

**Modelli di Computazione**

**Automi a Stati Finiti –  
Esercitazione**

**Marco Console**

***Ingegneria Informatica e Automatica, Sapienza Università di Roma***

---

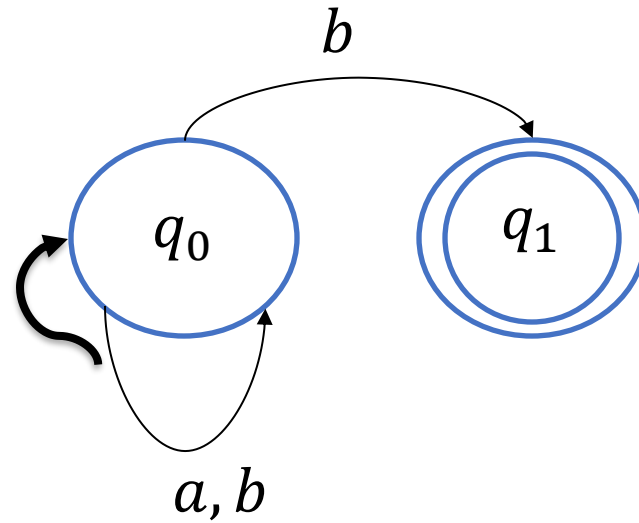
# Operazioni su Linguaggi

- **Definizione.** Un **linguaggio** è un insieme di stringhe
- **Dati due linguaggi  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$**  possiamo costruire altri linguaggi applicando le seguenti operazioni
- **Operazioni Insiemistiche.**
  - **Unione.**  $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{s \mid s \in \mathcal{L}_1 \text{ oppure } s \in \mathcal{L}_2\}$
  - **Intersezione.**  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{s \mid s \in \mathcal{L}_1 \text{ e } s \in \mathcal{L}_2\}$
  - **Complemento.**  $\overline{\mathcal{L}_1} = \{s \mid s \notin \mathcal{L}_1\}$
- **Operazioni su Stringhe.**
  - **Concatenazione.**  $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = \{c_1 \dots c_k d_1 \dots d_l \mid c_1 \dots c_k \in \mathcal{L}_1 \text{ e } d_1 \dots d_l \in \mathcal{L}_2\}$
  - **Star.**  $\mathcal{L}_1^* = \{s_1 \dots s_k \mid \text{con } k \geq 0 \text{ e } s_1 \dots s_k \in \mathcal{L}_1\}$

