Logica e Modelli Computazionali

Esercizi Macchine di Turing

Marco Console

Ingegneria Informatica e Automatica (Sapienza, Università di Roma)

Esecuzioni

- Sia $M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle$ una Macchina di Turing terminante con k nastri e x un input per M

- **Definizione**. Una **configurazione** C **genera** una **configurazione** D in M ($C \Rightarrow_M D$) se
  - $C = (\sigma y,\ q,\ x\tau)$, $D = (\sigma,\ q',\ yz\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \leftarrow)$ **e $\boldsymbol{\sigma \neq \epsilon}$** (**movimento a sinistra**)
  - $C = (\epsilon, q,\ x\tau)$, $D = (\epsilon,\ q',\ z\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \leftarrow)$ (**movimento a sinistra bloccato**)
  - $C = (\sigma,\ q,\ xy\tau)$, $D = (\sigma z, q', y\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \rightarrow)$ **e $\boldsymbol{\tau \neq \epsilon}$** (**movimento a destra**)
  - $C = (\sigma,\ q,\ \epsilon)$, $D = (\sigma z, q',\ \epsilon)$ e $\delta(q, \sqcup) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \rightarrow)$ (**movimento a destra oltre il nastro corrente**)
  - $C = (\sigma,\ q,\ x\tau)$, $D = (\sigma, q', z\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, -)$ (**nessun movimento**)

- **Definizione**. **L'esecuzione di M** con input x ($E_M(x)$) è la sequenza di configurazioni di M $C_1, C_2, \dots, C_n$ tale che
  - C_1 è la configurazione iniziale di M con input x
  - C_n è una configurazione **accettante\rifiutante**
  - $C_i \Rightarrow_M C_{i+1}$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$

Esercizio 1

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0{,}1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0{,}1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. Fornire un input accettato da M (se esiste)
2. Fornire un input rifiutato da M(se esiste)
3. Fornire un input ne accettato ne rifiutato da M(se esiste)
4. Definire l'esecuzione di M per l'input 0011001
5. Definire l'esecuzione di M per l'input 000010

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0,\sqcup)$	$(q_0,\sqcup,\rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1,\rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0,\rightarrow)$
$(a,\sqcup)$	$(q_{yes},\sqcup,-)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1,\rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0,-)$
$(b,\sqcup)$	$(q_{yes},\sqcup,-)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1,-)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0,\rightarrow)$

Esercizio 1

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. $(\epsilon, q_0, 0011001)$
2. $(11, q_0, 11001)$
3. $(110, b, 1001)$
4. $(1100, q_0, 001)$
5. $(11001, a, 01)$
6. $(110011, q_0, 1)$
7. $(1100110, b, \epsilon)$
8. $(1100110, q_{yes}, \epsilon)$

$(q,x)\backslash$	$\delta(q,x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0, -)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1, -)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$

Esercizio 1

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. $(\epsilon, q_0, 000010)$
2. $(1, a, 00010)$
3. $(11, q_0, 0010)$
4. $(111, a, 010)$
5. $(1111, q_0, 10)$
6. $(11110, b, 0)$
7. $(11110, q_{no}, 1)$

$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})\backslash$	$\boldsymbol{\delta(q, x)}$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0, -)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1, -)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$

Esercizio 1

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. Fornire un input accettato da M (se esiste)
2. Fornire un input rifiutato da M(se esiste)
3. Fornire un input ne accettato ne rifiutato da M(se esiste)
4. Definire l'esecuzione di M per l'input 0011001
5. Definire l'esecuzione di M per l'input 000010

$(q, x)\backslash$	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0, -)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1, -)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$

Esercizio 1 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. Fornire un input accettato da M (se esiste)
   - 0011001
2. Fornire un input rifiutato da M(se esiste)
   - 000010
3. Fornire un input ne accettato ne rifiutato da M(se esiste)
   - ϵ

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0, -)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1, -)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$

Esercizio 1 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. Definire l'esecuzione di M per l'input 0011001
   1. $(q_0, \epsilon, 0011001)$
   2. $(a, 1, 011001)$
   3. $(q_0, 11, 11001)$
   4. $(b, 110, 1001)$
   5. $(q_0, 1100, 001)$
   6. $(a, 11001, 01)$
   7. $(q_0, 110011, 1)$
   8. $(b, 1100110, \epsilon)$
   9. $(q_{yes}, 1100110, \epsilon)$

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0, -)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1, -)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$

