Logica e Modelli Computazionali

Automi a Stati Finiti Deterministici

Marco Console

Ingegneria Informatica e Automatica, Sapienza Università di Roma

ASFD – Descrizione Informale

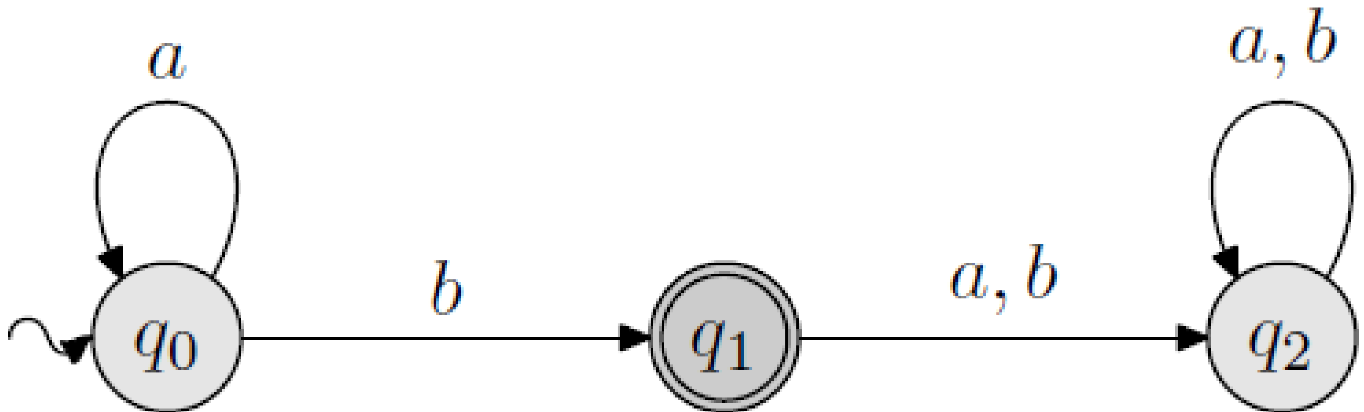
- Gli **Automi a Stati Finiti Deterministici** (ASFD) sono un modello computazionale
  - Il primo che incontreremo nel corso

- Gli **ASFD** rappresentano calcolatori **semplici** con **memoria molto limitata**
  - **L'input** di è una stringa e **l'output** è un bit (risolvono **alcuni** problemi di riconoscimento)
  - L'unica memoria di questi calcolatori è un registro che contiene lo **stato interno**
  - Gli **stati interni** sono un numero fisso determinato dal programma
  - Un ASDF esamina un simbolo della stringa dell'input alla volta (senza considerare i precedenti o successivi)

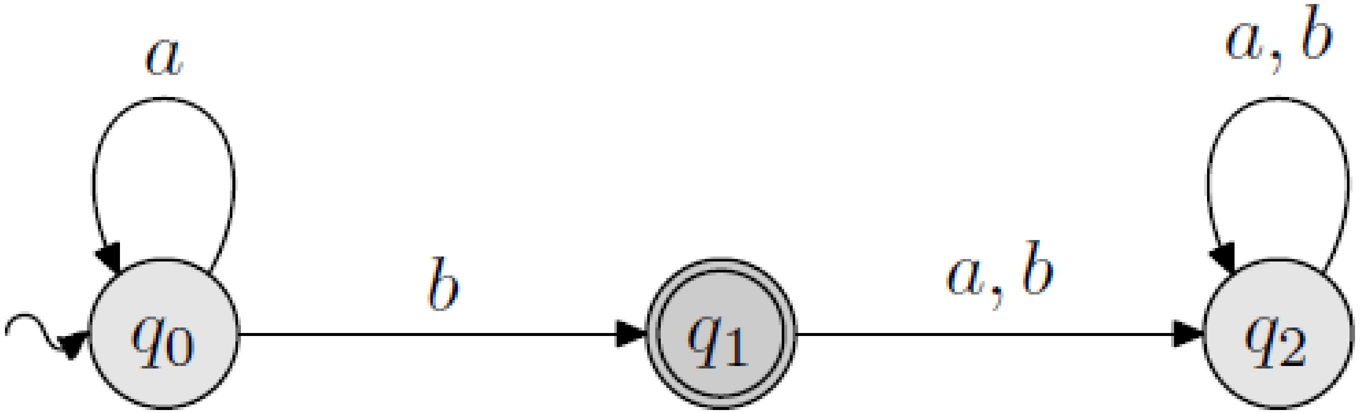
- A partire dal **primo simbolo** della **stringa di input** $\mathcal{I}$ e **lo stato iniziale** $\mathcal{S}_0$ l'**ASFD esegue i seguenti passi**:
  1. Esamina **il simbolo corrente** $\mathcal{C}$ della stringa di input e lo **stato interno corrente** $\mathcal{S}$
  2. Sceglie se cambiare lo **stato intero** $\mathcal{S}$ in uno **stato** $\mathcal{S}'$
  3. Se esiste un **simbolo** $\mathcal{C}$**'** che segue **simbolo corrente** $\mathcal{C}$ nella stringa di input, passa al **simbolo** $\mathcal{C}$**'**
  4. Se tale **simbolo** $\mathcal{C}$**'** non esiste (la stringa termina al **simbolo** $\mathcal{C}$) la computazione termina e
     - Se lo **stato interno corrente** $\mathcal{S}$ è **uno stato "Finale" ritorna 1 (stringa accettata)**
     - Se lo **stato interno corrente** $\mathcal{S}$ **non è uno stato "Finale" ritorna 0 (stringa rifiutata)**

Diagramma degli Stati – Descrizione Informale

- Il funzionamento degli ASFD (e delle macchine che rappresentano) possono essere descritti tramite **diagrammi degli stati** (o **grafi di transizione**)
  - Intuitivamente, il diagramma rappresenta il programma eseguito dalle macchine
- Un diagramma degli stati è un grafo orientato ed etichettato in cui:
  - I **nodi** rappresentano gli stati della macchina che stiamo rappresentando;
  - Gli **archi** rappresentano le possibili **transizioni di stato**;
  - Le **etichette** sugli archi rappresentano il **simbolo la cui lettura determina la transizione**;
  - Lo **stato iniziale** è rappresentato tramite una freccia senza partenza;
  - Gli **stati finali** sono rappresentati con un **doppio cerchio**
  - **Se la transizione per un certo simbolo non è definita da uno stato, assumiamo sia un cappio**



