Matematica con Desmos

per i servizi commerciali - Web Community

Istituto Sandrinelli – Trieste

PUBBLICATO PRESSO L'ISTITUTO 'DA VINCI - CARLI - SANDRINELLI' DI TRIESTE

http://www.davincicarli.edu.it

Prima edizione, agosto 2021

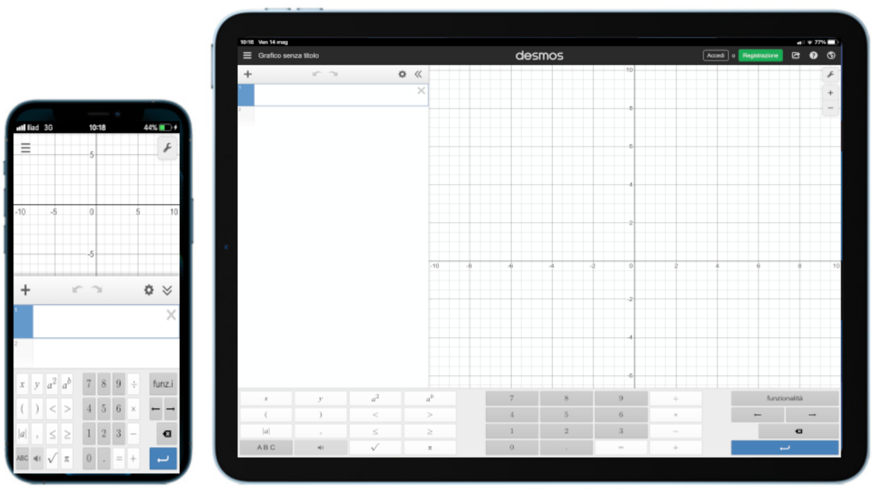
Indice

1. Per iniziare

1.1 Di cosa avremo bisogno a lezione

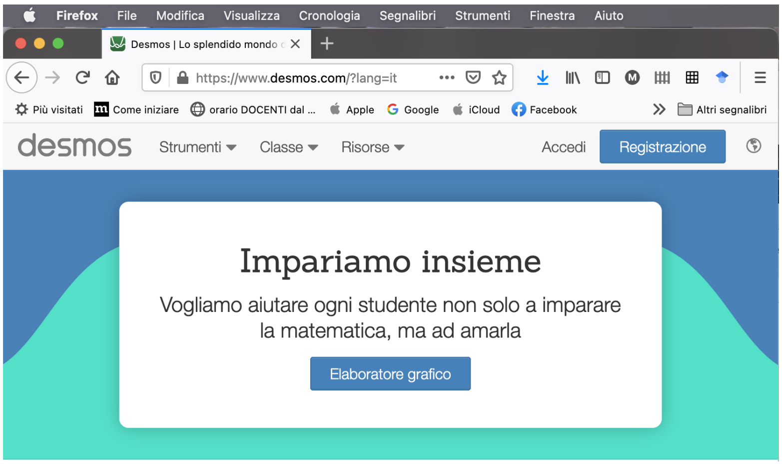
Ovviamente, per prima cosa, abbiamo bisogno di procurarci **Desmos Graphing Calculator**, una app che potete installare gratuitamente sul vostro telefonino (e che vi consumerà pochissima memoria) o sul vostro tablet: sarà sufficiente cercare nel vostro app-store questa icona qui:

Dopo avere installato l'applicazione, apritela e vedrete un qualcosa di questo genere:

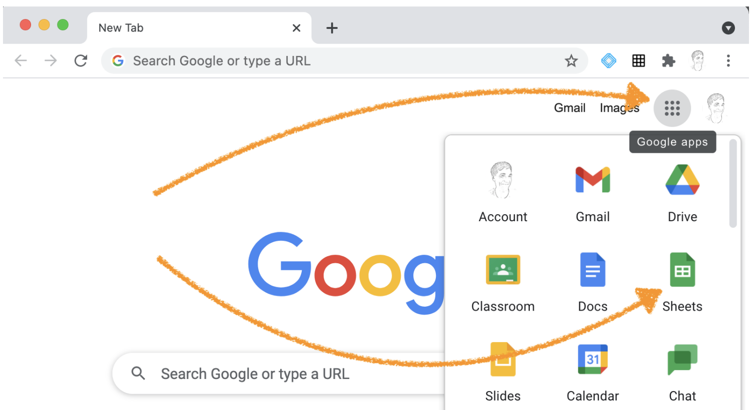


Impareremo a mano a mano ad utilizzare tutte le funzionalità di questo calcolatore grafico; si tratta di un software che consente di svolgere le medesime azioni delle calcolatrici grafiche che il

Ministero consente di utilizzare durante l'Esame di Stato[1], senza doversi connetersi in wireless ad alcuna rete (ossia, potete usare Desmos 'in modalità aereo').
Se invece utilizzate un computer connesso alla rete, per esempio quando siete a scuola in laboratorio di informatica, vi potrete collegare all'**Elaboratore grafico** dell'indirizzo `https://www.desmos.com`:



Vedrete che Desmos è particolarmente adatto per realizzare i grafici delle funzioni. Desmos consente anche di costruire delle tabelle numeriche, ma in questo àmbito il **foglio elettronico** è certamente un software molto più performante. Per antonomasia, il foglio elettronico che tutti hanno in mente si chiama **Excel**™ ed è un prodotto commerciale venduto della Microsoft. Noi invece utilizzeremo sempre i prodotti gratuiti, e la Scuola a tale proposito ci offre - tramite le nostre credenziali `nome.cognome@dcstrieste.it` - l'utilizzo di Google Workspace: come vedete nella figura, avete sempre accesso gratuito alla applicazione **Sheets** che si trova all'interno del 'mosaico' delle Google apps:



[1] Cfr. ad esempio `https://bit.ly/3ogyU8r`.

1.2 Come è scritto questo libro

Questo libro è scritto in maniera colloquiale, anche perché questo non è un *vero* libro di matematica: sono solamente le chiacchiere che facciamo a lezione, ricopiate in italiano.

Pagina dopo pagina, osserverete che abbiamo cercato di mantenere alcune convenzioni grafiche. Innanzitutto, le **parole importanti da ricordare** sono scritte in grassetto; se poi ci sono delle formule molto importanti, le scriveremo dentro ad una Definizione, tipo questa:

Definizione 1.2.1 — da imparare a memoria. Quando vedrete qualcosa scritto in viola:

$$formula\ importante \tag{1.1}$$

significa che siete obbligati a impararlo e ricordarlo per sempre, senza fallo.

Ogni concetto nuovo verrà sempre spiegato con un:

Esempio 1.2.1 — da fare assieme. Infatti, per capire bene gli argomenti sarà quasi sempre necessario prendere Desmos e provare a fare un grafico, o una tabella di numeri, e riuscire a capire quello che si è fatto, interpretandolo e magari ricopiandolo sul quaderno.

Quando avremo discusso assieme questo Esempio 1.2.1, allora toccherà a voi a provare a fare da soli, in aula o a casa, qualche semplice

■ **Esercizio 1.1 — sul vostro quaderno.** Di solito, per risolvere questo Esercizio, sarà necessario aver saputo fare con sicurezza il precedente Esempio. La cosa piacevole è che, se alla fine avrete qualche dubbio sull'esito dell'esercizio, potrete sfogliare le pagine del libro alla ricerca delle **Soluzioni**. ■

In questo libro troverete anche degli avvertimenti, che scherzosamente si chiamano ahia, ed iniziano sempre così:

ahia Attenzione all'errore frequente. Questi avvertimenti si basano sulla consolidata esperienza che il nostro santo protettore, San Drinelli, ha accumulato nel corso degli anni - egli infatti sorveglia con attenzione gli insegnanti che interrogano e che correggono i compiti, prendendo nota degli errori che gli studenti commettono (sorprendentemente, nei secoli dei secoli, gli studenti commettono sempre gli stessi errori, e gli insegnanti si scordano che anche loro, quand'erano studenti, frequentemente commettevano i medesimi errori).

Di quando in quando, ci saranno anche dei collegamenti interessanti con le altre discipline scolastiche: la Storia, le Lingue, l'Economia, ... Avremo dunque l'occasione di compiere un

Approfondimento interdisciplinare 1.2.2 — Chi l'avrebbe mai detto. I concetti matematici di cui stiamo discutendo incredibilmente trovano una spiegazione oppure una applicazione in qualche altro fenomeno di cui si occupa ad esempio il Marketing, oppure il Diritto, oppure la Psicologia Sociale. Sarà opportuno parlarne con le professoresse che ci insegnano quella disciplina e chiedere il loro parere.

Più raramente, incontreremo anche qualche importante

Teorema 1.2.3 — da imparare bene. Se una formula o una legge molto importanti saranno conseguenza di una determinata Definizione, allora le metteremo in evidenza in un Teorema. Di norma, i Teoremi possiedono (almeno) una **Dimostrazione** - vedremo se sarà il caso di occuparcene, o no.

Riassunto

Ed infine, a conclusione di ogni Capitolo – prima delle **Soluzioni** degli Esercizi – troverete anche un breve Riassunto delle nuove formule e delle nuove definizioni che avremo imparato nei giorni precedenti, e – quasi sempre – una **Verifica di Sintesi**, nella quale vi verrà richiesto di utilizzare tutte le conoscenze e le abilità sino ad allora conseguite.

Modelli di andamenti periodici

2. La circonferenza e la goniometria

2.1 Perché studieremo la circonferenza

Qui sopra vediamo un dettaglio della copertina del nostro libro, ruotata di trenta gradi in senso orario. È una trasformazione semplicissima da attuare con il nostro telefonino su qualsiasi immagine: basta 'toccare il goniometro' che compare nell'apposito menu di modifica. Ma quali concetti matematici vi sono alle spalle di questa trasformazione? Come si fa a ruotare un'immagine di un certo numero di gradi? Lo vedremo in questo capitolo e vedremo che si tratta di usare alcuni concetti matematici che risalgono a ben più di mille anni fa.

2.2 L'equazione della circonferenza

L'anno scorso abbiamo imparato a disegnare la retta (per esempio $y = 2x - 4$) e la parabola (per esempio $y = x^2 - 2x + 3$). In entrambi i casi la y compariva al primo grado, senza alcun esponente. La circonferenza invece si caratterizza per il fatto che la x e la y compaiono entrambe elevate al quadrato. Esploriamo con Desmos le seguente relazione, inserendo uno slider che ci permetta di variare il numero n:

$$x^2 + y^2 = n$$

Poniamoci ora alcune domande. Riusciamo ad intuire cosa succede se muovo il numero n? Se in particolare, scegliamo alcuni numeri particolari:

- cosa succede con $x^2 + y^2 = 16$?
- cosa succede con $x^2 + y^2 = 9$?

Ci viene naturale fare l'ipotesi che i numeri 16, 9, 4, ... indichino il **quadrato** del raggio della circonferenza. Dunque per individuare una circonferenza di raggio R useremo la formula

Definizione 2.2.1 — circonferenza con centro nell'origine. La circonferenza di raggio R che ha il centro nell'origine degli assi ha equazione:

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2.1}$$

Ora proviamo ad esplorare cosa succede se cambio un poco la x aggiungendo una parentesi:

- cosa succede con $(x+4)^2 + y^2 = 11$?

La circonferenza si è spostata, diciamo verso sinistra. E se avessimo voluto spostarla verso destra di 4 invece che a sinistra, come avremmo potuto fare? E se avessimo invece voluto spostarla non rispetto all'asse x, ma in alto o in basso rispetto all'asse y ?

