Programmazione Matematica (A-L)

Ingegneria Informatica e Automatica - Sapienza Università di Roma

Dispense del corso: problemi e esercizi

Simone Sagratella

1 Soluzione di problemi lineari

1.1 Problemi di produzione

Problema 1. *Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti,* **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4**, *la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezionamento. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita.*

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
profitti netti	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che ogni settimana, il reparto produzione e il reparto confezionamento hanno una capacità lavorativa massima rispettivamente di 100 e 50 ore.

Problema 2. *Una azienda produce tre diversi modelli di smartphone: un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni smartphone viene lavorato da tre robot:* **A**, **B** *e* **C**. *I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente insieme al profitto netto realizzato per smartphone*

	Economico	**Normale**	**Lusso**
A	*20*	*30*	*62*
B	*31*	*42*	*51*
C	*16*	*81*	*10*
Profitto	*500*	*750*	*1100*

I robot **A** *e* **B** *sono disponibili per 800 ore mentre il robot* **C** *è disponibile per 500. Il numero di smartphone di lusso prodotti non deve superare il 20% del totale mentre il numero di smartphone economici deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Si devono produrre un numero di smartphone economici compreso tra 300 e 1000 unità, un numero di smartphone normali compreso tra 200 e 800 unità, un numero di smartphone di lusso compreso tra 0 e 700 unità. Tutti gli smartphone prodotti vengono venduti. Calcolare le quantità (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.*

Problema 3. *Si consideri la stessa azienda dell'esempio precedente con la sola differenza che, questa volta, i tre modelli di smartphone possono essere prodotti utilizzando uno qualsiasi dei tre robot senza richiedere quindi che per avere uno smartphone finito sia necessaria la lavorazione di tutti i tre robot. I nuovi tempi di lavorazione sono i seguenti*

	Economico	**Normale**	**Lusso**
A	*40*	*60*	*120*
B	*60*	*80*	*100*
C	*35*	*81*	*60*

Problema 4. *Un'industria manifatturiera possiede due impianti di produzione e fabbrica due tipi di prodotti frazionabili* $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *utilizzando due macchine utensili: una per la levigatura e una per la pulitura. Per avere un prodotto finito è necessaria l'utilizzazione di entrambe le macchine. Il primo impianto ha una disponibilità massima settimanale di 80 ore della macchina per la levigatura e di 60 ore della macchina per la pulitura. Le disponibilità massime orarie delle due macchine nel secondo impianto sono rispettivamente di 60 e 75 ore settimanali. La tabella che segue riporta, per ciascun prodotto, il numero di ore di lavorazione necessarie su ciascuna macchina per ottenere un prodotto finito (poiché le macchine possedute dal secondo impianto sono piú vecchie, i tempi di utilizzo sono maggiori)*

	Impianto 1		Impianto 2	
	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$
levigatura	*4*	*2*	*5*	*3*
pulitura	*2*	*5*	*5*	*6*

Inoltre ciascuna unità di prodotto utilizza 4 Kg di materiale grezzo. Il profitto netto ottenuto dalla vendita di una unità di prodotto $\mathbf{P_1}$ *e* $\mathbf{P_2}$ *è rispettivamente di 10 e 15.*

(a) *Massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti in ciascun impianto sapendo che settimanalmente l'industria dispone di 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto.*

(b) *Massimizzare il profitto complessivo ottenuto dalla vendita dei prodotti supponendo che l'industria non allochi a priori 75 Kg di materiale grezzo nel primo impianto e di 45 Kg di materiale grezzo nel secondo impianto, ma lasci al modello la decisione di come ripartire tra i due impianti 120 Kg complessivi disponibili di questo materiale grezzo.*

1.2 Problemi di miscelazione

Problema 5. *Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di 4 Euro e 6 Euro ogni ettogrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 25 grammi di zucchero, mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 50 grammi di zucchero e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, almeno 30 mg di sali minerali e almeno 75 grammi di zucchero. Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.*

Problema 6. *Una dieta prescrive che giornalmente devono essere assimilate quantità predeterminate di calorie, proteine e calcio, intese come fabbisogni minimi e massimi giornalieri, disponendo di cinque alimenti base (pane, latte, uova, carne, dolce). Tali fabbisogni sono di calorie comprese tra 1900 e 2300, almeno 130 g di proteine, almeno 700 mg di calcio. Dalle tabelle dietetiche si ricavano i seguenti contenuti di calorie (in kcal), proteine (in g), calcio (in mg) per ogni singola porzione di ciascun alimento, intendendo come porzione una quantità espressa in grammi e quindi frazionabile.*

	Pane	**Latte**	**Uova**	**Carne**	**Dolce**
calorie	*300*	*160*	*180*	*160*	*380*
proteine	*4*	*9*	*13*	*14*	*7*
calcio	*30*	*100*	*80*	*80*	*60*

I costi (in Euro) e il numero massimo di porzioni tollerate giornalmente sono i seguenti

	Pane	**Latte**	**Uova**	**Carne**	**Dolce**
costo	*1*	*3*	*4*	*8*	*3*
porz.	*5*	*4*	*4*	*4*	*3*

Determinare una dieta a costo minimo che soddisfi le prescrizioni richieste.