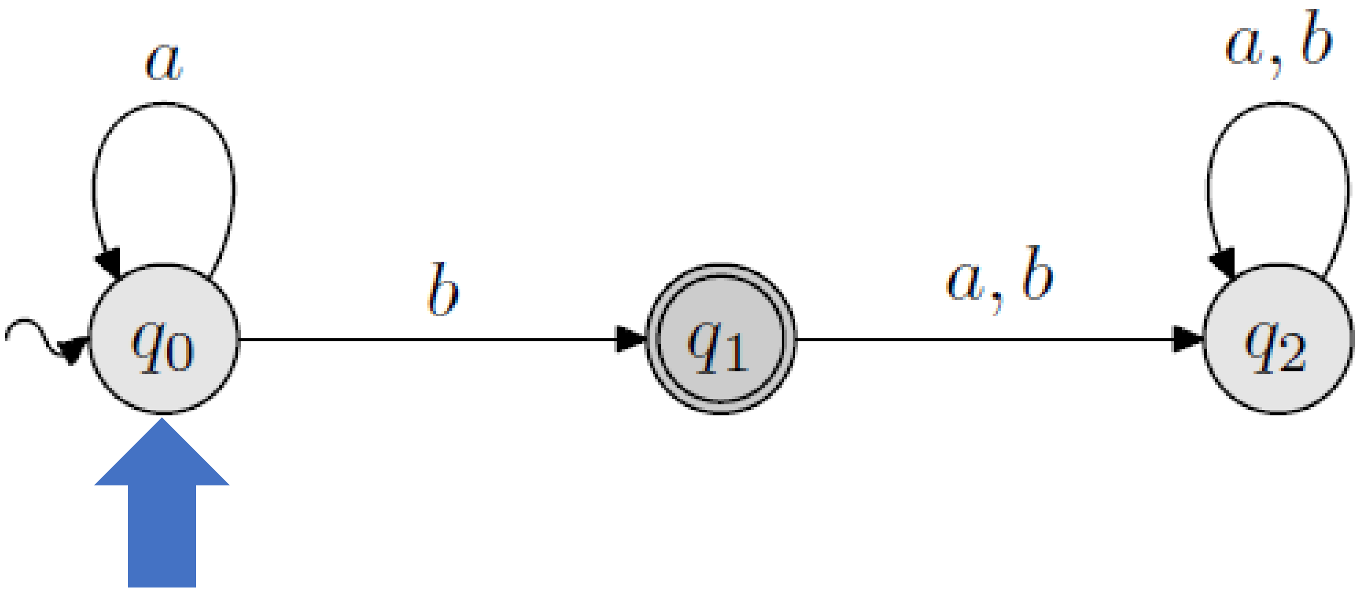
Esempio di Computazione



INPUT

A	A	A	A	A	B

Esempio di Computazione



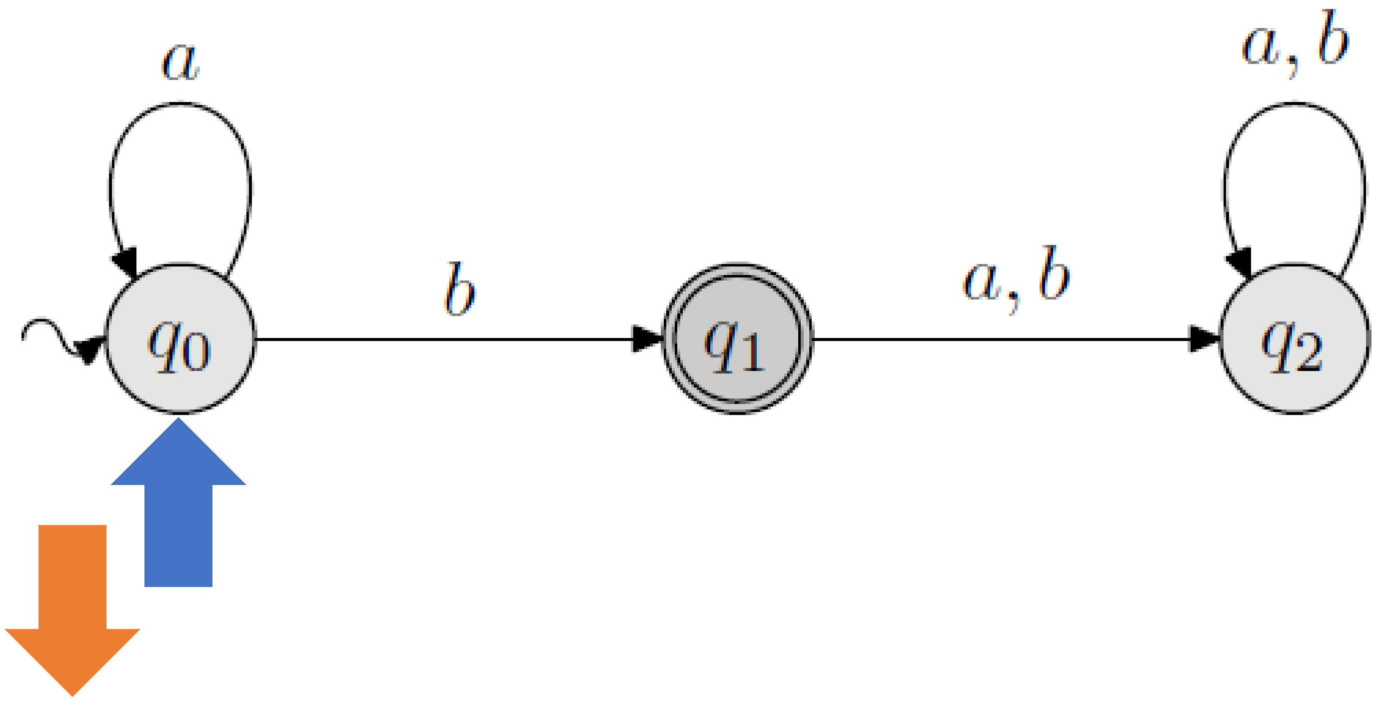
INP

A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione

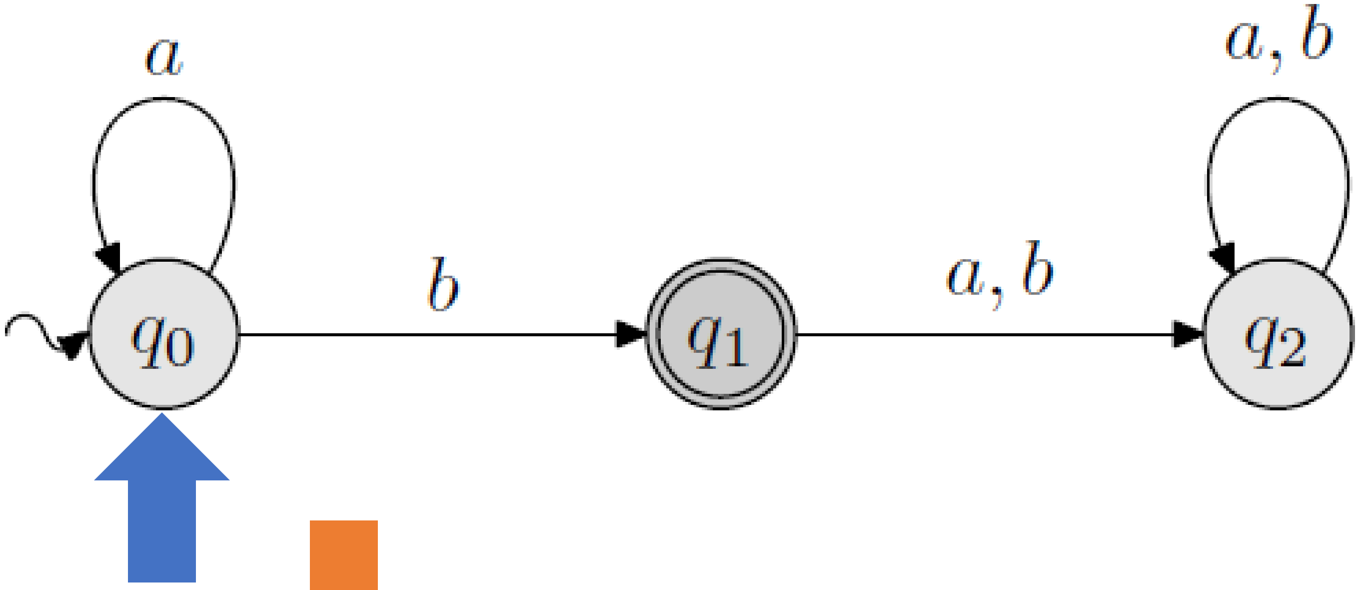


A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



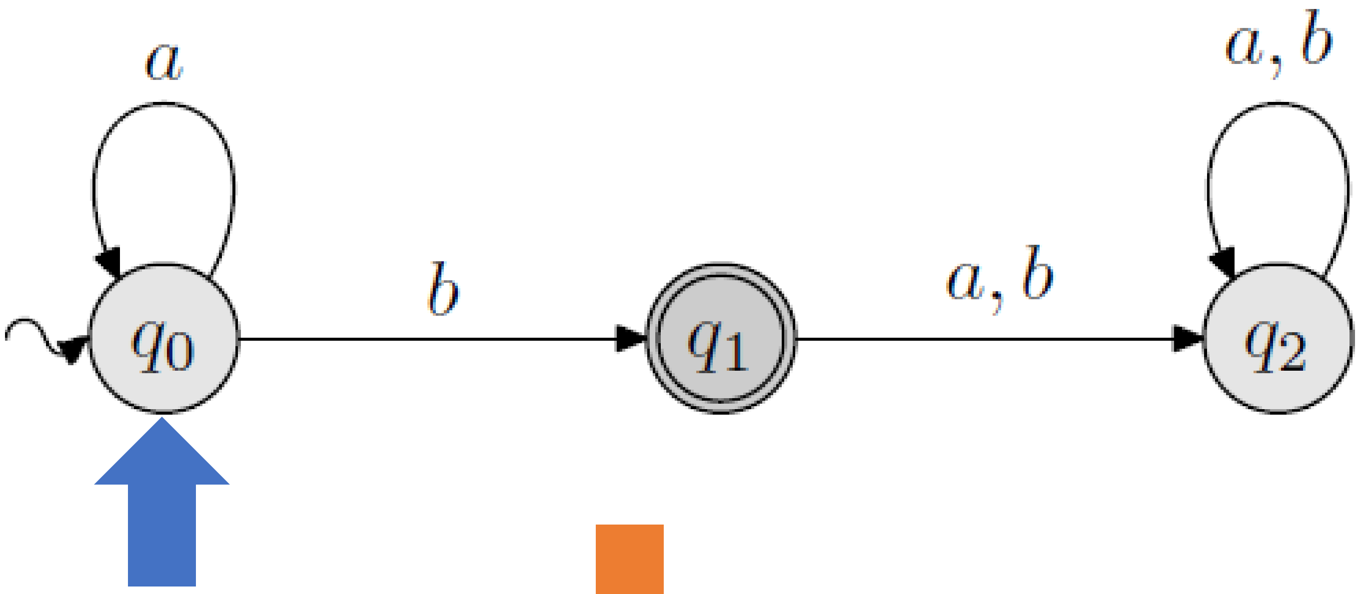
INPUT

A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