# Esercizi

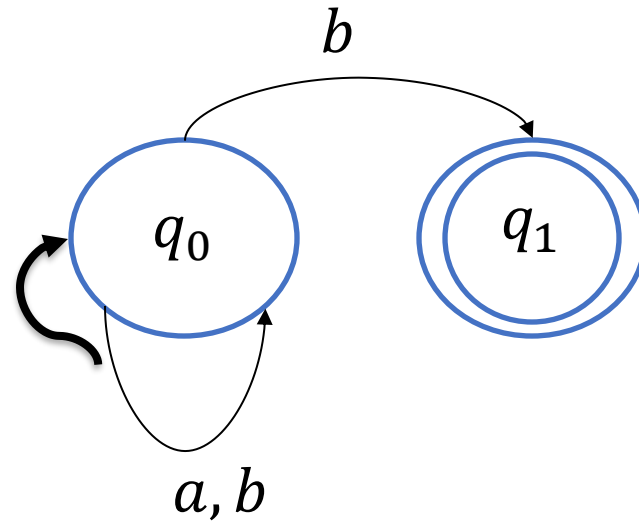
---

# Esercizio 1



Definire il linguaggio riconosciuto dall'automa raffigurato sopra

# Esercizio 1 – Soluzione

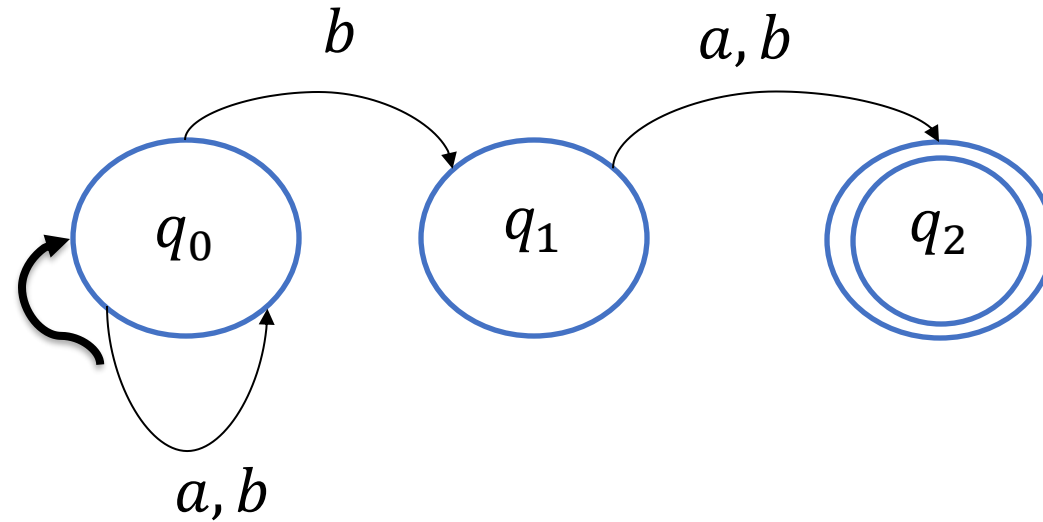


Definire il linguaggio riconosciuto dall'automa raffigurato sopra

$$\{x \mid x = yb \text{ e } y \in \{a, b\}^*\}$$

## Esercizio 2

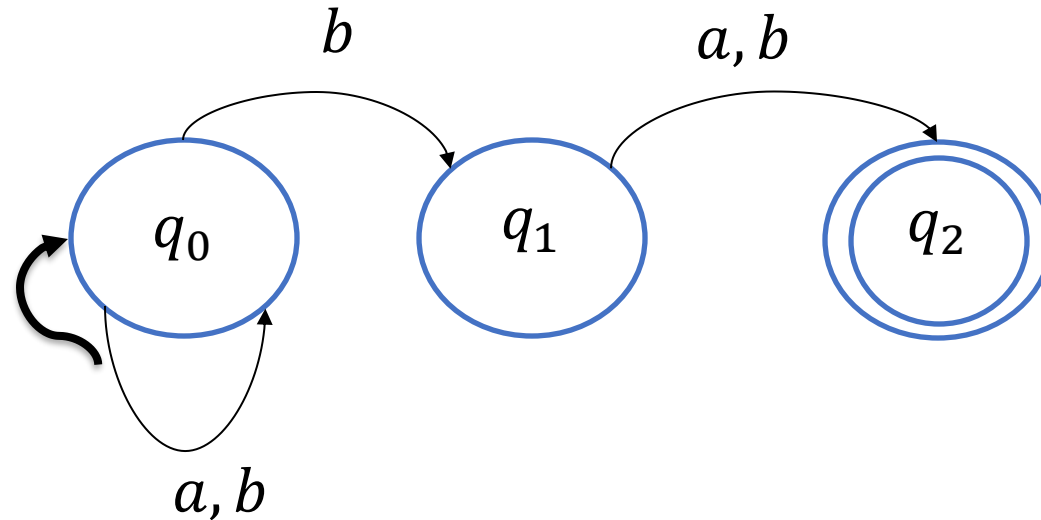
Esercizio sulla costruzione elencata nella dimostrazione del teorema



Definire il linguaggio riconosciuto dall'automa raffigurato sopra

## Esercizio 2 – Soluzione

Esercizio sulla costruzione elencata nella dimostrazione del teorema



Definire il linguaggio riconosciuto dall'automa raffigurato sopra

$$\{x \mid x = ybz, y \in \{a, b\}^*, y \in \{a, b\}\}$$

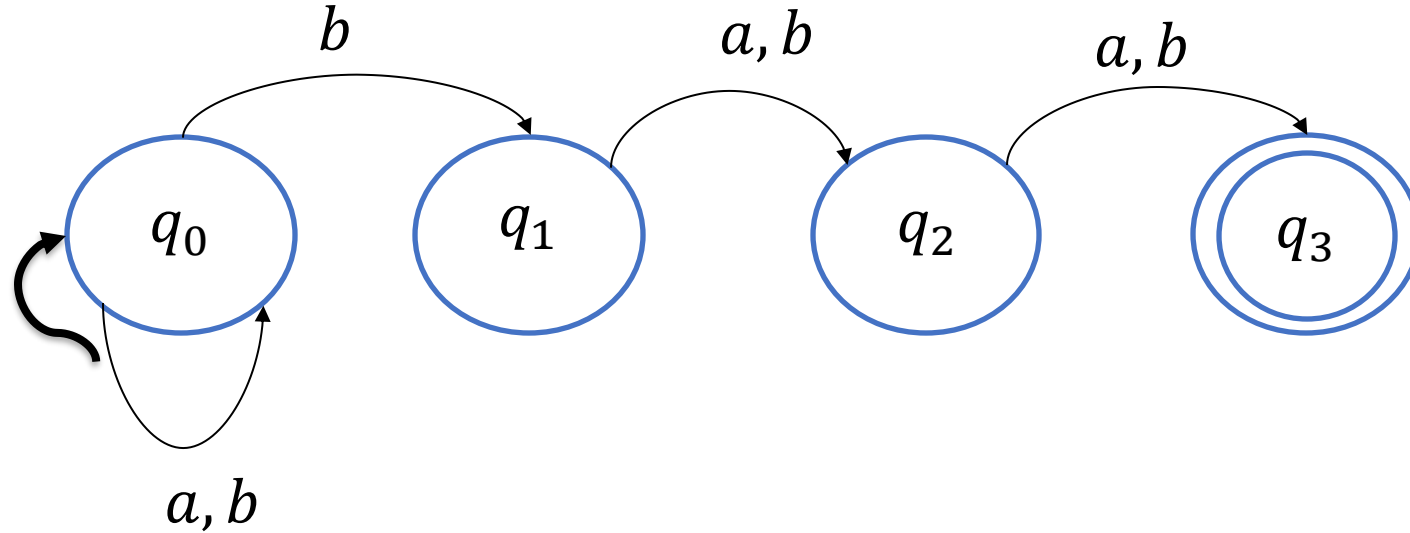
## Esercizio 3

1. Definire un ASFND che riconosce il seguente linguaggio:  
$$\{x \mid x = y \circ b \circ z \text{ e } y \in \{a, b\}^* \text{ e } z \in \{a, b\}^2\}$$
2. Costruire un ASFD come indicato nella dimostrazione del teorema



## Esercizio 3 – Soluzione

1. Definire un ASFND che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x = y \circ b \circ z \text{ e } y \in \{a, b\}^* \text{ e } z \in \{a, b\}^2\}$



## Esercizio 3 – Soluzione

1. Definire un ASFND che riconosce il seguente linguaggio:

$$\{x \mid x = y \circ b \circ z \text{ e } y \in \{a, b\}^* \text{ e } z \in \{a, b\}^2\}$$

- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_3\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(q_0, a)$	$\{q_0\}$
$(q_0, b)$	$\{q_0, q_1\}$
$(q_1, a)$	$\{q_2\}$
$(q_1, b)$	$\{q_2\}$
$(q_2, a)$	$\{q_3\}$
$(q_2, b)$	$\{q_3\}$
$(q_3, a)$	$\{ \}$
$(q_3, b)$	$\{ \}$

## Esercizio 3 – Soluzione

2. Costruire un ASFD come indicato nella dimostrazione del teorema

- $A' = \langle \Sigma, Q', \delta', I', F' \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = 2^Q$
- $I = \{q_0\}$
- $F = \{\{q_3\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$

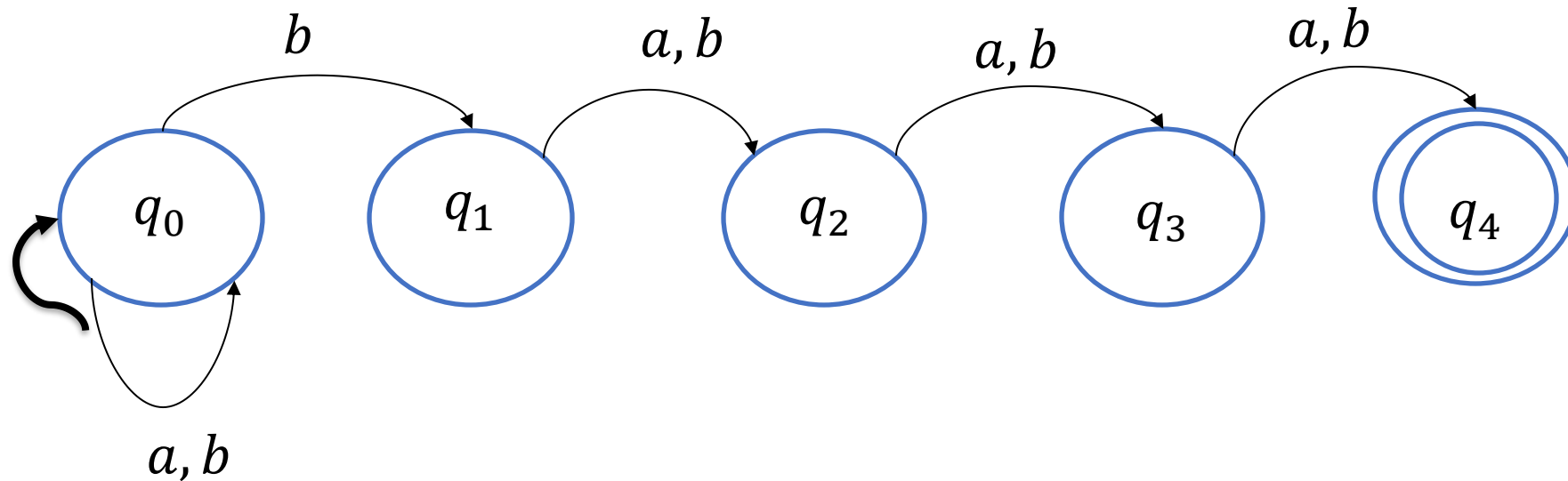
$(q, a)$	$\delta(q, \sigma)$	$(q, b)$	$\delta(q, \sigma)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

## Esercizio 4

1. Definire un ASFND che riconosce il seguente linguaggio:  
$$\{x \mid x = y \circ b \circ z \text{ e } y \in \{a, b\}^* \text{ e } z \in \{a, b\}^3\}$$
2. Costruire un ASFD come indicato nella dimostrazione del teorema

## Esercizio 4 – Soluzione

- Definire un ASFND che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x = y \circ b \circ z \text{ e } y \in \{a, b\}^* \text{ e } z \in \{a, b\}^3\}$



## Esercizio 4 – Soluzione

- Definire un ASFND che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x = y \circ b \circ z \text{ e } y \in \{a, b\}^* \text{ e } z \in \{a, b\}^3\}$

- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_4\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(q_0, a)$	$\{q_0\}$
$(q_0, b)$	$\{q_0, q_1\}$
$(q_1, a)$	$\{q_2\}$
$(q_1, b)$	$\{q_2\}$
$(q_2, a)$	$\{q_3\}$
$(q_2, b)$	$\{q_3\}$
$(q_3, a)$	$\{q_4\}$
$(q_3, b)$	$\{q_4\}$
$(q_4, a)$	$\{ \}$
$(q_4, b)$	$\{ \}$

## Esercizio 4 – Soluzione

2. Costruire un ASFD come indicato nella dimostrazione del teorema

- $A' = \langle \Sigma, Q', \delta', I', F' \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = 2^Q$  per un totale di 32 stati
- $I = \{q_0\}$
- $F = \{X \in 2^Q \mid q_4 \in X\}$



$(q, a)$	$\delta(q, \sigma)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_4\}$
$\{q_4\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_4\}$
$\{q_0, q_4\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3, q_4\}$	$\{q_4\}$

$(q, a)$	$\delta(q, \sigma)$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_4\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_4\}$
$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$

$(q, b)$	$\delta(q, \sigma)$
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_4\}$
$\{q_4\}$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_4\}$
$\{q_0, q_4\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3, q_4\}$	$\{q_4\}$

$(q, b)$	$\delta(q, \sigma)$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_2, q_4\}$
$\{q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_2, q_3, q_4\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