Se siamo stati in grado di ragionare su queste domande, siamo pronti per scoprire questa nuova relazione:

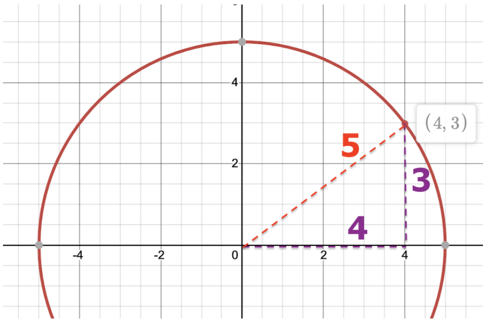
Definizione 2.2.2 — circonferenza generica. La circonferenza di raggio R che ha il centro in un qualsiasi punto di coordinate (a, b) ha equazione:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{2.2}$$

■ **Esercizio 2.1 — La bandiera olimpionica.** Lo conosciamo bene il significato della bandiera olimpionica. Siete in grado di adattare la formula appena vista per disegnare i cinque cerchi (anche se in Desmos 'manca' il giallo)? Se vi serve, potete prendere ispirazione da qui: `https://www.desmos.com/calculator/xtotvkfjei?lang=it` ■

2.3 La circonferenza ed il teorema di Pitagora

Disegnamo con Desmos la circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ e facciamo scorrere il nostro dito 'tracciando' i suoi punti. Con un po' di attenzione arriveremo su un punto particolarmente 'semplice', il punto $(4,3)$:



In questo disegno possiamo intuire immediatamente come la formula 2.1 della circonferenza con centro nell'origine, ossia $x^2 + y^2 = R^2$, non rappresenti altro che il famoso teorema di Pitagora: in un triangolo rettangolo, la somma ('+') dei quadrati ('x^2', 'y^2') costruiti sui cateti (che misurano 4 e 3) è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa ('R^2'), che misura 5, essendo proprio il raggio della circonferenza. Ed è proprio così: $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$.

■ **Esercizio 2.2 — Le terne pitagoriche.** Cercate su Wikipedia qualche esempio di terna pitagorica, `https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple#Examples`, ed adattatelo al discorso che abbiamo appena fatto, disegnando una circonferenza. ■

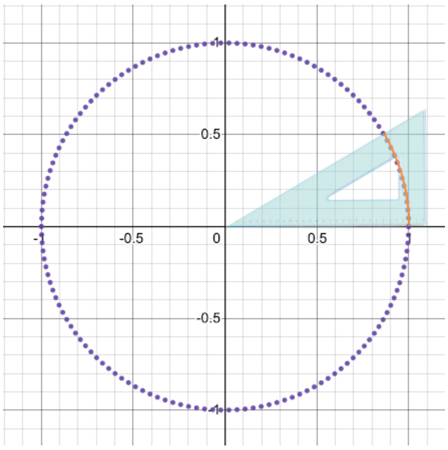
■ **Esercizio 2.3 — equazione della circonferenza.** Applichiamo il Teorema di Pitagora per trovare l'equazione della circonferenza che ha il centro $C = (15,17)$ e passa per il punto $P(7,11)$. ■

2.4 Misurare gli angoli rispetto al raggio: il radiante

Per misurare gli angoli siamo abituati ad usare il **goniometro**, che idealmente possiamo pensare sia una circonferenza con il centro nell'origine. Per semplicità possiamo pensare che il raggio sia uguale ad 1: la cosiddetta **circonferenza goniometrica**.

Definizione 2.4.1 — circonferenza goniometrica. La circonferenza di raggio 1 che ha il centro nell'origine degli assi si chiama **circonferenza goniometrica** ed ha equazione:

$$x^2+y^2=1 \tag{2.3}$$



Consideriamo ora per esempio l'angolo α di 30 gradi, come indicato dallo squadretto azzurro in sovraimpressione. La nostra domanda è: *quanto misura l'arco color arancione rispetto alla circonferenza viola tratteggiata?*

La risposta si ottiene con una banale **proporzione**. Infatti, l'angolo α di 30 gradi sta all'angolo giro di 360 gradi, come l'arco arancione x sta alla misura di tutta la circonferenza viola punteggiata. Siccome la misura della circonferenza si ottiene con la famosa formuletta $C=2\cdot R\cdot\pi$, e nel nostro caso $R=1$, la misura di tutta la circonferenza viola punteggiata è $C=2\cdot\pi\approx 6.28\ldots$. Quindi:

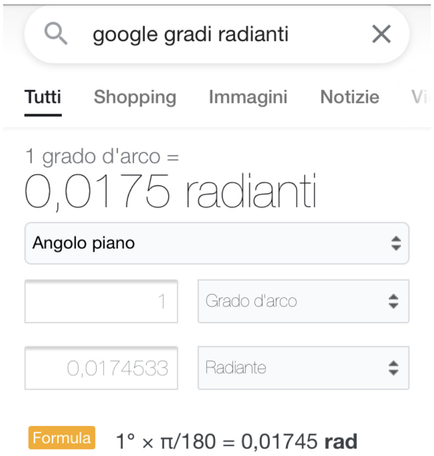
$$30:x=360:6.28$$

$$x=\frac{30\cdot 6.28\ldots}{360}$$

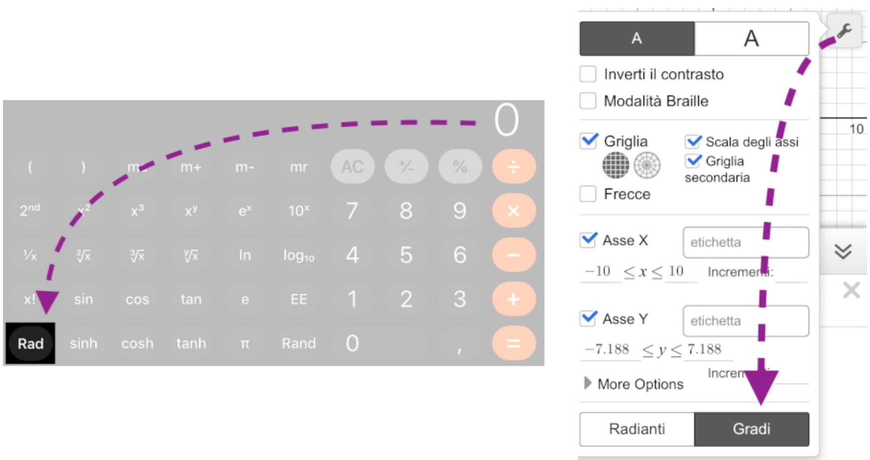
$$x\approx 0.52\ldots$$

Dunque, se il raggio della circonferenza viola è uguale ad 1, l'arco arancione relativo all'angolo di 30 gradi misura circa 0.52. Questa stessa frase si riformula nel seguente modo: *l'angolo di 30 gradi misura 0.52 radianti.*

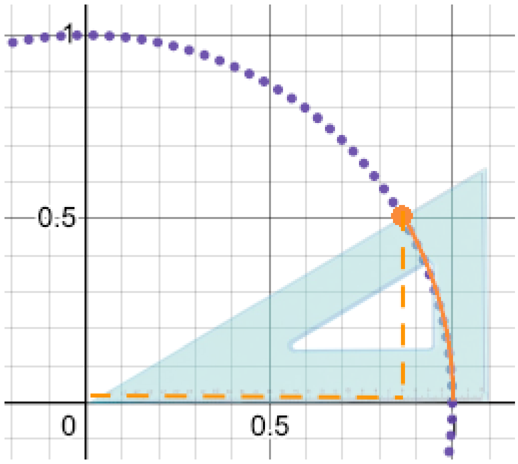
Esempio 2.4.1 — usiamo il telefono. Se vi vergognate un pochino di non essere in grado di risolvere le proporzioni, allora, fatevi aiutare dai convertitori gratuiti di Google:



ahia Bisognerà d'ora in poi fare attenzione a sapere se la vostra calcolatrice preferisce utilizzare i gradi, oppure i radianti, nei suoi calcoli. A tale proposito, provate a modificarne l'impostazione utilizzando l'apposito tasto. Desmos invece di default utilizza i radianti: per impostare i gradi, toccate il simboletto della chiave inglese, come nella figura. Tenete però presente che il tasto Deg / Rad non vi permette di fare la conversione automatica da gradi in radianti, e viceversa.



2.5 Disegnare gli angoli con il righello: il seno ed il coseno

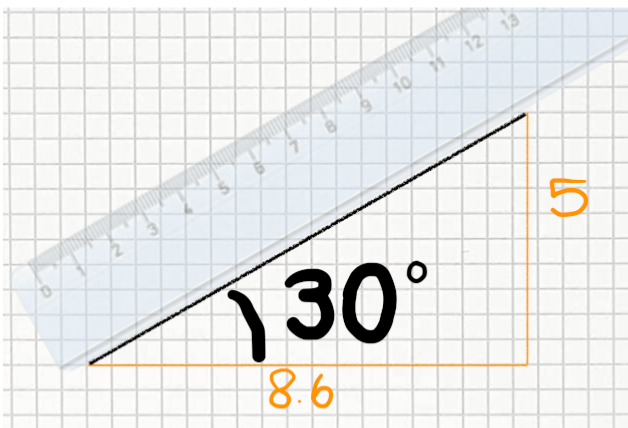


Riguardiamo con maggiore attenzione il disegno precedente, e ci chiediamo: *quali sono le coordinate del punto arancione, corrispondente all'angolo α di 30 gradi?*

Sulla calcolatrice scientifica abbiamo a disposizione due tasti appositi che forniscono immediatamente la risposta: la base arancione del triangolo rettangolo tratteggiato, ossia la coordinata x, si individua con il tasto cos, ossia il **coseno** dell'angolo α. Invece, la coordinata y, si individua con il tasto sin, ossia il **seno** dell'angolo α.

■ **Esercizio 2.4 — calcolo goniometrico.** Calcolate il coseno ed il seno di 30 gradi. Accertatevi che la vostra calcolatrice sia in modalità 'deg' e non in modalità 'rad'. ■

Ora che abbiamo ottenuto i valori, $\cos(30) = 0.866..$ e $\sin(30) = 0.5$, possiamo disegnare l'angolo di 30 gradi senza usare il goniometro ma solo con il righello:



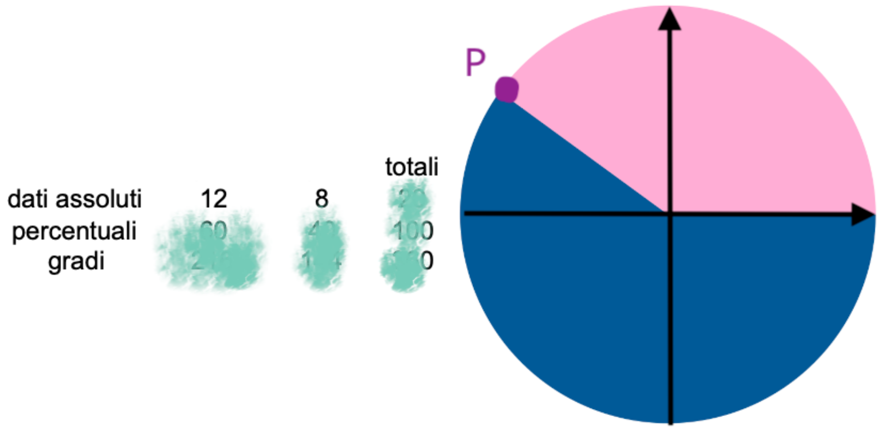
ahia Attenzione: Desmos preferisce utilizzare i radianti, e non i gradi! Ecco qui calcolato il seno di 30 gradi (ossia $\pi/6$ radianti):

Approfondimento interdisciplinare 2.5.1 — gli Arabi in Europa. Parlatene con la vostra insegnante di Spagnolo: moltissime parole del francese, dell'italiano, e dello spagnolo appunto, hanno origine dalla cultura araba che pervadeva la penisola iberica nel corso del primo millennio. Parole come 'algebra' ed 'algoritmo' risalgono proprio al trattato 'Al-jabr' di Muhammad al-Kwarizmi, latinizzato 'Algorismus' o anche 'Algoritmus'. Leggete poi su Wikipedia `https://it.wikipedia.org/wiki/Storia_delle_funzioni_trigonometriche` quale errore commise il monaco Roberto da Chester nel confondere il termine 'jiba' con 'jaib'.

2.6 Applicazione pratica: il grafico a torta

Supponiamo che oggi in classe ci siano 12 ragazzi e 8 ragazze. Rispondete a queste domande, riferendovi allo schema sottostante:

1. quanti allievi ci sono in tutto in classe?
2. come esprimiamo questi dati con le percentuali?
3. quanti gradi avranno la 'fetta blu' e la 'fetta rosa' di torta?
4. quali saranno le coordinate del punto P di colore viola sulla circonferenza goniometrica?



