Logica e Modelli Computazionali

Macchine di Turing

Marco Console

Ingegneria Informatica e Automatica (Sapienza, Università di Roma)

Oltre i Linguaggi Non-Contestuali

- Fino ad ora abbiamo visto **due diversi** modelli computazionali
  - **Automi a stati finiti** (D, ND, ϵ). L'unica memoria che posseggono è lo stato interno
  - **Automi a Pila**. Posseggono memoria illimitata ma gestita come una Pila (LIFO Queue)

- Abbiamo visto che entrambi i modelli hanno delle **limitazioni molto stringenti**
  - Possiamo provare un **Pumping Lemma** (**distinto**) per entrambi i modelli
  - Il linguaggio $\mathcal{L}_1 = \{a^m b^m \mid m \geq 1\}$ non è regolare (non possiamo riconoscerlo ϵ-ASFND)
  - Il linguaggio $\mathcal{L}_2 = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 1\}$ non è Non-Contestuale (non sappiamo riconoscerlo!)

- Possiamo **aumentare il potere computazionale** delle nostre macchine **rendendo più libero** l'accesso alla memoria durante la computazione
  - Il linguaggio$\mathcal{L}_2$ può essere riconosciuto semplicemente "contando" le occorrenze dei tre simboli
  - Per farlo dobbiamo però tenere traccia del numero di simboli incontrati **senza dimenticarlo**

Macchine di Turing – Intuizione

- Per costruire un modello matematico con accesso alla memoria privo di restrizioni ci viene in aiuto un modello computazionale inventato negli anni 1920 dal matematico britannico Alan Turing

- Le definizioni della **Macchina di Turing** sono molte (e tutte equivalenti a meno di parametri) ma si basano tutte sull'idea di fornire ad un **Automa a Stati Finiti** le seguenti caratteristiche aggiuntive
  - La macchina ha **un insieme finito di stati interni** tra cui si muove (come gli ASFD)
  - La macchina ha accesso a una **memoria illimitata** (come gli automi a pila)
  - L'**input non è consumato** durante la computazione ma **risiede nella memoria interna**
  - La **memoria è un nastro illimitato** (**stringa infinita**) le cui **celle** (**caratteri**) possono essere **letti** e\o **scritti**
  - La macchina può **terminare la sua computazione in qualunque momento** senza consumare tutto l'input

- In termini di **linguaggi riconosciuti**, tale modello computazionale è il più potente che conosciamo
  - In termini di linguaggi riconosciuti, congetturiamo che **non sia possibile trovare di meglio** ☺
  - "*It is amazing how little we need to have everything.*" (Christos H. Papadimitriou – **Computational Complexity**)

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

a	**a**	**b**	**b**	**c**	**c**	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
   1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
   2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
      1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
   3. Scorri il nastro fino al prossimo c
      1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
   4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

NASTRO

a	a	b	b	c	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	b	b	c	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
   1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
   2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
      1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
   3. Scorri il nastro fino al prossimo c
      1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
   4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NAST

↓	a	b	b	c	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $\boldsymbol{L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	**a**	**b**	**b**	**c**	**c**	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell’input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	#	b	c	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	#	b	c	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	#	b	c	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	#	b	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NAST

↓	a	#	b	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NAST

↓	↓	#	b	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	b	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	b	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	c	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	…

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

NAST

$\downarrow$	$\downarrow$	#	#	#	#	$\sqcup$	$\sqcup$	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora** **passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota)** **Allora** **accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora** **rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora** **rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x =\sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
   1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
   2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
      1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
   3. Scorri il nastro fino al prossimo c
      1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
   4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	…

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

Accetta la stringa corrente

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell’input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

NASTRO

a	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora** **passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota)** **Allora** **accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora** **rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora** **rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

a	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell’input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
   1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
   2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
      1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
   3. Scorri il nastro fino al prossimo c
      1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
   4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora** **passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota)** **Allora** **accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora** **rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora** **rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NAST

↓	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = ⊔$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, ⊔\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

↓	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
   1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
   2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
      1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
   3. Scorri il nastro fino al prossimo c
      1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
   4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