## Esercizio 5

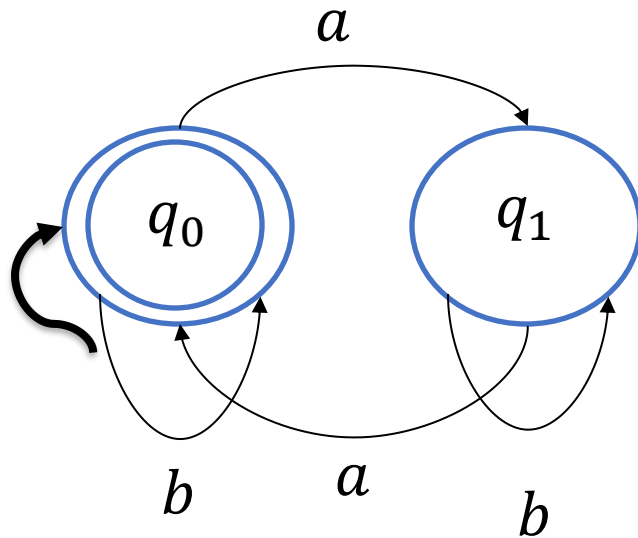
- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^* \text{ e } x \text{ contiene un numero pari di } a\}$

Nota: 0 è un numero pari

## Esercizio 5 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^* \text{ e } x \text{ contiene un numero pari di } a\}$

Nota: 0 è un numero pari



## Esercizio 5 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^* \text{ e } x \text{ contiene un numero pari di } a\}$

Nota: 0 è un numero pari

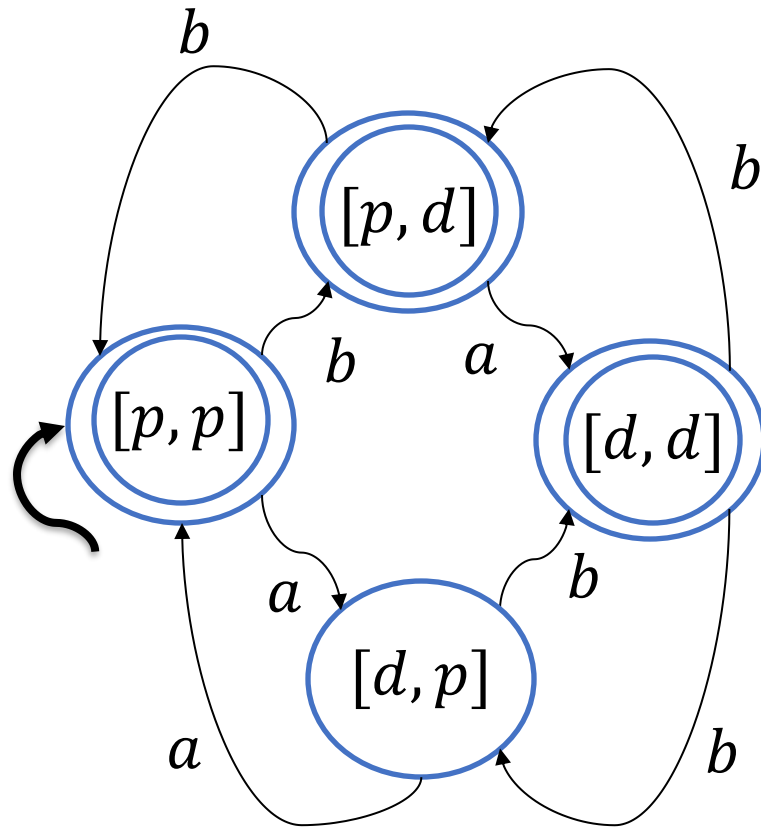
- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{q_0, q_1\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_0\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(q_0, a)$	$q_1$
$(q_0, b)$	$q_0$
$(q_1, a)$	$q_0$
$(q_1, b)$	$q_1$

## Esercizio 6

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene un numero dispari di } b \text{ OPPURE un numero pari di } a \}$
- *bbba* **sì** (3 *b* e 1 *a*)
- *aa* **sì** (0 *b* e 1 *a*)
- *bbbaa* **sì** (3 *b* e 1 *a*)
- *bba* **no** (2 *b* e 1 *a*)

## Esercizio 6 – Soluzione



## Esercizio 6 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene un numero dispari di } b \text{ OPPURE un numero pari di } a\}$
- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{[p, p], [p, d], [d, p], [d, d]\}$
- $I = [p, p]$
- $F = \{[p, p], [p, d], [d, d]\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$([p, p], a)$	$[d, p]$
$([p, p], b)$	$[p, d]$
$([p, d], a)$	$[d, d]$
$([p, d], b)$	$[p, p]$
$([d, p], a)$	$[p, p]$
$([d, p], b)$	$[d, d]$
$([d, d], a)$	$[p, d]$
$([d, d], b)$	$[d, p]$