Problema 7. *Il prodotto finale di una fabbrica è ottenuto raffinando materie prime grezze e miscelandole insieme. Queste materie prime possono essere di due categorie: naturali e sintetizzate. In particolare, sono disponibili tre materie prime naturali (***N1***,* **N2***,* **N3***) e due materie prime sintetizzate (***S1***,* **S2***). Le materie prime naturali e quelle sintetizzate richiedono differenti linee di produzione. Ogni settimana è possibile raffinare non più di 500 quintali di materie prime naturali e non più di 300 quintali di materie prime sintetizzate. Si assume che non ci sia perdita di peso durante la raffinazione e che si possa trascurare il costo di raffinazione. Inoltre esiste una restrizione tecnologica sulla gradazione del prodotto finale: nell'unità di misura in cui questa gradazione è misurata, essa deve essere tra 2 e 7; si assume che tale gradazione nella miscela finale dipenda linearmente dalle singole gradazioni delle materie prime componenti. Nella tabella che segue è riportato il costo (in euro) per quintale e la gradazione delle materie prime grezze.*

	N1	**N2**	**N3**	**S1**	**S2**
costo	*300*	*190*	*250*	*200*	*230*
grad.	*6.0*	*1.9*	*8.5*	*5.0*	*3.5*

Il prodotto finale viene venduto a 350 euro per quintale. Determinare come va pianificata la produzione settimanale per massimizzare il profitto netto.

1.3 Problemi di trasporto

Problema 8. *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere* $\mathbf{M_1}$ *e* $\mathbf{M_2}$ *e di tre impianti di produzione* $\mathbf{P_1}$ $\mathbf{P_2}$ $\mathbf{P_3}$. *Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere* $\mathbf{M_1}$ *e* $\mathbf{M_2}$ *producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
80	*100*	*150*

Il costo (in euro) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione di una tonnellata di minerale è riportato nella seguente tabella

	$\mathbf{P_1}$	$\mathbf{P_2}$	$\mathbf{P_3}$
$\mathbf{M_1}$	*10*	*8*	*21*
$\mathbf{M_2}$	*12*	*20*	*14*

Calcolare le quantità di minerale da trasportare dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo e soddisfare le richieste giornaliere.

2 Esercizi di programmazione lineare

Per ognuno dei seguenti problemi di PL, calcolare graficamente tutte le soluzioni e il valore ottimo, inoltre verificare se i punti proposti sono vertici del poliedro.

1.

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \geqslant 0 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 2 \end{aligned}$$

$P1 = (0, 1)$, $P2 = (2, 0)$, $P3 = (0, 0)$

2.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 \\ & -x_1 + x_2 = 0 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_2 \leqslant 3 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$P1 = (0, 1)$, $P2 = (2, 2)$, $P3 = (0, 0)$

3.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leqslant 12 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

$P1 = (0, 0)$, $P2 = (3, 1)$, $P3 = (0, 1)$

4.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \leqslant 0 \\ & 2x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 1. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 - x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \geqslant -2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geqslant 12 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leqslant 6. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + x_2 \\ & -3x_1 + x_2 \leqslant 3 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 - x_2 \leqslant 1 \\ & -1 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ & -2 \leqslant x_2 \leqslant 3 \end{aligned}$$

$P1 = (-1, -2)$, $P2 = (3, 1)$, $P3 = (0, 3)$

7.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 0 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leqslant 0 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$P1 = (0, 1)$, $P2 = (0, 0)$, $P3 = (1, 1)$, $P4 = (2, 2)$

8.

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geqslant 0 \\ & 2x_1 - x_2 \leqslant 0 \\ & x_1 \leqslant 1 \\ & x_2 \geqslant 1 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
& -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\
& 2x_1 - 2x_2 \geqslant -2 \\
& -2x_1 - x_2 \leqslant 2 \\
& 2x_1 - x_2 \leqslant 2
\end{aligned}$$

$P1 = (0, 1)$, $P2 = (-1, 0)$, $P3 = (0, -2)$

10.

