Matematica con Desmos

per i servizi commerciali - Web Community

Istituto Sandrinelli – Trieste

PUBBLICATO PRESSO L'ISTITUTO 'DA VINCI - CARLI - SANDRINELLI' DI TRIESTE

http://www.davincicarli.edu.it

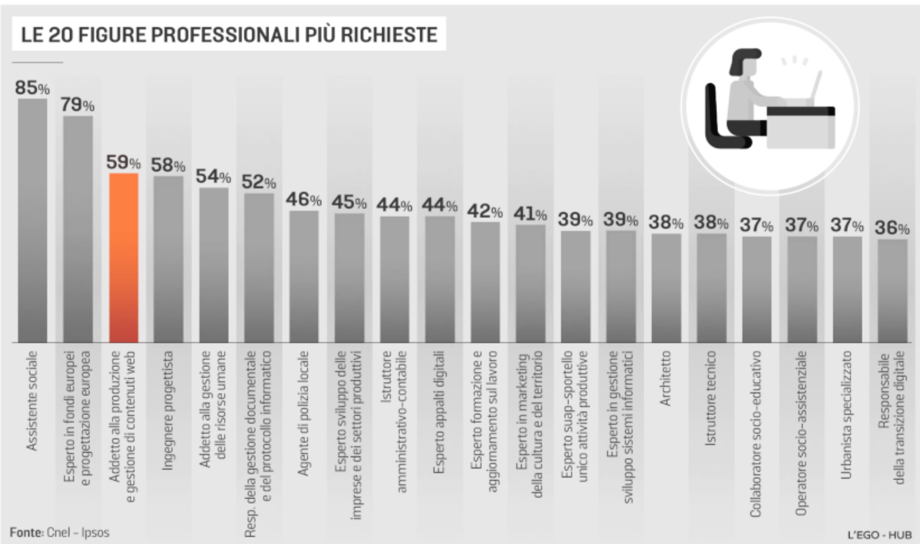
Prima edizione, agosto 2021

Indice

1. Per iniziare

1.1 Perché abbiamo questo libro

Sul quotidiano *Il Piccolo*, il 31 maggio 2021 era apparso un grafico che si riferiva alle venti figure professionali più richieste nella Pubblica Amministrazione, secondo il piano di assunzioni previsto dal cosiddetto Piano Nazionale di Ripresa e Resilienza (ovvero lo strumento economico di risposta alla crisi pandemica denominato 'Next Generation EU'):



Come vedete al terzo posto, dopo gli 'assistenti sociali' e gli 'esperti in fondi europei e progettazione europea', troviamo gli '**addetti alla produzione e gestione di contenuti web**'. Per noi che apparteniamo all'indirizzo 'Servizi Commerciali - Nuovo Ordinamento Web Community' è sicuramente una sfida, perché desideriamo concorrere alla formazione di queste figure professionali attive nell'innovazione digitale. E ci sembra di poter dire che anche l'insegnamento della Matematica debba rispecchiare questa necessità di innovazione - o quantomeno, la Matematica e la tecnologia devono affiancarsi per arrivare con rapidità ai traguardi che un tempo si raggiungevano, con fatica, lavagna dopo lavagna.

Dunque, perché esiste questo libro? In fin dei conti ce ne sono già tanti per il Triennio del Servizi Commerciali realizzati in maniera autorevole e didatticamente ineccepibile. Tuttavia, se si sfogliano i loro sommari ed i loro indici, tutti più o meno propongono una lista di argomenti simile a questa:

- La retta ed il piano cartesiano
- La parabola
- Disequazioni di secondo grado
- Circonferenza ed ellisse
- Iperbole
- Funzioni e formule goniometriche. Equazioni e disequazioni goniometriche
- Trigonometria
- Numeri complessi e coordinate polari
- Equazioni e disequazioni algebriche, irrazionali e con valori assoluti
- Introduzione all'analisi
- Limiti
- Continuità
- La derivata
- Teoremi sulle funzioni derivabili
- Lo studio di funzione
- Calcolo integrale
- Calcolo combinatorio
- Probabilità
- Geometria euclidea nello spazio
- Distribuzioni di probabilità

Ma se si legge con attenzione i documenti relativi alla riforma dei Nuovi Professionali (come ad esempio questo dell'Indire, `https://bit.ly/2QnwZT8`, relativo ai Nuovi Professionali / Indirizzo Commerciale, oppure questo del percorso 'Servizi Commerciali - web community', `https://bit.ly/33MJCdp`), si rileva che l'Asse Matematico - anche cooperando con l'Asse scientifico, tecnologico e professionale - debba preoccuparsi di assicurare i seguenti *learning outcomes*, risultati di apprendimento:

- Eseguire semplici operazioni utilizzando il calcolo computistico (rapporti, proporzioni, riparti, calcolo percentuale) in sequenze diversificate con una gamma definita di variabili di contesto.
- Utilizzare le reti e gli strumenti informatici nelle attività di studio
- Utilizzare strumenti tecnologici, sistemi operativi e software di piu ampia diffusione.
- Utilizzare tecnologie informatiche e software applicativi aziendali di piu ampia diffusione a supporto della gestione dei processi amministrativi, logistici, commerciali e di comunicazione, in una gamma di situazioni mutevoli.
- Redigere semplici rappresentazioni di attività aziendali programmate in un contesto mutevole.
- Condurre la Break even analysis in un contesto strutturato con situazioni mutevoli.
- Fornire elementi di statistica. Realizzare indagini di mercato con semplici strumenti statistici.
- Conoscere il sistema bancario e finanziario: l'interesse e lo sconto
- Conoscere i caratteri funzionali di Facebook, Twitter, Youtube.
- Operare la scelta degli adeguati strumenti di calcolo finanziario in un numero limitato di situazioni diversificate. Scegliere tra diverse forme di finanziamento.
- Conoscere le caratteristiche degli investimenti e il rapporto tra rischio e rendimento. Scegliere tra diverse forme di investimento in funzione del rapporto tra rischio e rendimento.

Balza immediatamente agli occhi la divergenza dei due elenchi, la loro mancata sovrapposizione: nel secondo elenco, prevale una serie di competenze ed abilità che sono conseguenza della tecnologia – nel primo elenco invece ritroviamo una riproposizione di quelli che sono stati da decenni i contenuti classici della Matematica che occorreva conoscere nei *precomputing days*.

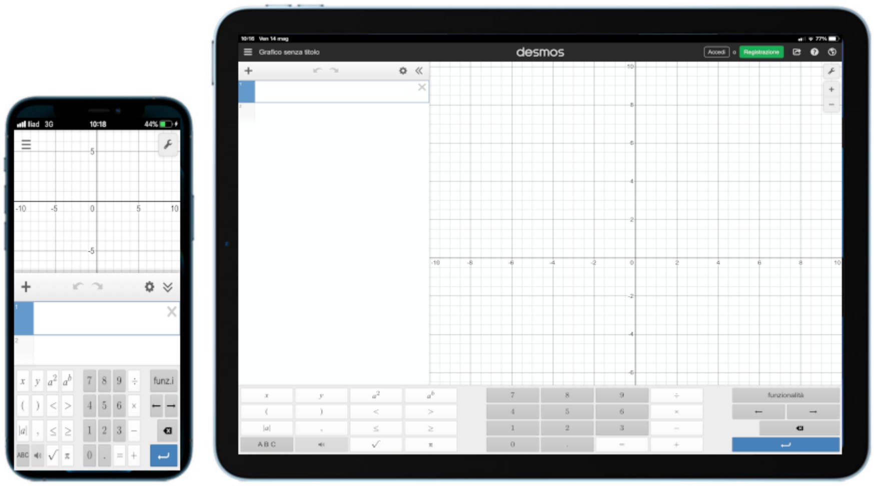
Un'ultima osservazione: le tecnologie evolvono, e spesso molto rapidamente. Questa immagine del 1974 è il centralino telefonico del Centers for Disease Control and Prevention's (CDC) di Atlanta (Georgia, USA). A quel tempo pochi al mondo potevano immaginare che ci saremmo potuti portare un telefono nella tasca dei pantaloni, e con quel telefono ci saremmo potuto scambiare foto, video, insulti, dichiarazioni d'amore, denaro. E risolvere le equazioni matematiche. E senza avere più bisogno delle 'centraliniste' che inseriscano i *jack*, passando i collegamenti.

Se dunque le tecnologie modificano il mercato del lavoro e persino i comportamenti sociali, non si vede il perché la matematica degli Istituti Professionali non lo debba recepire. Buona lettura, dunque, di *Matematica con Desmos*.

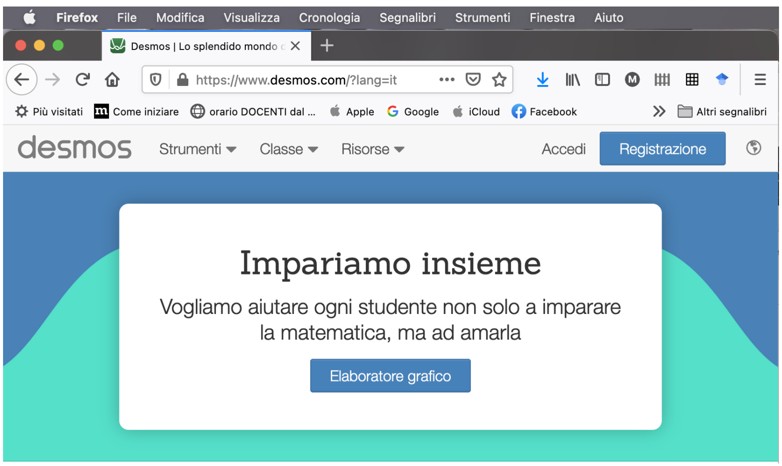
1.2 Di cosa avremo bisogno a lezione

Ovviamente, per prima cosa, abbiamo bisogno di procurarci **Desmos Graphing Calculator**, una app che potete installare gratuitamente sul vostro telefonino (e che vi consumerà pochissima memoria) o sul vostro tablet: sarà sufficiente cercare nel vostro app-store questa icona qui:

Dopo avere installato l'applicazione, apritela e vedrete un qualcosa di questo genere:

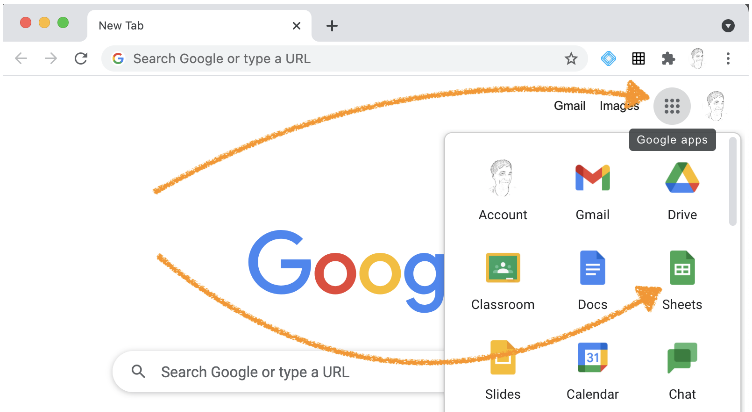


Impareremo a mano a mano ad utilizzare tutte le funzionalità di questo calcolatore grafico; si tratta di un software che consente di svolgere le medesime azioni delle calcolatrici grafiche che il Ministero consente di utilizzare durante l'Esame di Stato[1], senza doversi connetersi in wireless ad alcuna rete (ossia, potete usare Desmos 'in modalità aereo').
Se invece utilizzate un computer connesso alla rete, per esempio quando siete a scuola in laboratorio di informatica, vi potrete collegare all'**Elaboratore grafico** dell'indirizzo `https://www.desmos.com`:



Vedrete che Desmos è particolarmente adatto per realizzare i grafici delle funzioni. Desmos consente anche di costruire delle tabelle numeriche, ma in questo àmbito il **foglio elettronico** è certamente un software molto più performante. Per antonomasia, il foglio elettronico che tutti hanno in mente si chiama **Excel**™ ed è un prodotto commerciale venduto della Microsoft. Noi invece utilizzeremo sempre i prodotti gratuiti, e la Scuola a tale proposito ci offre - tramite le nostre credenziali `nome.cognome@dcstrieste.it` - l'utilizzo di Google Workspace: come vedete nella figura, avete sempre accesso gratuito alla applicazione **Sheets** che si trova all'interno del 'mosaico' delle Google apps:

[1]Cfr. ad esempio `https://bit.ly/3ogyU8r`.



1.3 Come è scritto questo libro

Questo libro è scritto in maniera colloquiale, anche perché questo non è un *vero* libro di matematica: sono solamente le chiacchiere che facciamo a lezione, ricopiate in italiano.

Pagina dopo pagina, osserverete che abbiamo cercato di mantenere alcune convenzioni grafiche. Innanzitutto, le **parole importanti da ricordare** sono scritte in grassetto; se poi ci sono delle formule molto importanti, le scriveremo dentro ad una Definizione, tipo questa:

Definizione 1.3.1 — da imparare a memoria. Quando vedrete qualcosa scritto in viola:

$$formula\ importante \tag{1.1}$$

significa che siete obbligati a impararlo e ricordarlo per sempre, senza fallo.

Ogni concetto nuovo verrà sempre spiegato con un:

Esempio 1.3.1 — da fare assieme. Infatti, per capire bene gli argomenti sarà quasi sempre necessario prendere Desmos e provare a fare un grafico, o una tabella di numeri, e riuscire a capire quello che si è fatto, interpretandolo e magari ricopiandolo sul quaderno.

Quando avremo discusso assieme questo Esempio 1.3.1, allora toccherà a voi a provare a fare da soli, in aula o a casa, qualche semplice

■ **Esercizio 1.1 — sul vostro quaderno.** Di solito, per risolvere questo Esercizio, sarà necessario aver saputo fare con sicurezza il precedente Esempio. La cosa piacevole è che, se alla fine avrete qualche dubbio sull'esito dell'esercizio, potrete sfogliare le pagine del libro alla ricerca delle **Soluzioni**. ■

In questo libro troverete anche degli avvertimenti, che scherzosamente si chiamano ahia, ed iniziano sempre così:

ahia Attenzione all'errore frequente. Questi avvertimenti si basano sulla consolidata esperienza che il nostro santo protettore, San Drinelli, ha accumulato nel corso degli anni - egli infatti sorveglia con attenzione gli insegnanti che interrogano e che correggono i compiti, prendendo nota degli errori che gli studenti commettono (sorprendentemente, nei secoli dei secoli, gli studenti commettono sempre gli stessi errori, e gli insegnanti si scordano che anche loro, quand'erano studenti, frequentemente commettevano i medesimi errori).

Di quando in quando, ci saranno anche dei collegamenti interessanti con le altre discipline scolastiche: la Storia, le Lingue, l'Economia, ... Avremo dunque l'occasione di compiere un

> **Approfondimento interdisciplinare 1.3.2 — Chi l'avrebbe mai detto.** I concetti matematici di cui stiamo discutendo incredibilmente trovano una spiegazione oppure una applicazione in qualche altro fenomeno di cui si occupa ad esempio il Marketing, oppure il Diritto, oppure la Psicologia Sociale. Sarà opportuno parlarne con le professoresse che ci insegnano quella disciplina e chiedere il loro parere.

Più raramente, incontreremo anche qualche importante

Teorema 1.3.3 — da imparare bene. Se una formula o una legge molto importanti saranno conseguenza di una determinata Definizione, allora le metteremo in evidenza in un Teorema. Di norma, i Teoremi possiedono (almeno) una **Dimostrazione** - vedremo se sarà il caso di occuparcene, o no.