■ **Esercizio 2.5 — calcolo goniometrico.** Disegnate sul vostro quaderno a quadretti, calcolando il coseno ed il seno dell'angolo, il grafico a torta qui sopra. ■

■ **Esercizio 2.6 — calcolo goniometrico.** Pensate come si dovrebbe fare per rappresentare una torta a tre fette. Per esempio, rappresentando i 380 allievi del Sandrinelli, i 240 allievi del Carli e 190 del da Vinci. Disegnatelo sul quaderno a quadretti. ■

3. Trasformare le immagini digitali

3.1 La pendenza di una retta e la tangente goniometrica

Accanto ai pulsanti sin e cos, tutte le calcolatrici possiedono un altro tasto: il tasto tan della **tangente**. Vogliamo capire perché essa rappresenti un modo efficace per mettere in relazione la pendenza di una retta con l'angolo che la retta individua rispetto all'asse x.

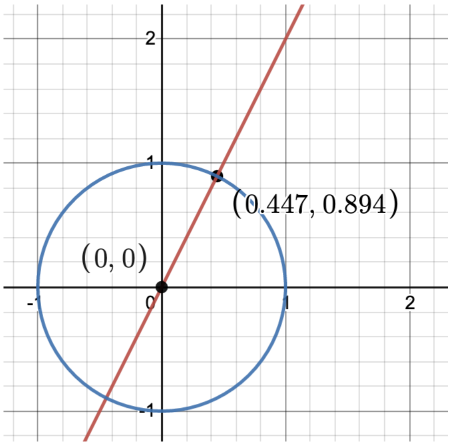
Raffiguriamo con Desmos una retta qualsiasi, ad esempio $y = 2x$, e tocchiamo uno dei punti in cui essa interseca la circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$. Leggiamo le coordinate: $(0.447, 0.894)$.

La retta $y = 2x$ ha evidentemente pendenza $m = 2$. Se ci ricordiamo della formula della pendenza della retta (era la Definizione 2.4.1 del libro arancione), possiamo usarla in maniera furba, sostituendo in essa le coordinate dei punti di colore nero:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2 = \frac{0.894 - 0}{0.447 - 0}$$

Riscriviamo questa relazione leggendola, come gli Arabi, da destra verso sinistra:

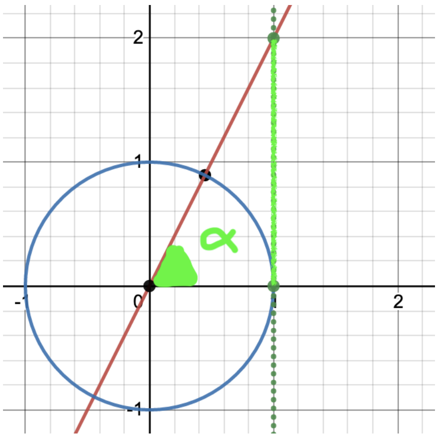


$$\frac{0.894}{0.447} = 2$$

Ora guardiamo la figura che segue, e rendiamoci bene conto di cosa rappresentano questi tre numeri, da un punto di vista geometrico. Anche se non sappiamo con precisione quanto misuri l'angolo α dipinto in colore verde, possiamo dire che:

- il numero 0.894 è il **seno** dell'angolo α di colore verde
- il numero 0.447 è il **coseno** dell'angolo α di colore verde
- il segmento verde che unisce il punto (1,0) al punto in cui la **retta tangente** alla circonferenza incontra la retta $y = 2x$, misura (ovviamente) 2

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 2$$



Definizione 3.1.1 — tangente di un angolo. Si definisce la tangente di un angolo α come il rapporto tra il seno ed il coseno dell'angolo in questione:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{3.1}$$

■ **Esercizio 3.1 — calcolo goniometrico.** Calcolate il seno ed il coseno di 50 gradi (accertandovi che la vostra calcolatrice sia in modalità 'deg' e non in modalità 'rad'). Poi calcolate il rapporto $\frac{\sin(50)}{\cos(50)}$. Prendete nota del risultato, e calcolate $\tan(50)$. Cosa osservate? ■

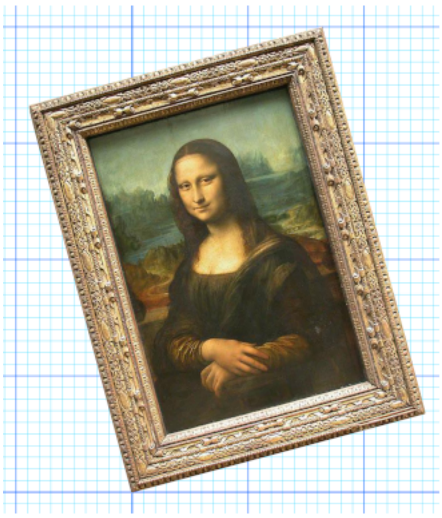
3.2 Usare la tangente per calcolare gli angoli

Quando l'anno scorso abbiamo definito l'equazione generica della retta $y = m \cdot x + q$ avevamo detto che il **coefficiente angolare** m caratterizzava la **pendenza** della retta, come in questo segnale stradale:

Figura 3.1: se la pendenza 10%, allora $m = 10\% = \frac{10}{100} = 0.10$

Ora osserviamo il quadro della Gioconda e ci chiediamo: quanto misura l'angolo di inclinazione del quadro?

Procediamo in questo modo. Facciamo finta che alle spalle del quadro ci sia una carta quadrettata, in modo tale che un vertice nel quadro coincida con un'ipotetica origine degli assi. Contiamo poi quanti quadretti dobbiamo proseguire 'in avanti', e quanti 'in alto' sino a che il bordo della cornice incontri 'l'incrocio' della carta quadrettata. In questo esempio risulta $x = 23$ ed $y = 6$.



Dalla definizione di tangente dell'angolo e dal significato della pendenza di una retta si ottiene:

$$\tan(\alpha) = \frac{6}{23} \approx 0.26087$$

Questo significa che il quadro ha una pendenza di circa il 26%. Ma noi vogliamo rispondere ad un'altra domanda:

- *quanto misura l'angolo di inclinazione* α*?*

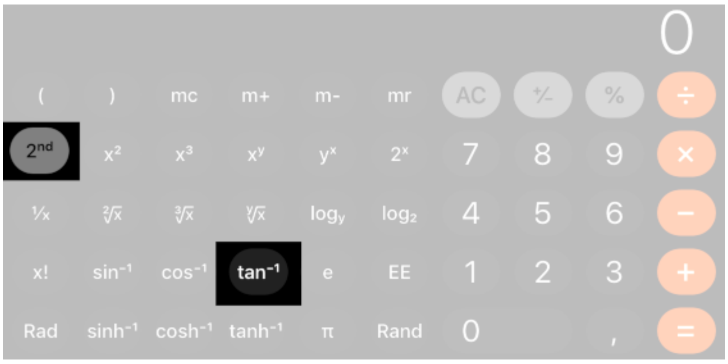
Per rispondere alla domanda, dobbiamo saper risolvere l'equazione:

$$\tan(\alpha) = 0.26087$$

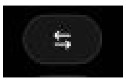
Tutte le calcolatrici scientifiche dispongono di un apposito tasto che permette di calcolare la **funzione inversa** della tangente, che si chiama **arcotangente**. La funzione inversa ci permette appunto di 'tornare indietro': riuscire a calcolare il valore di α conoscendone la sua tangente. Questa funzione inversa di solito si indica con il simbolo $\tan^{-1}$:

$$\alpha = \tan^{-1}(0.26087)$$

Per trovarla sulla calcolatrice, dobbiamo servirci del tasto 'second':



In altri modelli di calcolatrice non compare il simbolo 'second'; si deve allora provare a cercare il tasto 'tabulazione' (doppie frecce), oppure il tasto 'inverso':




In conclusione, la calcolatrice restituisce il valore dell'angolo di inclinazione del quadro della Gioconda: $\alpha \approx 14.6$ gradi

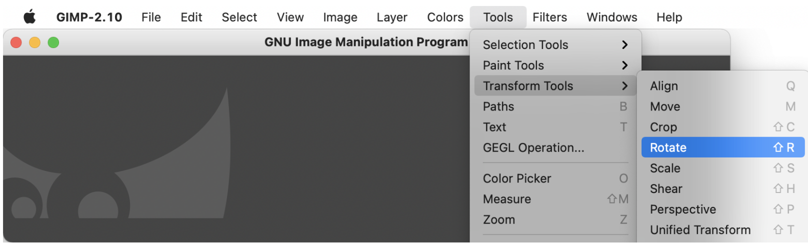
ahia Attenzione: al solito, bisogna accertarsi se la vostra calcolatrice è impostate per visualizzare i risultati usando i gradi oppure i radianti. Nel secondo caso, il risultato che otterrete sarà che $\alpha \approx 0.255$ radianti. Si tratta ora di convertire questo risultato con la solita proporzione (ovvero, moltiplicando il risultato per 180 e dividendolo per π).

Esempio 3.2.1 — la rampa di accesso alla scuola. La rampa di accesso alla porta posteriore della nostra scuola è un piano inclinato, la cui base misura 7.80 metri e la cui altezza misura 78 centimetri. Quanto misura l'angolo di inclinazione della rampa?

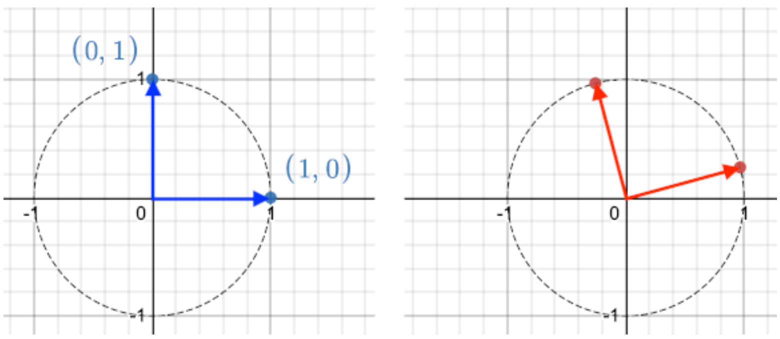
3.3 La rotazione di un'immagine

3.3.1 Il concetto di vettore e di matrice

Ricorderete forse che lo scorso anno, quando parlavamo dell'antico problema cinese dei sacchi di riso, avevamo detto che i termini di *matrice* e *vettore* che allora avevamo introdotto ci sarebbero tornati utili per capire come si possa ruotare digitalmente un'immagine, per esempio con Gimp:



Riprendiamo con maggiore precisione questi due concetti. Guardiamo la figura azzurra e la figura rossa:



Nella figura blu i due punti che individuano gli assi cartesiani (e le loro unità di misura) sono descritti con le loro coordinate, ossia $(1,0)$ e $(0,1)$. Se sostituiamo le parentesi tonde con le parentesi quadre, e se scriviamo le coordinate in verticale invece che in orizzontale, individuiamo quelle due frecce azzurre che in fisica si chiamano **vettori**:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

e se 'mettiamo assieme' i due vettori creando uno 'schema quadrato' (che si chiama **matrice**) otteniamo una descrizione simbolica del sistema di riferimento cartesiano, ossia della figura blu:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

In effetti, i matematici chiamano questa particolare matrice la **matrice identità**, per significare che questa matrice rappresenta la situazione di partenza quando la figura non è stata ancora ruotata (con un po' di fantasia, pensiamo alla *carta di identità* come quel documento che dice esattamente chi sei, senza finzioni, filtri o trasformazioni).