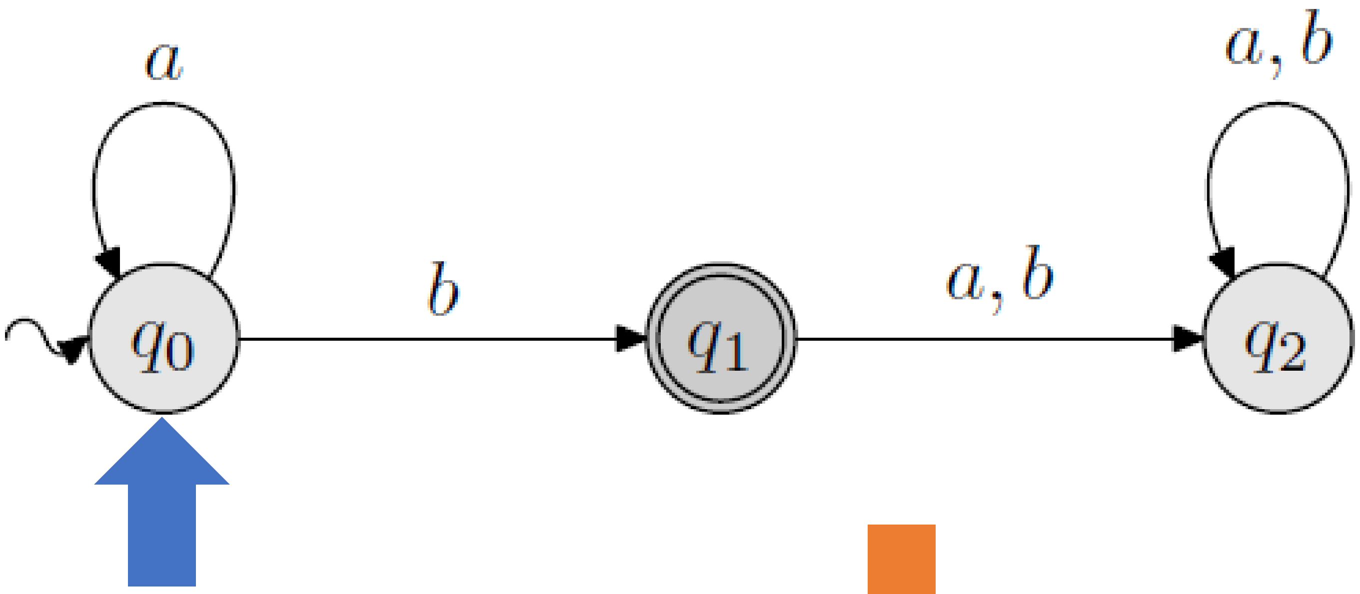
INPUT

A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



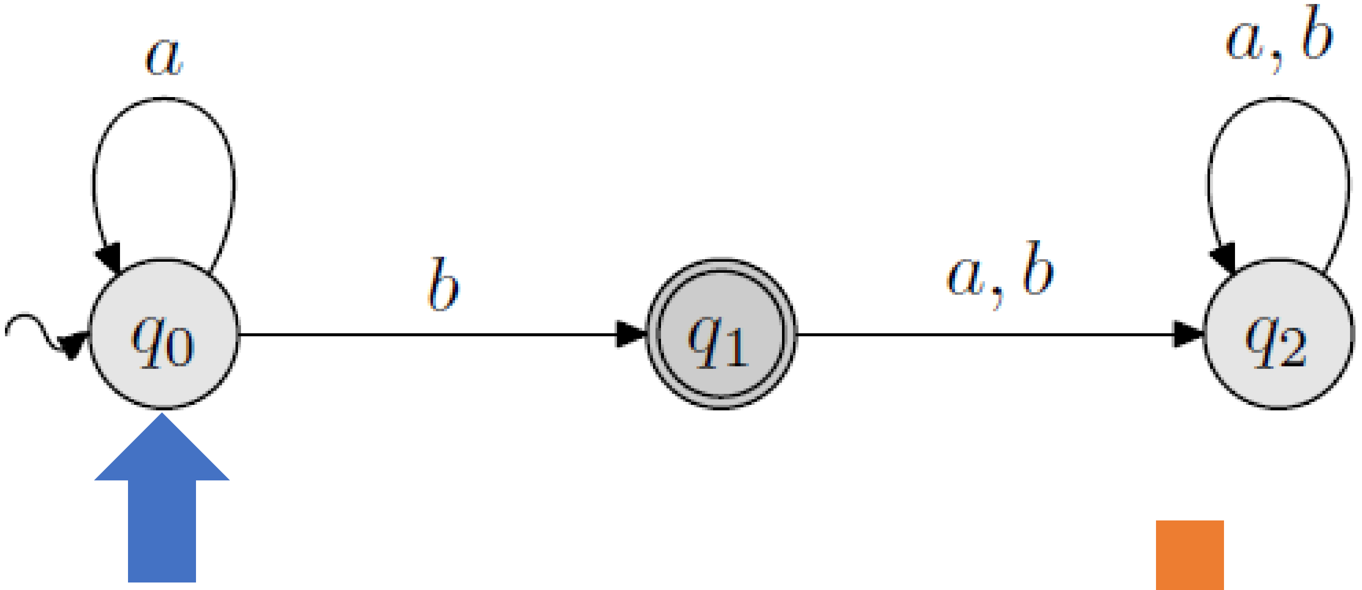
INPUT

A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



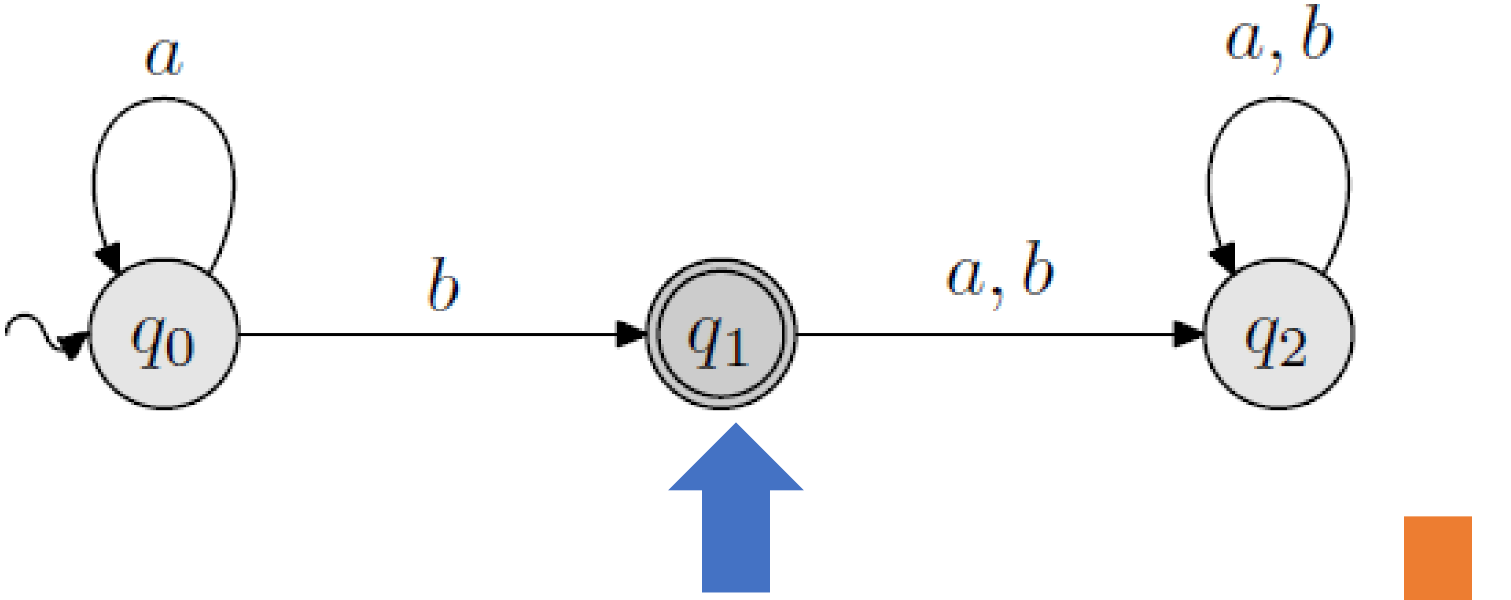
INPUT

A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



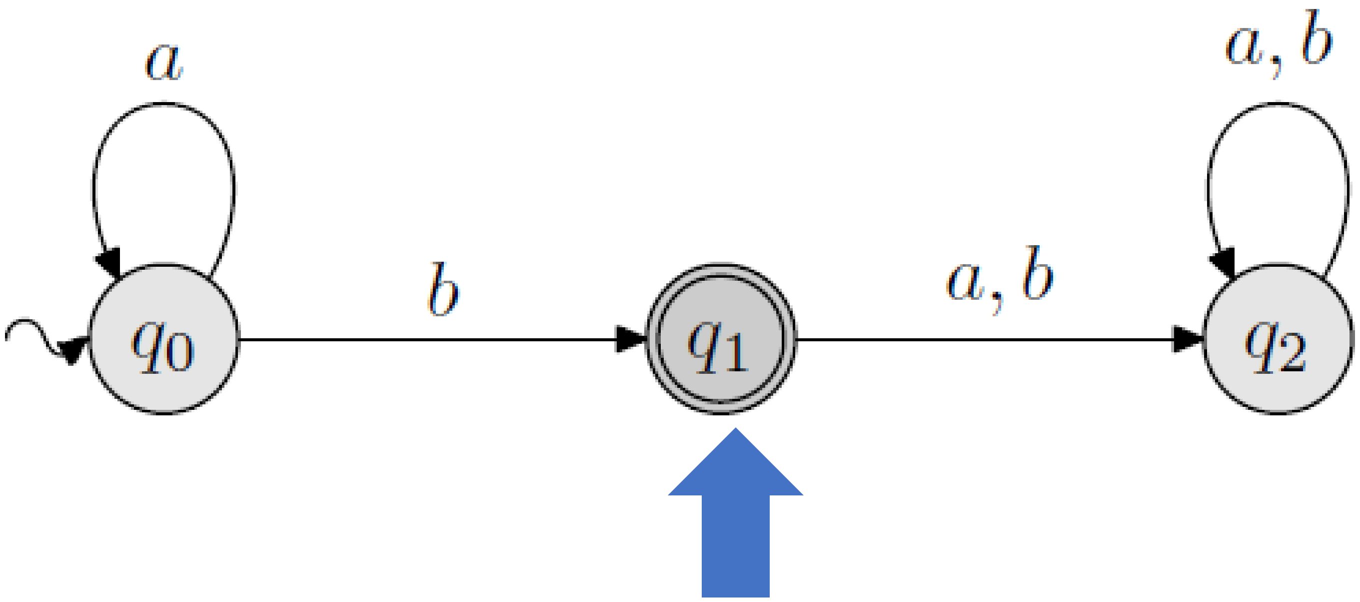
INPUT

A	A	A	A	A	B

STATO CORRENTE

q_1

Esempio di Computazione