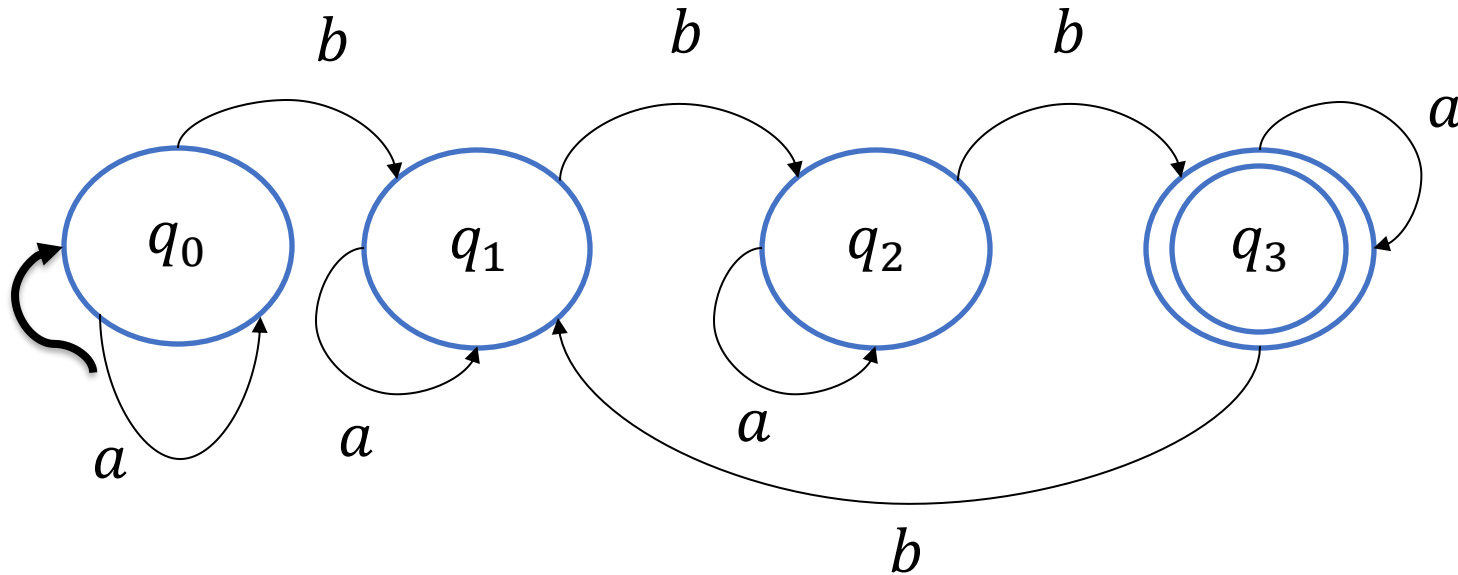


## Esercizio 7

1. Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^* \text{ e } x \text{ contiene un numero di } b \text{ che è multiplo di } 3\}$

## Esercizio 7 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a,b\}^* \text{ e } x \text{ contiene un numero di } b \text{ che è multiplo di } 3\}$



## Esercizio 7 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^* \text{ e } x \text{ contiene un numero di } b \text{ che è multiplo di } 3\}$

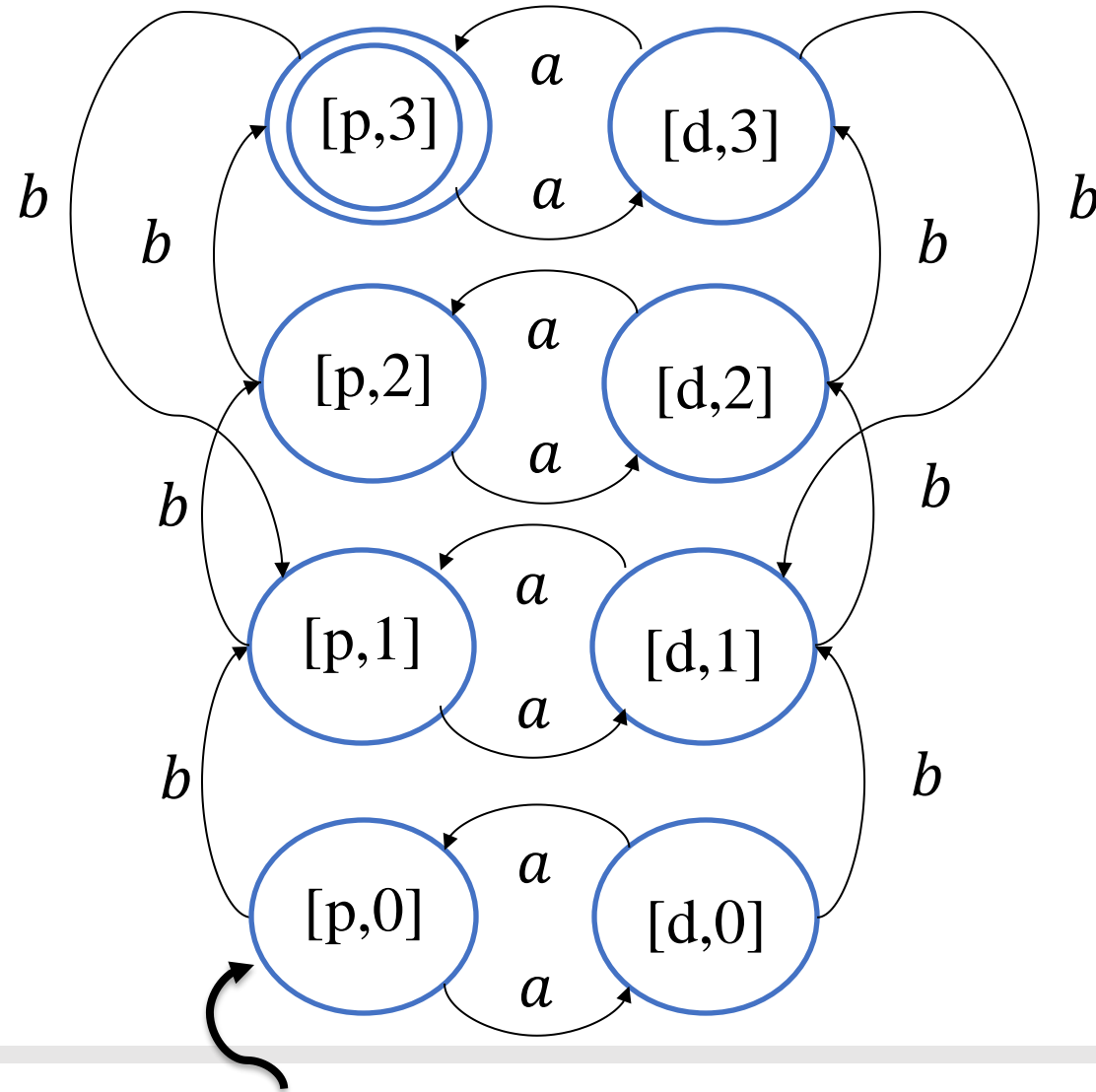
- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_3\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(q_0, a)$	$q_0$
$(q_0, b)$	$q_1$
$(q_1, a)$	$q_1$
$(q_1, b)$	$q_2$
$(q_2, a)$	$q_2$
$(q_2, b)$	$q_3$
$(q_3, a)$	$q_3$
$(q_3, b)$	$q_1$