NASTRO

Rifiuta la stringa corrente

↓	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

Macchina di Turing – Definizione Formale

Definizione. Una **macchina di Turing** M è una 7-upla $M = < \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ tale che:

- Σ è un insieme finito di simboli detto, **insieme dei simboli di input** che **non include** il **simbolo blank** $\sqcup$
- Γ con $\Sigma \subseteq \Gamma$ è un insieme finito di simboli detto, **insieme dei simboli del nastro**, che **include** il **simbolo blank** $\sqcup$
- Q è un insieme finito e non vuoto di **stati** tale che
  - $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**
  - $q_{yes} \in Q$ è lo **stato accettante**
  - $q_{no} \in Q$ con $q_{yes} \neq q_{no}$ è lo **stato rifiutante**
  - $Q' = Q \setminus \{q_{yes}, q_{no}\}$ (Q' non contiene q_{yes} e q_{no})
- δ è la **funzione di transizione**; ovvero, una funzione totale definita come segue

$$\delta : Q' \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$$

Macchina di Turing – Definizione Informale

- **Intuizione 1**. La definizione che abbiamo dato cerca di catturare il comportamento della macchina che abbiamo descritto fino ad ora
  - La macchina ha diversi **stati interni** e **inizia la computazione** dallo **stato iniziale**
  - Lo **stato accettante** **termina la computazione** della macchina e **accetta l’input**
  - Lo **stato rifiutante** **termina la computazione** della macchina e **rifiuta l’input**
  - La macchina può manipolare i simboli della **memoria interna** e quelli **dell’input**

Macchina di Turing – Definizione Informale

- **Intuizione 2**. Il prossimo passo di una Macchina di Turing è determinato dallo stato interno corrente, dal contenuto del nastro e dalla posizione della testina nel nastro
  - Da queste informazioni possiamo definire la sequenza eseguiti dalla macchina (**computazione**)

  - La **funzione di transizione** è definita per ogni coppia ogni coppia $(q, \sigma) \in Q \times \Sigma$ che rappresenta lo **stato interno della macchina** e il **simbolo correntemente letto dalla testina** sul nastro e restituisce una terna $(q', \sigma', t) \in Q \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\}$ **dove**
    - q' è il **prossimo stato** interno della macchina (chiaramente non è necessario che $q' \neq q$)
    - σ' è il **simbolo che sovrascrive quello corrente** (chiaramente non è necessario che $\sigma' \neq \sigma$)
    - t è lo **spostamento della testina** lungo il nastro
      - $\leftarrow$, spostamento a sinistra (torna indietro di una cella)
      - $\rightarrow$, spostamento a destra (vai avanti di una cella)
      - $-$, nessuno spostamento (rimani alla cella corrente)

Macchina di Turing – Esempio

- Definiamo la macchina di Turing $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ come segue
  - $\Sigma = \{a, b\}$ Simboli di input
  - $\Gamma = \Sigma \cup \{\#, \sqcup\}$ Simboli del nastro
  - $Q = \{q_0, q_1, q_{yes}, q_{no}\}$ Insieme degli stati

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_1, b, \rightarrow)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, -)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	a	$(q_{no}, a, -)$
q_1	b	$(q_1, b, \rightarrow)$
q_1	$\#$	$(q_{no}, \#, -)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$

Macchina di Turing – Configurazioni

- Sia $M = <\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no}>$ una **macchina di Turing**

- **Definizione**. Una **configurazione** di *M* è una 3-upla $C = (\sigma, \mathrm{q}, \tau)$ tale che:
  - σ è una **stringa sull'alfabeto** Γ (nastro a sinistra della testina)
  - $\tau = a\tau'$ è una **stringa sull'alfabeto** Γ (nastro a destra della testina e a è il simbolo corrente)
  - $q \in Q$ è uno **stato** di M (stato corrente della configurazione)