INPUT

A	A	A	A	A	B

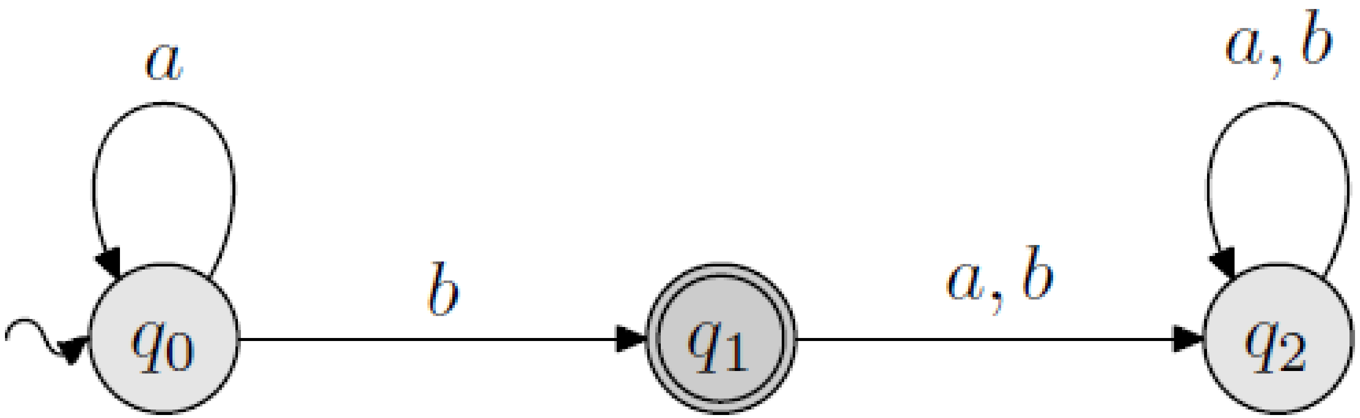
STATO CORRENTE

q_1

OUTPUT

1

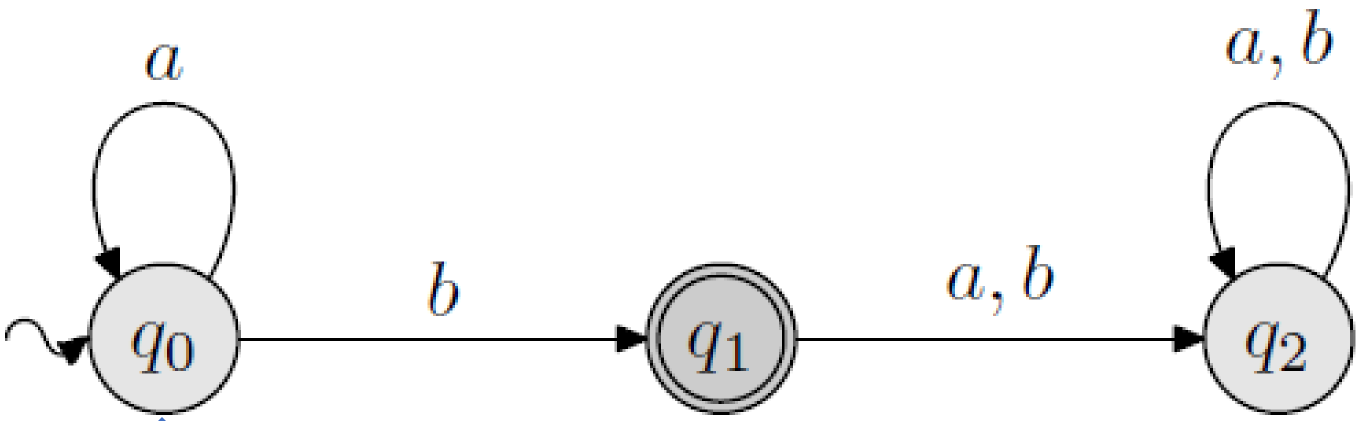
Esempio di Computazione



INPUT

A	A	B	A	A	B

Esempio di Computazione



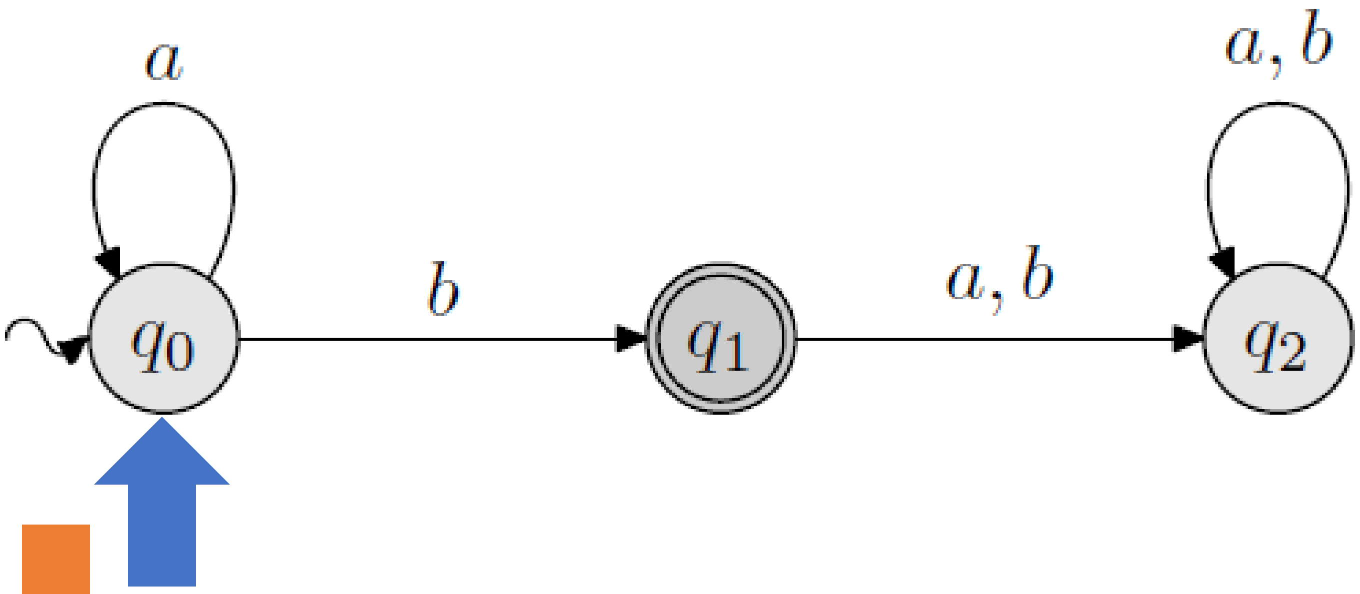
INP

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



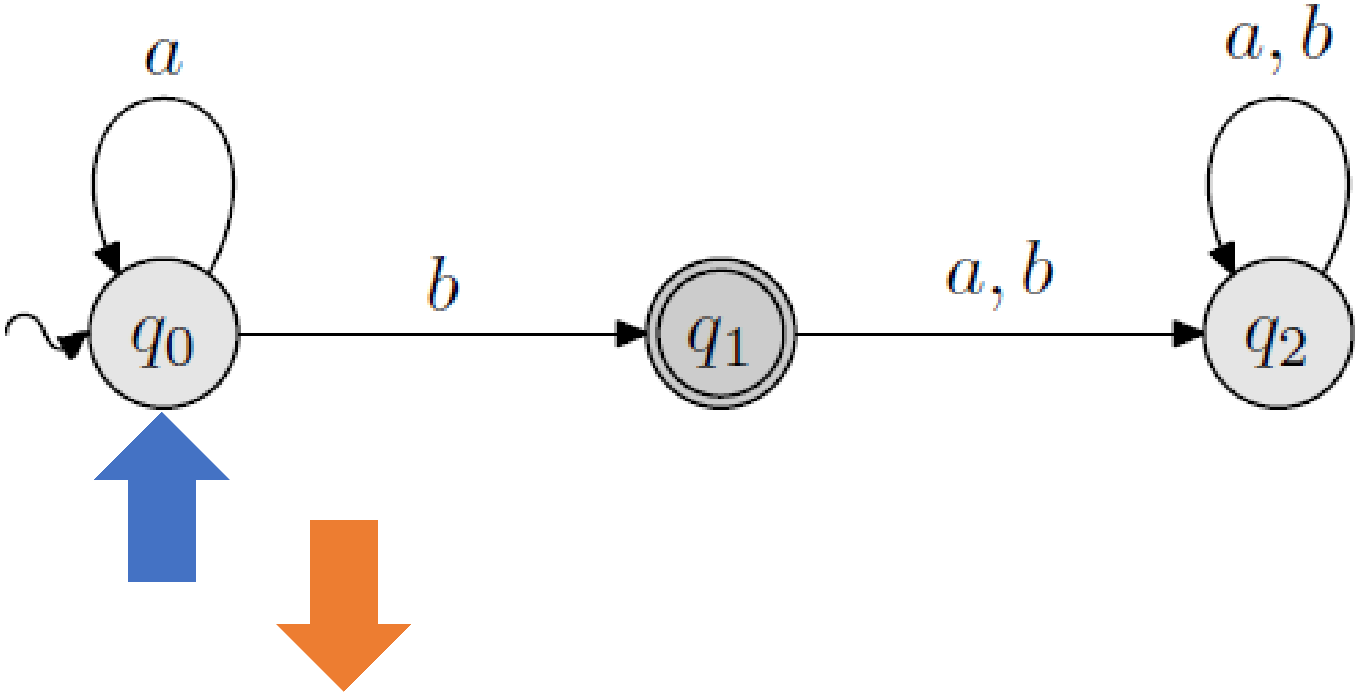
INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