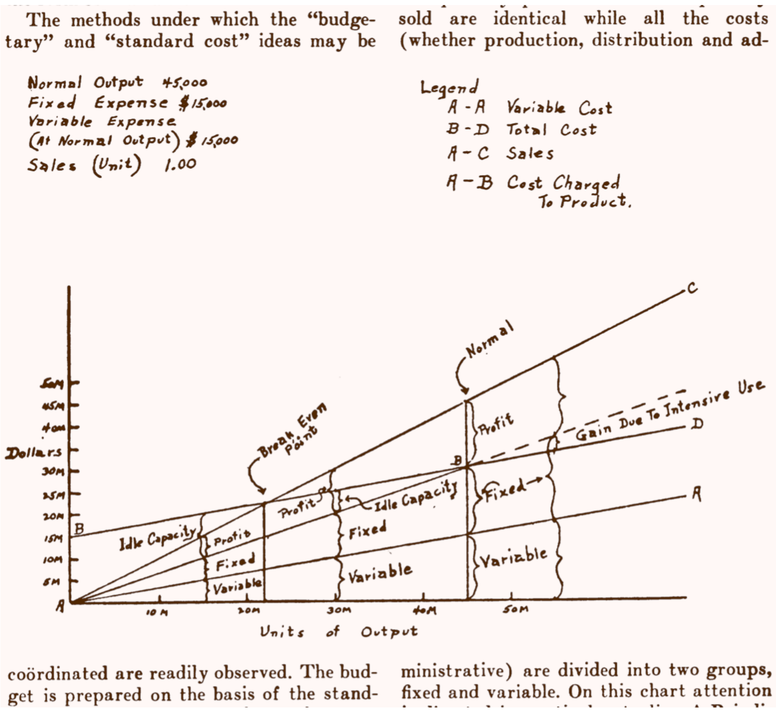
Riassunto

Ed infine, a conclusione di ogni Capitolo – prima delle **Soluzioni** degli Esercizi – troverete anche un breve Riassunto delle nuove formule e delle nuove definizioni che avremo imparato nei giorni precedenti, e – quasi sempre – una **Verifica di Sintesi**, nella quale vi verrà richiesto di utilizzare tutte le conoscenze e le abilità sino ad allora conseguite.

Modelli di crescita lineare

2. La retta

2.1 Perché studieremo la retta



La retta è un concetto geometrico di enorme aiuto a moltissime scienze: per esempio, in questa figura realizzata 'a mano' e vecchia di circa novant'anni, l'economista James Dohr [**dohr1932budgetary**] spiegava come le rette si potessero utilizzare per analizzare i **costi** ed i **ricavi** di un'azienda con lo scopo di assicurare un profitto: stava nascendo così la **break even analysis**, ed anche noi impareremo ad eseguirla.

2.2 L'equazione della retta

Molti di voi avranno già imparato che le rette possiedono una tipica formula:

Definizione 2.2.1 — equazione generica della retta.

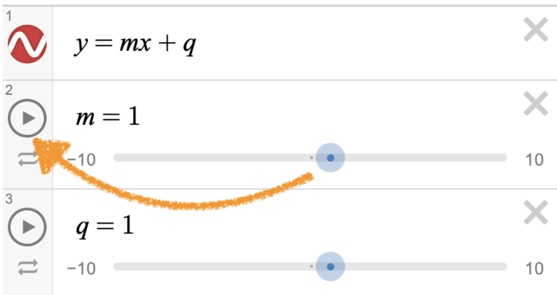
$$y = m \cdot x + q \tag{2.1}$$

I numeri m, e q si chiamano **coefficienti** della retta.

Dobbiamo innanzitutto imparare quale significato possiedono questi coefficienti m e q. Cominciamo con il **coefficiente angolare** m, il quale caratterizza la **pendenza** della retta, come in questo segnale stradale:

Figura 2.1: se la pendenza 10%, allora $m = 0.10 = \frac{10}{100} = 10\%$

Esempio 2.2.1 — con Desmos. Inserite la formula generica della retta $y = mx + q$ e lasciate che Desmos aggiunga due slider per m e per q. Cosa succede al grafico della retta se schiacciate il tasto 'play' indicato dalla freccia?



Ripetete la medesima esplorazione fissando la pendenza $m = 0.1$, come nel segnale stradale, ed esplorate con il tasto 'play' cosa succede se si muove q.

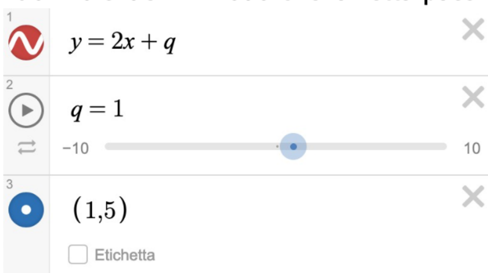
Conclusione: l'esempio 2.2.1 ci ha mostrato che m modifica la **pendenza** della retta, mentre q alza o abbassa la **quota** della retta, ossia il punto nel quale la retta **intercetta** l'asse delle y.

2.3 Verifica formativa guidata

Quesito 1. Disegna con Desmos il grafico della retta e scopri se il punto appartiene o non appartiene alla retta

Risposta: appartiene o non appartiene? ______________________________

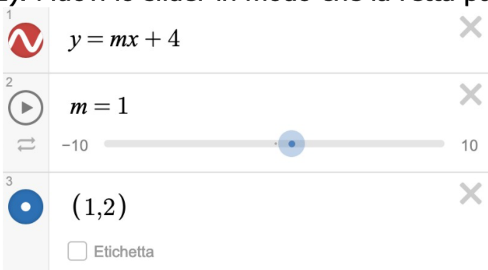
Quesito 2. Disegna con Desmos la retta $y = 2x + q$, inserendo uno slider per q. Inserisci il punto di coordinate $(1{,}5)$. Muovi lo slider in modo che la retta passi per il punto.



Risposta: quanto vale ora q? ______________________________

■ **Esercizio 2.1 — Quesito 3, sul vostro quaderno.** Ripetiamo l'esercizio del Quesito 2, facendo 'i calcoli' a mano. ■

Quesito 4. Disegna con Desmos la retta $y = mx + 4$, inserendo uno slider per m. Inserisci il punto di coordinate $(1{,}2)$. Muovi lo slider in modo che la retta passi per il punto.

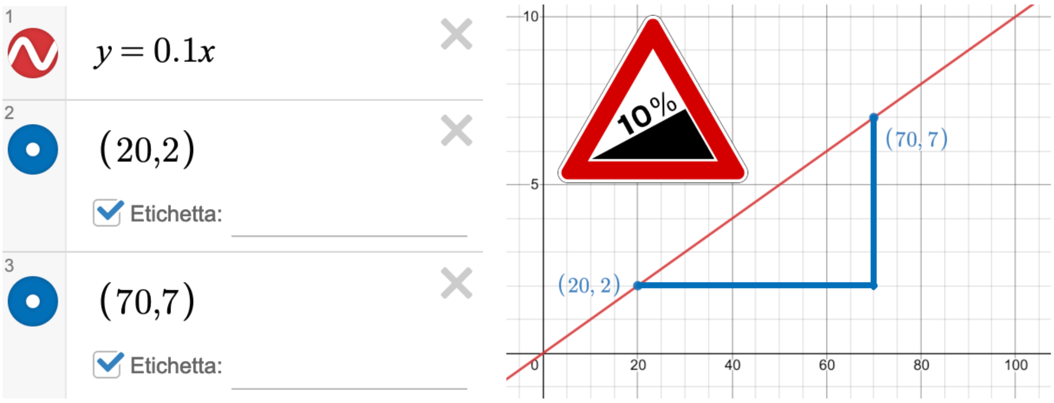


Risposta: quanto vale ora m? ______________________________

Suggerimento. Muovendo lo slider per m potrebbe essere difficoltoso far 'appoggiare' la retta rossa sul punto blu. Questo perché *di default* lo slider si muove da -10 a 10 con passo 1. Sul telefonino, è sufficiente toccare la barra dello slider a destra nei pressi del numero 10, per impostare l'intervallo $\ldots \leq m \leq \ldots$ su cui debba variare la pendenza della retta.

■ **Esercizio 2.2 — Quesito 5, sul vostro quaderno.** Ripetiamo l'esercizio del Quesito 2, facendo 'i calcoli' a mano. ■

2.4 La pendenza della retta



Adesso stiamo per imparare una relazione fondamentale, che ci accompagnerà per tanti anni: la **formula della pendenza**. Spieghiamo bene questa figura. La retta rossa ha una pendenza del 10 per cento, come evidenziato nel segnale stradale: infatti la sua formula è $y = 0.1x$, e dunque $m = 0.1 = 0.10 = \frac{10}{100} = 10\%$.

In questo disegno però vediamo anche che la retta rossa unisce i due punti blu di coordinate $(20,2)$ e $(70,7)$. Siamo certi che i punti stanno sulla retta perché abbiamo imparato a sostituire i punti per verificarlo (ad esempio: $y = 0.1x \Rightarrow 2 = 0.1 \cdot 20 \Rightarrow 2 = 2$, perfetto!).

Ora concentriamoci sul triangolo rettangolo azzurro. Quanto è lunga la sua base? Facile: $70 - 20 = 50$. Quanto misura la sua altezza? Banale: $7 - 2 = 5$. Ora dobbiamo sapere che la pendenza, nel senso dei segnali stradali, si definisce utilizzando la base e l'altezza di quel triangolo azzurro:

$$pendenza = \frac{altezza}{base}$$

$$= \frac{5}{50} = 0.1 = 10\%$$

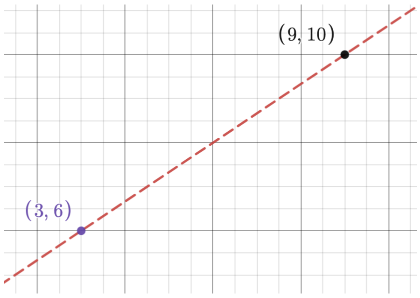
Siamo pronti per concludere il nostro ragionamento. Se al posto dei due punti blu $(20,2)$ e $(70,7)$ prendiamo in considerazione due qualsiasi punti che stanno sulla retta rossa, che abbiano certe coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2), evidentemente il triangolo azzurro avrà la $base = x_2 - x_1$ e la $altezza = y_2 - y_1$. Ecco allora la formula da imparare a memoria:

Definizione 2.4.1 — pendenza della retta. Dati i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2), la retta che li congiunge ha pendenza:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.2}$$

Vediamo ora come si impiega la formula della pendenza della retta con qualche esercizio semplice, ma basilare.

■ **Esercizio 2.3 — sul vostro quaderno.** Come scrisse Euclide (il *primo postulato* degli *Elementi*), per due punti distinti passa una ed una sola retta. Che equazione avrà dunque la retta rossa tratteggiata? ■



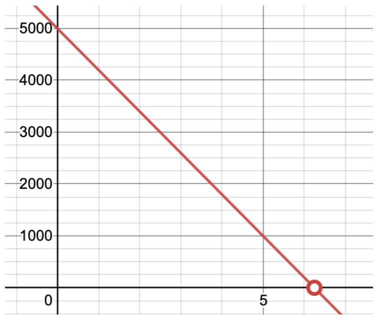
2.5 L'ammortamento lineare

Nel corso del progetto Eu Ciak (che la nostra scuola utilizza come percorso per le competenze trasversali e l'orientamento) gli esperti videomaker ci hanno spiegato che per un'azienda che si occupi di produzione video i costi che si sostengono per l'acquisto dell'attrezzatura sono molto elevati. Inoltre, alcune attrezzature vanno incontro ad una obsolescenza molto rapida: ad esempio, un nuovo computer adatto al video editing potrebbe anche costare ad esempio 5000 euro, ma molto probabilmente questo oggetto dopo un anno varrebbe molto meno, per esempio 4200 euro.

Anni	**Valore**
0	5000
1	4200

In economia aziendale, questa tabella individua il cosiddetto metodo di **ammortamento lineare**, detto anche metodo di ammortamento a quote costanti. Siccome il valore diminuisce con il passare degli anni, ci aspettiamo di vedere una **retta decrescente**, che avrà una **pendenza negativa**.

Esempio 2.5.1 — con carta e matita, e con Desmos. Utilizziamo la formula della pendenza della retta e troviamo l'equazione della retta che descrive l'ammortamento lineare. Inseriamola in Desmos e ricopiamo sul quaderno il **grafico della situazione economica**. Mettiamo infine in evidenza il punto in cui il computer perde totalmente di valore, ossia quando $y = 0$.



Come possiamo trovare in maniera esatta le coordinate del punto in evidenza? Risolvendo una **equazione di primo grado**, quelle che abbiamo imparato a risolvere negli anni scorsi. Infatti se la retta rossa incontra l'asse delle x in quel punto in cui quando $y = 0$, significa che al posto di y nella retta rossa ($y = -800x + 5000$) dobbiamo scrivere zero. Dunque:

$$-800x + 5000 = 0$$
$$-800x = -5000$$
$$8 \cdot x = 50$$
$$x = \frac{50}{8} = 6.25$$

Abbiamo quindi scoperto che dopo poco più di sei anni, dovremo considerare quel computer come un'attrezzatura di valore economico pressoché nullo.

ahia Attenzione all'errore frequente. Capita spesso di sentire che per risolvere $8 \cdot x = 50$, 'si porta l'otto dall'altra parte', e quindi $x = 50 - 8$, ossia $x = 42$. No, attenzione! Questo è un tipico misconcetto, che se viene riformulato nel linguaggio naturale raramente conduce ad errore: « Se 8 hamburger costano 50 euro, quanto costa, circa, un hamburger?»

2.6 La break even analysis

Volete sorridere ascoltando la storiella della *Pizzeria da Massimino Pomodorino*? Eccola qui riassunta, schematicamente. Per ogni pizzetta che vendo al pubblico ho un **ricavo** di 5 euro. Ma per produrla, la mia piccola azienda sostiene dei costi: ho un **costo fisso** (lo stipendio mensile di 900 euro del mio giovane collaboratore) ed ho un **costo variabile** di 2 euro, relativo agli ingredienti di ciascuna pizzetta.

Cosa succede se quel mese scoppia una pandemia, ed io devo chiudere il negozio? Succede che non vendo alcuna pizza, quindi non ho alcun ricavo, ma devo comunque sostenere il costo fisso del mio collaboratore. Diversa invece sarà la situazione se quel mese riesco a vendere 1, 2, 3, ... pizze; ecco due tabelle descrittive:

x_1	y_1
0	0
1	5
2	10

x_2	y_2
0	900
1	902
2	904
3	906

Nella tabella di sinistra, verde, osserviamo che al crescere delle vendite crescono anche i ricavi, **in maniera proporzionale**, seguendo la '*tabellina del cinque*' (ed è ovvio perché ogni pizzetta viene venduta a 5 euro). Nella tabella viola a destra, riconosciamo invece la *tabellina del due*, che 'parte' però da 900 invece che dallo zero.

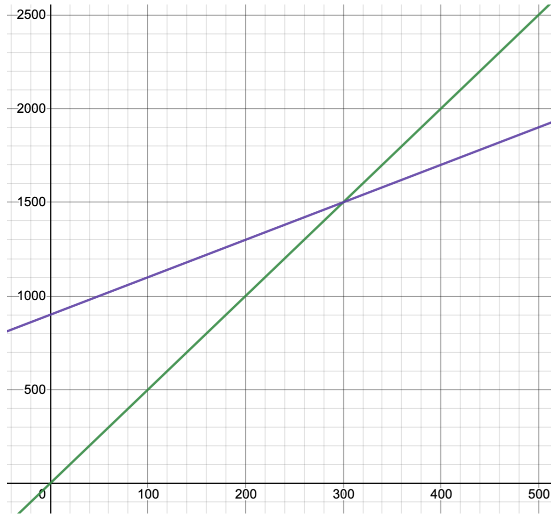
Esempio 2.6.1 — con carta e matita, e con Desmos. Utilizziamo la formula della pendenza della retta e troviamo le equazioni della retta verde dei ricavi e della retta viola dei costi. Inseriamole in Desmos e ricopiamo sul quaderno il **grafico della situazione economica**.