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 2x_2 \\
& -x_1 - 2x_2 \leqslant 0 \\
& -2x_1 + x_2 \leqslant 0 \\
& x_1 \geqslant 1 \\
& x_2 \geqslant -1
\end{aligned}$$

11. Dato il problema

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\
& x_1 + x_2 \geqslant -2 \\
& 4x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \\
& x_1 - x_2 \leqslant 2 \\
& x_2 \geqslant -2
\end{aligned}$$

$P1 = (0, -2)$, $P2 = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $P3 = (-6, -2)$

12.

$$\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\
& -2x_1 - x_2 \geqslant 0 \\
& 2x_1 - x_2 \leqslant 0 \\
& x_1 \leqslant -1 \\
& x_2 \leqslant 3
\end{aligned}$$

3 Soluzione di problemi lineari interi

Utilizzare variabili intere nei problemi di programmazione matematica permette di includere nei modelli diverse situazioni complesse.

Quantità indivisibili Se in un modello alcune variabili devono rappresentare quantità indivisibili, allora queste variabili devono essere considerate in $\mathbb{Z}$ piuttosto che in $\mathbb{R}$.

Scelte alternative Le variabili intere possono essere utilizzate per rappresentare scelte alternative. In questo caso si possono considerare p variabili binarie $x \in \{0,1\}^p$ che rappresentano p diverse scelte alternative da prendere. Si noti che $x \in \{0,1\}^p$ è equivalente a richiedere $x \in [0,1]^p$ e $x \in \mathbb{Z}^p$. Per ogni scelta alternativa $i \in \{1,\ldots,p\}$, si considera $x_i = 0$ se l'alternativa i non viene selezionata, mentre $x_i = 1$ se l'alternativa i viene selezionata. Alcuni vincoli specifici di queste variabili sono i seguenti.

- Quando il totale delle alternative selezionate deve essere compreso tra α e β, si aggiunge il vincolo

$$\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{p} x_i \leqslant \beta.$$

- Quando l'alternativa i si può selezionare solo se tutte le alternative $j \in J \subseteq \{1,\ldots,p\}\backslash\{i\}$ sono selezionate, si aggiunge il vincolo

$$|J|x_i \leqslant \sum_{j\in J} x_j.$$

  Per esempio, consideriamo $p = 5$ differenti scelte alternative. L'alternativa 1 si può selezionare solo se le alternative 2, 3 e 5 sono tutte selezionate. Il vincolo da aggiungere è: $3x_1 \leqslant x_2 + x_3 + x_5$.

Variabili indicatrici Una variabile indicatrice $y \in \{0,1\}$ si usa per controllare il segno di una variabile continua $q \in [0,u]$. La variabile y e la variabile q devono essere collegate tramite vincoli per ottenere diversi effetti.

- Aggiungere il vincolo $q \leqslant uy$ comporta che $q > 0$ implica $y = 1$, e $y = 0$ implica $q = 0$
- Aggiungere il vincolo $q \geqslant ly$ comporta che $q = 0$ implica $y = 0$, e $y = 1$ implica $q \geqslant l$.

Per esempio, le variabili indicatrici possono essere utilizzate per rappresentare i seguenti casi.

- Consideriamo p variabili continue $q \in [0,u]^p$. Quando al massimo β di queste variabili possono essere positive (le altre $p-\beta$ devono essere pari a 0), allora si possono introdurre le variabili indicatrici $y \in \{0,1\}^p$ e abbinarle alle q tramite i vincoli $q_i \leqslant u_i y_i$, con $i = 1,\ldots,p$, e infine aggiungere il vincolo che impone la condizione $\sum_{i=1}^{p} y_i \leqslant \beta$.

- Consideriamo p variabili continue $q \in [0, u]^p$. Quando almeno α di queste variabili devono essere almeno pari a un limite inferiore l (le altre $p - \alpha$ possono essere inferiori a l), allora si possono introdurre le variabili indicatrici $y \in \{0, 1\}^p$ e abbinarle alle q tramite i vincoli $q_i \geqslant l_i y_i$, con $i = 1, \ldots, p$, e infine aggiungere il vincolo che impone la condizione $\sum_{i=1}^{p} y_i \geqslant \alpha$.