- **Definizione**. Una **configurazione** $C = (\sigma, \mathrm{q}, \tau)$ di *M* è detta:
  - **Accettante** (**finale**) se $q = q_{yes}$
  - **Rifiutante** (**finale**) se $q = q_{no}$
  - **Iniziale** se se $q = q_0$, $\sigma = \epsilon$ (stringa vuota) e $\tau \in \Sigma^*$ (τ è una stringa **dell'alfabeto dell'input**)

Macchina di Turing – Configurazioni

- **Esempio**. Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\#, \sqcup\}, Q = \{q_0, q_1, q_{yes}, q_{no}\}$
  - La macchina definita in precedenza

  - (ϵ, q_0, aa) è una configurazione **Iniziale** di M
  - $(abab, q_{yes}, abb \sqcup)$ è una configurazione **Accettante** di M
  - $(ab, q_{no}, ab \sqcup b)$ è una configurazione **Rifiutante** di M
  - (ϵ, q_1, aa) è una configurazione di M (non iniziale, non finale)
  - $(\epsilon, q_0, aa\#)$ è una configurazione di M (non è iniziale perché $\# \notin \Sigma$)

Macchina di Turing – Esecuzioni

- **Intuizione**. Vogliamo formalizzare l'idea di **una macchina che si sposta attraverso le sue configurazioni** seguendo le regole dettate dalla sua funzione di transizione

- Sia $M = <\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no}>$ una **macchina di Turing**
- Siano $x, y, z \in \Gamma$ **(simboli di nastro)**
- Siano $\sigma, \tau \in \Gamma^*$ **(stringhe di simboli di nastro)**
- Siano $q, q' \in Q$

- **Definizione**. Una **configurazione** C **genera** una **configurazione** D in M ($C \Rightarrow_M D$) se
  - $C = (\sigma y,\ q,\ x\tau)$, $D = (\sigma,\ q',\ yz\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \leftarrow)$ **e $\boldsymbol{\sigma \neq \epsilon}$** (**movimento a sinistra**)
  - $C = (\epsilon, q,\ x\tau)$, $D = (\epsilon,\ q',\ z\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \leftarrow)$ (**movimento a sinistra bloccato**)
  - $C = (\sigma,\ q,\ xy\tau)$, $D = (\sigma z, q', y\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \rightarrow)$ **e $\boldsymbol{\tau \neq \epsilon}$** (**movimento a destra**)
  - $C = (\sigma,\ q,\ \epsilon)$, $D = (\sigma z, q',\ \epsilon)$ e $\delta(q, \sqcup) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, \rightarrow)$ (**movimento a destra oltre il nastro corrente**)
  - $C = (\sigma,\ q,\ x\tau)$, $D = (\sigma, q', z\tau)$ e $\delta(q, x) = (\mathrm{q}', \mathrm{z}, -)$ (**nessun movimento**)

Macchina di Turing – Esecuzioni – Esempio

- Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\},\ Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{yes}, b, -)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$

- **Esempio.** La **configurazione iniziale** $\mathrm{C}_1 = (\epsilon, q_0, aab)$ genera la configurazione $\mathrm{C}_2 = (a, q_0, ab)$
- **Esempio.** La configurazione $\mathrm{C}_2 = (a, q_0, ab)$ genera la configurazione $\mathrm{C}_3 = (aa, q_0, b)$
- **Esempio.** La configurazione $\mathrm{C}_3 = (aa, q_0, b)$ genera la **configurazione accettante** $\mathrm{C}_4 = (aa, q_{yes}, b)$

- **Esempio.** La **configurazione iniziale** $\mathrm{D}_1 = (\epsilon, q_0, aa\#)$ genera la configurazione $\mathrm{D}_2 = (a, q_0, a\#)$
- **Esempio.** La configurazione $\mathrm{D}_2 = (a, q_0, a\#)$ genera la configurazione $\mathrm{D}_3 = (aa, q_0, \#)$
- **Esempio.** La configurazione $\mathrm{D}_3 = (aa, q_0, \#)$ genera la **configurazione rifiutante** $\mathrm{D}_4 = (a, q_{no}, a\#)$

Macchina di Turing – Linguaggio Riconosciuti

- Definiamo ora il linguaggio riconosciuto da una Macchina di Turing
  - In maniera analoga al linguaggio riconosciuto da un automa