Come vediamo, nel grafico della situazione economica c'è un punto speciale nel quale la retta verde $y = 5x$ e la retta viola $y = 2x + 900$ si incontrano. Si tratta del famoso **break even point**, il **punto di pareggio** in cui l'azienda raggiunge il proprio equilibrio economico:

$$\textit{costi} = \textit{ricavi}$$

Dunque, nel **punto di intersezione** delle due rette l'azienda non stà avendo né utili né perdite.

ahia Attenzione all'errore frequente. Lungo l'asse delle **ascisse** x (orizzontale – 0, 100, 200, 300, ...) vengono riportate le pizze; mentre lungo l'asse delle ordinate y (verticale – 0, 500, 1000, 1500, sono riportati i soldi, 'gli euri' come si dice a Trieste).



Ad occhio, ci accorgiamo che le rette si incrociano nel punto (300, 1500). Ossia se riusciremo a vendere più di 300 pizzette al mese, la nostra azienda avrà dei guadagni (viceversa, con meno di 300 pizzette al mese, l'azienda sarà in perdita). Possiamo riassumere questa situazione economica usando la simbologia delle **disequazioni lineari**:

$$\text{Se } x > 300, \text{ allora conseguiamo un utile: } 5x > 2x + 900$$
$$\text{Se } x < 300, \text{ allora conseguiamo una perdita: } 2x + 900 > 5x$$

■ **Esercizio 2.4 — sul vostro quaderno.** Proponete un esercizio di break even analysis, e risolvetelo autonomamente aiutandovi con Desmos. ■

2.7 Il punto di intersezione di due rette

Per risolvere l'Esempio 2.6.1 del break even point abbiamo dovuto individuare il punto di intersezione di due rette, e lo abbiamo fatto 'ad occhio', con Desmos. Ovviamente, tanti anni fa quando non esistevano computer e telefonini, questo tipo di calcoli si facevano a mano, con carta e matita, per esempio usando il **metodo del confronto** delle equazioni.

Cosa significa confrontare la retta verde $y = 5x$ con la retta viola $y = 2x + 900$? Ovviamente tutti siamo d'accordo con il fatto che:

$$y = y$$

Allora non avremo dubbi sul fatto che

$$5x = 2x + 900$$

Portando le x da una parte e lasciando i numeri dall'altra, abbiamo:

$$5x - 2x = 900$$

$$3x = 900$$

$$x = 300$$

Molto bene, abbiamo ritrovato il numero delle pizze $x = 300$ in cui si pareggiano i costi ed i ricavi. Come facciamo ora a trovare il valore in euro dei costi e dei ricavi? Con il **metodo di sostituzione**, e potete applicarlo alla retta verde oppure alla retta viola: non cambia nulla (proprio perché siete nel punto di incrocio delle rette). La più semplice sembra essere la verde:

$$y = 5x$$

$$y = 5 \cdot 300$$

$$y = 1500$$

Conclusione: abbiamo verificato che il punto di equilibrio tra i costi ed i ricavi della Pizzeria Massimino Pomodorino si ha in (300, 1500); ossia in corrispondenza di 300 pizzette vendute al pubblico, per un ricavo di 1500 €.

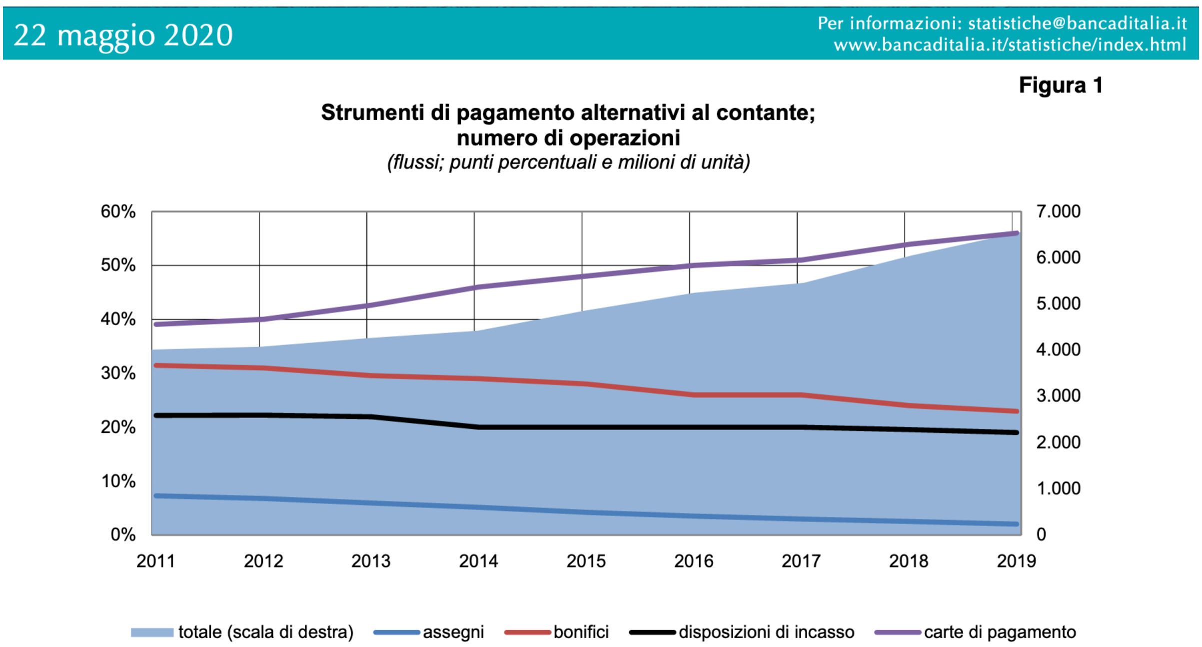
Riassunto

Ci dovremo ricordare con sicurezza che:

1. la formula tipica della retta è $y = m \cdot x + q$
2. se la pendenza m è un numero positivo, la retta 'sale' (se negativo, 'scende').
3. se conosciamo due punti qualsiasi sul piano, possiamo trovare la pendenza della retta che li congiunge: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Verifica di sintesi

Osservate con attenzione questo grafico, tratto da `https://bit.ly/3fcAKnV` :



- Cosa rappresenta quella regione colorata azzurra crescente?
- Cosa rappresentano quelle spezzate viola, rossa, nera e blu?
- Fate finta che tutte e cinque le spezzate si possano pensare come delle rette. Siete in grado di ipotizzare cinque 'formule' del tipo $y = mx + q$ che le descrivano?

Soluzioni

Esercizio 2.1 Questo esercizio ci chiede di determinare q in modo tale che la retta $y = 2x + q$ passi per il punto $(1,5)$. Il modo più semplice per risolvere problemi di questo tipo (cioè le **equazioni di primo grado**) è il **metodo di sostituzione**: al posto delle lettere x ed y si sostituiscono i numeri 1 e 5, ossia le coordinate del punto.

$$y = 2 \cdot x + q$$

$$5 = 2 \cdot 1 + q$$

$$5 = 2 + q$$

Evidentemente, $q = 3$ giacché solamente $2 + 3$ fa 5. Se vogliamo 'pavoneggiarci' e dimostrare che conosciamo le regole dell'algebra, possiamo 'portare tutte le lettere da una parte' e 'tutti i numeri dall'altra', stando attenti a non sbagliare i segni:

$$-q = 2 - 5$$

$$-q = -3$$

$$q = 3$$

Soluzione: la retta $y = 2x + 3$ passa per il punto $(1,5)$.

Esercizio 2.2 Questo esercizio è del tutto analogo all'Esercizio 2.1: usiamo nuovamente il metodo di sostituzione:

$$y = m \cdot x + 4$$

$$x = 1, y = 2$$

$$2 = m \cdot 1 + 4$$

$$2 = m + 4$$

$$-m = -2 + 4$$

$$-m = 2$$

$$m = -2$$

Soluzione: la retta $y = -2x + 4$ passa per il punto $(1,2)$.
Esercizio 2.3. Per risolvere questo esercizio ci aiutiamo con una tabella:

x	**y**
3	6
9	10

Dobbiamo calcolare la pendenza della retta. Sottraiamo i numeri della tabella: chiaramente $9 - 3 = 6$ e $10 - 6 = 4$. Usiamo questi numeri:

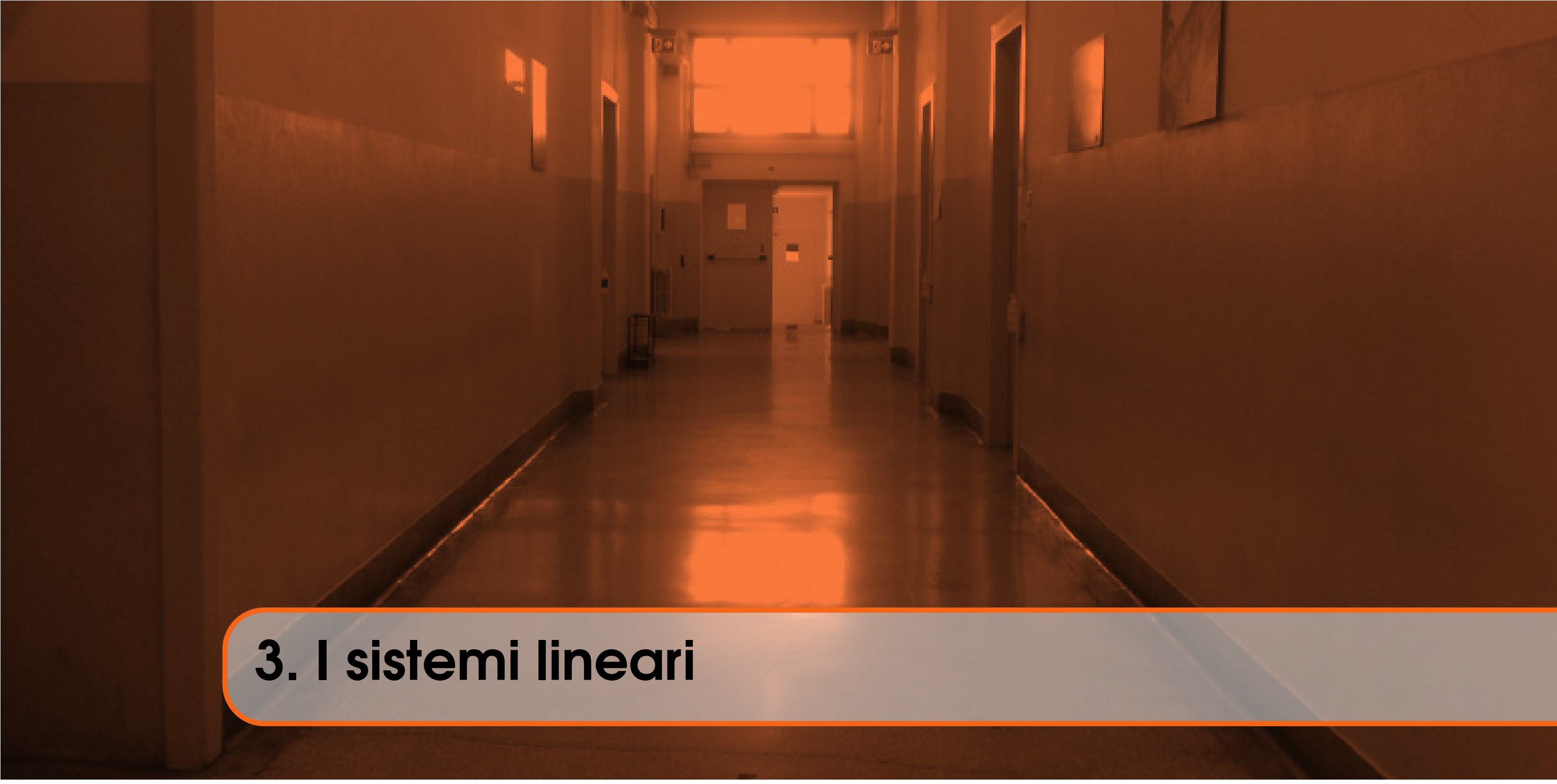
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4}{6}$$

Dunque la pendenza della retta è $4/6$, semplificando $2/3$; quindi abbiamo scoperto che $y = \frac{2}{3}x + q$. Per scoprire anche il valore di q, sostituiamo uno dei due punti, per esempio $(3,6)$.

$$6 = \frac{2}{3} \cdot 3 + q$$
$$6 = 2 + q$$

e dunque $q = 4$. Soluzione finale:

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$



3. I sistemi lineari

3.1 Cos'è un sistema lineare

Abbiamo concluso il capitolo precedente spiegando la *break even analysis*: essa si concretizzava nel riuscire a trovare il **punto di intersezione** di due rette. Problemi di questo tipo compaiono molto frequentemente, e non solo sui libri di matematica, sui settimanali di enigmistica o su FaceBook. Guardate ad esempio questo problema, molto intuitivo:

Si tratta in realtà di un problema antichissimo, il problema dei 'sacchi di riso' che introduce l'ottavo capitolo (intitolato *Fang Cheng*) dei Nove Capitoli dell'Arte Matematica, un libro che si diffuse in Cina più di tremila anni fa e che potete integralmente consultare qui, in cinese ovviamente: `https://ctext.org/nine-chapters/fang-cheng`.

La cosa è veramente sorprendente, giacché il metodo che viene insegnato per risolvere il problema verrà, diciamo, 'riscoperto' tremila anni dopo in Europa con il nome di **metodo di eliminazione di Gauss**, in onore del genio tedesco Carl Gauss. Avete certamente compreso l'enunciato 'moderno' del problema: un sacco di riso bianco più due sacchi di riso giallo più tre sacchi di riso marroncino costano[1] 26 euro. E così via. Quanto costa un sacco di riso bianco? O giallo, o marroncino?

Vedrete che il metodo di eliminazione è particolarmente adatto per far risolvere al computer un'ampia tipologia di problemi: a tale proposito impareremo il significato di due termini molto utilizzati nel linguaggio degli sviluppatori di software: il termine di **array** (o **matrice**) ed il termine di **vettore**.

> **Approfondimento interdisciplinare 3.1.1 — mater et matrix.** Il termine latino *mater*, madre, ha dato origine al termine *matrix* (plurale *matrices*), che nel latino tardo e medievale indica l'utero, che rende possibile la riproduzione. Lo scienziato rinascimentale Paracelso, estenderà il concetto di *matrix* alla donna stessa ed alla sua capacità, non solo di dare vita, ma anche di agire sullo spirito dei figli. Appena nel 1850 il matematico inglese James Joseph Sylvester utilizzerà questo termine a significare una tabella di numeri la quale dà origine a tabelle più piccole.