Vincoli disgiuntivi Dati k vincoli di un modello, se al massimo $\alpha > 0$ di questi possono essere violati (non si sa quali), allora si dice che i vincoli sono disgiuntivi. Siano $g_j(x) \leqslant b_j$, con $j = 1, \ldots, k$, i vincoli che devono essere disgiuntivi. Si devono introdurre nel modello k variabili $z \in \{0, 1\}^k$ e modificare i vincoli nel seguente modo

$$g_j(x) \leqslant b_j + M_j z_j, \quad j = 1, \ldots, k,$$

dove ogni M_j è un numero abbastanza grande da fare in modo che la soglia $b_j + M_j$ renda il vincolo j ridondante. Infine si deve aggiungere il vincolo che limita la violazione dei vincoli originari

$$\sum_{j=1}^{k} z_j \leqslant \alpha.$$

Problema 9. *In una centrale elettrica sono a disposizione tre generatori e ogni giorno si deve decidere quali usare di giorno e quali di notte per assicurare una produzione di almeno 4000 megawatt di giorno e di almeno 2800 megawatt di notte. L'uso di un generatore comporta la presenza di personale tecnico che sorvegli il suo funzionamento; tale personale viene retribuito in maniera diversa tra il giorno e la notte e a seconda del tipo di generatore; tali costi di attivazione sono riportati nella tabella che segue (in euro) insieme al costo (in euro) per ogni megawatt prodotta e alla massima capacità di produzione in megawatt per ogni singolo periodo (giorno/notte).*

	Costo attivazione		**Costo per**	**Capacità**
	giorno	**notte**	**megawatt**	**max**
Generatore A	*750*	*1000*	*3*	*2000*
Generatore B	*600*	*900*	*5*	*1700*
Generatore C	*800*	*1100*	*6*	*2500*

Calcolare quanti megawatt devono essere prodotti in ogni generatore e in ogni periodo in modo da minimizzare i costi (fissi + variabili) e garantire la produzione minima richiesta.

Problema 10. *Una compagnia finanziaria necessita di ricoprire tre lavori* **LAV1**, **LAV2**, **LAV3**, *che richiedono differenti abilità ed esperienza. Sono disponibili cinque candidati* **C1**, **C2**, **C3**, **C4**, **C5**, *che possono essere assunti con il medesimo salario. A causa delle loro differenti capacità, il costo di assegnazione di ciascun candidato che la compagnia deve sostenere dipende dal tipo di lavoro al quale è assegnato. La stima di tale costo riferito a ciascun candidato se fosse assegnato a ciascuno dei tre lavori è riportato nella tabella seguente*

	LAV1	**LAV2**	**LAV3**
C1	*5*	*4*	*7*
C2	*7*	*6*	*6*
C3	*6*	*7*	*3*
C4	*5*	*5*	*5*
C5	*8*	*11*	*2*

Se un candidato è assegnato ad un lavoro, non ne può svolgere un altro. Per questioni contrattuali il candidato **C1** *può essere assunto solo se viene assunto anche il candidato* **C2**. *Inoltre non si possono assumere sia il candidato* **C4** *che il candidato* **C5**.

Calcolare quale candidato assumere per ogni lavoro in modo da minimizzare il costo complessivo che la compagnia deve sostenere.

4 Esercizi di programmazione non lineare

Per ognuno dei seguenti problemi di ottimizzazione, verificare se è convesso o strettamente convesso e calcolare tutte le soluzioni e il valore ottimo.

1. $$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \min\ & (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ & x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \min\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ & x_1 + 2x_2 \geqslant 2 \\ & 2x_1 + x_2 \geqslant 2 \end{aligned}$$

4. $$\min\ x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 - x_1 + x_2$$

5. $$\begin{aligned} \max\ & 5x_1 - x_2 \\ & x_1^2 - x_2 \leqslant 2 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} \max\ & x_2 \\ & x_1^2 + (x_2 + 1)^2 \leqslant 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leqslant 4 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} \min\ & 2x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 + x_2 \geqslant 1 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \max\ & 2(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ & x_1 \geqslant -1 \\ & x_2 \geqslant -1 \end{aligned}$$

9.

$$\min\ 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1$$

10.

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ & (x_1-2)^2 + x_2^2 \leqslant 4 \\ & (x_1+2)^2 + x_2^2 \geqslant 16 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ & (x_1-2)^2 + x_2^2 \leqslant 4 \\ & (x_1+2)^2 + x_2^2 \geqslant 16 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + 2x_2 \\ & 3x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4 \end{aligned}$$

5 Soluzione di problemi non lineari

Problema 11. *Un'industria deve costruire un silos di forma cilindrica per contenere grandi quantitativi di un liquido che verrà poi distribuito in piccole confezioni pronte per la vendita al minuto. Tale silos deve essere posto in un magazzino appoggiato su una delle basi del cilindro. Tale magazzino è a pianta quadrata di lato 8 metri ed ha un tetto spiovente lungo uno dei lati, che ha altezza massima di metri 4 e altezza minima di metri 1. Per costruire questo silos deve essere usato del materiale plastico sottile flessibile che può essere tagliato, modellato e incollato saldamente. Sapendo che si dispone di non più di 50 metri quadrati di tale materiale plastico, determinare le dimensioni del silos (raggio di base ed altezza) in modo da massimizzare la quantità di liquido che può esservi contenuto.*