- **Definizione**. La macchina M **accetta\rifiuta l'input $\sigma \in \Sigma^*$** se esiste una **sequenza finita** di configurazioni $C_1, C_2, \dots, C_n$ di M tale che le seguenti proprietà sono soddisfatte
  - $C_1 = (\epsilon, q_0, \sigma)$
  - C_n è una configurazione **accettante\rifiutante**
  - $C_i \Rightarrow_M C_{i+1}$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$

- **Definizione**. L'insieme $L(M)$ delle stringhe **che M accetta** è detto **il linguaggio riconosciuto da M**

MdT – Linguaggio Riconosciuti – Esempio

- Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\},\ Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{yes}, b, -)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$

- **Esempio 1**. La macchina M **accetta l'input** $\boldsymbol{aab} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$ a causa di (C_1, C_2, C_3, C_4)
  - La **configurazione iniziale** $\mathrm{C}_1 = (\epsilon, q_0, aab)$ genera la configurazione $\mathrm{C}_2 = (a, q_0, ab)$
  - La configurazione $\mathrm{C}_2 = (a, q_0, ab)$ genera la configurazione $\mathrm{C}_3 = (aa, q_0, b)$
  - **Esempio.** La configurazione $\mathrm{C}_3 = (aa, q_0, b)$ genera la **configurazione accettante** $\mathrm{C}_4 = (aa, q_{yes}, b)$

MdT – Linguaggio Riconosciuti – Esempio

- Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}, \ Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{yes}, b, -)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$

- **Esempio 2**. La macchina M **rifiuta l'input** $aa\# \in \Sigma^*$ a causa di (D_1, D_2, D_3, D_4)
  - La **configurazione iniziale** $\mathrm{D}_1 = (\epsilon, q_0, aa\#)$ genera la configurazione $\mathrm{D}_2 = (a, q_0, a\#)$
  - La configurazione $\mathrm{D}_2 = (a, q_0, a\#)$ genera la configurazione $\mathrm{D}_3 = (aa, q_0, \#)$
  - La configurazione $\mathrm{D}_3 = (aa, q_0, \#)$ genera la **configurazione rifiutante** $\mathrm{D}_4 = (a, q_{no}, a\#)$

- **Esempio**. Il **linguaggio riconosciuto** da M è il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b, \#\}$ in cui almeno un simbolo b precede la prima occorrenza del simbolo $\#$

MdT – Linguaggio Riconosciuti – Esempio

- Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\},\ \ Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}\}$

$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\delta(q,\sigma)}$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{yes}, b, -)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$

- **Esempio 3**. Il **linguaggio riconosciuto** da M $L(M)$ è il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b, \#\}$ in cui almeno un simbolo b precede la prima occorrenza del simbolo #

Macchina di Turing – Linguaggio Riconosciuti

- **Domanda**. Data una qualunque stringa $\sigma \in \Sigma^*$ è vero che una macchina di Turing accetta o rifiuta tale stringa?
  – Considerare anche la macchina che abbiamo appena definito

- Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\},\ Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}\}$

$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\delta(q, \sigma)}$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{yes}, b, -)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$

Macchina di Turing – Non Terminazione

- **Domanda**. Data una stringa $\sigma \in \Sigma^*$ è vero che una macchina di Turing accetta o rifiuta tale stringa?
- Sia $\mathrm{M} =< \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con $\Sigma = \{a, b, \#\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}, \ Q = \{q_0, q_{yes}, q_{no}\}$

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_0, a, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{yes}, b, -)$
q_0	$\#$	$(q_{no}, \#, \leftarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup, \rightarrow)$

- **Esempio.** La **configurazione iniziale** $C_1 = (\epsilon, q_0, aa)$ genera la configurazione $C_2 = (a, q_0, a)$
- **Esempio.** La configurazione $C_2 = \ (a, q_0, a)$ genera la configurazione $C_3 = (aa, q_0, \epsilon)$
- **Esempio.** La configurazione $C_3 = (aa, q_0, \epsilon)$ genera la configurazione $C_4 = (aa \sqcup, q_0, \epsilon)$
- **Esempio.** La configurazione $C_5 = (aa \sqcup, q_0, \epsilon)$ genera la configurazione $C_6 = (aa \sqcup\sqcup, q_0, \epsilon)$
- …
- **Possiamo conclude che M non accetta ne rifiuta l'input aa!!**
  – Intuitivamente, la macchina entra in un ciclo infinito