■ **Esercizio 3.1 — sul vostro quaderno.** Come possiamo scrivere, usando i simboli della matematica, il problema dei sacchi di riso del Fang Cheng? ■

3.2 Il Metodo di eliminazione di Gauss

Serviamoci di un foglio elettronico, `https://bit.ly/3uoHrYJ`, per chiarire come funziona il metodo di eliminazione. Partiamo dalla matrice gialla dei coefficienti e dal vettore azzurro dei prezzi:

1	2	3	26
2	3	1	34
3	2	1	39

Via! Fissiamo ora la nostra attenzione sulla prima **colonna**, e troviamo un multiplo di quei numeri, moltiplicandoli ad esempio tutti tra loro:

	1	2	3	26
	2	3	1	34
	3	2	1	39
multiplo	**6**			

Adesso moltiplichiamo tutte le **righe** in modo tale che la prima colonna diventi il multiplo che abbiamo trovato in precedenza:

per	6		6	12	18	156
per	3		6	9	3	102
per	2		6	4	2	78

Osserviamo bene quello che è successo. Vedete che i numeri che compaiono adesso nella matrice arancione corrispondono a quelli che erano nella matrice gialle allo stesso modo di come si

[1] In realtà i numeri 26, 34, 39 non rappresentano il prezzo dei sacchi, ma rappresentano una misura di volume detta *dou*, `https://bit.ly/2SpqdwF`, che equivaleva probabilmente a poco più di un decalitro

’corrispondono le tabelline’: nella prima riga gialla leggevamo 1, 2, 3 (i primi termini della tabellina dell’1) ed ora nella prima riga arancione leggiamo 6, 12, 18 (i primi termini della tabellina del 6). Adesso si mette in moto il processo di **eliminazione**: sottraiamo le righe inferiori da quella superiore, ossia facciamo:

riga 1 meno	riga 2	0	3	15	54
riga 1 meno	riga 3	0	8	16	78

Dunque il difficile problema iniziale dei sacchi di riso si è trasformato in questo nuovo problema più semplice:

$$\begin{cases} 0x + 3y + 15z = 54 \\ 0x + 8y + 16z = 78 \end{cases}$$

Ora, si può dimostrare matematicamente che le soluzioni di questo nuovo problema di due righe sono le stesse di quello di partenza di tre righe: fidiamoci. Ritorniamo al **Via!** ed eseguiamo di nuovo l’algoritmo, che ci condurrà ad una matrice di una sola cella gialla, ed un vettore di una sola cella azzurra:

2. troviamo un qualsiasi multiplo della (nuova) prima colonna					
			3	15	54
			8	16	78
	multiplo		24		
3. moltiplichiamo tutte le righe 'per quello che occorre' in modo da 'arrivare al multiplo'					
per	8		24	120	432
per	3		24	48	234
4. facciamo delle sottrazioni di righe e riduciamo di dimensione la matrice dei coefficienti ed il vettore dei prezzi					
riga 1 meno	riga 2		0	72	198

L’algoritmo è terminato, perché ci ha condotto ad un’equazione di primo grado in un’unica incognita:

$$\begin{cases} 0x + 0y + 72z = 198 \end{cases}$$

È immediato trovare la soluzione, $z = 198/72 = 2.75$. Questo è il prezzo di un sacco di riso marroncino. Adesso non è faticoso ’ritornare indietro’ e sostituire questa soluzione nel sistema precedente per trovare il prezzo del sacco di riso giallo:

$$\begin{cases} 0x + 3y + 15z = 54 \\ z = 2.75 \end{cases}$$

$$3y + 15 \cdot 2.75 = 54$$

$$3y + 41.25 = 54$$

$$3y = 54 - 41.25$$

$$3y = 12.75$$

$$y = 12.75/3 = 4.25$$

Infine, dalla prima riga del primo sistema, troviamo il prezzo dei sacco di riso bianco, ossia la x:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ y = 4.25 \\ z = 2.75 \end{cases}$$

$$x = 26 - 2 \cdot 4.25 - 3 \cdot 2.75 = 9.25$$

Queste sostituzioni 'all'indietro' ci hanno mostrato che con il metodo di eliminazione di Gauss la tabella gialla dei coefficienti, che all'inizio era una **matrice quadrata** di numeri di tre righe e di tre colonne si è trasformata in una **matrice triangolare**, la cui risoluzione (per sostituzione) è immediata:

1	2	3	26
0	3	15	54
0	0	72	198

Definizione 3.2.1 — algoritmo iterativo. Il metodo di eliminazione di Gauss appartiene alla classe degli **algoritmi iterativi**, `https://it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_iterativo`: una **sequenza** di azioni viene ripetuta (in **loop**) un numero finito di volte, sino a che una **condizione** predefinita non viene raggiunta.

Esempio 3.2.1 — con Desmos. Verifichiamo di non avere sbagliato qualcosa nei calcoli. In Desmos inseriamo la prima equazione, $x + 2y + 3z = 26$, ed uno slider per z. E poi inseriamo la seconda e la terza equazione del problema dei sacchi di riso, $2x + 3y + z = 34$ e $3x + 2y + z = 39$. Compaiono tre rette, che in linea di principio non si intersecano in uno stesso punto – a meno che non si fissi lo slider in $z = 2.75$: ecco verificata la correttezza delle soluzioni.

`https://www.youtube.com/watch?v=XDAczap8uRY`

■ **Esercizio 3.2 — sul vostro quaderno.** Usando il metodo di Gauss, risolvete

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + 4z = 12 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases}$$

■

3.3 Il simpatico esempio di Giorgia F.

Ringraziamo Giorgia per questo esempio molto intuitivo. Vogliamo scoprire il peso di un pollo, di un cane e di una mucca sapendo che:

- 6 polli, 2 cani e 3 mucche pesano 670 Kg
- 2 polli, 3 cani e 2 mucche pesano 470 Kg
- 3 polli, 1 cane ed 1 mucca pesano 235 Kg

Evidentemente, la matrice ed il vettore iniziale sono:

6	2	3		670
2	3	2		470
3	1	1		235

Se moltiplichiamo la seconda riga per **3** e la terza riga per **2** otteniamo

6	2	3		670
6	9	6		740
6	2	2		470

Ora passiamo alle sottrazioni: calcoliamo la prima riga meno la seconda, e poi la prima meno la terza. Otteniamo:

6	2	3		670
0	7	3		740
0	**0**	1		200

Abbiamo ottenuto una splendida **matrice triangolare**, dalla quale (leggendo la terza riga) capiamo che una mucca pesa 200 chilogrammi. Adesso, torniamo indietro:

$$7 \text{ cani} + 3 \text{ mucche} = 740$$

$$7 \text{ cani} + 3 \cdot 200 = 740$$

$$7 \text{ cani} + 600 = 740$$

$$7 \text{ cani} = 140$$

dunque un cane pesa 20 chilogrammi. Infine, dalla prima riga, un pollo pesa 5 chili, poichè:

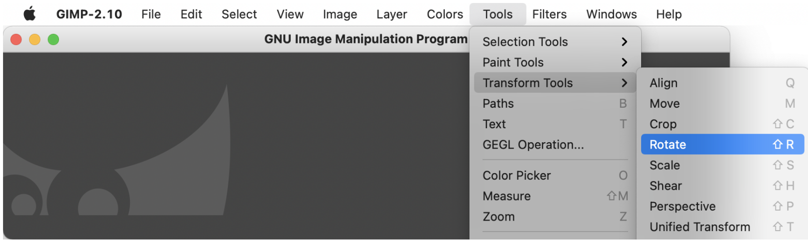
$$6 \text{ polli} + 2 \text{ cani} + 3 \text{ mucche} = 670$$

$$6 \text{ polli} + 40 + 600 = 670$$

$$6 \text{ polli } = 30$$

3.4 Matrici, vettori e Gimp

Abbiamo avuto modo dunque di introdurre i concetti di matrice e di vettore. Vedrete il prossimo anno, quando impareremo qualcosa di più a proposito della *trigonometria*, che ci diventerà immediatamente chiaro come faccia Gimp a trasformare le immagini ruotandole, 'shiftandole', 'flippandole', riscalandole, oppure a cambiare la loro prospettiva.



Verifica di sintesi

■ **Esercizio 3.3 — sul vostro quaderno.** Partiamo dalla fine: se io vi dicessi che $x = 2, y = 3, z = 4$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 4x + 5y + 6z = 47 \\ 7x + 8y + 9z = 74 \end{cases}$$

voi mi credereste? In effetti, basterebbe sostituire e verificare che senza ombra di dubbio che

$$\begin{cases} 2 + 6 + 12 = 20 \\ 8 + 15 + 24 = 47 \\ 14 + 24 + 36 = 74 \end{cases}$$

ed in effetti è proprio così. Allora, provate a risolvere il sistema con il metodo di Gauss, e quando giungerete alla fine rimarrete interdetti: siamo in presenza di un sistema **indeterminato**.

■

Soluzioni

Esercizio 3.1 Ecco il problema dei sacchi di riso, scritto come piace ai matematici:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases}$$

Esercizio 3.2 La soluzione è $x = 1, y = 2, z = 3$ e la matrice triangolare potrebbe essere questa:

4	2	1	11
0	8	-14	-26
0	0	392	1176

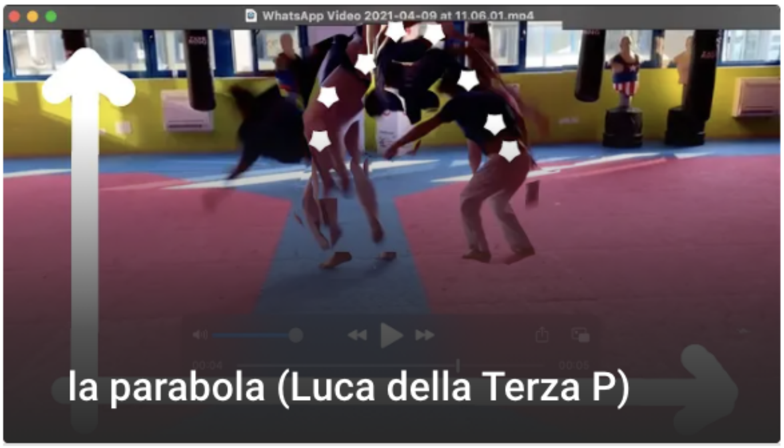
II

Modelli di crescita polinomiale

4. La parabola

4.1 Cos'è la parabola

Guardiamo assieme questo video, nel quale Luca esegue un fantastico salto:



https://www.youtube.com/watch?v=9TZMmxQVIho

Con la stellina bianca, fotogramma dopo fotogramma, abbiamo indicato la posizione approssimativa del baricentro del suo corpo. Cosa notiamo? Quale traiettoria viene descritta dalle stelline bianche?

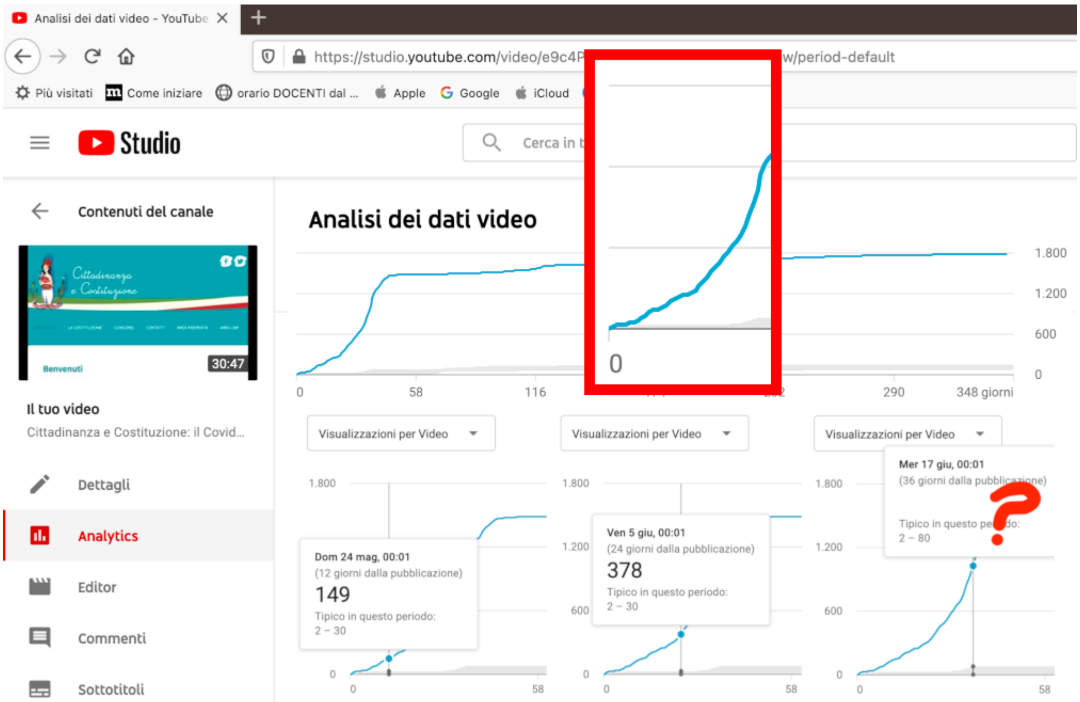
Ci verranno alla mente altri esempi di **parabole** se parleremo con i nostri compagni di classe che giocano a pallacanestro. Oppure, se pensiamo alle antenne satellitari od ai radiotelescopi. Più curiosamente, vi proponiamo anche la seguente attività interdisciplinare.

Approfondimento interdisciplinare 4.1.1 — il verbo e la parabola. 'Word' (in inglese) e 'Wort' (in tedesco) significano 'Parola' (in italiano), ossia 'Palabra' (in spagnolo). Ma mentre nelle due lingue nord-europee quei due termini hanno un suono molto vicino a quello del latino 'Verbum' (che significa, appunto 'Parola'), nelle due lingue sudeuropee il suono invece è molto vicino a quello della parabola. Discutete del perché questo possa essere accaduto, rivolgendovi all'insegnante di Religione Cattolica, chiedendo di commentare il primo versetto del Vangelo di San Giovanni:

- https://www.biblegateway.com/passage/?search=John+1
- https://www.uibk.ac.at/theol/leseraum/bibel/joh1.html
- https://www.bibbiaedu.it/CEI2008/nt/Gv/1/
- https://www.bibliacatolica.com.br/it/biblia-latinoamericana/evangelio-segun-san-juan/1/

Rivolgetevi all'insegnante di Storia chiedendo di individuare sulla carta geografica europea quali siano state le aree di diffusione iniziale della cristianità antica.

4.2 Perché ci interessa la parabola



Quando un'azienda pubblica su YouTube un video per scopi commerciali, essa ovviamente ripone un grande interesse sulle visualizzazioni di quel video. Per controllarne giorno per giorno l'andamento si utilizzano gli **Analytics** di **YouTube Studio**. Nel riquadro rosso vedete come sono andate le cose durante le prime settimane dalla data di lancio: l'andamento potrebbe forse assomigliare ad un arco di parabola.

Supponiamo ora che il vostro Social Media Manager vi ponga il seguente quesito: siamo arrivati al 24-esimo giorno dalla pubblicazione del video ed abbiamo collezionato 378 visualizzazioni, mentre al 12-esimo giorno eravamo a 149. Saresti in grado di prevedere quello che succederà al 36-esimo giorno? Un modello di **crescita polinomiale** forse potrà tornare utile.

Giorni	Visualizzazioni
0	0
12	149
24	378
36	?

4.3 La formula della parabola

Partiamo ricordando (Sezione 2.2) che la generica equazione della retta è $y = m \cdot x + q$. Abbiamo anche imparato a riconoscere il significato dei coefficienti m e q: m individua la pendenza della retta, mentre q permette di 'alzare' o 'abbassare' la retta lungo l'asse verticale delle y.

Impariamo a memoria la formula della parabola, che nel nostro caso avrà sempre questo aspetto:

Definizione 4.3.1 — equazione generica della parabola.

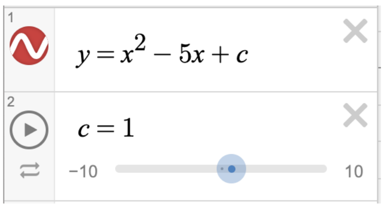
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{4.1}$$

I numeri a, b e c si chiamano **coefficienti** della parabola.

ahia Attenzione all'errore frequente: se studiate la parabola $y = x^2 - 5x + 6$ e vi chiediamo quanto vale il coefficiente a dovrete rispondere $a = 1$, non $a = x^2$: i coefficienti a e b sono i numeri che stanno davanti alla x, ma - appunto - senza la lettera x.