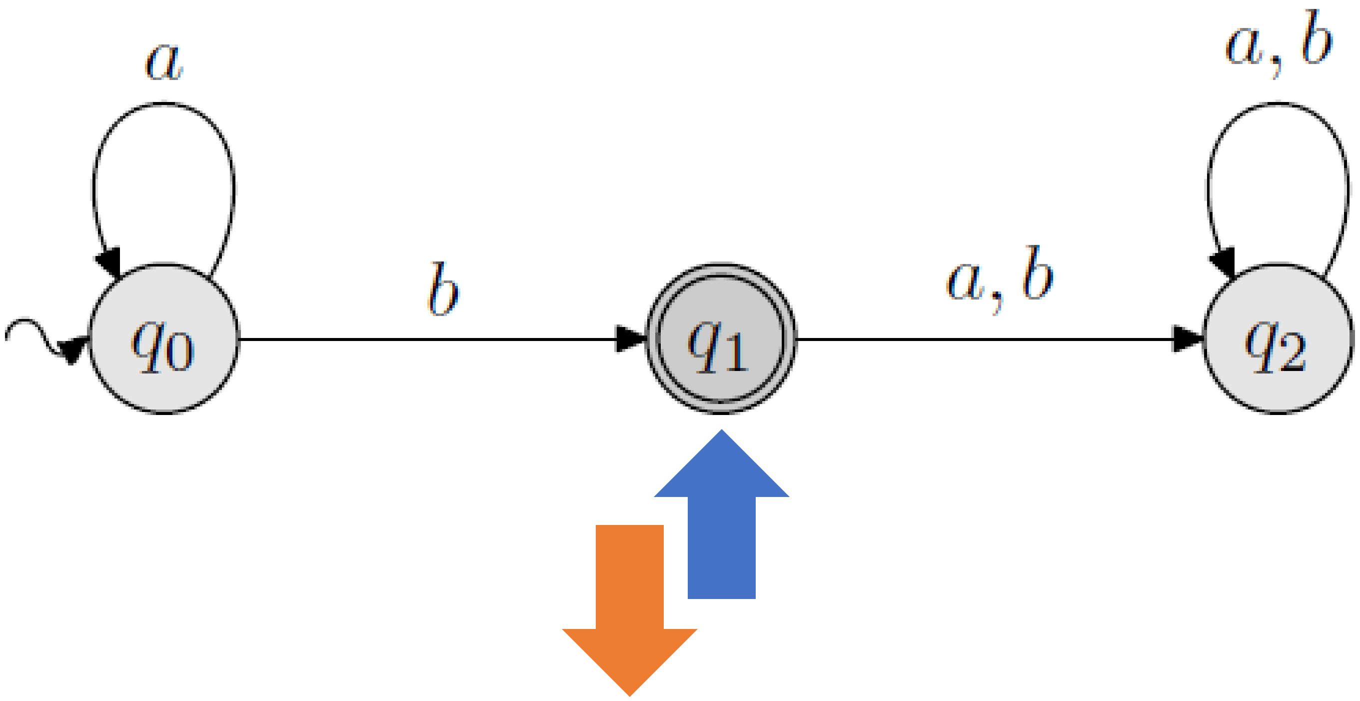
INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_0

Esempio di Computazione



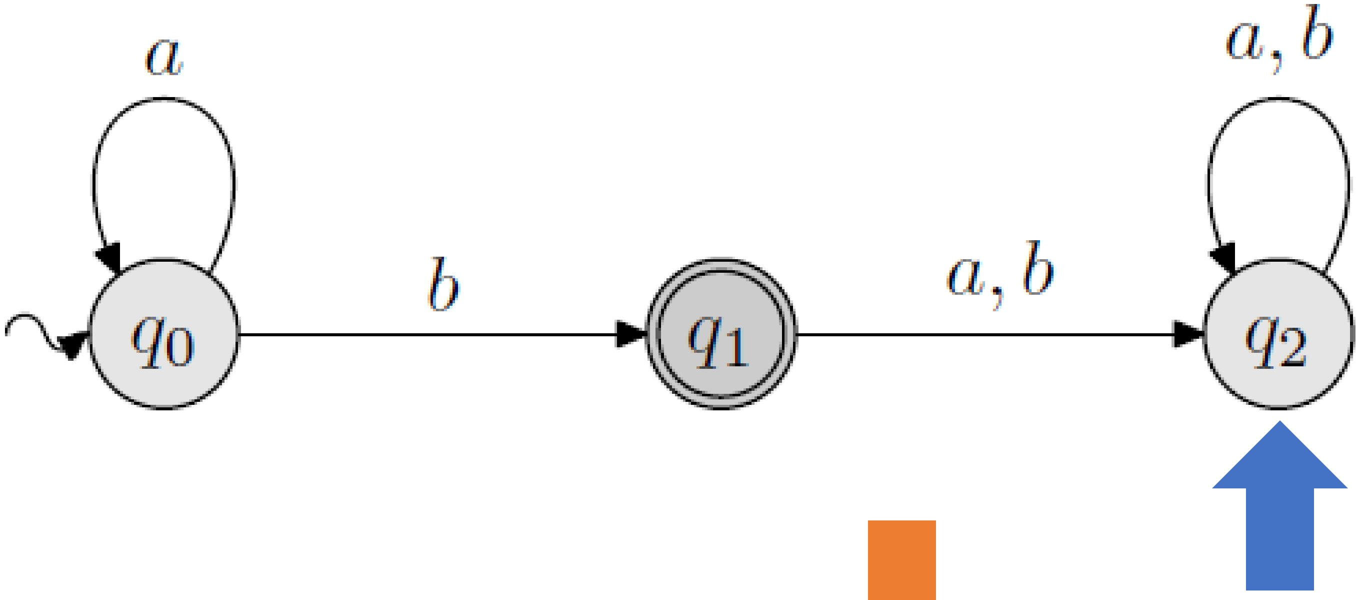
INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_1

Esempio di Computazione



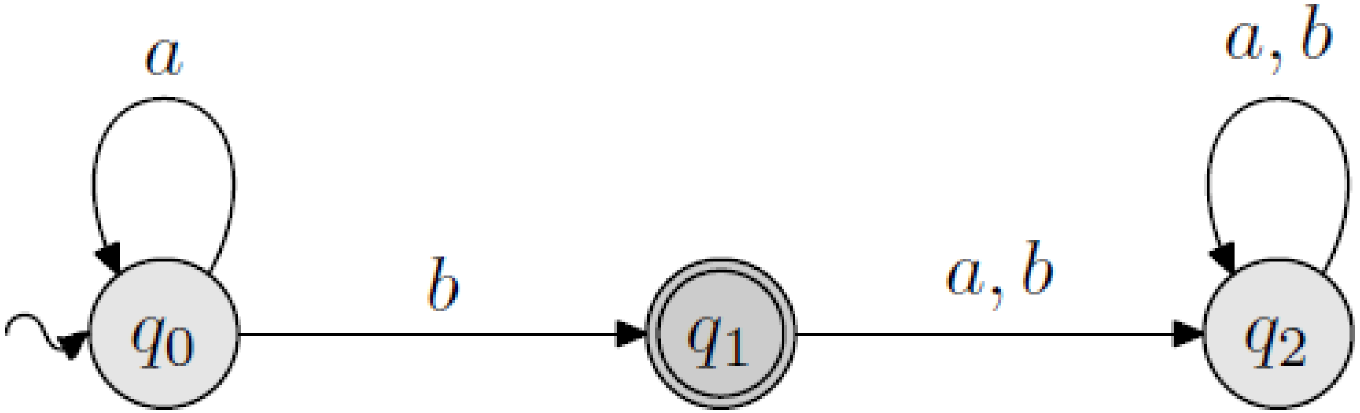
INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_2

Esempio di Computazione



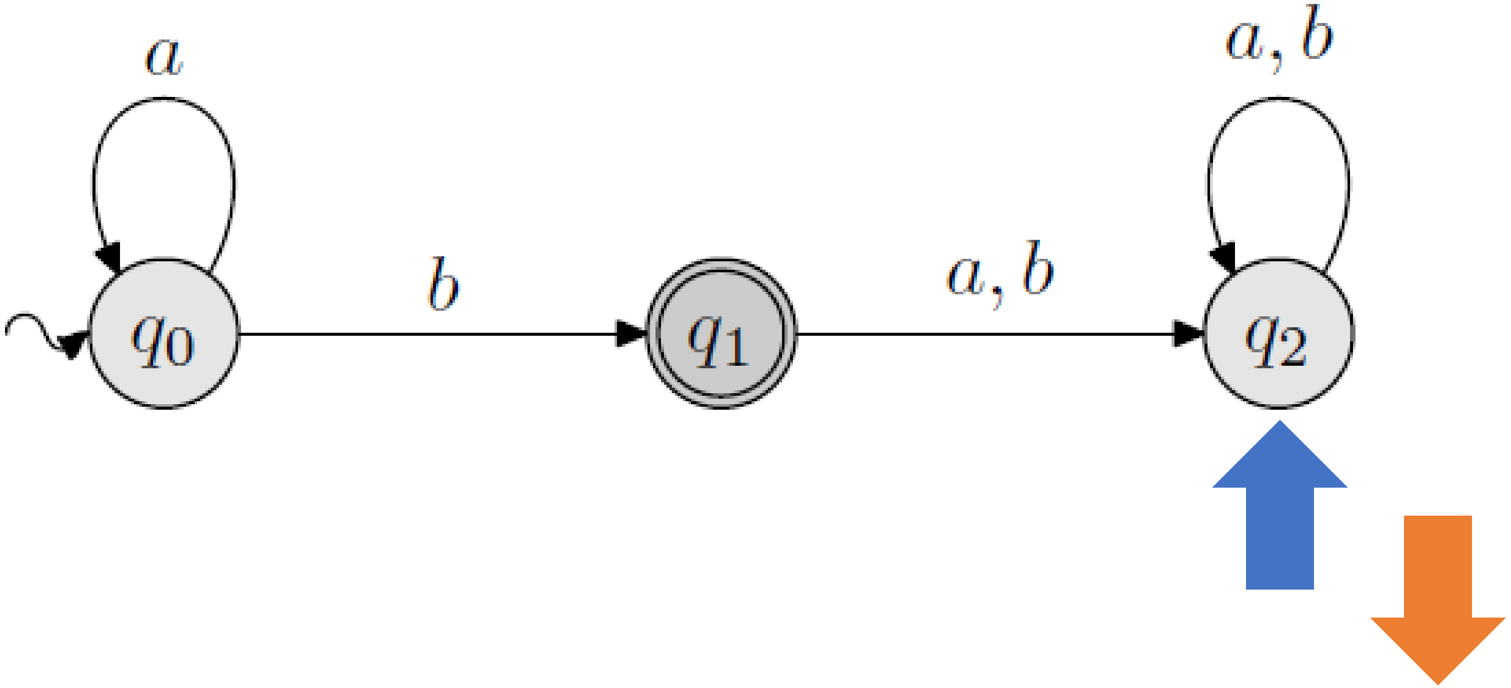
INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_2