## Esercizio 8

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene un numero di } b \text{ multiplo di } 3 \text{ e un numero pari di } a\}$

## Esercizio 8 – Soluzione



## Esercizio 8 – Soluzione

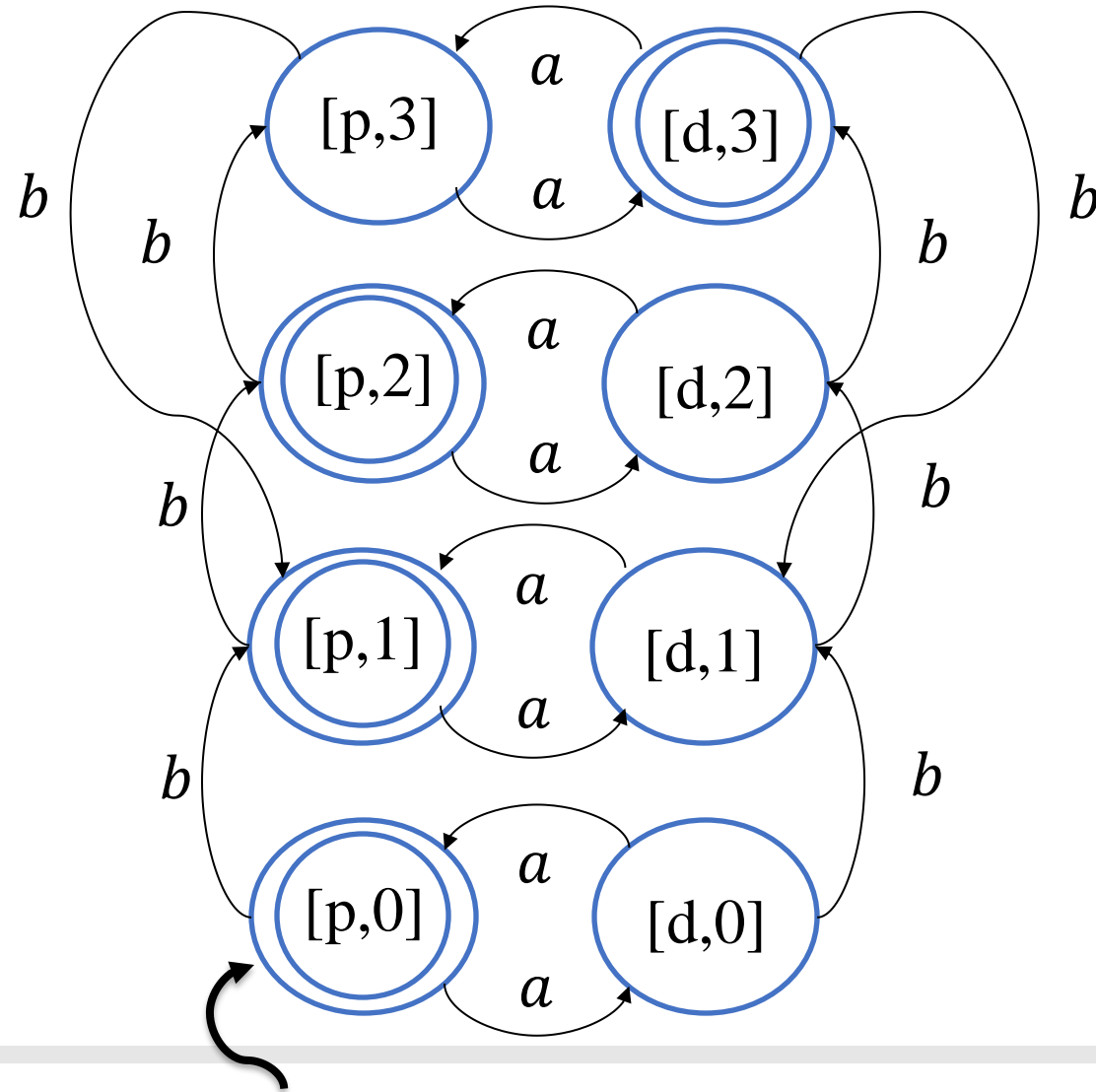
- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{[p, 0], [d, 0], [p, 1], [d, 1], [p, 2], [d, 2], [p, 3], [d, 3]\}$
- $I = [p, 0]$
- $F = \{[p, 3]\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$([p, 0], a)$	$[d, 0]$
$([p, 0], b)$	$[p, 1]$
$([d, 0], a)$	$[p, 0]$
$([d, 0], b)$	$[d, 1]$
$([p, 1], a)$	$[d, 1]$
$([p, 1], b)$	$[p, 2]$
$([d, 1], a)$	$[p, 1]$
$([d, 1], b)$	$[d, 2]$
$([p, 2], a)$	$[d, 2]$
$([p, 2], b)$	$[p, 3]$
$([d, 2], a)$	$[p, 2]$
$([d, 2], b)$	$[d, 3]$
$([p, 3], a)$	$[d, 3]$
$([p, 3], b)$	$[p, 1]$
$([d, 3], a)$	$[p, 3]$
$([d, 3], b)$	$[d, 1]$

