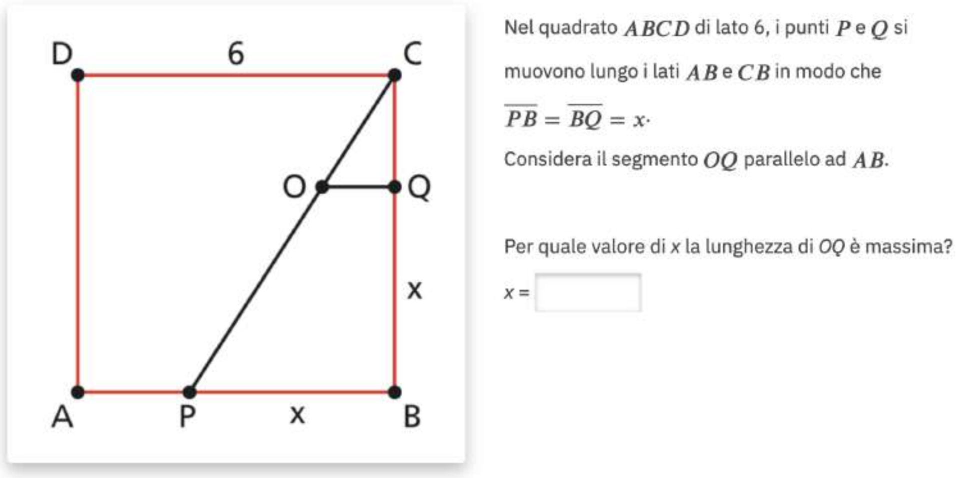
È consentito l'uso di qualsiasi tipo di calcolatrice a condizione che essa **NON** sia quella dei telefoni cellulari e che **NON** sia collegabile né alla rete internet né a qualsiasi altro strumento (ad esempio, tramite *bluetooth*, *wireless*, ecc.).

Questa frase ci fa capire che certamente potremmo spendere un centinaio abbondante di euro per acquistare una calcolatrice grafica persino dotata di c.a.s. (la possibilità di far compiere alla macchina calcoli algebrici), e usarla lecitamente in aula. Oppure, di scaricare la app gratuita di Desmos nel nostro tablet e di togliere la schedina gsm in presenza dei docenti di sorveglianza. Ma la soluzione più semplice da adottare è quella di utilizzare la Calcolatrice del sistema Windows, in modalità grafica:

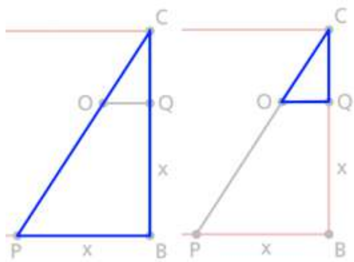


5.2 Risolvere problemi di massimo e di minimo

La casa editrice Zanichelli ha raccolto alcuni esempi di prove, all'indirizzo `http://bit.ly/3JpGeeR`. Prendiamo in esame questo quesito:



Lo proviamo a replicare con Desmos: vedete che abbiamo dovuto ribaltare la figura per poter inserire lo slider a: `https://www.desmos.com/calculator/qhaxzl4yg0`. Ora, concentriamoci su questi due triangoli, BCP e QCO:



Se ricordiamo cosa sono i triangoli simili, possiamo facilmente scrivere una proporzione:

$$x : y = 6 : (6 - x)$$

La risolviamo:

$$y = \frac{x \cdot (6 - x)}{6}$$

$$y = x - \frac{1}{6}x^2$$

Esempio 5.2.1 — con Desmos. Disegnate il grafico della funzione $y = x - \frac{1}{6}x^2$. La riconoscete? Quale suo punto notevole andremo a considerare?

Questo problema ci dà occasione per ripetere come con il calcolo differenziale si possano individuare gli estremi di una funzione. Abbiamo la legge $y = x - \frac{1}{6}x^2$; calcoliamo simbolicamente la derivata, con le regole che abbiamo appreso alla Sezione 2.9:

$$y' = 1 - \frac{1}{6} \cdot 2x$$

$$y' = 1 - \frac{1}{3} \cdot x$$

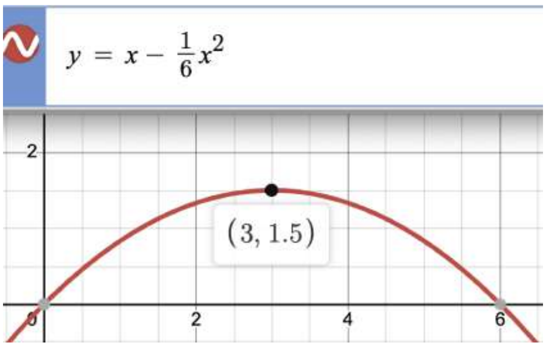
Adesso ricordiamo che nel punto di massimo o di minimo di una funzione necessariamente la pendenza deve essere uguale a zero. Quindi, risolviamo questa equazione:

$$y' = 0$$
$$1 - \frac{1}{3} \cdot x = 0$$
$$3 - x = 0$$
$$x = 3$$

Vi ricordate infine che se calcoliamo la derivata seconda y'', possiamo distinguere l'andamento convesso o concavo della funzione. Ora, la derivata seconda banalmente è:

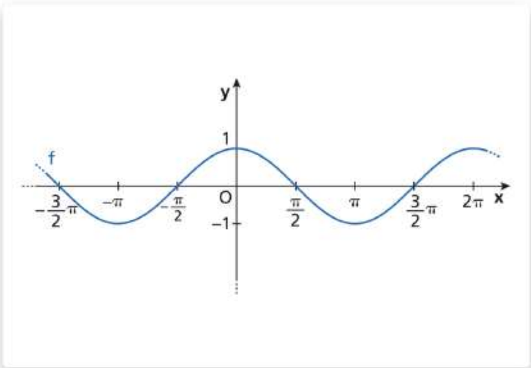
$$y'' = 0 - \frac{1}{3} \cdot 1$$
$$y'' = -\frac{1}{3}$$

ossia, sempre negativa. Infatti la parabola $y = x - \frac{1}{6}x^2$ è rivolta 'verso il basso', e quindi il suo vertice $V = (3, 1.5)$ è proprio un punto di massimo.



Pertanto abbiamo la soluzione finale: il segmento OQ ha lunghezza massima quando $x = 3$.

5.3 Risolvere equazioni con metodi grafici



Nel riferimento cartesiano è rappresentato il grafico della funzione

$f(x) = \cos x$.

Quante soluzioni ha l'equazione $\cos x - \frac{1}{2}x = 0$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Infinite

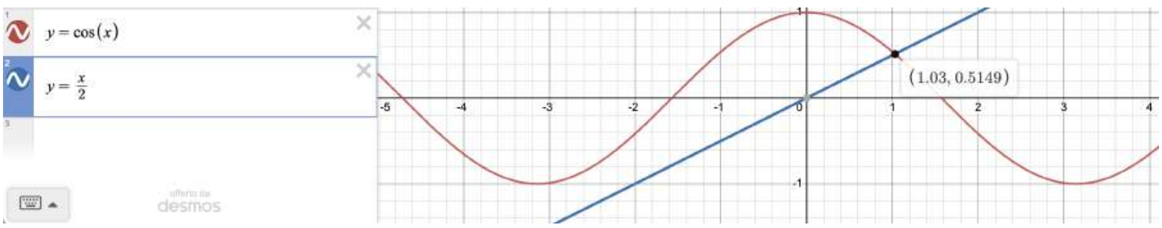
Tra i vari risultati di apprendimento che ci vengono richiesti a conclusione del nostro percorso di studi, dobbiamo anche avere l'abilità di *risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi a funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche e alla funzione modulo, con metodi grafici o numerici e anche con l'aiuto di strumenti elettronici*. Ed infatti, il problema che ci viene proposto qua sopra coinvolge un'equazione che **non è** risolubile con metodi algebrici, ossia 'con carta e matita'. Ci si deve affidare ai metodi approssimati ('algoritmi per l'approssimazione degli zeri di una funzione'), oppure ai metodi grafici.

Ora, con il semplice trucco di portare un termine dall'altra parte dell'uguale:

$$\cos(x) - \frac{1}{2}x = 0$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}x$$

abbiamo in mano la chiave risolutiva; basta inserire in Desmos le due funzioni ed osservare la situazione:



La retta blu incontra il grafico del coseno una sola volta nel punto $x \approx 1.03$. Vale la pena accennare al fatto che questo numero è un esempio di un 'vero numero reale', ossia di un numero **trascendente** (i numeri cioè che non sono soluzione di alcuna equazione algebrica).