Esempio di Computazione



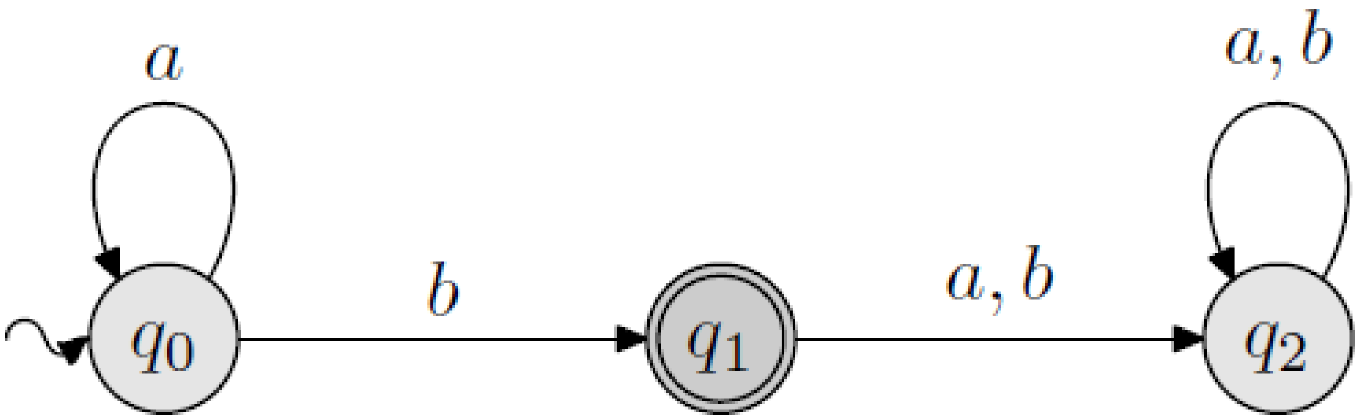
INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_1

Esempio di Computazione



INPUT

A	A	B	A	A	B

STATO CORRENTE

q_1

OUTPUT

0

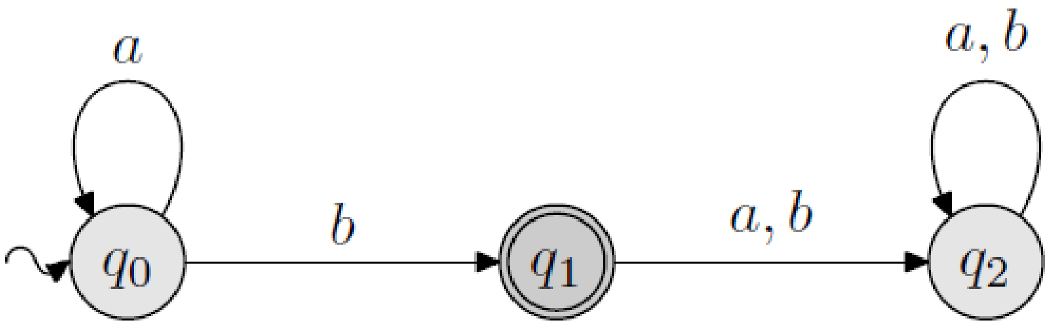
ASFD – Definizione Formale

- Un **automa a stati finiti deterministico** (**ASFD**) è una **quintupla** $< \Sigma, Q, \delta, I, F >$
  1. $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ è l'***alfabeto*** di input;
  2. Q è un insieme finito detto ***insieme degli stati*** ;
  3. $I \in Q$ è lo ***stato iniziale*** ;
  4. $F \subseteq Q$ è un ***insieme degli stati finali***;
  5. $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ è una funzione da $Q \times \Sigma$ in Q, chiamata ***funzione di transizione***

- **Intuitivamente**, le cinque componenti di un ASFD rappresentano
  1. L'insieme dei possibili simboli utilizzati nelle stringhe di input (***alfabeto*** $\boldsymbol{\Sigma}$)
  2. L'insieme dei possibili stati interni della macchina (***insieme degli stati*** $\mathbf{Q}$)
  3. Lo stato interno della macchina da cui parte la computazione (***stato iniziale*** $\boldsymbol{I}$)
  4. L'insieme degli stati in cui la macchina ritorna 1 (***insieme degli stati finali*** $\mathbf{F}$)
  5. La funzione che determina il passaggio di stato (***funzione di transizione*** $\boldsymbol{\delta}$)

ASFD – Esempio

- Consideriamo il **Diagramma degli Stati** visto in precedenza



- L'ASFD che rappresenta la macchina descritta dal diagramma è $< \Sigma, Q, \delta, I, F >$ t.c.
  1. $\Sigma = \{a, b\}$;
  2. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
  3. $I = \ q_0$;
  4. $F = \{q_1\}$;
  5. δ definita dalla tabella a destra →

Q	S	$\boldsymbol{\delta(Q,S)}$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_2
q_1	b	q_2
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2

Diagramma degli Stati e ASFD

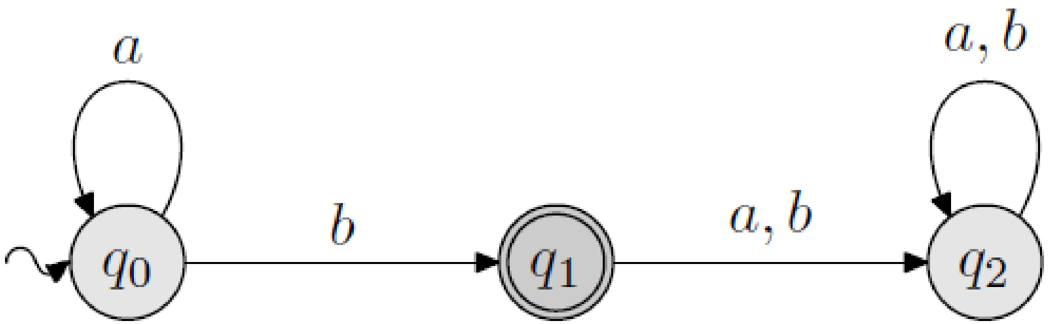
- Nel seguito, rappresenteremo spesso gli ASFD tramite il **diagramma degli stati**

- In questi casi, dato un diagramma G, ci riferiamo all'ASFD $A_G =< \Sigma, Q, \delta, I, F >$ tale che
  1. Σ è l'insieme delle etichette degli archi di G
  2. Q è l'insieme dei nodi di G
  3. I è il nodo contrassegnato dalla freccia nel diagramma
  4. F è l'insieme dei nodi contrassegnati dal doppio cerchio nel diagramma
  5. δ è la funzione tale che $\delta(q, s) = q'$ per ogni arco da q a q' con etichetta s in G

- **Nota**. La trasformazione che abbiamo definito è semi-formale
  – Per definire formalmente un ASFD non basta un diagramma degli stato ma serve la quintupla
  – Per noi spesso una definizione semi-formale sarà sufficiente

Da Diagramma degli Stati ad ASFD

- Consideriamo il **Diagramma degli Stati** G visto in precedenza



- L'ASFD $\mathrm{A_G} < \Sigma, Q, \delta, I, F >$ tale che
  1. $\Sigma = \{a, b\}$;
  2. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
  3. $I = q_0$;
  4. $F = \{q_1\}$;
  5. δ definita dalla tabella a destra →

Q	S	$\delta(Q, S)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_2
q_1	b	q_2
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2

Calcolare con un ASFD – Intuizione

- Fino ad ora, abbiamo definito solamente la **"sintassi" di un ASFD**
  - Insieme al comportamento intuitivo che vogliamo rappresentare

- Procediamo a **definire la semantica** di ogni quintupla che rappresenta un ASFD
  - Il comportamento formale di tali quintuple

- Per un ASFD $A =< \Sigma, Q, \delta, I, F >$, **l'intuizione rimane la stessa** discussa in precedenza

- Con Input $\mathcal{S} = "c_1 c_2 \dots c_k" \in \Sigma^*$, a partire da $Q = I$ e $\mathcal{C} = c_1$ A "esegue" i seguenti passi
  1. **Se** $\mathcal{C} = \epsilon$ **allora** la computazione termina
     - **Se** $\mathcal{Q} \in \boldsymbol{F}$ **ritorna 1 (stringa accettata)**
     - **Se** $\mathcal{Q} \notin \boldsymbol{F}$ **ritorna 0 (stringa rifiutata)**
  2. **Altrimenti**
     1. $\mathcal{Q} \coloneqq \boldsymbol{\delta}(\mathcal{Q}, \mathcal{C})$
     2. $\mathcal{C} \coloneqq$ prossimo carattere di $\mathcal{S}$ (se esiste) altrimenti$\mathcal{C} \coloneqq \epsilon$
  3. **Torna al passo 1**