Macchina di Turing – Terminazione

- Sia $M = < \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ una **macchina di Turing**
- **Definizione 1**. La macchina M è **terminante** se per ogni stringa $\sigma \in \Sigma^*$ abbiamo che M accetta o rifiuta σ
  - La macchina entra nello stato accettante o rifiutante **per ogni input** senza mai bloccarsi in un ciclo infinito
  - Tali macchine vengono chiamate a volte **decisori**

- **Definizione 2**. Un linguaggio di stringhe $\mathcal{L}$ è detto **Turing Riconoscibile** se esiste una **macchina di Turing** M che riconosce $\mathcal{L}$ (ovvero $\mathcal{L} = L(M)$)
  - Spesso definiti **Ricorsivamente Enumerabili** (Recursively Enumerable)

- **Definizione 3**. Un linguaggio di stringhe $\mathcal{L}$ è detto **Turing Decidibile** se esiste una **macchina di Turing terminante** M che riconosce $\mathcal{L}$ (ovvero $\mathcal{L} = L(M)$)
  - Spesso definiti **Ricorsivi** (Recursive)

- **Domanda 1**. Esiste un linguaggio di stringhe $\mathcal{L}$ che non è Turing Riconoscibile?
- **Domanda 2**. Esiste un linguaggio di stringhe $\mathcal{L}'$ che non è Turing Decidibile?

Macchina di Turing – Decidibilità

- **Teorema 1**. Esiste un linguaggio di stringhe $\mathcal{L}$ che non è Turing Riconoscibile
- **Teorema 2**. Esiste un linguaggio di stringhe $\mathcal{L}'$ che non è Turing Decidibile
- Le prove di questi due teoremi ci terranno impegnati per le prossime lezioni ☺

Esempi di Macchina di Turing

Macchine di Turing – Esempio

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

Macchine di Turing – Esempio

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

Stato 0.

La macchina esamina il simbolo corrente e verifica le condizioni di terminazione

Macchine di Turing – Esempio

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m | \ m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
   1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere ↓
   2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
      1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
   3. Scorri il nastro fino al prossimo c
      1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
      2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
   4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere ↓

Stato 1.

La macchina cerca il prossimo carattere b e lo sovrascrive se lo trova oppure rifiuta se trova caratteri non coerenti

Macchine di Turing – Esempio

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

Stato 2.

La macchina cerca il prossimo carattere c e lo sovrascrive se lo trova oppure rifiuta

Macchine di Turing – Esempio

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

Stato 3.

La macchina torna indietro all'ultima occorrenza di $\downarrow$ e torna allo Stato 0

Macchine di Turing – Esempio

- Definiamo la Macchina di Turing $\mathrm{M} = < \Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{yes}, q_{no} >$ con
  - $\Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\downarrow, \#, \sqcup\}, \; Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{yes}, q_{no}\}$

- Procediamo a definire la funzione di transizione δ stato per ogni stato
  - Tenendo in considerazione le diverse fasi

Macchine di Turing – Esempio

- **Stato 0.** La macchina esamina il simbolo corrente e verifica le condizioni di terminazione
  - **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere.**
    - $\delta(q_0, \#) = (q_0, \#, \rightarrow)$
  - **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
    - $\delta(q_0, \sqcup) = (q_{yes}, \sqcup, -)$
  - **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_0, b) = (q_{no}, b, -)$
  - **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_0, c) = (q_{no}, c, -)$
  - **Se** $x = \downarrow$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_0, \downarrow) = (q_{no}, \downarrow, -)$
  - **Se** $x = a$ **Allora Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$ e passa allo **Stato 1**
    - $\delta(q_0, a) = (q_1, \downarrow, \rightarrow)$