## Esercizio 9

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene un numero di } b \text{ multiplo di } 3 \text{ OPPURE un numero pari di } a \text{ ma non entrambi}\}$
- $bbba$  **sì** (3  $b$  e 1  $a$ )
- $aa$  **sì** (0  $b$  e 1  $a$ )
- $bbbaa$  **no** (3  $b$  e 1  $a$ )
- $bbb$  **no** (3  $b$  e 0  $a$ )

## Esercizio 9 – Soluzione





## Esercizio 9 – Soluzione

- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{[p, 0], [d, 0], [p, 1], [d, 1], [p, 2], [d, 2], [p, 3], [d, 3]\}$
- $I = [p, 0]$
- $F = \{[p, 3]\}$

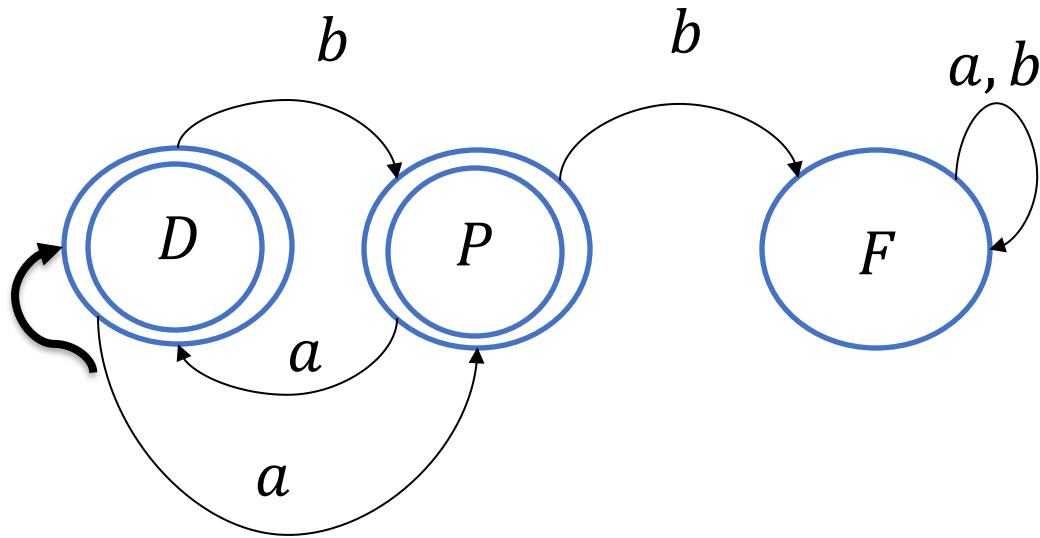
$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$([p, 0], a)$	$[d, 0]$
$([p, 0], b)$	$[p, 1]$
$([d, 0], a)$	$[p, 0]$
$([d, 0], b)$	$[d, 1]$
$([p, 1], a)$	$[d, 1]$
$([p, 1], b)$	$[p, 2]$
$([d, 1], a)$	$[p, 1]$
$([d, 1], b)$	$[d, 2]$
$([p, 2], a)$	$[d, 2]$
$([p, 2], b)$	$[p, 3]$
$([d, 2], a)$	$[p, 2]$
$([d, 2], b)$	$[d, 3]$
$([p, 3], a)$	$[d, 3]$
$([p, 3], b)$	$[p, 1]$
$([d, 3], a)$	$[p, 3]$
$([d, 3], b)$	$[d, 1]$

## Esercizio 10

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene } a \text{ in ogni posizione pari}\}$
- baaaba* **sì**
- aa* **sì** (0 *b* e 1 *a*)
- bbaaa* **no** (*b* in posizione 2)
- aaaaab* **no** (*b* in posizione 6)

## Esercizio 10 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene } a \text{ in ogni posizione pari}\}$



## Esercizio 10 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene } a \text{ in ogni posizione pari}\}$

- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{D, P, F\}$
- $I = D$
- $F = \{D, P\}$