Ora, pensiamo alla situazione del grafico rosso, che rappresenta i due vettori azzurri, ruotati:

■ **Esercizio 3.2 — seno e coseno.** Riprendiamo quanto abbiamo imparato nelle pagine precedenti: quali coordinate hanno i punti individuati dai vettori rossi, che rappresentano i vettori blu ruotati di un angolo di 15 gradi? ■

Risolvendo assieme l'esercizio, scopriamo che il vettore rosso che inizialmente individuava l'asse delle x avrà coordinate:

$$\begin{bmatrix}\cos(15)\\ \sin(15)\end{bmatrix}$$

mentre l'altro vettore si sarà spostato nella posizione:

$$\begin{bmatrix}-\sin(15)\\ \cos(15)\end{bmatrix}$$

Dunque, componendo questi due vettori in uno 'schema quadrato' come il precedente, individuiamo la **matrice di rotazione** che caratterizza il fenomeno che stiamo studiando:

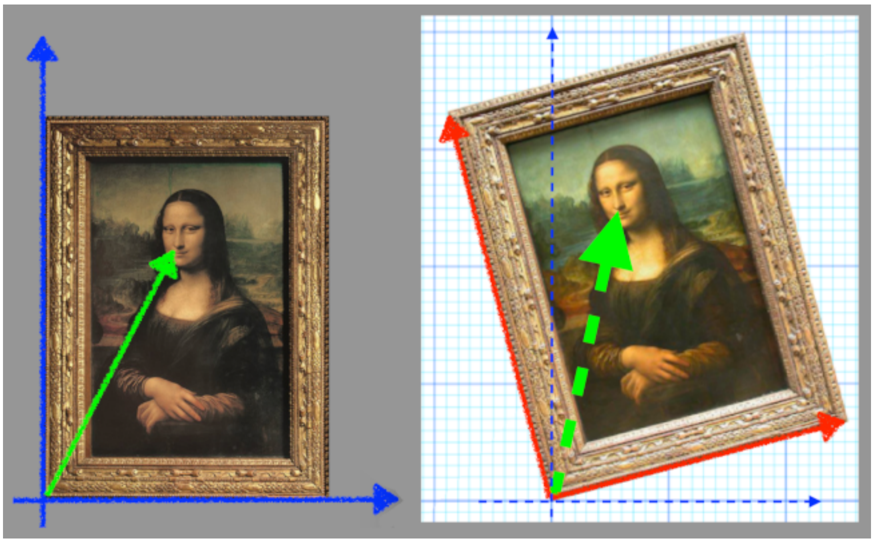
$$\begin{bmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

Calcolando i valori di $\cos(15)$ e $\sin(15)$, ossia approssimativamente 0.97 e 0.26, otteniamo la matrice relativa alla rotazione di 15 gradi:

$$\begin{bmatrix}0.97 & -0.26\\ 0.26 & 0.97\end{bmatrix}$$

Adesso che abbiamo definito il concetto di matrice di rotazione, proseguiamo verso l'obiettivo principale del nostro capitolo.

3.3.2 Applicare una matrice ad un vettore



L’obiettivo è chiaro: capire come cambiano le coordinate dei punti di un’immagine quando la ruotiamo di un certo angolo α. Supponiamo che il nasino della Gioconda, individuato dal vettore verde, abbia coordinate $(x,y) = (30,50)$. Scriviamolo nella forma di un vettore:

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Supponiamo che il quadro venga ruotato, ad esempio di un angolo di $\alpha = 15$ gradi. Il nasino della Gioconda ruotata si troverà in una nuova posizione, individuata dal vettore verde tratteggiato. Riconsideriamo la matrice di rotazione che abbiamo calcolato:

$$\begin{bmatrix} 0.97 & -0.26 \\ 0.26 & 0.97 \end{bmatrix}$$

Scopriamo cosa significa **applicare una matrice** di rotazione ad un **vettore** (impareremo fra poche pagine che questa procedura si chiama **prodotto scalare**).

$$\begin{bmatrix} 0.97 & -0.26 \\ 0.26 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.97 \cdot 30 - 0.26 \cdot 50 \\ 0.26 \cdot 30 + 0.97 \cdot 50 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 16 \\ 56 \end{bmatrix}$$

E dunque il nasino della bella Lisa si è spostato da $(30,50)$ a circa $(16,56)$.

■ **Esercizio 3.3 — rotazione di un vettore.** Quali saranno le coordinate del punto (6, 13) se lo ruotiamo di 75 gradi? E come sono fatte le matrici di rotazione relative agli angoli di 90, 180 e 270 gradi? ■

Esercizio 3.1 — laboratorio di informatica. Abbiamo delineato una *silhouette* della Gioconda in un foglio di dati:

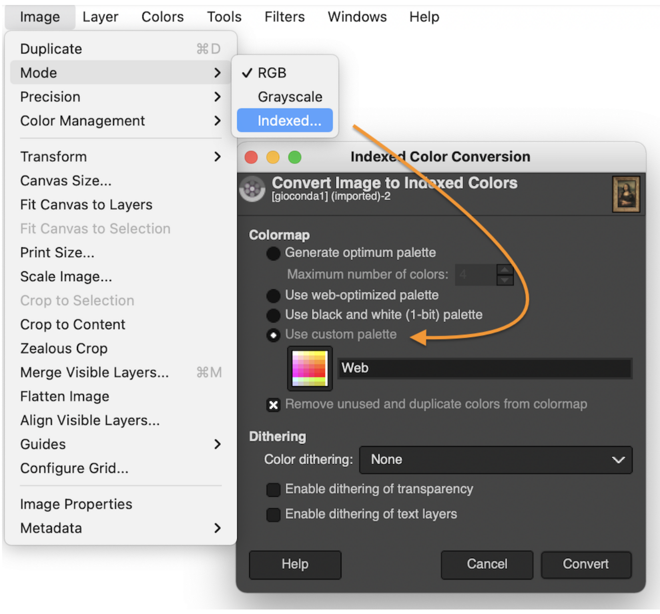
`https://drive.google.com/file/d/1BuPPiQWqoB2-7sZo-7FFyVJtAwJo4KKX/view`

Seguite le istruzioni della scheda per imparare **l’algoritmo** che permette di ruotare un’immagine di quanti gradi desideriate. ■

3.4 Filtrare i colori di un'immagine - parte prima

Un'altro tipo di trasformazione che viene applicata alle immagini riguarda i colori, che come molti sanno, si possono codificare di un **vettore** di dimensione tre caratterizzato dalla sigla RGB, le iniziali dei colori *red*, *green* e *blue*. Per esempio il colore fucsia è definito dal vettore $RGB = (244, 0, 161)$: questo significa che mescolando $244/255 \approx 96\%$ di luce rossa e $161/255 \approx 63\%$ di luce blu otteniamo quel tipico colore che i maschi confondono con il rosa. Ma osserviamo ora l'immagine della Gioconda:

Qui abbiamo applicato con Gimp un filtro che 'semplifica' i colori presenti nell'immagine originale utilizzando una *palette* di soli sedici colori.



Ora tutti abbiamo sentito dire che i colori della luce sono caratterizzati dall'avere diverse *frequenze*, ovvero diverse *lunghezze d'onda*: `https://it.wikipedia.org/wiki/Colore`. Nel prossimo capitolo spieghiamo meglio come i concetti di base della gonometria che abbiamo sino ad ora imparato ci tornano utili per capire meglio questo argomento.

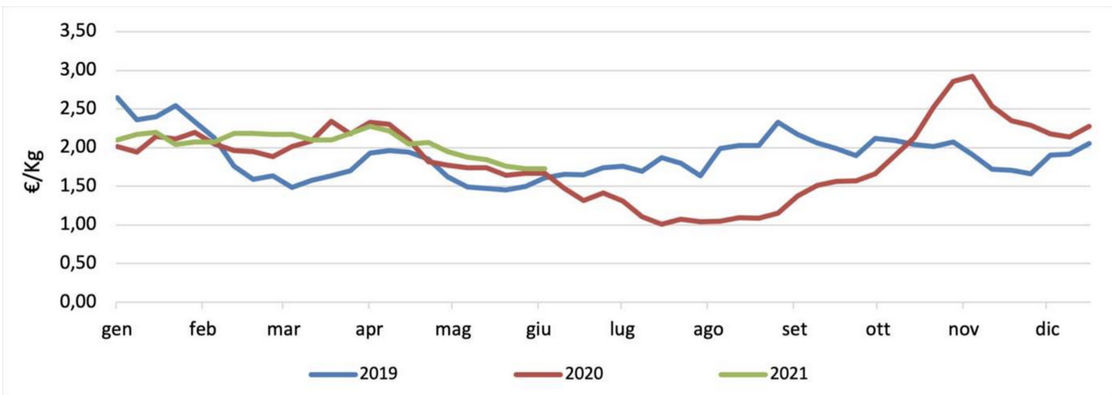
4. Andamenti periodici

4.1 Analizzare modelli di andamenti periodici

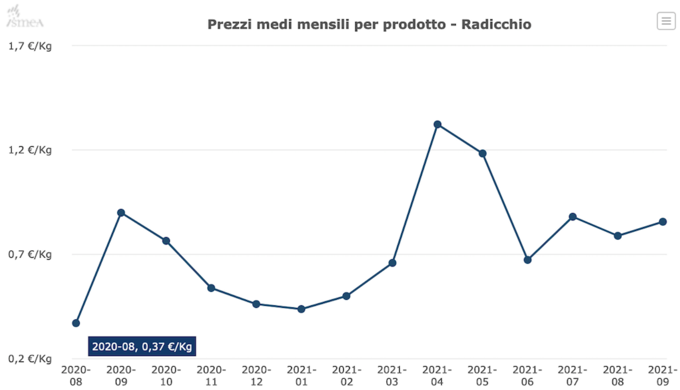
Negli anni passati abbiamo imparato a conoscere i grafici di alcune importanti funzioni, tra le quali, per importanza, spiccano la **retta**, la **parabola** e l'**esponenziale**. In particolare, abbiamo visto che la retta e l'esponenziale sono due modelli particolarmente importanti in ambito economico: essi ci permettono di descrivere i due modi con i quali si usa remunerare un investimento finanziario: l'**interesse semplice** e l'**interesse composto**.

Ora invece proviamo a dare un'occhiata a questi due grafici, che invece riguardano i fenomeni economici della produzione e della distribuzione dei beni. Il primo riguarda l'andamento dei prezzi al consumo del 'pomodoro ciliegino', negli ultimi tre anni (`https://bit.ly/3kW9fkW`):

I PREZZI (€/KG) DEI POMODORI CILIEGINI CAT. I ORIG. ITALIA NELLE ULTIME TRE CAMPAGNE



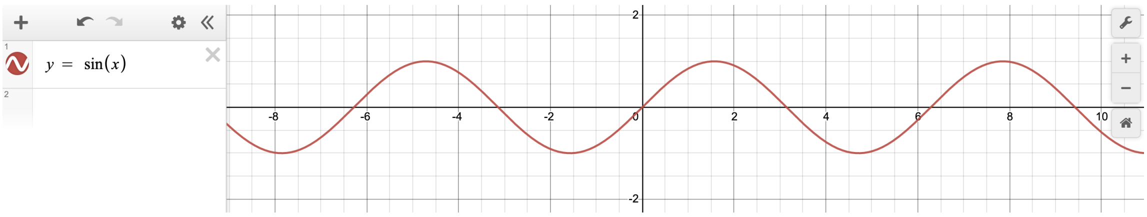
mentre quello della pagina seguente (`https://bit.ly/3oKcFbT`) riguarda l'andamento nell'ultimo anno del prezzo del radicchio, secondo i dati raccolti dall'Ismea, che è un istituto economico nazionale controllato dal Ministero delle politiche agricole, alimentari e forestali, il quale concorre con l'Istat nella raccolta dei dati statistici italiani del SISTAN (sistema statistico nazionale).



Questi fenomeni hanno un comportamento ’oscillante’, simile alle onde del mare. Ma, mentre nel primo grafico, le oscillazioni sembrano rimanere ’orizzontali’ (ed in questo caso si parla di **stagionalità**), nel secondo si riesce ad intuire che - con il passare dei mesi - il prezzo del radicchio possiede una **tendenza lineare** ad aumentare (si dice anche **trend lineare**). Impariamo dunque a conoscere due importanti funzioni matematiche che sono particolarmente adatte a descrivere questi fenomeni.