Macchine di Turing – Esempio

- **Stato 1.** La macchina cerca il prossimo carattere b e lo sovrascrive se lo trova oppure rifiuta se trova un carattere indesiderato
  - **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere.**
    - $\delta(q_1, \#) = (q_1, \#, \rightarrow)$
  - **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) oppure** $x = \downarrow$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_1, \sqcup) = (q_{no}, \sqcup, -)$
    - $\delta(q_1, \downarrow) = (q_{no}, \downarrow, -)$
  - **Se** trova a **Allora scorri a destra il nastro**
    - $\delta(q_1, a) = (q_1, a, \rightarrow)$
  - **Se** trova b **Allora** sovrascrivilo con # **e passa allo Stato 2**
    - $\delta(q_1, b) = (q_2, \#, \rightarrow)$
  - **Se** trova c **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_1, c) = (q_{no}, c, -)$

Macchine di Turing – Esempio

- **Stato 2.** La macchina cerca il prossimo carattere b e lo sovrascrive se lo trova oppure rifiuta se trova un carattere indesiderato
  - **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere.**
    - $\delta(q_2, \#) = (q_2, \#, \rightarrow)$
  - **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) oppure** $x = \downarrow$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_2, \sqcup) = (q_{no}, \sqcup, -)$
    - $\delta(q_2, \downarrow) = (q_{no}, \downarrow, -)$
  - **Se** trova b **Allora scorri a destra il nastro**
    - $\delta(q_2, b) = (q_2, b, \rightarrow)$
  - **Se** trova c **Allora** sovrascrivilo con # **e passa allo Stato 3**
    - $\delta(q_2, c) = (q_3, \#, -)$
  - **Se** trova a **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_2, a) = (q_{no}, a, -)$

Macchine di Turing – Esempio

- **Stato 3**. La macchina torna indietro all'ultima occorrenza di ↓ e torna allo **Stato 0**
  - **Se** trova ↓ **Allora passa allo Stato 0**
    - $\delta(q_3, \downarrow) = (q_0, \downarrow, \rightarrow)$
  - **Se** trova ⊔ **Allora rifiuta la stringa corrente**
    - $\delta(q_3, \sqcup) = (q_{no}, \sqcup, -)$
  - **Altrimenti scorre a sinistra**
    - $\delta(q_3, a) = (q_3, a, \leftarrow)$
    - $\delta(q_3, b) = (q_3, b, \leftarrow)$
    - $\delta(q_3, c) = (q_3, c, \leftarrow)$
    - $\delta(q_3, \#) = (q_3, \#, \leftarrow)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Macchine di Turing – Esempio di Computazione

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$**(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

NASTRO

a	a	b	b	c	c	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	#	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	⊔	$(q_{yes}, ⊔, -)$
q_0	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	#	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_1	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	#	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_2	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	#	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_3	↓	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

NASTRO

a	**a**	**b**	**b**	**c**	**c**	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

a	a	b	b	c	c	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_1

NAST

$\downarrow$	**a**	**b**	**b**	**c**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_1

NASTRO

$\downarrow$	**a**	**b**	**b**	**c**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_2

NASTRO

$\downarrow$	a	#	b	c	c	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_2

NASTRO

$\downarrow$	**a**	**#**	**b**	**c**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	#	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	⊔	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	#	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	⊔	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	#	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	⊔	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	#	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	⊔	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	↓	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

↓	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

↓	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	#	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	#	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	#	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	#	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

$\downarrow$	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NAST

$\downarrow$	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

$\downarrow$	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

$\downarrow$	**a**	**#**	**b**	**#**	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	#	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	⊔	$(q_{yes}, ⊔, -)$
q_0	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	#	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_1	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	#	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_2	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	#	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_3	↓	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_1

NASTRO

↓	↓	#	b	#	c	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_1

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	#	**b**	#	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_2

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	#	#	#	c	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_2

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	**c**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	#	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	#	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	#	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	#	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	#	#	#	#	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_3

NAST

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	#	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	⊔	$(q_{yes}, ⊔, -)$
q_0	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	#	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_1	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	#	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_2	↓	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	#	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	⊔	$(q_{no}, ⊔, -)$
q_3	↓	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

↓	↓	#	#	#	#	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_{yes}

Accetta la Stringa in Input!