È importante capire quale sia il significato dei coefficienti della parabola: dobbiamo essere in grado di spiegare come cambia la forma di una parabola se modifichiamo, di volta in volta, il valore dei numeri a, b o c.

Esempio 4.3.1 — con Desmos. Visualizzate il grafico della parabola $y = x^2 - 5x + 6$. Proviamo ora a sostituire il numero 6 con una costante c, aggiungendo uno slider. Cosa succede al grafico della parabola?



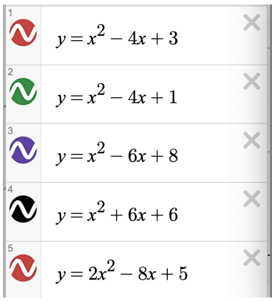
Ripetete la medesima esplorazione modificando il coefficiente -5 con uno slider b, ed infine esplorate cosa succede se aggiungete uno slider per a.

■ **Esercizio 4.1 — sul vostro quaderno.** Compilate uno schema che spieghi il significato dei coefficienti della parabola. ■

4.4 La simmetria della parabola

L'esempio precedente 4.3.1 ci ha fatto scoprire che se il coefficiente a è positivo, allora la parabola 'va verso l'alto' (e si dice che è **convessa**), mentre se c'è il segno meno, ossia il coefficiente a è negativo, allora la parabola 'scende verso il basso' (e si dice che è **concava**). In entrambi i casi si nota immediatamente la presenza di un punto speciale che individua il 'fondo della valle' o la 'cima della collina': il **vertice** della parabola. Tutti inoltre si accorgono che la parabola possiede una 'bellezza' che la retta non possiede: la sua **simmetria** rispetto ad un **asse** verticale che passa per il vertice.
L'obiettivo ora è quello di intuire una formula che descriva l'asse di simmetria della parabola.

Esempio 4.4.1 — con Desmos. Esploriamo cosa succede, di volta in volta, con queste cinque parabole: leggiamo la coordinata x del vertice, (ossia, la posizione dell'asse) e completiamo una tabella come questa qui a destra:



a	b	c	asse
1	-4	3	
1	-4	1	
1	-6	8	
1	6	6	
2	-8	5	

Quali sono i coefficienti che influiscono sulla posizione dell'asse? Quale formula riusciamo a dedurre?

■ **Esercizio 4.2 — sul vostro quaderno.** Servendosi del concetto di simmetria, con carta e matita e senza farvi aiutare da Desmos, disegnate il grafico della parabola $y = x^2 + 2x - 3$. ■

4.5 Gli *zeri* della parabola

Ora possiamo fare un ragionamento che collega il concetto di **asse di simmetria** della parabola:

$$x = \frac{-b}{2a} \tag{4.2}$$

con la famosa 'formula' per le **equazioni di secondo grado**, che avete imparato già da tempo:

$$x_{\pm} = x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.3}$$

Abbiamo appositamente segnato in colore viola la prima parte della formula: se infatti la 'spacchiamo in due pezzi':

$$x_{\pm} = x_{12} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.4}$$

stiamo per fare una scoperta illuminante. Spieghiamoci con un esempio numerico:

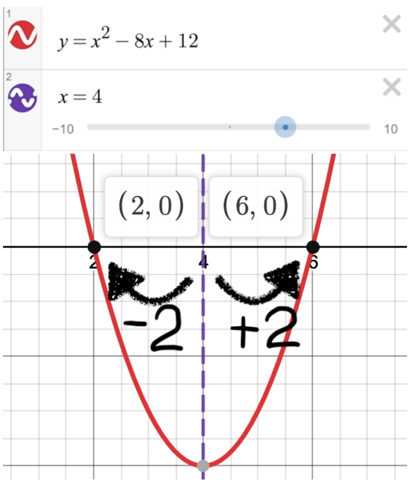
Esempio 4.5.1 — sul quaderno. La parabola $y = x^2 - 8x + 12$ ha come asse di simmetria:

$$\frac{-b}{2a} = 4$$

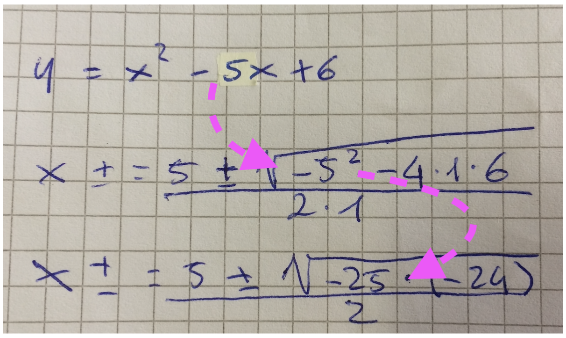
Usiamo questa informazione nella formula che abbiamo 'spaccato in due pezzi':

$$x_{\pm} = x_{12} = 4 \pm \frac{\sqrt{64 - 48}}{2}$$
$$x_{\pm} = x_{12} = 4 \pm \frac{\sqrt{16}}{2}$$
$$x_{\pm} = x_{12} = 4 \pm \frac{4}{2} = 4 \pm 2$$

ed ora interpretiamo 'in modo dinamico' questa informazione: partendo dall'asse di simmetria, in $x = 4$, spostandoci a destra di 2 passi, o a sinistra di 2 passi, troveremo proprio gli **zeri della parabola**, ossia i due punti nei quali la parabola interseca l'asse delle y.



ahia Attenzione all'errore frequente: sotto il segno della radice compare il termine b^2. Non confondetevi, il risultato lì dovrà sempre essere positivo, anche se b è negativo come in questo esempio – l'errore nasce dalla scrittura ambigua -5^2, nella quale si intende che il segno meno cambia il risultato della potenza; si sarebbe dovuto scrivere invece $(-5)^2$:



■ **Esercizio 4.3 — sul vostro quaderno.** Tocca a voi, fate da soli. Servendovi sia del concetto di simmetria che della formula risolutiva, con carta e matita e senza farvi aiutare da Desmos, disegnate il grafico della parabola $y = x^2 + 2x - 3$. ■

■ **Esercizio 4.4 — con Desmos e sul vostro quaderno.** Provate a disegnare con Desmos il grafico della parabola $y = x^2 - 2x + 3$. Come vedete, la parabola non taglia l'asse delle x, quindi non ci sono 'gli zeri'. Sul quaderno, provate fare il calcolo usando la formula

$$x_{\pm} = x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e scoprite cosa succede, cosa non va. ■

4.6 Verifica formativa

Proviamo a controllare se siamo in grado di rispondere con sicurezza a domande come queste:

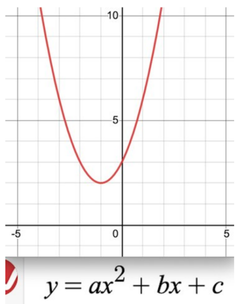
2. Guardando la figura siamo sicuri che

Ⓐ a = -1

Ⓑ a = -3

Ⓒ c = -3

Ⓓ c = 3



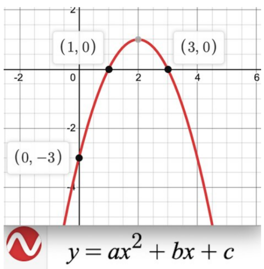
4. Guardando la figura siamo sicuri che

Ⓐ a = 1, b = +4, c = -3

Ⓑ a = -1, b = -4, c = -3

Ⓒ a = -1, b = +4, c = +3

Ⓓ a = -1, b = +4, c = -3



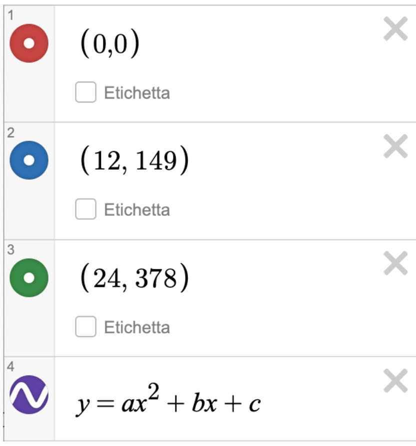
4.7 Crescita di tipo quadratico

Ritorniamo ora all'importante problema iniziale, che abbiamo enunciato nella Sezione 4.2:

Giorni	Visualizzazioni
0	0
12	149
24	378
36	?

La domanda che il nostro Social Media Manager ci poneva era quella di provare a dare una stima su quante visualizzazioni avremmo potuto totalizzare al 36-esimo giorno, basandosi sui dati osservati sino ad oggi. Possiamo provare a procedere esplorando la questione con Desmos.

Esempio 4.7.1 — con Desmos. Inseriamo i punti in Desmos e visualizziamo il grafico della parabola generica $y = ax^2 + bx + c$, aggiungendo i tre slider. Proviamo a muovere gli slider in modo che la parabola tocchi tutti e tre i punti, per avere una **soluzione approssimata**. Nella sezione delle Soluzioni troverete una possibile scelta.



Proviamo a risolvere l'esercizio 'con carta e matita'. Consideriamo la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e vediamo cosa significa che essa passi per il punto $(0,0)$:

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$0 = c$$

Dunque abbiamo scoperto che il coefficiente c deve necessariamente essere uguale a zero. La parabola sarà dunque delle forma

$$y = ax^2 + bx$$

Adesso sostituiamo il punto $(12, 149)$

$$149 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12$$

o, meglio:

$$144a + 12b = 149$$

Analogamente, sostituiamo il punto $(24, 378)$

$$378 = a \cdot 24^2 + b \cdot 24$$

o, meglio:

$$576a + 24b = 378$$

Cosa abbiamo scoperto? Abbiamo scoperto che sussistono queste due relazioni che legano tra loro i coefficienti a e b e che devono essere entrambe soddisfatte, affinché la parabola passi per i tre punti (sottointeso, $c = 0$):

$$144 \cdot a + 12 \cdot b = 149 \tag{4.5}$$
$$576 \cdot a + 24 \cdot b = 378 \tag{4.6}$$

Cosa abbiamo qui? Un **sistema di due equazioni in due incognite**, che noi abbiamo imparato bene a risolvere, sia con Desmos che facendo i calcoli con carta e matita con il metodo di eliminazione di Gauss nella Sezione 3.2.

■ **Esercizio 4.5 — sul vostro quaderno.** Tocca a voi, fate da soli: risolvete il sistema. Se non ce la fate, date un'occhiata alle Soluzioni. ■

In conclusione, possiamo finalmente dare una risposta: se ipotizziamo una crescita di tipo parabolico, mediante la relazione $y = 0.28x^2 + 9.08x$, quando $x = 36$ otteniamo $y = 0.28 \cdot 36^2 + 9.08 \cdot 36$ $= 0.28 \cdot 1296 + 326.88 = 362.88 + 326.88 = 362.88 + 326.88 \approx 690$. Dunque potremmo provare a stimare che verso il trentaseiesimo giorno potremmo arrivare circa a settecento visualizzazioni.

Giorni	**Visualizzazioni**
0	0
12	149
24	378
36	690

Riassunto

Ci dovremo ricordare con sicurezza che:

1. la formula tipica della parabola è $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
2. il coefficiente c è analogo al coefficiente q della retta, ed individua il punto in cui la parabola taglia l'asse y
3. se il coefficiente a è un numero positivo, la parabola 'va verso su', ossia è **conVessa**, come la **V** di una **Valle** (se invece a è negativo, la parabola 'è come una **Collina**, **conCava**').
4. la parabola è simmetrica, ed il suo asse di simmetria si individua calcolando: $-\frac{b}{2a}$

Soluzioni

Esempio 4.4.1 . Osserviamo che cambiando il valore di c l'asse di simmetria non si sposta. Dunque, rimangono in gioco solamente i coefficienti a e b. Nei primi quattro casi vediamo l'asse corrisponde in pratica alla metà del valore di b, cambiato di segno. Ma nel quinto esempio vediamo che se raddoppiamo a il valore si dimezza. Conclusione: l'asse della parabola si individua con la relazione:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Esempio 4.3 . Per prima cosa individuate l'asse di simmetria $-b/2a = -2/2 = -1$ e segnatelo in una tabellina, in mezzo alla colonna x

x	$y = x^2 + 2x - 3$
.	.
.	.
-1	.
.	.
.	.

Sostituite il valore di x nella formula della parabola e calcolate il risultato y

x	$y = x^2 + 2x - 3$
.	.
.	.
-1	$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$
.	.
.	.

ahia Attenzione all'errore frequente: se $x = -1$ allora $x^2 = 1$, non -1. Se ci fosse stato scritto $-x^2$, allora in quel caso il risultato sarebbe stato -1.

Ora completiamo la tabella passo per passo: il successivo di -1 è lo zero:

x	$y = x^2 + 2x - 3$
.	.
.	.
-1	$(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$
0	.
.	.

Ma adesso non occorre fare alcun calcolo, poiché abbiamo capito quale è il significato del coefficiente c della parabola, che è analogo al coefficiente q della retta. Esso rappresenta la coordinata del punto in cui la parabola taglia l'asse delle y: nel nostro caso $c = -3$

x	$y = x^2 + 2x - 3$
.	.
.	.
-1	-4
0	-3
.	.

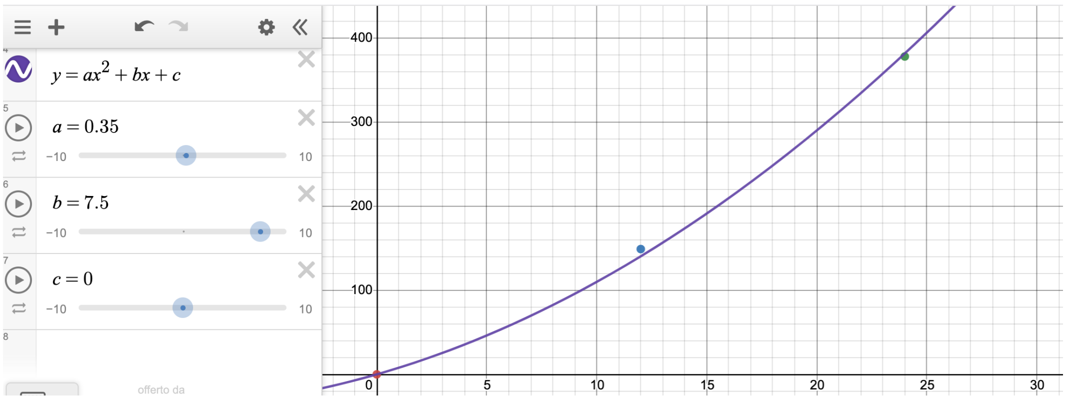
A questo punto sfruttiamo la simmetria della parabola, tornando un passo indietro rispetto al vertice; rallegriamoci del fatto che non occorre fare alcun calcolo per compilare questa riga:

x	$y = x^2 + 2x - 3$
.	.
-2	-3
-1	-4
0	-3
.	.