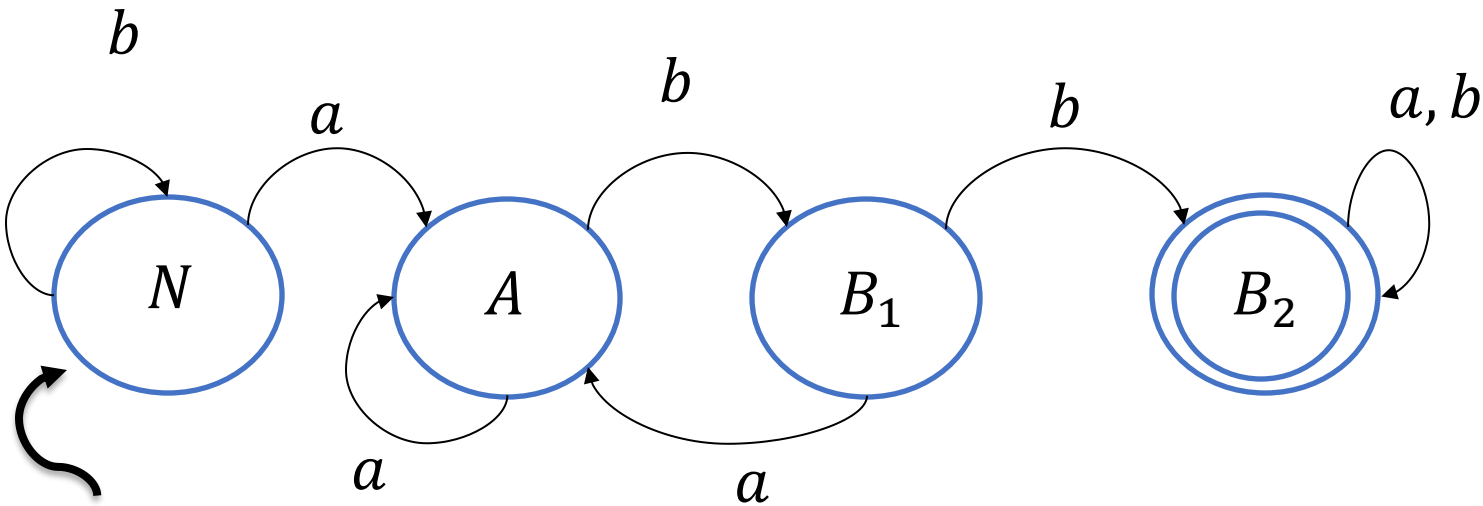
$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(D, a)$	$P$
$(D, b)$	$P$
$(P, a)$	$D$
$(P, b)$	$F$
$(F, a)$	$F$
$(F, b)$	$F$

# Esercizio 11

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene la sottostringa } abb\}$
- baa***abba** **sì**
- aa* **no**
- bbaaa* **no**
- aaaaab* **no**

## Esercizio 11 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene la sottostringa } abb\}$



## Esercizio 11 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ contiene } a \text{ in ogni posizione pari}\}$

- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{N, A, B_1, B_2\}$
- $I = N$
- $F = \{B_2\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(N, a)$	$A$
$(N, b)$	$N$
$(A, a)$	$A$
$(A, b)$	$B_1$
$(B_1, a)$	$A$
$(B_1, b)$	$B_2$
$(B_2, a)$	$B_2$
$(B_2, b)$	$B_2$

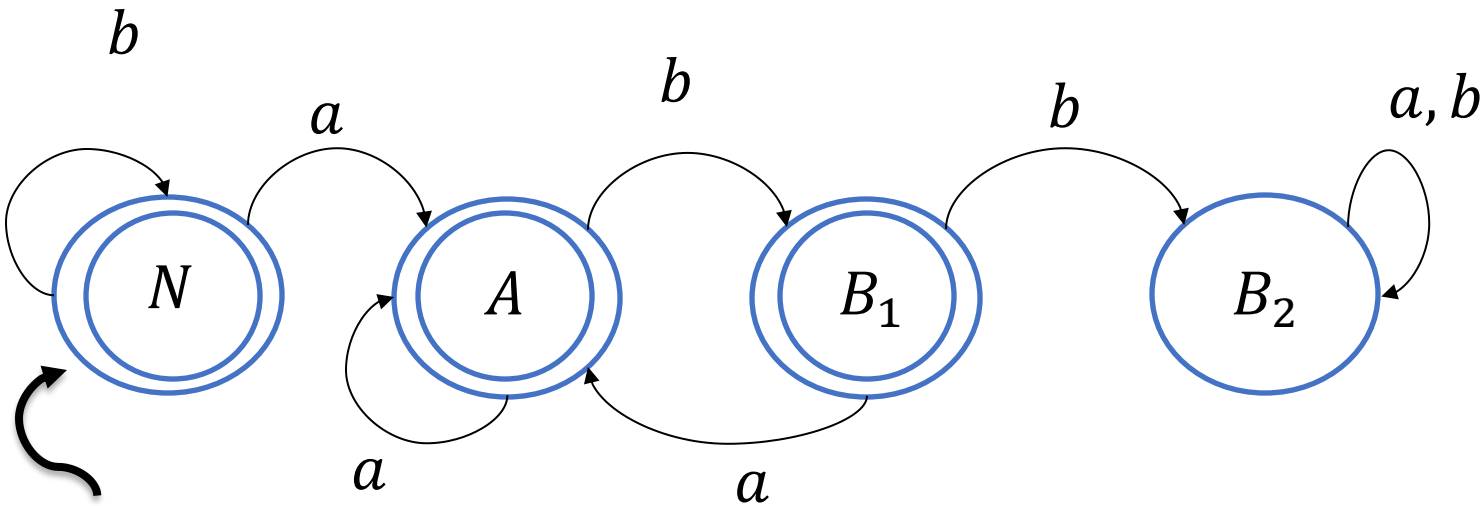
## Esercizio 12

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ NON contiene la sottostringa } abb\}$
- baa***abba** **no**
- aa* **sì**
- bbaaa* **sì**
- aaaaab* **sì**



## Esercizio 12 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ NON contiene la sottostringa } abb\}$



## Esercizio 12 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il seguente linguaggio:  
 $\{x \mid x \in \{a, b\}^*, x \text{ NON contiene } a \text{ in ogni posizione pari}\}$

- $A = \langle \Sigma, Q, \delta, I, F \rangle$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{N, A, B_1, B_2\}$
- $I = N$
- $F = \{N, A, B_1\}$

$(q, \sigma)$	$\delta(q, \sigma)$
$(N, a)$	$A$
$(N, b)$	$N$
$(A, a)$	$A$
$(A, b)$	$B_1$
$(B_1, a)$	$A$
$(B_1, b)$	$B_2$
$(B_2, a)$	$B_2$
$(B_2, b)$	$B_2$