NASTRO

$\downarrow$	$\downarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$\#$	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

NASTRO

a	**a**	**c**	**c**	**b**	**b**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

a	a	c	c	b	b	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_0

NASTRO

#	a	c	c	b	b	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_1

NAST

#	**a**	**c**	**c**	**b**	**b**	$\sqcup$	$\sqcup$	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente

q_1

NASTRO

#	a	c	c	b	b	⊔	⊔	...

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente

q_{no}

Rifiuta la Stringa in Input!

NASTRO

#	a	c	c	b	b	$\sqcup$	$\sqcup$	...

Descrizione Semi-Formale delle Macchinen di Turing

Macchina di Turing – Descrizione Semi Formale

- La definizione di una macchina di Turing richiede tantissimi dettagli di basso livello
  - Movimento delle testine, stati interni ecc.

- Ovviamente, non vogliamo definire tali dettagli ogni volta che definiamo un algoritmo per riconoscere un determinato linguaggio
  - Equivalentemente, per risolvere un problema

- Spesso, utilizziamo una descrizione semi-formali delle macchine
  - Basata sul linguaggio naturale che ne spiega le funzionalità
  - In maniera simile allo pseudo-codice di un algoritmo

- Nel costruire tale descrizione, dobbiamo prestare attenzione ad utilizzare solo le funzionalità ammesse da un Macchina di Turing
  - Così che la conversione sia ragionevolmente semplice

Macchine di Turing – Esempio

Algoritmo per riconoscere $L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 0\}$

1. **Leggi** il prossimo carattere x della stringa dell'input
2. **Se** $x = \#$ **Allora passa al prossimo carattere**
3. **Se** $x = \sqcup$ **(cella vuota) Allora accetta la stringa corrente**
4. **Se** $x = b$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
5. **Se** $x = c$ **Allora rifiuta la stringa corrente**
6. **Se** $x = a$ **Allora**
    1. **Sovrascrivi** tale occorrenza di a con il carattere $\downarrow$
    2. **Scorri** il nastro fino alla prossima occorrenza carattere b
        1. **Se** incontri un carattere $y \in \{c, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** sovrascrivi tale occorrenza di b con #
    3. Scorri il nastro fino al prossimo c
        1. **Allora** incontri un carattere $y \in \{a, b, \sqcup\}$ **Allora** rifiuta la stringa corrente
        2. **Altrimenti** cambia tale occorrenza di c con #
    4. **Torna** all'ultima occorrenza del carattere $\downarrow$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_0	$\#$	$(q_0, \#, \rightarrow)$
q_0	$\sqcup$	$(q_{yes}, \sqcup, -)$
q_0	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_0	a	$(q_1, \downarrow, \rightarrow)$
q_0	b	$(q_{no}, b, -)$
q_0	c	$(q_{no}, c, -)$
q_1	$\#$	$(q_1, \#, \rightarrow)$
q_1	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_1	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_1	a	$(q_1, a, \rightarrow)$
q_1	b	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_1	c	$(q_{no}, c, -)$

$q \in Q$	$\sigma \in \Gamma$	$\delta(\sigma, q)$
q_2	$\#$	$(q_2, \#, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_2	$\downarrow$	$(q_{no}, \downarrow, -)$
q_2	a	$(q_{no}, a, -)$
q_2	b	$(q_2, b, \rightarrow)$
q_2	c	$(q_3, \#, -)$
q_3	$\#$	$(q_3, \#, \leftarrow)$
q_3	$\sqcup$	$(q_{no}, \sqcup, -)$
q_3	$\downarrow$	$(q_0, \downarrow, \rightarrow)$
q_3	a	$(q_3, a, \leftarrow)$
q_3	b	$(q_3, b, \leftarrow)$
q_3	c	$(q_3, c, \leftarrow)$