VI

Appendice normativa

Disciplina: **MATEMATICA**

Il docente di “Matematica” concorre a far conseguire allo studente, al termine del percorso quinquennale di istruzione professionale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: *padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica; possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel campo delle scienze applicate; collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche*

Secondo biennio e quinto anno

I risultati di apprendimento sopra riportati in esito al percorso quinquennale costituiscono il riferimento delle attività didattiche della disciplina nel secondo biennio e quinto anno. La disciplina, nell’ambito della programmazione del Consiglio di classe, concorre in particolare al raggiungimento dei seguenti risultati di apprendimento espressi in termini di competenza:

- **utilizzare il linguaggio e i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative;**
- **utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni;**
- **utilizzare i concetti e i modelli delle scienze sperimentali per investigare fenomeni sociali e naturali e per interpretare dati;**
- **utilizzare le reti e gli strumenti informatici nelle attività di studio, ricerca e approfondimento disciplinare;**
- **correlare la conoscenza storica generale agli sviluppi delle scienze, delle tecnologie e delle tecniche negli specifici campi professionali di riferimento.**

L’articolazione dell’insegnamento di “Matematica” in conoscenze e abilità è di seguito indicata quale orientamento per la progettazione didattica del docente in relazione alle scelte compiute nell’ambito della programmazione collegiale del Consiglio di classe.

Secondo biennio

Conoscenze	***Abilità***
Connettivi e calcolo degli enunciati. Variabili e quantificatori. Ipotesi e tesi. Il principio d’induzione. Insieme dei numeri reali. Unità immaginaria e numeri complessi. Strutture degli insiemi numerici. Il numero **π.** Teoremi dei seni e del coseno. Formule di addizione e duplicazione degli archi. Potenza n-esima di un binomio. Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo; funzioni esponenziali e logaritmiche; funzioni periodiche. Le coniche: definizioni come luoghi geometrici e loro rappresentazione nel piano cartesiano. Funzioni di due variabili. Continuità e limite di una funzione. Limiti notevoli di successioni e di funzioni. Il numero **e.** Concetto di derivata di una funzione. Proprietà locali e globali delle funzioni. Formula di Taylor. Integrale indefinito e integrale definito. Teoremi del calcolo integrale. Algoritmi per l’approssimazione degli zeri di una funzione. Distribuzioni doppie di frequenze. Indicatori statistici mediante rapporti e differenze. Concetti di dipendenza, correlazione, regressione. Distribuzioni di probabilità: distribuzione binomiale. Distribuzione di Gauss. Applicazioni negli specifici campi professionali di riferimento e	Dimostrare una proposizione a partire da altre. Ricavare e applicare le formule per la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica o geometrica. Applicare la trigonometria alla risoluzione di problemi riguardanti i triangoli. Calcolare limiti di successioni e funzioni. Calcolare derivate di funzioni. Analizzare esempi di funzioni discontinue o non derivabili in qualche punto. Rappresentare in un piano cartesiano e studiare le funzioni $f(x) = a/x$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log x$. Descrivere le proprietà qualitative di una funzione e costruirne il grafico. Calcolare derivate di funzioni composte. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita lineare ed esponenziale e di andamenti periodici. Approssimare funzioni derivabili con polinomi. Calcolare l'integrale di funzioni elementari. Risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi a funzioni goniometriche, esponenziali, logaritmiche e alla funzione modulo, con metodi grafici o numerici e anche con l’aiuto di strumenti elettronici. Calcolare il numero di permutazioni, disposizioni, combinazioni in un insieme. Analizzare distribuzioni doppie di frequenze. Classificare dati secondo due caratteri, rappresentarli graficamente e

per il controllo di qualità Ragionamento induttivo e basi concettuali dell'inferenza.	riconoscere le diverse componenti delle distribuzioni doppie. Utilizzare, anche per formulare previsioni, informazioni statistiche da diverse fonti negli specifici campi professionali di riferimento per costruire indicatori di efficacia, di efficienza e di qualità di prodotti o servizi. Calcolare, anche con l'uso del computer, e interpretare misure di correlazione e parametri di regressione.
Quinto anno	
Conoscenze	***Abilità***
Il calcolo integrale nella determinazione delle aree e dei volumi. Sezioni di un solido. Principio di Cavalieri. Concetti di algoritmo iterativo e di algoritmo ricorsivo. Cardinalità di un insieme. Insiemi infiniti. Insiemi numerabili e insiemi non numerabili. Probabilità totale, condizionata, formula di Bayes. Piano di rilevazione e analisi dei dati. Campionamento casuale semplice e inferenza induttiva.	Calcolare aree e volumi di solidi e risolvere problemi di massimo e di minimo. Calcolare l'integrale di funzioni elementari, per parti e per sostituzione. Calcolare integrali definiti in maniera approssimata con metodi numerici. Utilizzare la formula di Bayes nei problemi di probabilità condizionata. Costruire un campione casuale semplice data una popolazione. Costruire stime puntuali ed intervallari per la media e la proporzione. Utilizzare e valutare criticamente informazioni statistiche di diversa origine con particolare riferimento agli esperimenti e ai sondaggi. Individuare e riassumere momenti significativi nella storia del pensiero matematico.

Indice analitico