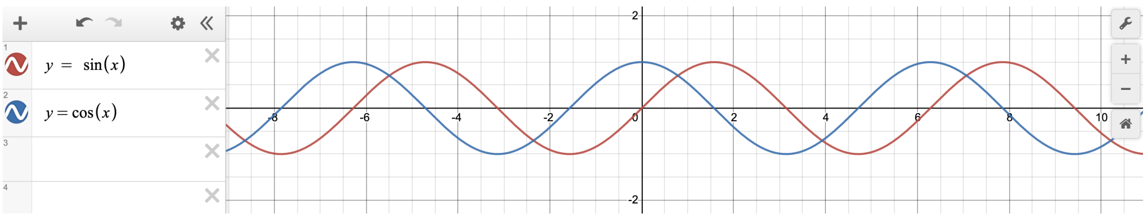
4.2 il grafico del seno e del coseno

Diversamente dalle funzioni che sino ad ora abbiamo incontrato (la retta, la parabola, l’iperbole, l’esponenziale) esistono dei grafici che **replicano ciclicamente** il loro comportamento, come ci è sembrato di intuire nei prezzi dei generi alimentari. Esploriamo dunque con Desmos come primo esempio il grafico del **seno**:



Esempio 4.2.1 — da fare assieme. Cerchiamo, di capire perché il grafico rosso abbia questa particolare forma.

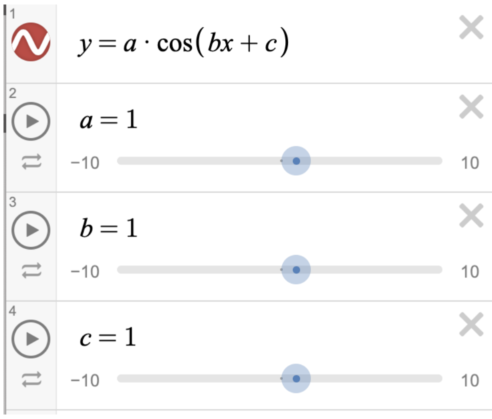
Ora, proviamo ad aggiungere anche il grafico del **coseno**. Cosa osserviamo?



Esempio 4.2.2 — da fare assieme. Cerchiamo di capire anche perché il grafico blu abbia questa particolare forma e cerchiamo di trovare le parole adeguate per descrivere quale relazione accomuni il comportamento dei due grafici.

4.3 Gli elementi di un'onda

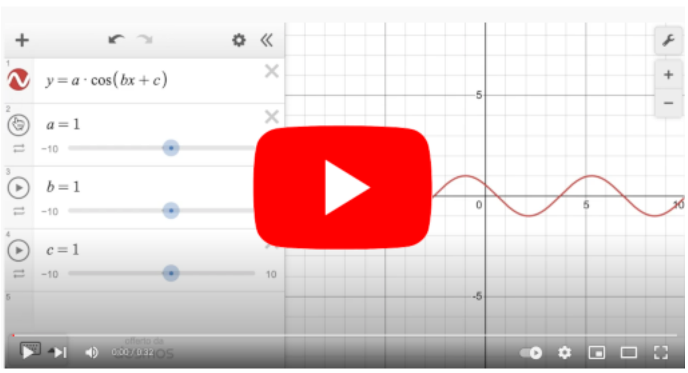
Esempio 4.3.1 — da fare assieme. Esploriamo come si modifica il grafico di un'onda descritta per esempio dalla funzione coseno, facendo variare i parametri a, b e c come in questo esempio:



A conclusione dell'attività ci sarà chiaro che:

1. l'**ampiezza** di un'onda si modifica con il parametro a. Infatti se la funzione $y = \cos(x)$ oscilla tra i valori -1 ed 1, la funzione $y = 4 \cdot \cos(x)$ oscilla tra i valori -4 e 4.
2. la **frequenza** di un'onda si modifica con il parametro b. Infatti se la funzione $y = \cos(x)$ mostra di essere un'onda 'tranquilla', la funzione $y = \cos(10 \cdot x)$ mostra invece un'onda che molto rapidamente oscilla tra valori positivi e negativi.
3. la **fase** di un'onda si modifica con il parametro c: spostando lo slider c l'onda viene traslata verso destra o verso sinistra, come avevamo già scoperto nell'Esempio 4.2.2.

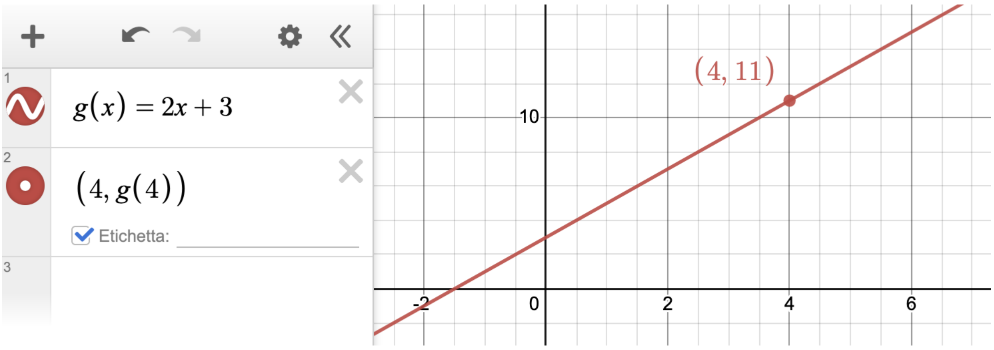
come possiamo vedere in questo video:



`https://www.youtube.com/watch?v=FtVc1LFnjwE`

4.4 Il concetto di funzione composta

Riflettiamo su quello che abbiamo appena imparato: possiamo partire da un qualsiasi punto x e applicargli una prima trasformazione, $g(x)$, valutando il valore $g(x) = bx + c$. Per esempio, se $b = 2$ e $c = 3$, e se $x = 4$ allora $g(x) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

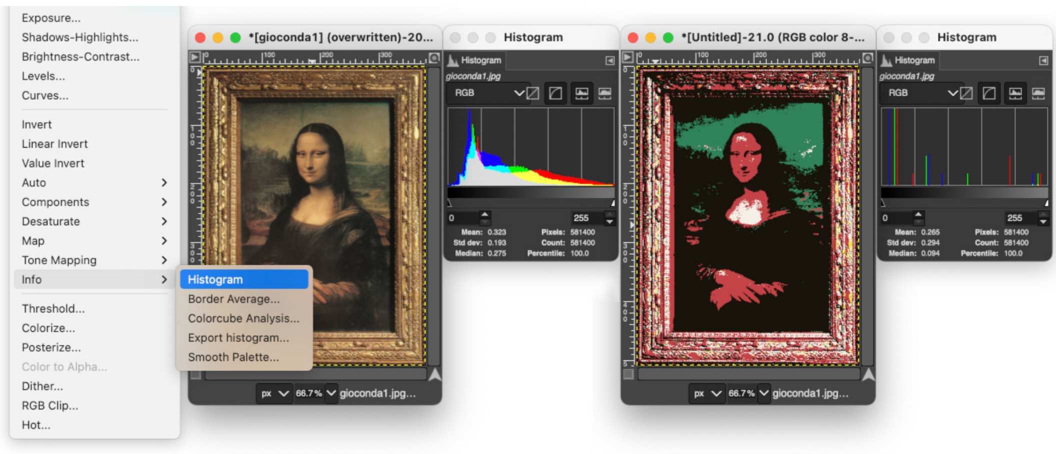


Adesso, se consideriamo la funzione $cos(bx + c)$ possiamo pensarla come risultato della funzione $f(\dots) = cos(\dots)$ applicato al risultato $g(x) = bx + c$, ossia la pensiamo come una **funzione composta** $f(g(x))$:

$$dacompletare$$

4.5 Filtrare i colori di un'immagine - parte seconda

Alla fine del precedente capitolo avevamo detto che, quando capiremo meglio il concetto di *frequenza* di un'onda, potremo spiegare come funzionano i filtri che cambiano il colore alle immagini digitali. Guardiamo meglio allora questa immagine:

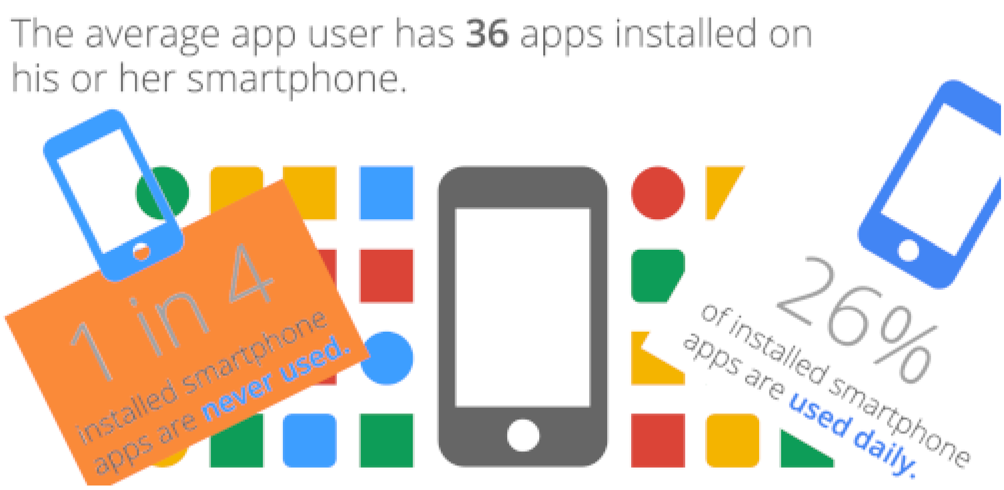


Mentre nell'immagine originale vi sono innumerevoli sfumature di colori, i quali nella codifica RGB danno origine ad numero smisurato di onde luminose di diversa **frequenza**, nella seconda immagine tutti i colori vengono ridotti a solamente 16 diverse onde luminose, ossia a solamente 16 frequenze diverse. Questo fatto viene evidenziato se si confrontano i due **istogrammi** dell'immagine.
Ma se aguzzate la vista, noterete che negli istogrammi dei colori compaiono anche altre parole chiave come la **media**, la **mediana**, la **deviazione standard** e i **quantili**: sono termini che non appartengono al mondo degli angoli e della goniometria, bensì al mondo della statistica e della probabilità, cui è dedicata la prossima sezione del nostro libro.

II Modelli di andamenti casuali

5. Analisi dei dati qualitativi

5.1 Perché studieremo la statistica



https://think.storage.googleapis.com/docs/mobile-app-marketing-insights.pdf

Se un'azienda oggi vuole collocare i propri prodotti od i propri servizi attraverso il mondo del web evidentemente deve avere ben chiaro il concetto che il *business* avverrà molto probabilmente attraverso lo smartphone del consumatore. Indagini di mercato di Google mostrano che i consumatori, pur avendo scaricato decine e decine di App nel loro telefono, ne usano con frequenza giornaliera solo una parte, e per contro vi sono altrettante App che non vengono mai utilizzate. Come vengono condotti questi sondaggi e come vengono analizzate le risposte? Come è opportuno raffigurare i risultati in modo da poter scoprire 'la realtà'? La statistica e la probabilità hanno alle spalle almeno due secoli di esperienza e di capacità di **gestire l'incertezza**, di modellare e predire i **fenomeni casuali**, cioè i **comportamenti aleatori**.

5.2 Frequenze assolute e relative: la tavola di contingenza

Consultando il mio registro elettronico, scopro che quest'anno insegno a 19 ragazze e a 30 ragazzi. I numeri 19 e 30 specificano con quale frequenza si distribuisce il genere all'interno del **campione** che sto esaminando: sappiamo che questi numeri si chiamano più precisamente **frequenze assolute**; spesso si preferisce descrivere questo tipo di **dati qualitativi** usando una forma percentuale, ossia mediante le **frequenze relative**. Ovviamente, per calcolare ad esempio la frequenza relativa dei 30 maschi, dobbiamo raffrontarla al totale degli studenti, ossia a 49, per mezzo di una **proporzione**:

$$30 : 49 = x : 100$$

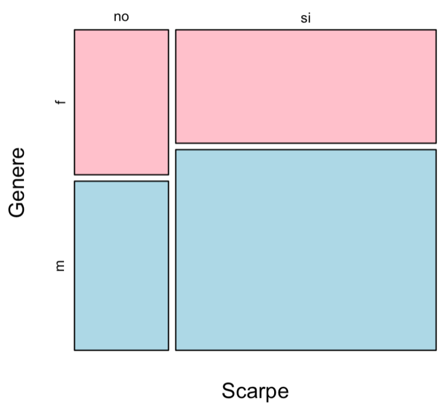
cioè, circa il 61%. Evidentemente, il rimanente 39% individua le ragazze delle mie classi.