L'esercizio si conclude facilmente, calcolando la parabola in $x = 1$ (sostituendo otteniamo $y = 0$), e sfruttando nuovamente la simmetria.

x	$y = x^2 + 2x - 3$
-3	0
-2	-3
-1	-4
0	-3
1	0

Esempio 4.7.1 . Ecco una possibile scelta, certamente non ottimale: $y = 0.35x^2 + 7.5x$



Esercizio 4.5. Per risolvere il sistema:

$$144 \cdot a + 12 \cdot b = 149$$
$$576 \cdot a + 24 \cdot b = 378$$

conviene osservare che 'abbiamo la tabellina del 12' appiccicata alla lettera b. Dunque, ci conviene raddoppiare la prima equazione:

$$288 \cdot a + 24 \cdot b = 298$$
$$576 \cdot a + 24 \cdot b = 378$$

ed ora, per far scomparire la b, ci conviene fare la sottrazione (la 'seconda' meno la 'prima': $576 - 288 = 288$, $24 - 24 = 0$, $378 - 298 = 80$)

$$288 \cdot a = 80$$
$$a = \frac{80}{288} \approx 0.28$$

Ora, basta sostituire a, ad esempio nella prima:

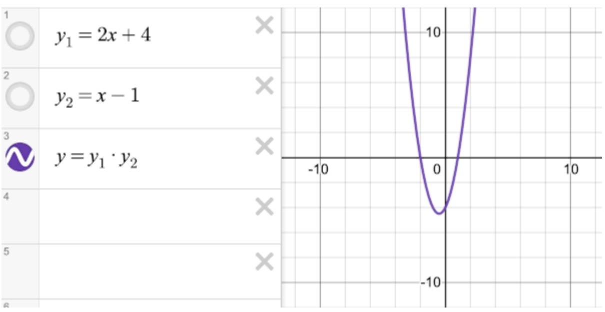
$$144 \cdot 0.28 + 12 \cdot b \approx 149$$
$$40 + 12 \cdot b \approx 149$$
$$12 \cdot b \approx 109$$
$$b \approx 9.08$$

5. L’iperbole

5.1 Cos’è l’iperbole

Ripartiamo dalla ciò che abbiamo imparato a conoscere bene: la **retta** – e disegniamone due qualsiasi con Desmos. Per non fare confusione con le lettere y, la prima la chiamiamo y_1, la seconda y_2:

Ora, per non far confusione,’spegniamole’ (basta toccare il pulsantini rosso e blu, a sinistra) e chiediamo a Desmos di disegnare un nuovo grafico y, quello che si ottiene moltiplicando tra loro la retta rossa e la retta blu, $y_1 \cdot y_2$. Sorpresa? Otteniamo **una parabola**:

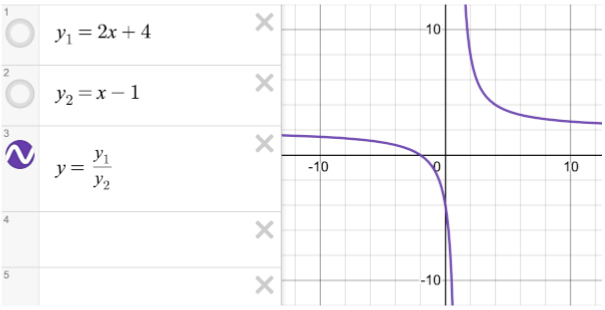


In realtà non ci deve stupire questo fatto: il grafico della parabola compare perché moltiplicando tra loro due polinomi di primo grado otteniamo un polinomio di secondo grado:

$$\begin{gathered} y_1 \cdot y_2 = \\ = (2x+4)\cdot(x-1) = \\ 2x^2 - 2x + 4x - 4 = \\ = 2x^2 + 2x - 4 \end{gathered}$$

che è esattamente la parabola $y = ax^2 + bx + c$ con $a = 2$, $b = 2$ e $c = -4$.

Ora proviamo a vedere qualcosa di nuovo: dividiamo tra loro le due rette, y_1/y_2:



Siamo in presenza di **una iperbole**, un grafico qualitativamente molto diverso dai precedenti. Impareremo a conoscere le sue caratteristiche, ma prima di tutto capiamo perché è importante saperla utilizzare.

Approfondimento interdisciplinare 5.1.1 — L'iperbole e la retorica. Vi ricordate: avevamo già scoperto che il nostro termine 'parola' deriva proprio dalla parabola. Ma la matematica ha fornito anche altri termini che sono entrati nel linguaggio comune: per esempio, 'iperbole' e 'parallelismo' sono due figure retoriche ben precise. Chiedete informazioni a tale proposito ai vostri insegnanti di lettere.

La cosa che immediatamente salta all'occhio ha ache fare con i concett di **connessione** e di **continuità** del grafico: mentre per disegnare una retta o una parabola non occorreva 'staccare' la matita dal foglio di carta, per l'iperbole questo non è possibile, perché l'iperbole è composta da due **rami** distinti, che individuano due **regioni non connesse** tra loro.

Approfondimento interdisciplinare 5.1.2 — La connessione. Nel suo viaggio allegorico tra le anime dannate all'Inferno, canto dopo canto, Dante Alighieri scende sempre più nelle profondità della Terra – come se essa fosse simile al ramo sinistro della nostra iperbole. Chiedete informazioni ai vostri insegnanti di lettere e scoprite come Dante riesca a proseguire il suo cammino ed uscire dall'Inferno (che logicamente non può essere connesso né al Purgatorio né tantomento al Paradiso) senza ritornare indietro.

5.2 Perché ci interessa l'iperbole

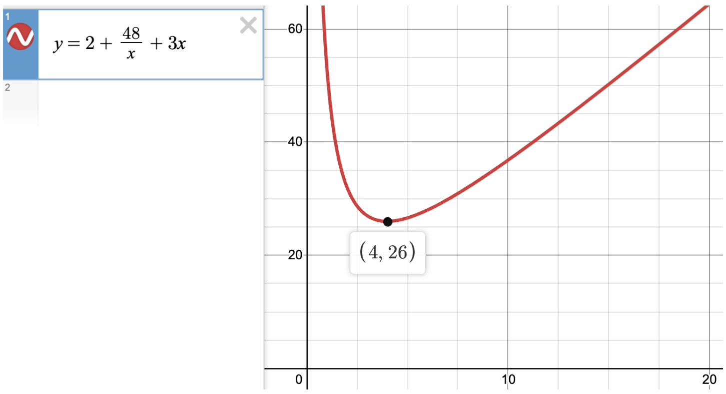
Prendiamo spunto da Wikipedia, `https://it.wikipedia.org/wiki/Lotto_economico`, per illustrare il concetto di **lotto economico**, che di solito si indica con EOQ, 'economic order quantity'. Molto spesso un'azienda ha necessità di conservare delle **scorte** in un **magazzino**, e quando tali scorte stanno per esaurirsi bisogna sostenere nuovi **costi di approvvigionamento** che implicano tra l'altro nuovi **costi di trasporto**, che andranno a sommarsi al costo della gestione del magazzino.

Wikipedia, `https://it.wikipedia.org/wiki/Lotto_economico#Soluzione`, propone una 'complicata' formula algebrica che descrive il costo totale annuo $C(q)$ che include il prezzo delle materie prime, il costo di ordinazione ed il costo di detenzione delle merci:

$$C(q) = pS + \frac{gS}{q} + \frac{mq}{2}$$

Noi vogliamo provare a visualizzarla con un esempio numerico di fantasia, rendendoci conto che C rappresenta la nostra y, mentre q ora rappresenta la x:

$$y = 2 + \frac{48}{x} + 3x$$



Come vediamo, il grafico che otteniamo è un'iperbole, un po' diversa da quella della pagina precedente. In questa iperbole compare un 'punto speciale' che si potrebbe paragonare al vertice di una parabola: lo chiameremo **punto di minimo**, e rappresenterà la quantità ottimale di scorte x da acquistare in modo da minimizzare i costi totali annui y relativi all'approvvigionamento ed al mantenimento a magazzino delle scorte di merce.

■ **Esercizio 5.1 — con Desmos e sul vostro quaderno.** Quando si studiano in economia aziendale gli indici di bilancio, si impara ad esempio che il rapporto tra il Risultato Operativo (diciamo, grossomodo, gli utili dell'azienda) ed il Fatturato si chiama **ROS**, ('return on sales'):

$$ROS = \frac{Risultato\ Operativo}{Fatturato}$$

Considerate ad esempio

- un microimpresa che realizzano un fatturato annuo di 1.5 milioni di euro
- una piccola impresa che realizza un fatturato annuo di 8 milioni di euro;
- una media impresa che realizza un fatturato annuo di 40 milioni di euro
- una grande impresa che realizza un fatturato annuo di 90 milioni di euro

e supponiamo che tutte abbiamo conseguito un Risultato Operativo di 1 milione di euro. Quale andamento ha il ROS? ■

5.3 Gli asintoti dell'iperbole

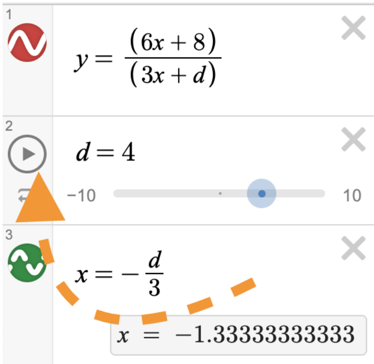
Non ci interessa dare una definizione riguardo alla relazione che definisce l'iperbole (anche perché ne abbiamo parecchie, diverse tra loro). Vogliamo invece capire che il grafico dell'iperbole è circondato da dei 'confini rettilinei' che si chiamano **asintoti** (e la esse è aspra, come in *rosso*).

Esempio 5.3.1 — con Desmos. Visualizzate il grafico dell'iperbole

$$y = \frac{6x+8}{3x+d}$$

aggiungendo uno slider per la costante d. Muovete lo slider per rispondere a queste domande:

- cosa succede se cambiate, piano piano, d?
- cosa succede se esattamente $d = 4$?
- aggiungete una retta verticale verde tratteggiata, $x = -d/3$ e poi toccate il tasto play dell'animazione. Cosa succede?



Ci sono due cose importanti da spiegare e da capire bene:

1. Perché quando $d = 4$ l'iperbole diventa una retta orizzontale
2. Perché la retta verticale $x = -d/3$ 'separa' i due rami dell'iperbole

Alla prima domanda possiamo dare una risposta semplice se ricordiamo la procedura di **semplificazione delle frazioni algebriche**. Infatti, se $d = 4$, scriviamo:

$$y = \frac{6x+8}{3x+4}$$

$$y = \frac{2\cdot(3x+4)}{3x+4}$$

$$y = 2\cdot\frac{\cancelto{1}{3x+4}}{\cancel{3x+4}} = 2 = \frac{6}{3}$$

Quindi la nostra iperbole 'si trasforma' nella retta orizzontale $y = 2$. Osservate che volutamente avevamo scritto in colore viola i coefficienti 6 e 3, proprio per mettere in evidenza il fatto che potevamo prevedere sin dall'inizio quale sarebbe stata l'equazione della retta orizzontale, calcolando il rapporto dei coefficienti.

Forse vi ricordate anche di un altro dettaglio importante: prima di semplificare le frazioni algebriche si doveva perdere un po' di tempo per cercare il cosiddetto **Campo di Esistenza** della frazione – ci si doveva accertare che il denominatore non fosse nullo, ossia:

$$3x+4 \neq 0$$
$$3x \neq -4$$
$$x \neq -\frac{4}{3}$$

E infatti se $x = -\frac{4}{3}$ succede un patatrac! .. il denominatore diventerebbe uguale a zero, quindi la frazione non si potrebbe più calcolare, quindi l'iperbole non esisterebbe più.

Eccoci dunque pronti per annunciare la definizione:

Definizione 5.3.1 — asintoti dell'iperbole. La generica iperbole del tipo

$$y = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \tag{5.1}$$

possiede un **asintoto orizzontale**

$$y = \frac{a}{c}$$

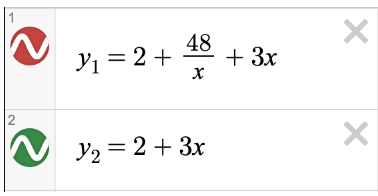
ed un **asintoto verticale**

$$y = -\frac{d}{c}$$

Dunque, possiamo pensare agli asintoti come a due rette che si avvicinano sempre di più al grafico dell'iperbole, fino quasi a sfiorarlo, ma senza mai raggiungerlo, 'nemmeno all'infinito' – come in un amore impossibile.

Nella definizione precedente abbiamo considerato un esempio 'speciale' di iperbole (si chiama **iperbole omografica**), nella quale i due asintoti sono l'uno verticale e l'altro orizzontale, come lo sono gli assi cartesiani. Ma gli asintoti, che sono una caratteristica tipica delle iperboli, possono essere anche **obliqui**.

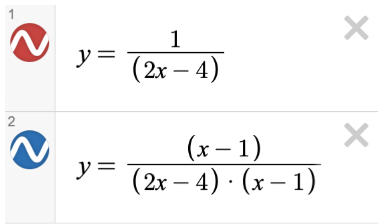
Esempio 5.3.2 — con Desmos. Mostriamo con Desmos come si fa a scoprire se un grafico possiede un asintoto obliquo, riprendendo l'esempio della Sezione 5.2: dopo aver inserito la funzione $y_1 = 2 + \frac{48}{x} + 3x$ inseriamo una nuova funzione ottenuta 'togliendo via' i termini in cui la x compare al denominatore, $y_2 = 2 + 3x$: Cosa osservate?



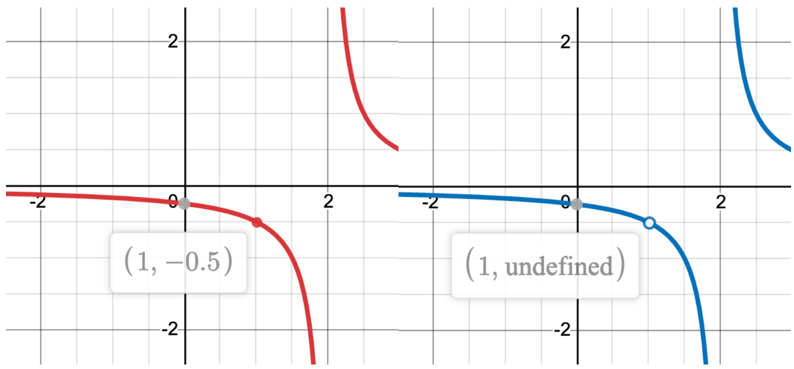
5.4 Infinito oppure indefinito?

Adesso che abbiamo 'sottomano' il concetto di asintoto di un'iperbole, possiamo precisare meglio che differenza c'è in matematica tra il concetto di **infinito** e quello di **indefinito**.

Esempio 5.4.1 — con Desmos. Disegniamo in rosso il grafico della iperbole $y = \frac{1}{2x-4}$ ed in blu il grafico della iperbole $y = \frac{x-1}{(2x-4)\cdot(x-1)}$:



Osserviamo che i due grafici si sovrappongono perfettamente: non c'è da stupirsi, basterebbe semplificare sopra e sotto il termine $(x-1)$ per trasformare la blu nella rossa.
Osserviamo che, senza dubbio, se $x = 2$ l'iperbole esce dallo schermo di Desmos, e da una parte precipita verso l'inferno (si dice che la y **tende a meno infinito**, e si scrive $y \longrightarrow -\infty$), mentre dall'altra sale verso il paradiso ($y \longrightarrow +\infty$, y **tende a più infinito**).
Adesso 'spegniamo', a turno, l'iperbole blu e poi quella rossa, ed andiamo ad esplorare cosa succede nel punto di coordinate $x = 1$:



Cosa succede? Cosa significa in questo caso *undefined*, **indefinito**? Sapreste spiegare il perché di questo fenomeno?

Approfondimento interdisciplinare 5.4.2 — Zibaldone di pensieri. Anche Giacomo Leopardi nel suo *Zibaldone di Pensieri* ha cercato di occuparsi di cosa sia l'infinito e cosa sia l'indefinito: parlatene con l'insegnante di Lettere.