Stato Corrente
q_1

NASTRO

#	a	c	c	b	b	$\sqcup$	$\sqcup$	...

Macchine di Turing – Esempio

1. **Inizia dallo stato q_0**
2. **Nello stato q_0**
    1. **Se il carattere corrente è** # **allora muovi la testina a destra**
    2. **Se il carattere corrente è** ⊔**(cella vuota) allora passa allo stato q_{yes}**
    3. **Se il carattere corrente è** b **allora passa allo stato q_{no}**
    4. **Se il carattere corrente è** c **allora passa allo stato q_{no}**
    5. **Se il carattere corrente è** ↓ **allora passa allo stato q_{no}**
    6. **Se il carattere corrente è** a **Allora**
        1. **Sovrascrivi** il carattere corrente con ↓
        2. **Passa** allo stato q_1
3. **Nello stato q_1**
    1. **Se il carattere corrente è** # **allora muovi la testina a destra**
    2. **Se il carattere corrente è** ⊔**(cella vuota) allora passa allo stato q_{no}**
    3. **Se il carattere corrente è** a **allora passa allo stato q_{no}**
    4. **Se il carattere corrente è** c **allora passa allo stato q_{no}**
    5. **Se il carattere corrente è** ↓ **allora passa allo stato q_{no}**
    6. **Se il carattere corrente è** b **Allora**
        1. **Sovrascrivi** il carattere corrente con #
        2. **Passa** allo stato q_2

Macchine di Turing – Esempio

1. **Nello stato q_2**
   1. **Se il carattere corrente è** # **allora muovi la testina a destra**
   2. **Se il carattere corrente è** ⊔**(cella vuota) allora passa allo stato q_{no}**
   3. **Se il carattere corrente è** a **allora passa allo stato q_{no}**
   4. **Se il carattere corrente è** b **allora passa allo stato q_{no}**
   5. **Se il carattere corrente è** ↓ **allora passa allo stato q_{no}**
   6. **Se il carattere corrente è** c **Allora**
      1. **Sovrascrivi** il carattere corrente con #
      2. **Passa** allo stato q_3
2. **Nello stato q_3**
   1. **Se il carattere corrente è** # **allora muovi la testina a sinistra**
   2. **Se il carattere corrente è** ⊔**(cella vuota) allora passa allo stato q_{no}**
   3. **Se il carattere corrente è** a **allora muovi la testina a sinistra**
   4. **Se il carattere corrente è** b **allora muovi la testina a sinistra**
   5. **Se il carattere corrente è** c **allora muovi la testina a sinistra**
   6. **Se il carattere corrente è** ↓ **Allora**
      1. **Muovi la testina a destra**
      2. **Passa** allo stato q_0

Macchina di Turing – Considerazioni Finali

1. La **prima descrizione** è la meno formale
   - Definisce solo i passi generali dell’algoritmo
   - Sappiamo però che possiamo implementarli con una Macchina di Turing

2. La **seconda descrizione** è la più formale
   - Definisce tutte le transizioni in termini di stati e movimenti della testina
   - Possiamo dimostrare formalmente che riconosce il linguaggio che vogliamo

3. La **terza descrizione** è semi-formale
   - Definisce le transizioni in linguaggio naturale
   - Possiamo usarla nelle nostre dimostrazioni (con attenzione)

Macchina di Turing – Considerazioni Finali

- Quale descrizione utilizzare dipende dal contesto
  - E tendo presente che le Macchine di Turing non sono un linguaggio di programmazione

1. Per fornire una intuizione delle nostre idee algoritmiche, usiamo la **prima descrizione**
   - Basta pensarci un po' per convincersi che possiamo implementare tutto con una Macchine di Turing anche se non stiamo fornendo i dettagli necessari

2. Per fornire una prova di un enunciato utilizziamo la **terza descrizione**
   - Possiamo utilizzarla nelle dimostrazioni perché i dettagli sono (quasi) tutti li
   - Una dimostrazione non è un programma che dobbiamo compilare ed eseguire
   - C'è sempre un essere umano di mezzo che può capire cosa stiamo dicendo

3. La **seconda descrizione** non è quasi mai utilizzata in letteratura
   - A meno di voler dimostrare proprietà delle macchine stesse oppure …
   - Se vogliamo fornire in input una MdT ad un programma che abbiamo scritto