Esercizio 1 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. Definire l'esecuzione di M per l'input 000010
   1. $(q_0, \epsilon, 000010)$
   2. $(a, 1{,}00010)$
   3. $(q_0, 11{,}0010)$
   4. $(a, 111, 010)$
   5. $(q_0, 1111, 10)$
   6. $(b, 11110, 0)$
   7. $(q_{no}, 11110, 1)$

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$
$(q_0, 0)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 1, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(q_{no}, 0, -)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(q_{no}, 1, -)$
$(b, 1)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$

Esercizio 2

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b\}$

1. Fornire un input accettato da M (se esiste)
2. Fornire un input rifiutato da M(se esiste)
3. Fornire un input ne accettato ne rifiutato da M(se esiste)
4. Definire l'esecuzione di M per l'input 101010
5. Definire l'esecuzione di M per l'input 100

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(q_0, 0)$	$(a, 0, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 1, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(b, 1)$	$(c, 1, \rightarrow)$
$(c, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(c, 0)$	$(q_0, 0, -)$
$(c, 1)$	$(b, 1, \leftarrow)$

Esercizio 2 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b, c\}$

1. Fornire un input accettato da M (se esiste)
   - 101010
2. Fornire un input rifiutato da M(se esiste)
   - 100
3. Fornire un input ne accettato ne rifiutato da M(se esiste)
   - 1011

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(q_0, 0)$	$(a, 0, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 1, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(b, 1)$	$(c, 1, \rightarrow)$
$(c, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(c, 0)$	$(q_0, 0, -)$
$(c, 1)$	$(b, 1, \leftarrow)$

Esercizio 2 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b, c\}$
- Definire l'esecuzione di M per l'input 101010

1. $(q_0, \epsilon, 101010)$
2. $(b, 1{,}01010)$
3. $(b, 10{,}1010)$
4. $(c, 101, 010)$
5. $(q_0, 101, 010)$
6. $(a, 1010, 10)$
7. $(a, 10101, 0)$
8. $(q_0, 101010, \epsilon)$
9. $\left(q_{yes}, 101010, \epsilon\right)$

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(q_0, 0)$	$(a, 0, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 1, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(b, 1)$	$(c, 1, \rightarrow)$
$(c, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(c, 0)$	$(q_0, 0, -)$
$(c, 1)$	$(b, 1, \leftarrow)$

Esercizio 2 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b, c\}$
- Definire l'esecuzione di M per l'input 100

1. $(q_0, \epsilon, 100)$
2. $(b, 1,00)$
3. $(b, 10,0)$
4. $(b, 100, \epsilon)$
5. $(q_{no}, 100, \epsilon)$

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(q_0, 0)$	$(a, 0, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 1, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(b, 1)$	$(c, 1, \rightarrow)$
$(c, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(c, 0)$	$(q_0, 0, -)$
$(c, 1)$	$(b, 1, \leftarrow)$

Esercizio 2 – Soluzione

- Consideriamo la seguente MdT a 1 nastro
- $\boldsymbol{M = \langle \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} \rangle}$
- $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{\sqcup, 0,1\}, Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}, a, b, c\}$
- Con input 1011 la macchina non termina l'esecuzione

1. $(q_0, \epsilon, 1011)$
2. $(b, 1,011)$
3. $(b, 10,11)$
4. $(c, 101, 1)$
5. $(b, 10, 11)$
6. $(c, 101, 1)$
7. $(b, 10, 11)$
8. $(c, 101, 1)$
9. …

(q, x)	$\delta(q, x)$
$(q_0, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(q_0, 0)$	$(a, 0, \rightarrow)$
$(q_0, 1)$	$(b, 1, \rightarrow)$
$(a, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(a, 0)$	$(q_0, 0, \rightarrow)$
$(a, 1)$	$(a, 1, \rightarrow)$
$(b, \sqcup)$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
$(b, 0)$	$(b, 0, \rightarrow)$
$(b, 1)$	$(c, 1, \rightarrow)$
$(c, \sqcup)$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
$(c, 0)$	$(q_0, 0, -)$
$(c, 1)$	$(b, 1, \leftarrow)$

Indecidibilità per il Teorema di Rice – Esercizio

- **Definizione**. Sia $\mathrm{F}_0 : \mathbb{M} \to \{0,1\}$ la funzione tale che $\mathrm{F}_0(m) = 1$ se m è l'Encoding di una Macchina di Turing con alfabeto di input $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ che accetta la stringa $\sigma = aaabbbaaa$

- Dimostrare (utilizzando il teorema di Rice) che F_0 non è decidibile

Indecidibilità per il Teorema di Rice – Esercizio

- **Definizione**. Sia $\mathrm{F}_0 : \mathbb{M} \to \{0,1\}$ la funzione tale che $\mathrm{F}_0(m) = 1$ se m è l'Encoding di una Macchina di Turing con alfabeto di input $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ che accetta la stringa $\sigma = aaabbbaaa$