Le cose diventano molto più interessanti quando vogliamo studiare il **comportamento congiunto** di due caratteristiche. Per esempio, vogliamo vedere se oggi i maschi e le femmine indossano delle scarpe da ginnastica ('si'), oppure 'no', indossano delle altre calzature. Lo si può fare compilando la **tavola di contingenza**:

	no	si	totale
femmine	5	13	19
maschi	8	23	30
totale	13	36	49

Le frequenze che compaiono nella zona color lilla si chiamano **frequenze congiunte**, mentre quelle nelle celle bianche sono dette **frequenze marginali**.

■ **Esercizio 5.1 — tavola di contingenza.** Create una tavola di contingenza considerando i maschi e le femmine della vostra classe, e chiedendo loro di esprimersi su chi fumi e chi non fumi. ■



Il **grafico a mosaico** che vediamo qui permette di visualizzare la tavola di contingenza: le aree dei rettangoli sono direttamente proporzionali alle frequenze congiunte.

Esempio 5.2.1 — da fare con Desmos. Proviamo a scoprire quanto misurano le basi e le altezze dei quattro rettangoli, impostando e risolvendo con Desmos in modo grafico le equazioni.

5.3 Laboratorio: quali App usiamo quotidianamente?

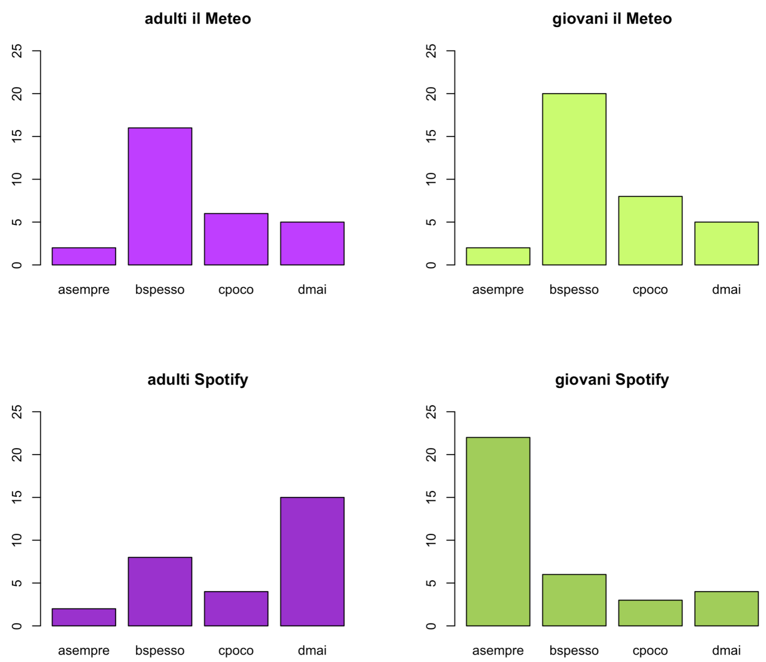
Abbiamo chiesto ad un campione di studenti, di genitori e di docenti della nostra scuola di esprimersi circa le App che usano con maggiore o con minore frequenza con il proprio smartphone.
Abbiamo ottenuto risposte da 64 partecipanti (35 studenti e 29 adulti); in particolare, abbiamo chiesto loro di prendere in considerazione le seguenti App:

1. Amazon Prime
2. Clue
3. Converter
4. Discord
5. Flo
6. ilMeteo
7. Instagram
8. justEat
9. Life360
10. Netflix
11. OneFootball
12. Pinterest
13. Shein
14. Snapchat
15. Spotify
16. Telegram
17. TikTok
18. Traduttore
19. Tuttocampo
20. Tutto il Calcio
21. Twitch
22. Twitter
23. WhatsApp
24. youTube
25. Zalando

e di esprimersi circa il loro utilizzo mediante una **scala ordinale** di preferenze:

- **a.** sempre / indispensabile / la uso ogni giorno
- **b.** spesso / utile / la uso quando occorre
- **c.** poco / superflua / la uso raramente
- **d.** mai / non la uso mai / non la conosco

Dall'indagine emerge per esempio che vi sono alcune applicazioni che sia i giovani che gli adulti utilizzano 'allo stesso modo' – ad esempio, ilMeteo e WhatsApp – , mentre in altre applicazione la differenza di età gioca un ruolo rilevante – ad esempio Spotify e Tik Tok:



Questi **diagrammi a barre** mostrano la **distribuzione dei dati** nei due gruppi (a sinistra in colore viola gli adulti; i giovani in verde a destra). Come vediamo, nel caso de il Meteo, la **risposta modale** è la b., 'spesso', in entrambi i gruppi. Al contrario, per Spotify le due risposte modali sono diverse: per gli adulti prevale il 'mai', mentre per i giovani la **moda** è 'sempre'.

Misurare la similarità delle distribuzioni

Possiamo cercare di misurare quanto siano **simili** (come nel Meteo), ovvero **dissimili** (come in Spotify), due distribuzioni di dati introducendo una **metrica** ossia una misura numerica che valuti quanto sono 'distanti' tra loro le frequenze congiunte. Vediamo come si procede, passo per passo, per calcolare la cosiddetta **metrica del coseno**. Partiamo dalle frequenze congiunte della App 'il Meteo' (cioè, non consideriamo le frequenze marginali della tavola di contingenza):

	ilmeteo			
	mai	poco	sempre	spesso
adulto	5	6	2	16
giovane	5	8	2	20

Pensiamo alle due righe (*adulto* e *giovane*) come a due **vettori**, come abbiamo imparato nella sezione 3.3, ruotando la Gioconda.

1. il prodotto scalare di due vettori.

Calcoliamo il cosiddetto **prodotto scalare** dei due vettori, in questo modo:

$$5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 16 \cdot 20 =$$

$$= 25 + 48 + 4 + 320 = 397$$

2. il modulo dei vettori.

Calcoliamo adesso il cosiddetto **modulo** dei due vettori, che rappresenta in effetti la loro 'lunghezza', nel senso del teorema di Pitagora. Si tratta semplicemente di fare il prodotto scalare di un vettore per se stesso, e di calcolarne la radice quadrata:

$$\sqrt{5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 16 \cdot 16} =$$

$$\sqrt{25 + 36 + 4 + 256} = \sqrt{321} \approx 17.9$$

$$\sqrt{5 \cdot 5 + 8 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 20 \cdot 20} =$$

$$\sqrt{25 + 64 + 4 + 400} = \sqrt{493} \approx 22.2$$

3. la metrica del coseno.

Dividendo il prodotto scalare dei due vettori per il prodotto dei loro moduli si ottiene esattamente il **coseno** dell'angolo che i due vettori individuano. Anche se non siamo in grado di fare un disegno della situazione, perchè avremmo bisogno di uno spazio a quattro dimensioni, il calcolo rimane valido ed attendibile:

$$\frac{397}{17.9 \cdot 22.2} = \frac{397}{397.4} = 0.99 = 99\%$$

In conclusione, abbiamo scoperto che giovani ed adulti si assomigliano nell'utilizzo dell'app il Meteo: la loro **similarità** è del 99%. Viceversa, la situazione per Spotify (sempre tra adulti e giovani) è praticamente opposta: la similarità è del 42%, in quanto, ripetendo i calcoli visti qui sopra ma con i dati della tabella che riportiamo nella pagina successiva, si ottiene che:

$$\frac{187}{15.2 \cdot 29.3} = 0.42 = 42\%$$

Dal raffronto dei grafici verdi e viola della pagina seguente si intuisce chiaramente quale sia l'obiettivo di fornire una misura di similarità: mentre nel caso de 'il Meteo' i diagrammi a barra hanno, grossomodo, il medesimo andamento, nel caso di Spotify le risposte sono molto diverse tra le due categorie di intervistati:

	genere		
	femmine	maschi	totale
adulti	19	10	29
giovani	28	7	35
totale	47	17	64

5.4 Eventi indipendenti: la probabilità condizionata

Abbiamo imparato nel paragrafo precedente che la metrica del coseno ci aiuta a capire se due distribuzioni dei dati sono più o meno simili. Ma se abbiamo dei dati puramente qualitativi possiamo fare qualcosa in più: possiamo cercare di scoprire **quanta informazione** li accomuna.

Prendiamo ad esempio Tik Tok, che evidentemente è conosciutissima dai più giovani, mentre è molto lontana dagli interessi degli adulti; la tavola di contingenza illustra le frequenze di utilizzo di questa App:

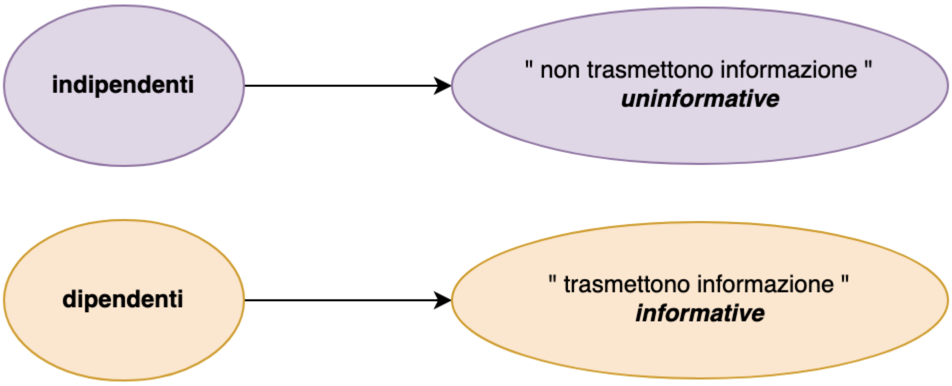
	utilizzo Tik Tok		
	no	sì	totale
adulti	25	4	29
giovani	5	30	35
totale	0	0	64

Esempio 5.4.1 — eventi dipendenti. Calcolate le percentuali degli adulti e dei giovani che utilizzano Tik Tok,sulla base di questa tabella. Vi sembrano due numeri che si assomigliano o che sono molto differenti?

È evidente che se l'86% degli adulti intervistati non usa Tik Tok, contro il 14% dei giovani, siamo in una situazione molto differente, ci verrebbe da dire opposta. Parafrasando il detto 'dimmi con chi vai e ti dirò chi sei' noi potremmo dire 'dimmi se usi Tik Tok e io capirò se sei un giovane'. Qui siamo difronte ad una **situazione informativa**, o come si dice anche, siamo in presenza di due **eventi dipendenti**.

■ **Esercizio 5.2 — eventi indipendenti.** Ritornate al precedente paragrafo 5.2 e calcolate le percentuali delle femmine e dei maschi che indossano le scarpe da ginnastica; vi sembrano due numeri che si assomigliano o che sono molto differenti? ■

Qui la situazione invece sembra essere quella di un perfetto equilibrio, con entrambe le proporzioni che si attestano attorno al 26%. In altri termini, dimmi pure se indossi le scarpe da ginnastica ma io non sarò in grado di capire da questa informazione se sei un ragazzo o una ragazza. Questa **uninformative situation** si direbbe in inglese rispecchia quella di due **eventi indipendenti** tra di loro. Lo schema della pagina successiva ci aiuta a non confondere la terminologia ed a ricordare le due situazioni.