Esecuzioni

- **Sia dato un ASFD** $A =< \Sigma, Q, \delta, I, F >$ e una stringa $S = "c_1 c_2 \dots c_n" \in \Sigma^*$ con $|S| = n$

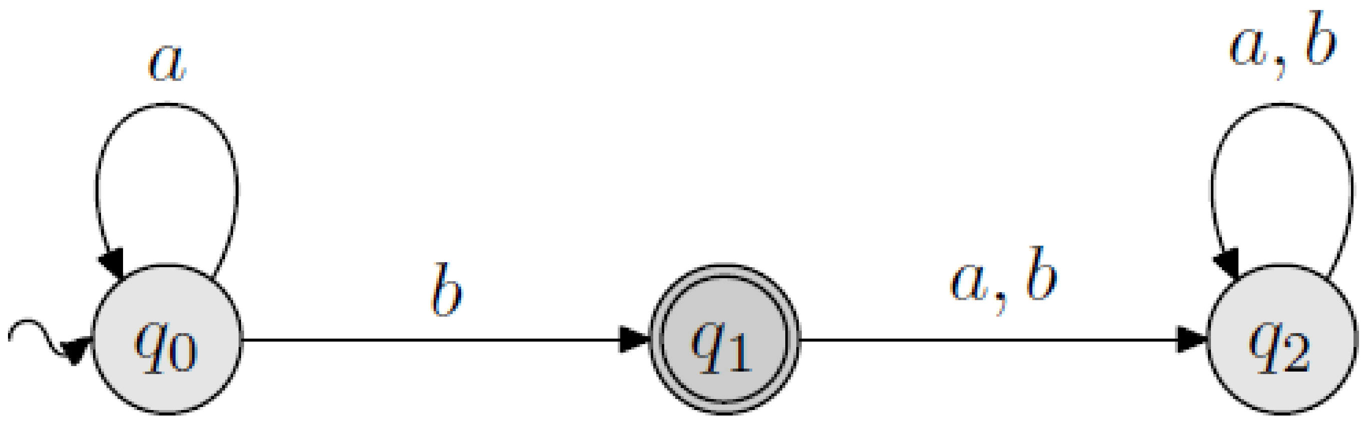
- **Definizione**. Una **esecuzione di $\boldsymbol{A}$ su S** è una sequenza $(q_1, \dots, q_{n+1}) \in Q^{n+1}$ di $n + 1$ elementi di Q t.c.
  - $\boldsymbol{q_1 = I}$ (**intuitivamente**, il primo stato è quello iniziale)
  - $\boldsymbol{\delta(q_i, c_i) = q_{i+1}}$ **per** $\boldsymbol{i = 1, \dots, n}$ (**intuitivamente**, ogni stato è generato dal precedente applicando δ al simbolo corrente)

- **Definizione**. Lo stato finale di una esecuzione $X = (q_0, \dots, q_n)$ **è l'ultimo stato della sequenza** q_n

- **Proposizione**. Data $s \in \Sigma^*$ (stringa sull'alfabeto di A), **esiste esattamente una** esecuzione A(S) di A su S.
- **Prova.** Per definizione, $(q_0, q_1, \dots, q_n) \in Q^{n+1}$ è una esecuzione di A su S se e solo se $q_1 = I; q_2 = \delta(q_0, c_0); q_3 = \delta(q_2, c_2); \dots; q_n = \delta(q_{n-1}, c_{n-1})$. Visto che $\boldsymbol{\delta}$ **è una funzione su** $\boldsymbol{Q \times \Sigma}$, per ogni coppia $q_i, c_i \in Q \times \Sigma$, esiste esattamente un valore $\delta(q_i, c_i)$.

- **Definizione**. L'esecuzione $A(S) = (q_0, \dots, q_n)$ è **accettante** se il suo stato finale q_n appartiene a F

Esempio di Esecuzione



L'ASFD $A_G < \Sigma, Q, \delta, I, F >$ tale che

1. $\Sigma = \{a, b\}$;
2. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
3. $I = q_0$;
4. $F = \{q_1\}$;
5. δ definito dalla tabella sottostante

Q	S	$\delta(Q, S)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_2
q_1	b	q_2
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2

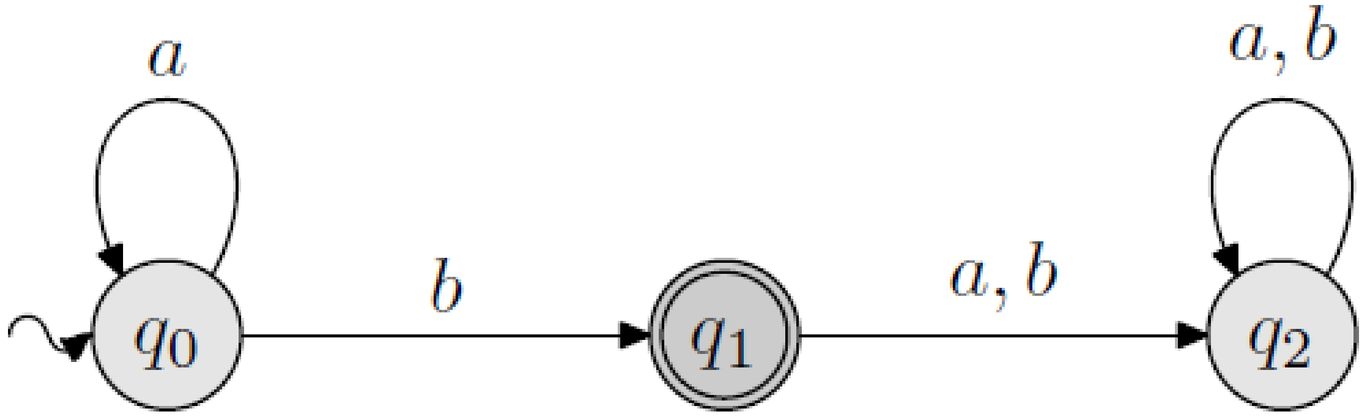
INPUT

A	A	A	A	A	B

ESECUZIONE ACCETTANTE

q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_0	q_1

Esempio di Esecuzione



L'ASFD $\mathrm{A_G} < \Sigma, Q, \delta, I, F >$ tale che

1. $\Sigma = \{a, b\}$;
2. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
3. $I = q_0$;
4. $F = \{q_1\}$;
5. δ definito dalla tabella sottostante

Q	S	$\delta(Q, S)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_2
q_1	b	q_2
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2

INPUT

A	A	B	A	A	B

ESECUZIONE NON ACCETTANTE

q_0	q_0	q_0	q_1	q_2	q_2	q_2

Linguaggio Riconosciuto da un ASFD

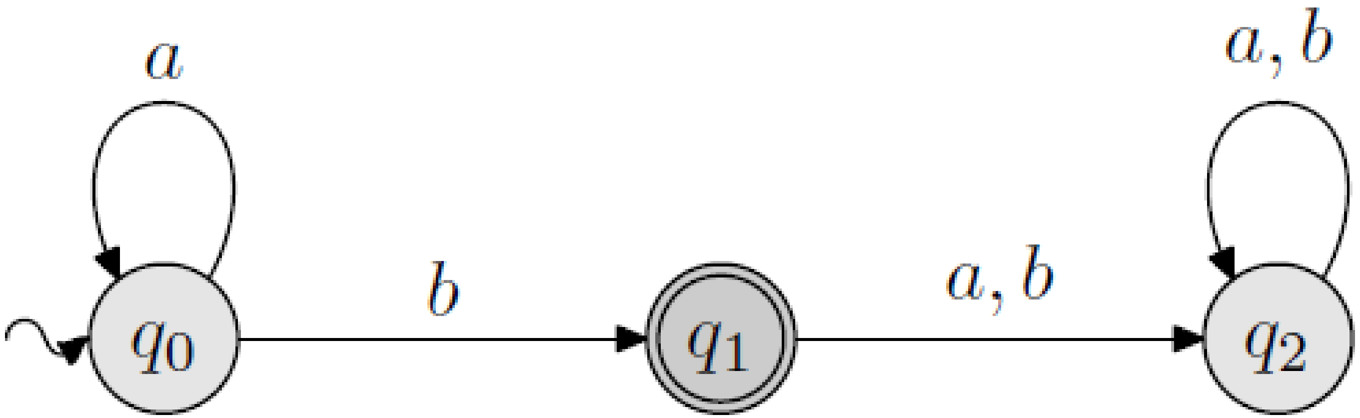
- **Definizione**. Dato un ASFD $A =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$ e una stringa $x \in \Sigma^*$
  - x è **accettata** da A se $A(x)$ è accettante
  - Altrimenti, x è **rifiutata**

- **Definizione**. Un **linguaggio** è un insieme di stringhe

- **Definizione**. Sia $A =< \Sigma, Q, \delta, q_0, F >$ un ASFD. **Il linguaggio riconosciuto da $\boldsymbol{A}$** è il linguaggio $L(A)$ sull'alfabeto Σ tale che $L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ è } accettata\ da\ A\}$

- **Definizione**. Un **linguaggio $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ è detto regolare** se esiste un **ASFD $\boldsymbol{A}$ tale che $\boldsymbol{L(A) = \mathcal{L}}$**
  - Un linguaggio è regolare se e solo se esiste un ASFD che lo riconosce

Linguaggio Riconosciuto da un ASFD – Esempio



L'ASFD $\mathrm{A_G} < \Sigma, Q, \delta, I, F >$ tale che

1. $\Sigma = \{a, b\}$;
2. $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
3. $I = q_0$;
4. $F = \{q_1\}$;
5. δ definito dalla tabella sottostante