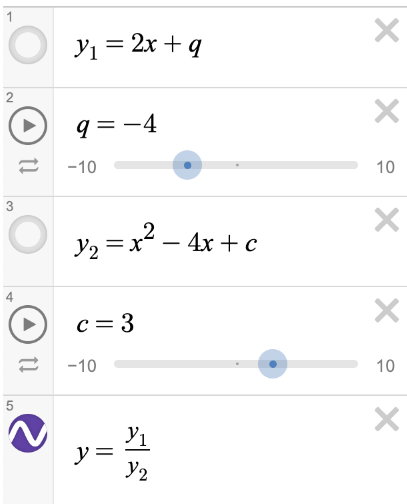
Riassunto

Ci dovremo ricordare con sicurezza che:

1. l'iperbole non ha un'unica 'formula tipica'
2. l'iperbole compare spesso nei fenomeni economici di **proporzionalità inversa**
3. l'iperbole possiede sempre due **asintoti**, due confini rettilinei che la delimitano nel suo naturale **tendere all'infinito**
4. l'iperbole individua due regioni del piano **non connesse** tra di loro
5. conseguentemente, rispetto all'asse delle x, l'iperbole è un grafico **non continuo**

Verifica di sintesi

Abbiamo iniziato questo capitolo provando a sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere tra loro due rette, ed abbiamo visto che nei primi due casi 'rimaniamo in famiglia' ottenendo ancora delle rette, ma negli altri due casi 'usciamo dalla famiglia', incontrando rispettivamente una (famosa) parabola ed una (new-entry) iperbole.
Proviamo ora a farci qualche idea su cosa accade se combiniamo una retta con una parabola dividendole tra loro; provate ad esempio un qualcosa di questo genere:



Quali fenomeni accadono? Nella vostra spiegazione cercate di utilizzare le parole chiave connessione, continuità, asintoto, indefinito.

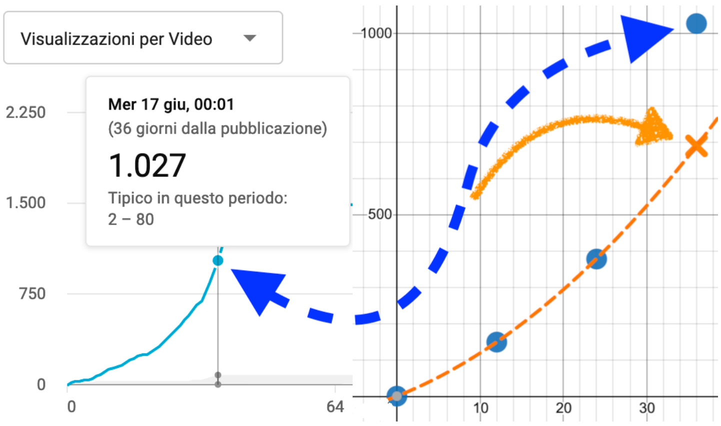
III

Modelli di crescita esponenziale

6. L'esponenziale

6.1 Cos'è la crescita esponenziale

Riguardiamo assieme l'esempio 4.2 nel quale cercavamo di 'predire', per mezzo di una legge di crescita di tipo parabolico, l'andamento delle visualizzazione di un video su YouTube. Qui sotto, in colore arancione tratteggiato, la nostra stima; invece, la realtà è indicata dai pallini blu:



Non a caso, un video che ha immediata ed ampia diffusione si dice **virale** – ed in tempi di pandemia abbiamo sentito molte volte dire che questi fenomeni possono essere caratterizzata da una crescita di tipo **esponenziale**. Le leggi di crescita di tipo esponenziale non sono solamente importanti nei fenomeni della Natura che vengono descritti da biologi, chimici, fisici e medici, ma sono pertinenti anche all'economia: spieghiamo perché.

6.2 Perché ci interessa l'esponenziale

Gli ETF (exchange-traded fund) sono un particolare tipo di 'organismo di investimento collettivo del risparmio': in pratica un ETF acquista un insieme prefissato di azioni (per esempio, l'insieme denominato Morgan Stanley Capital International World, `https://it.wikipedia.org/wiki/`

`MSCI_World`) e lo detiene per un tempo molto lungo, senza modificarlo. Come vediamo nella figura, se avessimo investito un **capitale** di 100 euro al primo gennaio 2010 in uno di questo ETF, al 31 dicembre 2020 ci ritroveremmo con un **montante** di 225 euro, se avessimo scelto un ETF ad **accumulazione** dei proventi:

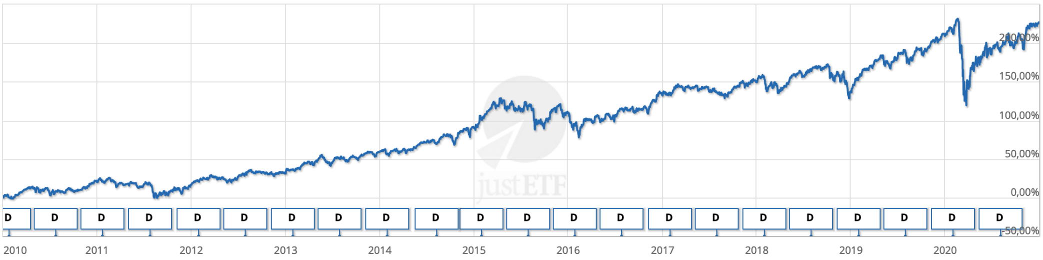


Figura 6.1: esempio tratto dal sito `www.justetf.com`

Se invece avessimo scelto un fondo a **distribuzione** dei proventi, il montante finale sarebbe minore, perchè con una periodicità tipicamente semestrale avremmo ricevuto una quota di **interessi**, calcolati sul nostro capitale iniziale di 100 euro. Ci interessa dunque spiegare perché i fondi a distribuzione possono essere descritti mediante la legge finanziaria dell'**interesse semplice**, caratterizzato da una crescita di tipo **lineare**, mentre gli investimenti ad accumulazione dei proventi sono meglio interpretati dalla legge economica dell'**interesse composto**, caratterizzato da una crescita di tipo **esponenziale**.

6.3 Il regime di capitalizzazione semplice

Possiamo pensare ad un investimento caratterizzato dal **regime di capitalizzazione semplice** in questo modo: al primo gennaio la nonna versa un **capitale** $C = 6000$ euro in una banca che le garantisce un tasso $r = 3\%$ (r sta per **ragione**) per un tempo $t = 5$ anni.

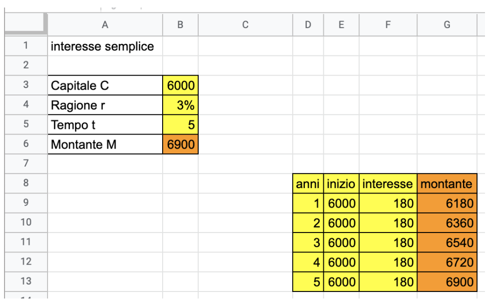
Definizione 6.3.1 — equazione dell'interesse semplice.

$$I = C \cdot r \cdot t \tag{6.1}$$

L'interesse I viene calcolato solo sul capitale iniziale C ed è proporzionale ad r ed a t.

Alla fine di ogni anno però la banca le verserà l'interesse maturato, e quindi il capitale all'inizio dell'anno successivo rimane uguale a $C = 6000$ euro. Il montante si può quindi calcolare facilmente con un foglio elettronico.

■ **Esercizio 6.1 — sul foglio elettronico.** Realizzate un foglio elettronico che risolva in maniera automatica il calcolo dell'interesse semplice, come ha fatto ad esempio Aisha in questa immagine:



	A	B	C	D	E	F	G
1	interesse semplice						
2							
3	Capitale C	6000					
4	Ragione r	3%					
5	Tempo t	5					
6	Montante M	6900					
7							
8				anni	inizio	interesse	montante
9				1	6000	180	6180
10				2	6000	180	6360
11				3	6000	180	6540
12				4	6000	180	6720
13				5	6000	180	6900

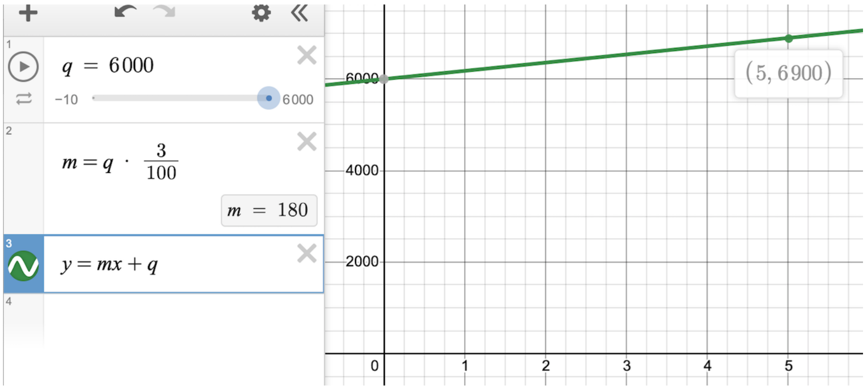
■

Con pochissimi passaggi possiamo mostrare che il regime di capitalizzazione semplice ha per grafico una **retta**:

$$M = C + I$$
$$M = C + (C \cdot r) \cdot t$$
$$M = (C \cdot r) \cdot t + C$$

e se pensiamo al montante come alla y, il capitale come alla q ed il prodotto $(C \cdot r)$ come alla pendenza m, otteniamo esattamente i valori della colonna arancione dell'esercizio precedente:

Esempio 6.3.1 — con Desmos. Risolvete l'Esercizio 6.2 visualizzandone il grafico in questo modo:



6.4 Il regime di capitalizzazione composta

Nel regime di capitalizzazione composta, gli interessi che di anno in anno vengono calcolati secondo la Definizione 6.3.1 ('equazione dell'interesse semplice'), non vengono distribuiti ma vanno in accumulazione al capitale, aumentandolo di anno in anno. Vediamo l'esempio scherzoso di Paperon de Paperoni che impegna un capitale di 100 dollaroni al tasso del 10 per cento:

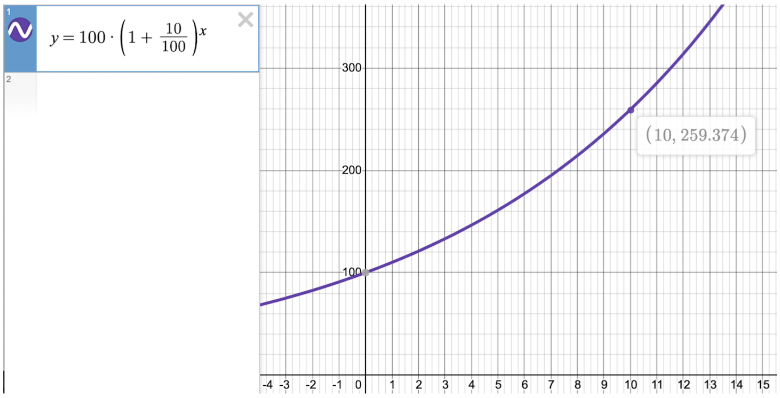
inizio anno	interesse 10%	fine anno
100	10,00	110
110	11,00	121
121	12,10	133
133	13,31	146
146	14,64	161
161	16,11	177
177	17,72	195
195	19,49	214
214	21,44	236
236	23,58	259

Come vediamo, la colonna bianca dell'interesse non rimane 'ferma', come nell'Esercizio 6.2, ma aumenta, accumulandosi al capitale della colonna blu di anno in anno. Dopo dieci anni arriviamo ad un montante di circa 259 euro. È possibile dimostrare (ma occorre studiare la matematica delle **progressioni geometriche**) che il regime dell'interesse composto è governato dalla seguente Definzione.

Definizione 6.4.1 — equazione dell'interesse composto.

$$M = C \cdot (1+r)^t \tag{6.2}$$

Esempio 6.4.1 — con Desmos. Visualizziamo la situazione economica scherzosa di zio Paperone in questo modo:



Il grafico che abbiamo ottenuto con Desmos nell'Esempio 6.4.1 è molto interessante. Ma impareremo ad apprezzarlo nei suoi dettagli solamente alla fine di questo capitolo. Adesso, vorremo invece concentrarci su quelli che sono i **problemi inversi** del calcolo dell'interesse composto, e lo faremo con due problemi-modello:

1. il problema degli zero-coupon bond
2. il problema dello scooter e della nonna

■ **Esercizio 6.2 — sul foglio elettronico.** Realizzate un foglio elettronico che risolva in maniera automatica il calcolo dell'interesse composto, come in questa immagine:

Foglio1

Capitale C	100
ragione r	10%
tempo t	10
Montante M	259.37

■

6.5 Il problema degli zero-coupon bond

Per finanziare il proprio debito pubblico, la Repubblica Italiana emette varie tipologie di Titoli di Stato di natura obbligazionaria. Tra gli altri, il **BOT** (Buono Ordinario del Tesoro, di durata trimestrale, semestrale ed annuale) ed il **CTZ** (Certificato del Tesoro Zero-coupon, ossia senza cedola, di durata biennale). Questi titoli garantiscono a scadenza un rimborso di 1000 euro, ma vengono - normalmente - emessi (si dice, *collocati*) ad un prezzo inferiore, ossia con uno **sconto**. L'investitore quindi impiega - normalmente - un capitale inferiore a 1000 euro per acquistarli, ed il guadagno è rappresentato proprio dalla differenza tra il prezzo di rimborso ed il prezzo di acquisto[1].

Esempio 6.5.1 — con la calcolatrice del telefonino. Supponendo che un CTZ ($t = 2$) del valore nominala a scadenza di $M = 1000$ euro venga collocato ad un prezzo $C = 968 euro$. Quale è il tasso di interesse r (su base annua) di questo investimento?

Dobbiamo ovviamente risolvere un'equazione, l'incognita è r:

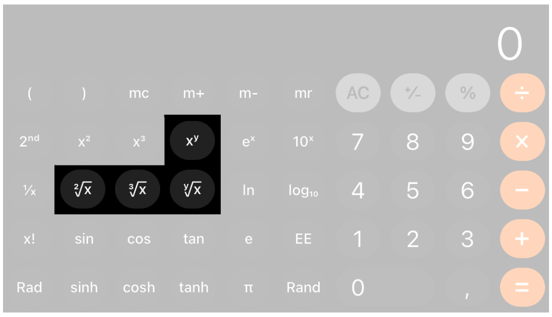
$$\begin{aligned} M &= C \cdot (1+r)^t \\ 1000 &= 968 \cdot (1+r)^2 \\ \frac{1000}{968} &= \cdot (1+r)^2 \\ 1.03306 &\approx \cdot (1+r)^2 \end{aligned}$$

Ora, l'incognita r è prigioniera all'interno di una parentesi tonda, e di un elevamento al quadrato. Ma la funzione inversa dell'elevamento al quadrato è la radice quadrata, dunque, dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \sqrt{1.03306} &\approx \cdot (1+r) \\ 1.01639 &\approx \cdot (1+r) \\ 1.01639 - 1 &\approx \cdot r \\ 0.01639 &\approx \cdot r \end{aligned}$$

e dunque, moltiplicando per cento, il tasso di interesse annuo è $r \approx 1.6\%$.

ahia Attenzione all'errore frequente. Le calcolatrici oltre al tasto di radice quadrata $\sqrt[2]{x}$ possiedono altri tasti utili in questo tipo di problemi:



Esiste di solito anche il tasto di radice cubica, che può essere utile per le obbligazioni senza cedola di durata triennale. Quando invece abbiamo delle durate con tempi maggiori, diviene indispensabile il tasto di elevamento a potenza x^y (in certe calcolatrici si trova il tasto 'cappuccio', l'accento circonflesso). Lo si usa in base alla definizione che segue.

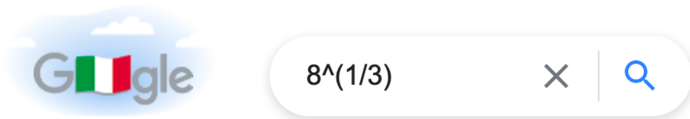
[1] In realtà, in questi ultimi anni, succede un fenomeno piuttosto complesso da spiegare: la curva dei tassi a breve è negativa, ed è dunque possibile che un CTZ possa persino avere un prezzo di emissione leggermente superiore al prezzo di rimborso: `https://www.borsaitaliana.it/borsa/obbligazioni/mot/ctz/lista.html`

Definizione 6.5.1 — radice n-esima. Se una **base** b elevata ad un esponente n ha per risultato una potenza P, ossia se $b^n = P$, allora

$$b = P^{(1/n)} = \sqrt[n]{P} \tag{6.3}$$

In tal caso si dice che b è la radice 'ennesima' di P.