- Dimostrare (utilizzando il teorema di Rice) che F_0 non è decidibile

- **Dimostrazione**. Sia $\mathcal{P}$ la famiglia dei linguaggi su Σ che contentono σ. Osserviamo quanto segue:
  - $\mathcal{P}$ non è vuoto (esiste sempre un linguaggio su Σ che contiene σ)
  - $\mathcal{P}$ non coincide con $P(\Sigma^*)$ (esiste un linguaggio su Σ che non contiene σ)
  - Concludiamo che **$\mathcal{P}$ non è una proprietà triviale dei linguaggi di Σ**
- Applicando il Teorema di Rice, concludiamo che il seguente linguaggio non è Turing Decidibile

$$B_{\mathcal{P}} = \{\, m \mid m \text{ è } l'encoding\ di\ una\ MT\ che\ riconosce\ un\ linguaggio\ che\ contiene\ \sigma \,\}$$

- Ne consegue che il problema decisionale associato a F_0 è indecidibile

Indecidibilità per il Teorema di Rice – Esercizio

- **Definizione**. Sia $e : \mathbb{G} \rightarrow G$ un encoding dei grafi finiti come matrici di incidenza sull'alfabeto Σ
- **Definizione**. Sia $\mathrm{F}_1 : \mathbb{M} \rightarrow \{0,1\}$ la funzione tale che $\mathrm{F}_1(m) = 1$ se m è l'Encoding di una Macchina di Turing con alfabeto di input Σ che accetta un input x se $x = e(g)$ e g è un grafo connesso
- Dimostrare (utilizzando il teorema di Rice) che F_1 non è decidibile

Indecidibilità per il Teorema di Rice – Esercizio

- **Dimostrazione**. Sia $\mathcal{P}$ la famiglia dei linguaggi su Σ che consiste di un solo insieme C definito come segue

$$C = \{s \in \Sigma^* \mid e(g) = s \text{ e } g \text{ è } un\ grafo\ connesso\}$$

  - $\mathcal{P}$ non è vuoto (esiste un grafo connesso e quindi il suo encoding)
  - $\mathcal{P}$ non coincide con $P(\Sigma^*)$ (esiste una stringa s' tale che non esiste un grafo connesso g per cui $e(g) = s'$)
  - Concludiamo che **$\mathcal{P}$ non è una proprietà triviale dei linguaggi di Σ**

- Applicando il Teorema di Rice, concludiamo che il seguente linguaggio non è Turing Decidibile

$$B_{\mathcal{P}} = \{\, m \mid m \text{ è } l'encoding\ di\ una\ MT\ che\ riconosce\ C \,\}$$

- Ne consegue che il problema decisionale associato a F_1 è indecidibile

Indecidibilità per il Teorema di Rice – Esercizio

- **Definizione**. Sia $e : \mathbb{F} \to F$ un encoding delle formule proposizionali con variabile $V = \{v_1, v_2, \ldots\}$ con $|V| = \infty$ sull'alfabeto Σ
- **Definizione**. Sia $\mathrm{F}_2 \colon \mathbb{M} \to \{0,1\}$ la funzione tale che $\mathrm{F}_2(m) = 1$ se m è l'Encoding di una Macchina di Turing con alfabeto di input Σ che accetta un input x se $x = e(g)$ e g è una formula proposizionale soddisfacibile
- Dimostrare (utilizzando il teorema di Rice) che F_2 non è decidibile

Indecidibilità per il Teorema di Rice – Esercizio

- **Dimostrazione**. Sia $\mathcal{P}$ la famiglia dei linguaggi su Σ che consiste di un solo insieme C definito come segue

$$S = \{s \in \Sigma^* \mid e(f) = s \text{ e } f \text{ è } una\ formula\ proposizionale\ soddisfacibile\}$$

  – $\mathcal{P}$ non è vuoto (esiste una formula proposizionale soddisfacibile)
  – $\mathcal{P}$ non coincide con $P(\Sigma^*)$ (esiste una formula proposizionale insoddisfacibile)
  – Concludiamo che **$\mathcal{P}$ non è una proprietà triviale dei linguaggi di Σ**

- Applicando il Teorema di Rice, concludiamo che il seguente linguaggio non è Turing Decidibile

$$B_{\mathcal{P}} = \{\, m \mid m \text{ è } l'encoding\ di\ una\ MT\ che\ riconosce\ S \,\}$$

- Ne consegue che il problema decisionale associato a F_2 è indecidibile