Q	S	$\delta(Q,S)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_2
q_1	b	q_2
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2

Il linguaggio $L(A_G)$ riconosciuto da A_G è il seguente

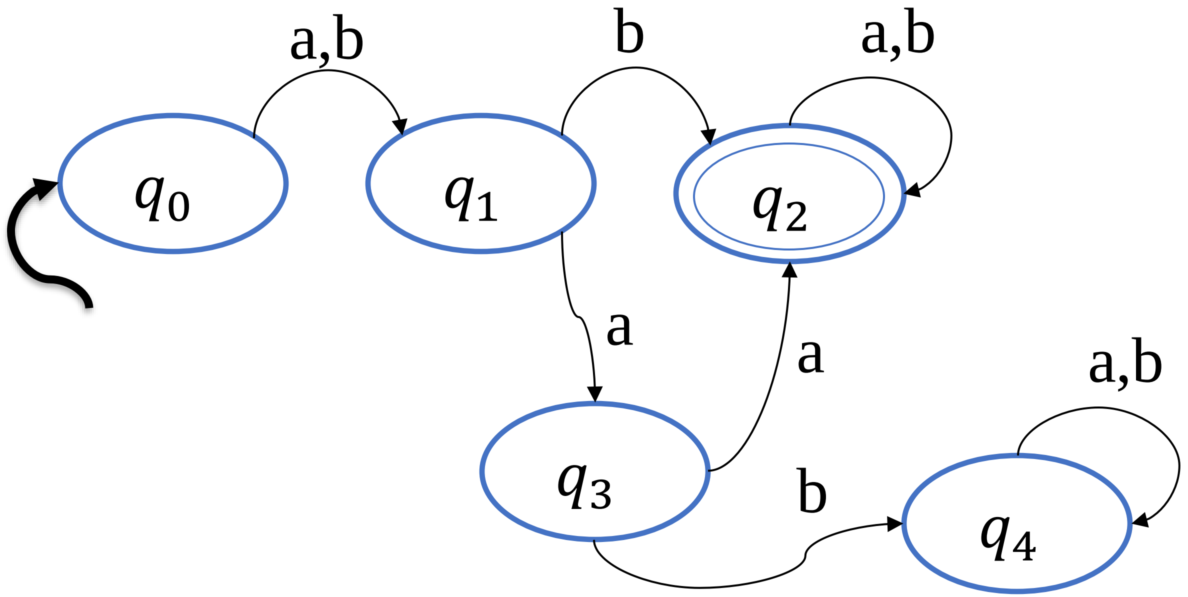
$$L(A_G) = \{a^n b \mid per\ n \geq 0\}$$

Esercizio 1

- Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui secondo simbolo è b **oppure** il terzo è a

Esercizio 1 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui secondo simbolo è b **oppure** il terzo è a



Esercizio 1 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui secondo simbolo è b **oppure** il terzo è a

Q	S	$\delta(Q, S)$
q_0	a	q_1
q_0	b	q_1
q_1	a	q_3
q_1	b	q_2
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2
q_3	a	q_2
q_3	b	q_4
q_4	a	q_4
q_4	b	q_4

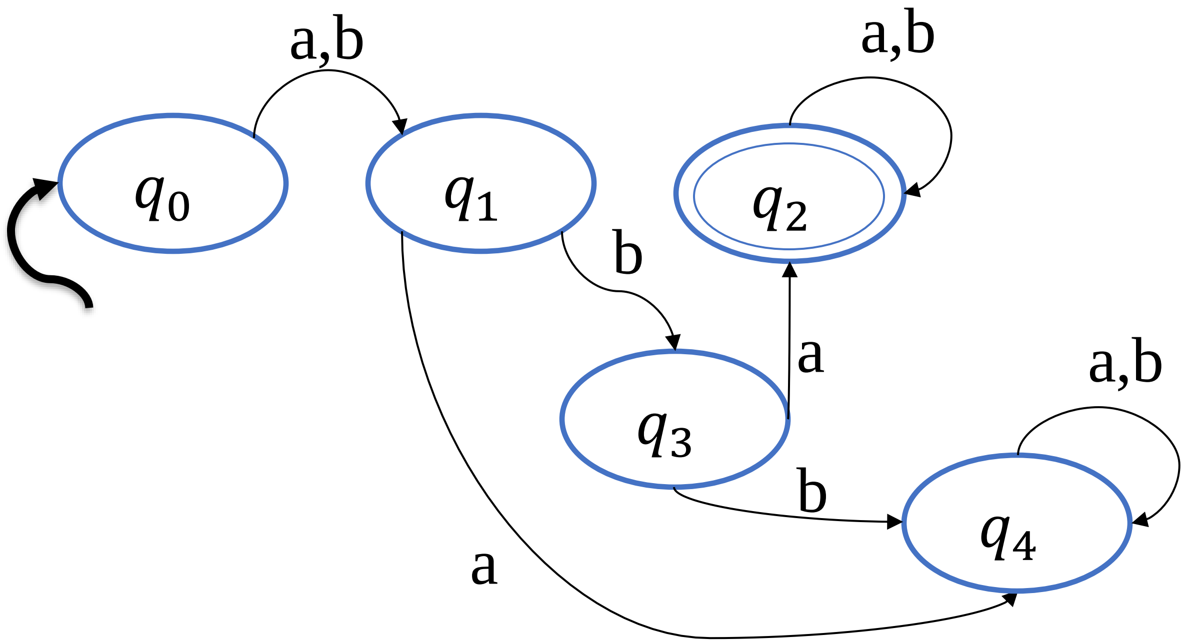
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_2\}$
- δ definito dalla tabella

Esercizio 2

- Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui secondo simbolo è b **e** il terzo simbolo è a

Esercizio 2 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui secondo simbolo è b **e** il terzo simbolo è a



Esercizio 2 – Soluzione

- Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui secondo simbolo è b **e** il terzo simbolo è a

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_2\}$
- δ definito dalla tabella

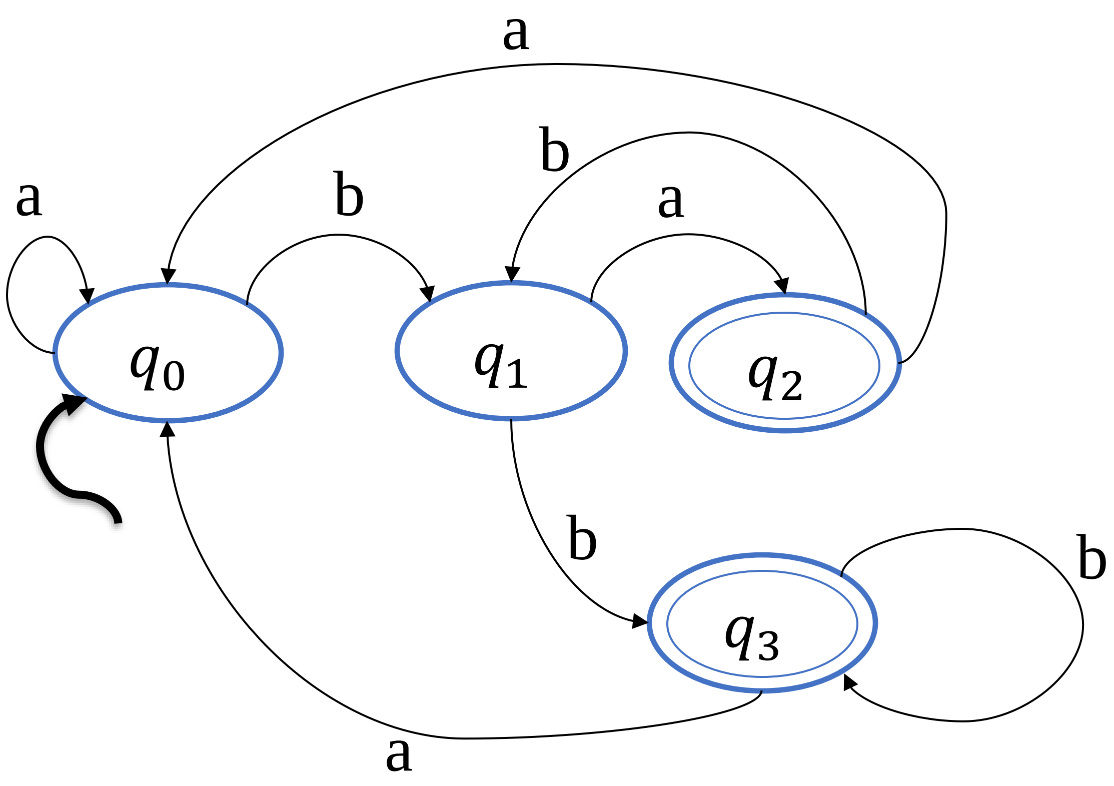
Q	S	$\delta(Q, S)$
q_0	a	q_1
q_0	b	q_1
q_1	b	q_3
q_1	a	q_4
q_2	a	q_2
q_2	b	q_2
q_3	a	q_2
q_3	b	q_4
q_4	a	q_4
q_4	b	q_4

Esercizio 3

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui penultimo carattere è b

Esercizio 3

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe il cui penultimo carattere è b



Esercizio 4

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe aventi un numero pari di a o un numero pari di b

Esercizio 4 – Soluzione

Definire un ASFD che riconosce il linguaggio su $\{a, b\}$ delle stringhe aventi un numero pari di a o un numero pari di b

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $I = q_0$
- $F = \{q_0, q_1\}$
- δ definito dalla tabella

δ	a	b
q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_3
q_2	q_3	q_0
q_3	q_2	q_1