Spieghiamo come funziona la faccenda: sappiamo che $2^3 = 8$. Allora è ovvio che per definizione la radice terza di otto, $\sqrt[3]{8}$, deve dare due. Proviamo a controllarlo, per esempio su Google:



■ **Esercizio 6.3 — sul vostro quaderno.** La BERS (Banca Europea per la Ricostruzioni e lo Sviluppo) ha emesso un titolo zero coupon denominato XS0076593267 che scadrà il 17 giugno 2027. Cercate sul sito della Borsa Italiana la quotazione odierna e, dopo aver calcolato esattamente quanto tempo (in anni) manca alla scadenza, calcolato il tasso annuo teorico. ■

6.6 esponente = logaritmo

Prima di passare a studiare l'interessante 'problema dello scooter e della nonna' dobbiamo assolutamente imparare a riconoscere un'ambiguità terminologica – quando 'alle medie' gli insegnanti di matematica ci hanno detto che:

$$10^{3} = 1000$$

e ci hanno detto che 10 è la **base**, 1000 si chiama **potenza**, e che il numerino in alto, il **3**, si chiama **esponente**. Ebbene, oggi noi dobbiamo imparare che quel **3** in realtà ha due nomi; oltre a chiamarsi esponente si può anche chiamare **logaritmo**. Per esserne certi prendiamo il telefonino, accendiamo la calcolatrice scientifica e cerchiamo il tasto **log** (oppure **log10**, dipende dalla calcolatrice):

Esempio 6.6.1 — con la calcolatrice del telefonino. Usate il tasto **log** (ossia **log10**) per calcolare il logaritmo di 1000. Se il risultato è 3, siate felici.

ahia Attenzione all'errore frequente. Il tasto **log** (ossia **log10**) serve solamente se i calcoli che dobbiamo effettuare hanno per **base** il numero 10. Ma adesso pensiamo a questo esempio:

$$2^{3} = 8$$

Proviamo a schiacciare il tasto **log** per calcolare il logaritmo di 8, e purtroppo non otteniamo 3, ma 0.90. Questo perché avremmo bisogno di un tasto che calcoli il logaritmo in base due. E forse anche il tasto per la base 3, la base 4, eccetera eccetera, per tutte le basi del mondo. Ora, non potendo inventare delle calcolatrici che abbiano tutti i logaritmi di tutte le basi, ci affidiamo ad una importante prorietà dei logaritmi, che in realtà è un Teorema della matematica (ma che noi non dimostreremo, sebbene non sia così difficile farlo).

Teorema 6.6.2 — logaritmo in una base qualsiasi. Se una base B elevata ad un esponente **n** produce una potenza P, ossia se:

$$B^{\mathbf{n}} = P$$

allora il numero **n**, ossia il logaritmo di P rispetto alla base B, che si indica con il simbolo $\log_B(P)$, è uguale al rapporto dei logaritmi:

$$\mathbf{n} = \log_B(P) = \frac{\log(P)}{\log(B)}$$

Esempio 6.6.3 — con la calcolatrice del telefonino. Usate il Teorema per verificare che $\log_2(8) = \frac{\log(8)}{\log(2)} = 3$. Se non ce la fate, significa che avete sbagliato di premere i testi nella loro sequenza. Succede infatti che in certe calcolatrici si deve prima inserire i numeri e poi schiacciare il tasto log, e non viceversa. Controllate questo video: `https://www.youtube.com/watch?v=0vM9MX7qgXs` nel quale calcoliamo $\log(8) \div \log(2)$

■ **Esercizio 6.4 — sul vostro quaderno.** I libri di matematica spesso chiedono di risolvere equazioni esponenziali del tipo $4^x = 32$ (dicendo che il risultato è $\frac{5}{2}$) È proprio così? No? Chi ha ragione? Controllatelo con la calcolatrice. Sapreste spiegare il perché la calcolatrice vi offre una risposta di quel genere? ■

Fermiamoci qui con le definizioni e le proprietà dei logaritmi; il prossimo anno riprenderemo la questione e la approfondiremo meglio. Vedremo ora un'importante applicazione del Teorema 6.6.2 alla questione dell'interesse composto.

Approfondimento interdisciplinare 6.6.4 — anagrammi pericolosi. In matematica ci sono alcune parole delle lingua italiana che sembrano degli innocenti anagrammi, ma invece sono dei **paronimi**, con un loro significato ben preciso. Ad esempio:

- *logaritmo*: ne abbiamo parlato sin qui
- *algoritmo*: sequenza ordinata finita e non ambigua di istruzioni

Un'altra 'coppia matematica' importantissima è rappresentata dalle parole *casuale* (imprevedibile) e *causale* (che consegue logicamente da un fatto o da una premessa). Chiedete ai vostri insegnante di Lettere di aiutarvi nello scoprire l'etimologia delle parole logaritmo ed algoritmo e di spiegare il senso della **paronimia**. Parlatene anche con i vostri insegnanti di Tecniche di Comunicazione: il linguaggio della pubblicità o quello della comunicazione politica spesso ne fa ampio uso.

6.7 il problema dello scooter e della nonna

Avete un grande desiderio: acquistare un motorino elettrico. Avete visto che uno che costa 2460 euro, e vostra nonna è disposta a regalarvi 2000 euro, che potete aggiungere ai vostri 200 euro di risparmi. Il **valore attuale** del vostro capitale dunque ammonta a 2200 euro. Vi viene l'idea di investire questa somma in un prodotto bancario che vi garantisce un tasso annuo $r = 4\%$. Quanto tempo t dovrete aspettare per raggiungere il montante $M = 2460$ e riuscire ad acquistare il motorino?

Esempio 6.7.1 — con la calcolatrice del telefonino. Risolvere $M = C \cdot (1+r)^t$ sapendo che $M = 2460$, $C = 2200$ e che $r = 4\%$.

Sostituiamo:

$$2460 = 2200 \cdot (1+0.04)^t$$

Quindi la nostra incognita x è il tempo, ossia la durata in anni dell'investimento. Dividiamo per 2200, ossia, 'portiamo il 2200 dall'altra parte':

$$\frac{2460}{2200} = (1+0.04)^x$$
$$1.1181818.. = (1.04)^x$$

Leggiamo come fanno gli Arabi, da destra verso sinistra:

$$(1.04)^x = 1.1181818..$$

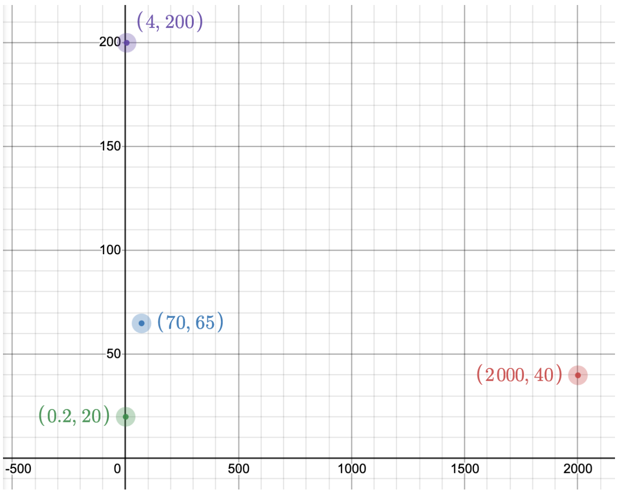
Si tratta ora di calcolare $\log_{1.04}(1.1181818..)$; usiamo la calcolatrice e troviamo $x = 2.848..$, ossia poco meno di tre anni.

■ **Esercizio 6.5 — sul vostro quaderno.** Massimino Pomodorino vorrebbe rinnovare la pizzeria disponendo di capitale $C = 48000$ euro, ma il preventivo di spesa è di $M = 50000$. Quanto tempo t deve trascorrere per avviare i lavori se il capitale viene investito ad un tasso $r = 3\%$? ■

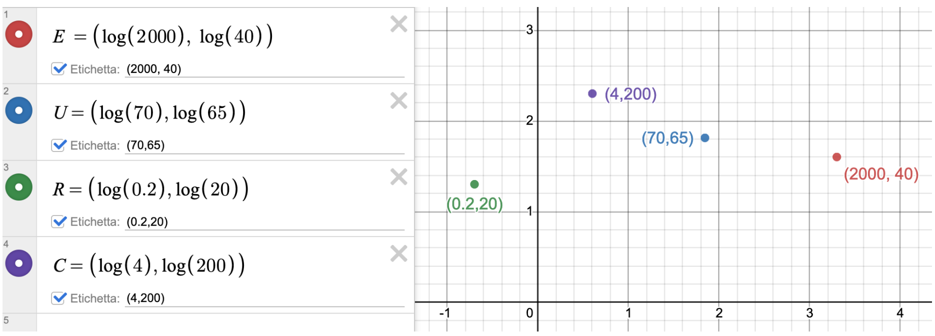
6.8 Grafici in scala logaritmica

Concludiamo questo Capitolo con un'importante applicazione dei logaritmi, i quali consentono di rappresentare sul piano cartesiano dei dati che hanno **ordini di grandezza** molto diversi. Vediamo questo esempio:

Animale	Peso (kg)	Frequenza cardiaca (bpm)
Elefante	2000	40
Umano	70	65
Coniglio	4	200
Rana	0.2	20



Come vediamo in questo grafico, la situazione è difficoltosa, perché è difficile rappresentare 'con i quadretti' numeri che sono molto grandi (2000) e molto piccoli (0.2). La situazione migliora di molto se sugli assi rappresentiamo i **logaritmi delle misure**, mentre sui punti indichiamo le misure originali. Qui abbiamo usato la **scala logaritmica** sull'asse delle x e la scala naturale sulle y: si tratta quindi di un **grafico a dispersione in scala semi-logaritimica**.

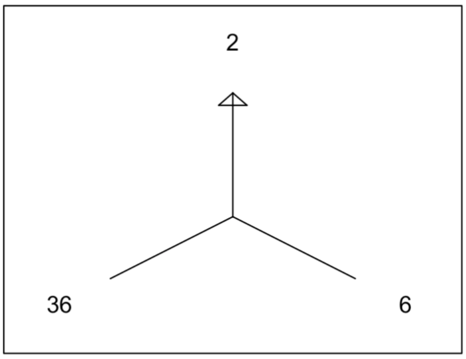


Riassunto

Ci dovremo ricordare con sicurezza che:

1. con Desmos è possibile disegnare il grafico della funzione esponenziale $y = B^x$
2. la formula dell'interesse composto, $M = C \cdot (1 + r)^t$ ha una crescita esponenziale nel tempo
3. il logaritmo è l'esponente
4. $\log_B(P) = \frac{\log(P)}{\log(B)}$

Siamo sicuri di avere capito bene?



Qual è quell'operazione matematica che ricevendo come input i numeri 36 e 6 fornisce come output il numero 2?

Verifica di sintesi

Realizzate un foglio elettronico che, noti tre degli elementi della legge dell'interesse composto, $M = C \cdot (1 + r)^t$, ne calcoli automaticamente il quarto mancante.

Soluzioni

Esercizio 6.3. Andiamo su Google e digitiamo borsa italiana XS0076593267 per trovare la quotazione odierna. Supponiamo che sia $C = 65.54$. Per definizione il titolo al momento del rimborso varrà $M = 100.00$. Si tratta ora di scoprire quanti giorni (anni, in verità) mancano alla scadenza. Possiamo calcolare la differenza di due date con il foglio elettronico (facile, si inseriscono le due date in due celle diverse, per esempio in A1 e in B1, e poi nella terza cella si inserisce la formula = B1 - A1); oppure, andiamo su Google, digitiamo giorni tra due date e sfruttiamo una qualsiasi delle applet Java esistenti. Supponiamo che siano $t = 2206$ giorni. Dividiamo il numero di giorni per 365.25 in modo da ottenere gli anni, $t = 2206/365.25 \approx 6.04$. Dunque:

$$\frac{M}{C} = (1+r)^t$$

$$\frac{100.00}{65.54} = (1+r)^{6.04}$$

$$1.525786.. = (1+r)^{6.04}$$

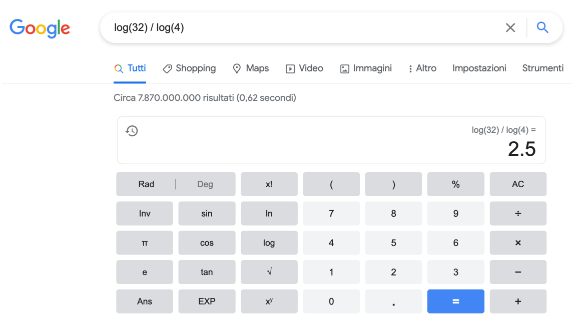
Calcoliamo $1.525786^{(1/6.04)}$, ottenendo 1.072457.. Dunque

$$1.072457.. = 1+r$$

$$0.072457.. = r$$

Conclusione: comperando oggi in borsa quel titolo e detenendolo sino alla scadenza, avremmo realizzato un investimento con un tasso annuo (composto) del 7.2%, al lordo delle imposte di legge e delle commissioni di intermediazione bancaria.

Esercizio 6.4. Perché se $4^x = 32$ allora il risultato è $\frac{5}{2}$? Se calcoliamo con il telefonino $\log_4(32) = \frac{\log(32)}{\log(4)}$ otteniamo come risultato 2.5



Ora non c'è dubbio che $\frac{5}{2} = 2.5$, quindi il risultato è perfetto. Rimane da capire però cosa significhi un esponente frazionario come $\frac{5}{2}$. Per capirlo, guardiamo i passaggi seguenti:

$$4^{\frac{5}{2}} = 32$$

Eleviamo al quadrato i due termini dell'identità:

$$(4^{\frac{5}{2}})^2 = 32^2$$

Ricordiamo la proprietà del prodotto degli esponenti:

$$4^{\frac{5}{2}\cdot 2} = 32^2$$

$$4^5 = 32^2$$

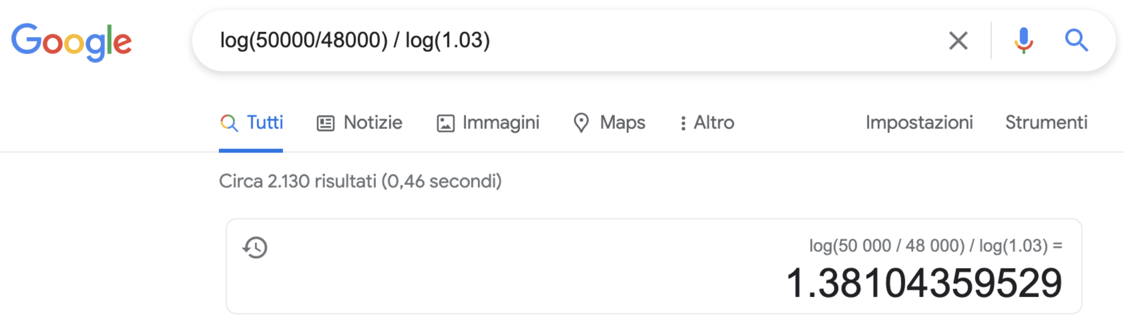
In effetti, 4^5 e 32^2 fanno entrambi 1024, dunque non c'è alcun imbroglio. Ma osserviamo che per fare questa verifica, per sbarazzarci del 'fratto due' avevamo *elevato al quadrato*. Quindi questo esercizio ci fa intuire che, reciprocamente:

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

e più in generale, che:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Esercizio 6.5. Meno di un anno e mezzo:



Bibliografia

Articoli

Indice analitico