Ora si tratta di precisare meglio la definizione di eventi dipendenti ed indipendenti, e lo facciamo introducendo il concetto di probabilità condizionata. Se in una tavola di contingenza noi fissiamo l'attenzione sulle **frequenze marginali** otteniamo una stima di **probabilità**. Per esempio, la probabilità che scegliendo a caso uno dei 49 studenti si scelga una ragazza risulta essere:

$$P(femmine) = \frac{19}{49} \approx 0.39 = 39\%$$

Se invece di guardare le frequenze marginali guardiamo le celle interne colorate in viola, possiamo per esempio rispondere a questa domanda: qual è la probabilità che scegliendo a caso uno dei 36 studenti che ha le scarpe di ginnastica si scelga una ragazza?

$$P(femmine|scarpedaginnastica) = \frac{14}{36} \approx 0.39 = 39\%$$

Le due probabilità sono praticamente uguali e questa è esattamente la caratteristica degli **eventi indipendenti**: dimmi che porti le scarpe di ginnastica ed io non sarò in grado di prevedere se sei maschio o femmina. Simbolicamente, scriviamo:

$$P(femmine \mid scarpe\ da\ ginnastica) = P(femmine)$$

Scarpe da ginnastica

	no	si	totale
femmine	5	14	19
maschi	8	22	30
totale	13	36	49

Tik Tok

	no	si	totale
femmine	19	10	29
maschi	28	7	35
totale	47	17	64

■ **Esercizio 5.3 — eventi dipendenti.** Guardate la tabella colorata in arancione, e calcolate queste probabilità:

- $P(femmine)$?
- $P(femmine \mid Tik\ Tok)$?
- $P(Tik\ Tok)$?
- $P(Tik\ Tok \mid maschi)$?

■

6. Previsioni dei dati quantitativi

6.1 Centralità e dispersione dei dati

6.1.1 Indici di posizione

Molti di noi conoscono gli **indici di posizione** (anche detti indicatori di posizione, o misure di tendenza centrale) sin dalle scuola primaria. Essi sono

- la **media**
- la **mediana**
- la **moda**

e se qualcuno avesse ancora qualche dubbio, potrà certamente recuperare le nozioni direttamente dalla pagina di Wikipedia, `https://it.wikipedia.org/wiki/Indice_di_posizione`, o approfondire ancor meglio dalla pagina in lingua inglese, `https://en.wikipedia.org/wiki/Central_tendency`.

Vale la pena ricordare che per calcolare la mediana occorre mettere in ordine i dati, dal più piccolo al più grande (o viceversa, fa lo stesso), e si va a vedere cosa succede lì nel mezzo. La moda, invece, è particolarmente adatta a descrivere i dati qualitativi.

Ora, spieghiamo con un esempio semplice perché gli indici di posizione spesso non sono sufficienti a descrivere in maniera soddisfacente l'andamento dei dati. Supponiamo che Gigetta sia una studentessa diligente, la quale si contrappone a quel fannullone di Massimino non studia mai e che che copia l'ultimo compito in classe rimediando in modo truffaldino la sua situazione scolastica:

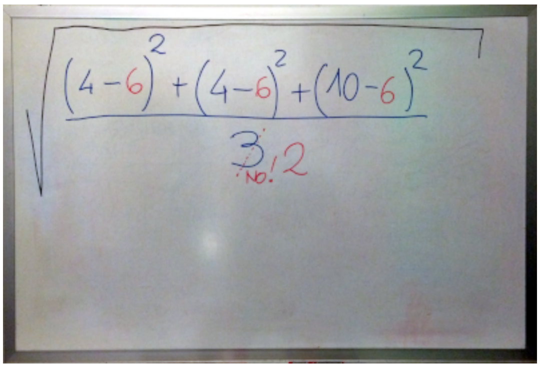
	A	B	C	D	E
1	Compiti di latino				media
2	Gigetta	6	6	6	6
3	Massimino	4	4	10	6
4					

Mentre i voti di Gigetta sono omogenei e ben descritti dalla media 6, i voti di Massimino sono molto variabili, molto eterogenei, e non assomigliano al voto medio. Ecco perché gli indici di posizione non sono sufficiente a riassumere una situazione in maniera esauriente, ma abbiamo la necessità di introdurre ulteriori indici.

6.1.2 Indici di dispersione

Spieghiamo ore perché vogliamo affiancare agli indici di posizione degli adeguati **indici di dispersione**, ed a noi interessano particolarmente la **deviazione standard** ed i **quartili**. Iniziamo con la deviazione standard.

Guardiamo la lavagna, cercando di tenere in mente il 'teorema di Pitagora', nel quale si sommano degli oggetti elevati al quadrato: abbiamo preso i voti di Massimino, abbiamo tolto ad essi la media, elevando al quadrato i risultati, sommandoli ed infine dividendo per il numero di verifiche effettuate durante l'anno (ossia, tre) diminuite di uno (e cercheremo di spiegare in seguito il perchè di questa stranezza). Facendo i calcoli, otteniamo sino a questo punto 24/2 = 12. Questo numero 12 si chiama **varianza**, ed è anch'esso un famoso indicatore di dispersione. Ma noi non lo useremo mai, perché esso possiede un'unità di misura *sballata* rispetto ai dati che stiamo considerando (sorridiamo su questa frase: la media dei pesi degli studenti è di circa 64 *chili*, con una varianza di 26 *chili quadrati* ..). Considerando invece la radice quadrata di 12, che fa circa 3 e mezzo, abbiamo ottenuto la **deviazione standard** dei voti di Massimino.



■ Esercizio 6.1 — deviazione standard. Calcolate la deviazione standard dei voti di Gigetta. ■

Il fatto che i voti di Gigetta siano stati sempre costanti, e la loro deviazione standard vale zero, mentre quelli di Massimino abbiano deviazione standard circa 3, ci fa intuire che nel primo caso i voti hanno avuto un andamento omogeneo, mentre nel secondo caso il comportamento dei voti è molto *eterogeneo*.

Esempio 6.1.1 — deviazione standard. Con il telefonino, usando le parole chiave standard deviation online calculator collegatevi al sito CalculatorSoup: `https://bit.ly/3nEOiMB` e calcolate le deviazioni standard dei voti di Massimino e di Gigetta.

Ora consideriamo invece (e li vedete nella pagina seguente) i voti complessivi di una verifica di matematica in una classe di 13 allievi. Vedete che abbiamo riportato i dati due volte; la prima in ordine progressivo ed alfabetico. La seconda, in ordine di voto crescente (potevamo anche farlo in modo decrescente, non cambiava nulla). Vediamo subito che il voto **minimo** è 4, mentre il voto **massimo** è 9: li abbiamo evidenziati nelle celle di colore viola; il minimo ed il massimo sono esattamente il primo ed il tredicesimo della lista riordinata. La settima posizione, in colore arancione, ci restituisce il voto mediano, che è 7 (quello di Djurica). Se adesso andiamo a cercare 'chi sta in mezzo' tra i primi sette, ed i secondi sette allievi, ossia il quarto voto ed il decimo voto (celle in colore azzurro) troveremo il 6 di Hira ed il 7 di Lorenzo. Diremo dunque che 6 è il **primo quartile** della distribuzione dei voti e 7 è il **terzo quartile**.

Numero	Nomi	Voti	Numero	Nomi	Voti
1	Antonella	6	7	Giovanni	4
2	Bruno	8	11	Konstantin	5
3	Chiara	7	1	Antonella	6
4	Djurica	7	8	Hira	6
5	Elina	7	9	Iuliana	6
6	Floriana	9	3	Chiara	7
7	Giovanni	4	4	Djurica	7
8	Hira	6	5	Elina	7
9	Iuliana	6	10	Jan	7
10	Jan	7	12	Lorenzo	7
11	Konstantin	5	13	Malika	7
12	Lorenzo	7	2	Bruno	8
13	Malika	7	6	Floriana	9

Esempio 6.1.2 — quartili e boxplot. Con il telefonino, usando le parole chiave quartile online calculator collegatevi al sito CalculatorSoup: `https://bit.ly/3UXqj9t` e calcolate i quartili dei voti. Successivamente, usando le parole chiave boxplot online calculator collegatevi al sito Alcula: `https://bit.ly/3hsDP7p` e rappresentate i dati con un 'boxplot'.

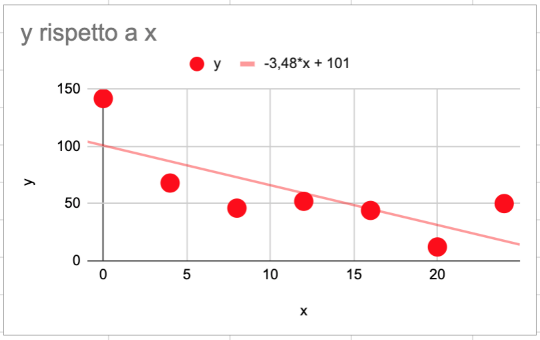
6.2 Linee di tendenza: la retta di regressione

I social media manager danno molta importanza alle **metriche** che cercano di misurare quale sia l'impatto di una campagna pubblicitaria attraverso i social. Nell'esempio qui sopra, intuiamo che le visualizzazioni di un *post* su Facebook sono andate via via calando nei giorni. La domanda che ci poniamo è: possiamo stimare quale potrebbe essere il numero di visualizzazioni del post il 23 febbraio prossimo? A tale proposito, possiamo cercare di visualizzare l'andamento dei dati (i pallini rossi) con una **linea di tendenza**, che si chiama **retta di regressione**. Abbiamo vari modi per determinare l'equazione $y = mx + q$ di questa retta:

1. con il foglio elettronico
2. con il telefonino
3. a mano, con carta e matita

Se vogliamo utilizzare il foglio elettronico di Google, procediamo in questo modo: inseriamo in due colonne i valori x ed y, li selezioniamo, e diamo il comando Inserisci | Grafico. Osserviamo che si apre un banner Editor grafici sulla destra dello schermo ed entriamo nel menu Personalizza; scendiamo nell'opzione Serie e spuntiamo la casella Linee di tendenza e come Etichetta scegliamo Utilizza equazione. Nel nostro esempio, leggiamo $y = -3.48x + 101$:

	A	B	C
1	data	giorni	visite
2	calendario	**x**	**y**
3	26 gen	0	142
4	30 gen	4	68
5	3 feb	8	46
6	7 feb	12	52
7	11 feb	16	44
8	15 feb	20	12
9	19 feb	24	50
10			



Possiamo controllare con il telefonino, digitando sul browser le parole chiave Statistics Kingdom regression, `https://www.statskingdom.com/linear-regression-calculator.html`, ed inserendo nelle due caselle bianche le due serie di dati, in verticale.

Infine, possiamo eseguire i calcoli manualmente, seguendo lo schema di questo esercizio, ricordando un fatto fondamentale:

Definizione 6.2.1 — da imparare a memoria. La retta di regressione passa sempre per il **baricentro** della nuvola di punti, ossia per il punto che ha per coordinate le medie della serie di dati x e della serie y.

■ **Esercizio 6.2 — retta di regressione.** Usando questo schema-guida, calcolate l'equazione della retta di regressione. ■

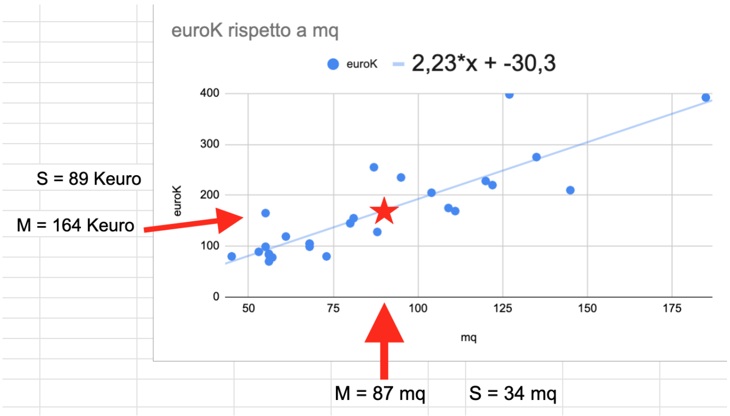
	W1		W2	W1^2	W1 * W2
X	X – m	Y	Y – M	(X – m)^2	(X – m)(Y – M)
13		47			
19		57			
25		58			
31		70			
37		84			

media	media	somma	somma
m	M	V	C

Pendenza = C/V

Quota = M – Pendenza * m

6.3 La correlazione



Abbiamo cercato con `subito.it` il prezzo di vendita di alcuni appartamenti, in buono stato, nel centro di Trieste. Con il foglio elettronico `https://bit.ly/3IBQYVS` abbiamo calcolato l'equazione della retta di regressione $y = 2.23 \cdot x - 30.3$, ed abbiamo anche calcolato le deviazioni standard $Sx = 34$ (metri quadrati) ed $Sy = 89$ (migliaia di euro).

Ragioniamo sulle **dimensioni** del coefficiente angolare 2.23, ossia, sull'unità di misura in cui esso viene espresso.

$$\text{pendenza} = 2.23 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[euro]}{[mq]}$$

Questa considerazione ci fa intuire che se moltiplichiamo la pendenza 2.23 della retta di regressione, $\frac{[euro]}{[mq]}$, per il rapporto $\frac{Sx}{Sy}$ delle deviazioni standard (che evidentemente ha dimensione $\frac{[mq]}{[euro]}$), otterremo un numero puro adimensionale. Questo numero è un coefficiente che, in percentuale, descrive la dispersione dei dati intorno alla retta di regressione. Esso si chiama **coefficiente di correlazione**, e se ad esempio i punti sono tutti allineati sulla retta vale 100%, mentre se i dati sono caotici, il coefficiente di correlazione si avvicina allo 0%. Nel nostro esempio:

$$2.23 \cdot \frac{34}{89} = 0.85 = 85\%$$

Nella prossima attività avremo bisogno di calcolare alcune deviazioni standard, con CalculatorSoup: `https://bit.ly/3nEOiMB`, ed una retta di regressione con Statistics Kingdom, `https://www.statskingdom.com/linear-regression-calculator.html`.

■ **Esercizio 6.3 — correlazione.** Con il telefonino, con CalculatorSoup: `https://bit.ly/3nEOiMB`, e con Statistics Kingdom `https://bit.ly/3IUR2QJ`,

■

III Le nostre Unità Didattiche

7. Dalla città industriale alla smart city

7.1 Le Smart City e gli obiettivi dell'Agenda 2030

Avrete capito che, in classe quarta, noi insegnanti adoperiamo molto spesso nei nostri discorsi le parole **smart city** e **Agenda 2030**: sono dei temi che caratterizzano una nostra importante **unità didattica di apprendimento**. Le Smart City, infatti, sono città che utilizzano le tecnologie digitali per migliorare la qualità della vita dei cittadini, la sostenibilità ambientale e l'efficienza dei servizi pubblici (a proposito, che ne pensate? Trieste vi sembra essere una smart city?). Le smart city in particolare possono contribuire al raggiungimento dei diciassette obiettivi dell'Agenda 2030 in diversi modi, tra cui:

- Ridurre le emissioni di carbonio e l'inquinamento: le Smart City possono utilizzare tecnologie come l'energia rinnovabile, la mobilità elettrica e la gestione intelligente dei rifiuti per ridurre l'impatto ambientale;
- migliorare l'efficienza delle risorse: le Smart City possono utilizzare tecnologie come l'Internet of Things (IoT) e l'intelligenza artificiale (AI) per ottimizzare l'utilizzo delle risorse, come energia, acqua e materiali;
- promuovere l'inclusione sociale: le Smart City possono utilizzare tecnologie come la connettività digitale e i servizi di e-government per migliorare l'accesso ai servizi e alle opportunità per tutti i cittadini.

Infatti, possiamo citare alcuni esempi concreti di come le Smart City possano contribuire al raggiungimento degli obiettivi dell'Agenda 2030:

- Obiettivo 7: Garantire l'accesso a un'energia pulita e accessibile: le Smart City possono utilizzare l'energia solare, eolica e altre fonti rinnovabili per generare energia pulita e accessibile
- Obiettivo 9: Costruire un'infrastruttura resiliente, promuovere un'industrializzazione inclusiva e sostenibile e sostenere l'innovazione: le Smart City possono utilizzare tecnologie come l'IoT e l'AI per migliorare l'efficienza delle infrastrutture e promuovere un'industrializzazione sostenibile
- Obiettivo 11: Rendere le città e gli insediamenti umani inclusivi, sicuri, duraturi e sostenibili: le Smart City possono utilizzare tecnologie come la connettività digitale e i servizi di e-

government per migliorare la qualità della vita nelle città e rendere gli insediamenti umani più inclusivi e sostenibili

Il nostro interesse maggiore riguarda l'obiettivo numero 11, che prevede appunto di *rendere le città e gli insediamenti umani inclusivi, sicuri, duraturi e sostenibili*. L'obiettivo si concentra su quattro **A.S.S.I.** principali:

- **A**ccesso ai servizi: garantire a tutti accesso a servizi di base come acqua, energia, alloggio, trasporti e servizi sanitari
- **S**icurezza: rendere le città più sicure per tutti, in particolare per le donne e i bambini
- **S**ostenibilità: ridurre l'impatto ambientale delle città
- **I**nclusione: rendere le città più inclusive per tutti, indipendentemente dalla situazione economica, sociale o di disabilità

7.2 Perché la matematica ha un ruolo importante in quesi temi?

Innanzitutto, la matematica è necessaria per sviluppare e implementare le tecnologie digitali che sono alla base delle Smart City. Ad esempio, la matematica è utilizzata per sviluppare algoritmi di intelligenza artificiale che possono essere utilizzati per ottimizzare il traffico, prevedere le condizioni meteorologiche o gestire i rifiuti. In secondo luogo, la matematica è necessaria per misurare e valutare i progressi compiuti verso gli obiettivi dell'Agenda 2030. Ad esempio, la matematica è utilizzata per calcolare le emissioni di carbonio, misurare la qualità dell'acqua o valutare il livello di inclusione sociale. In terzo luogo, la matematica è necessaria per progettare e implementare politiche e programmi che contribuiscano al raggiungimento degli obiettivi dell'Agenda 2030. Ad esempio, la matematica è utilizzata per stimare il costo di un progetto di energia rinnovabile, valutare l'impatto di un nuovo programma di trasporto pubblico o calcolare il beneficio di un nuovo programma di formazione.

Noi conosciamo già alcuni strumenti molto utili, per esempio **i logaritmi**, che ci consentono di tracciare dei grafici. Ad esempio, possiamo affrontare questa attività:

Grafici in scala logaritmica

Massimo Borelli • Ieri

30 punti — Consegna: 6 nov

Osservate la tabella che elenca nove importanti Smart Cities mondiali. Disegnate sul **vostro quaderno di matematica**, usando il righello e la calcolatrice scientifica, nove punti individuati con la sigla (come nell'esempio arancione); sull'asse x riportate la **popolazione**, sull'asse y la **superficie**. Ovviamente, sugli assi dovrete utilizzare una scala logaritmica (come abbiamo imparato in classe martedì 31 ottobre con l'esempio del peso e della frequenza cardiaca degli animali).

Città	Sigla	Popolazione (2023)	Superficie (km$\hat{2}$)
Monaco	Mo	38.860	2
Luxembourg	Lu	62.549	25
Ginevra	Gi	202.972	16
Muscat	Mu	1.300.000	3.250
San Jose	Sa	3.045.635	76
Sydney	Sy	5.232.190	12.144
Mumbai	Mu	21.154.200	603
Pechino	Pe	22.000.000	16.411
Tokyo	To	37.434.982	2.190

8. Cos'è il ciclo di vita di un prodotto

Nel 1966 l'economista Raymond Vernon, professore ad Harvard nonché 'inventore' delle caramelle M & M's, pubblica un articolo intitolato *International Investment and International Trade in the Product Cycle* nel quale illustra il concetto economico di **ciclo di vita di un prodotto**. Nella figura a sinistra vedete i suoi disegni originali, mentre nel grafico colorato a destra distinguiamo quelle che comunemente vengono indicate come le possibili quattro **fasi delle vendite** di un determinato prodotto commerciale: l'introduzione nel mercato, la fase di crescita, la fase di maturità e la fase di declino. Da un punto di vista matematico è molto importante provare a descrivere l'andamento delle vendite e dei mercati per mezzo di una **funzione matematica**, ossia di una legge che specifichi la quantità dei beni venduti (la **variabile dipendente** che leggiamo sull'asse y) in relazione, per esempio, ai giorni che passano (la **variabile indipendente**, ossia l'asse delle x).

8.1 Andamento di una funzione

Una competenza matematica importante è quella di saper fornire una descrizione qualitativa del comportamento di una funzione. Per esempio, consideriamo una funzione periodica, come questa:

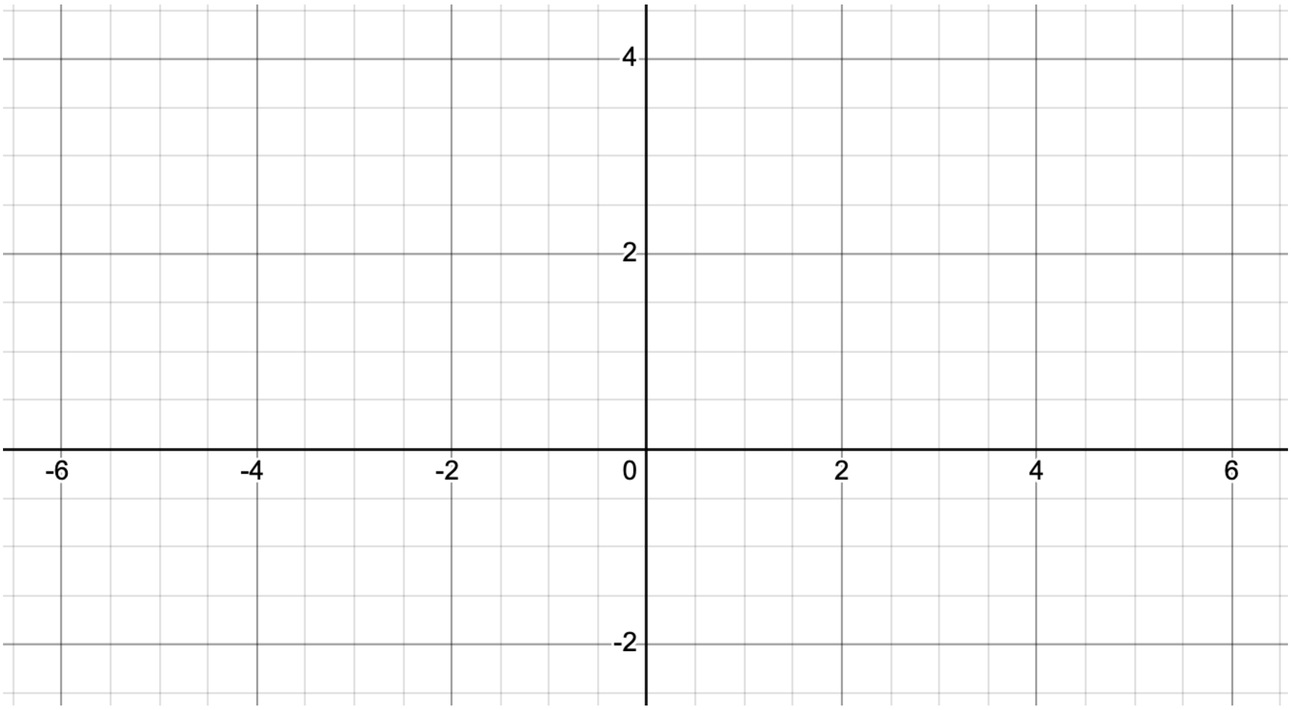
ANDAMENTO DI UNA FUNZIONE

Descrivi la funzione definita sul dominio [-6, 6]

1

$$y = 1 + \frac{4x}{1+x^2}$$

- disegna il grafico con Desmos, e ricopialo **bene** ed a **a matita**



- individua gli zeri (le radici) della funzione
- individua gli intervalli dove la funzione e' positiva
- individua i massimi ed i minimi della funzione
- individua l'insieme immagine della funzione
- individua gli intervalli dove la funzione e' crescente
- individua i flessi della funzione
- individua gli intervalli dove la funzione e' convessa

8.2 Limiti di una funzione

questo paragrafo non è ancora completo, fate riferimento agli appunti sul vostro quaderno.

9. Equilibrio tra domanda e offerta

9.1 Equilibrio tra domanda e offerta

Lorem ipsum.

Bibliography

Indice analitico