Equazioni di ricorrenza / Counting sort

Informatica@SEFA 2018/2019 - Lezione 17

Massimo Lauria <massimo.lauria@uniroma1.it>*

Mercoledì, 21 Novembre 2018

1 Ricorsione ed equazioni di ricorrenza

Analizzando il Mergesort abbiamo visto che il tempo di esecuzione di un algoritmo ricorsivo può essere espresso come **un'equazione di ricorrenza**, ovvero un'equazione del tipo

$$T(n) = \begin{cases} C & \text{when } n \leq c_0 \\ \sum_i a_i T(g_i(n)) + f(n) & \text{when } n > c_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove a_i, C e c_0 costanti positive intere e g_i e f sono funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, e vale sempre che $g_i(n) < n$.

Ad esempio il running time di Mergesort è $T(n) = 2T(n/2)+\Theta(n)$.[1] Mentre il running time della ricerca binaria è:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

Ci sono diversi metodi per risolvere le equazioni di ricorrenza, o comunque per determinare se $T(n)$ è $O(g)$ oppure $\Theta(g)$ per qualche funzione g. Spesso ci interessa solo l'asintotica e per di più a volte ci interessa solo una limitazione superiore dell'ordine di crescita.

*http://massimolauria.net/courses/infosefa2018/

[1] In molti casi non è necessario essere precisi nel quantificare $T(1)$, oppure quali sono i valori esatti di C e c_0. Nella maggior parte quei valori condizionano $T(n)$ solo di un fattore costante, che viene comunque ignorato dalla notazione asintotica. Lo stesso vale per la funzione $f(n)$: riscalarla incide sulla soluzione della ricorrenza per un fattore costante.

1.1 Metodo di sostituzione

Si tratta di indovinare la soluzione della ricorrenza e verificarla dimostrandone la correttezza via induzione matematica. Ad esempio risolviamo la ricorrenza del Mergesort utilizzando come tentativo di soluzione $T(n) \leq cn \log n$ per c "grande abbastanza". Il caso base è verificato scegliendo $c > T(1)$. Assumiamo poi che `merge` utilizzi dn operazioni e che $c > d$. E utilizziamo l'ipotesi induttiva per sostituire nella ricorrenza.

$$T(n) = 2T(n/2)+dn \leq 2c(n/2)\log(n/2)+dn \leq cn\log n - cn + dn \leq cn\log n$$

L'uso dell'induzione per risolvere la ricorrenza può portare ad errori legati alla notazione asintotica. Facciamo conto che vogliamo dimostrare che $T(n) = O(n)$, ovvero $T(n) \leq cn$ per qualche c.

$$T(n) = 2T(n/2) + dn \leq 2cn/2 + dn \leq cn + dn$$

Si sarebbe tentati di dire che $(c + d)n = O(n)$ e che quindi ci siamo riusciti. Tuttavia la dimostrazione usa l'ipotesi induttiva che $T(n') \leq cn'$ per $n' < n$ e quindi se da questa ipotesi non deduciamo la stessa forma $T(n) \leq cn$ l'induzione non procede correttamente.

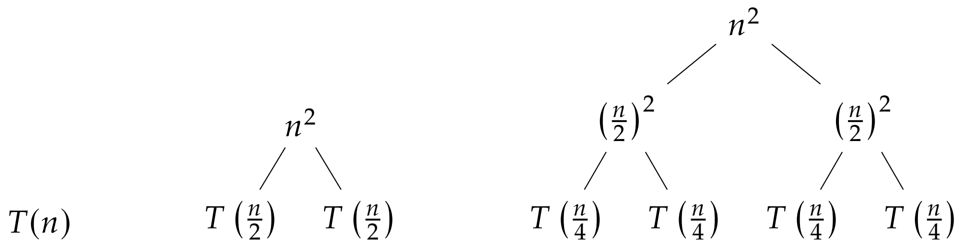
1.2 Metodo iterativo e alberi di ricorsione

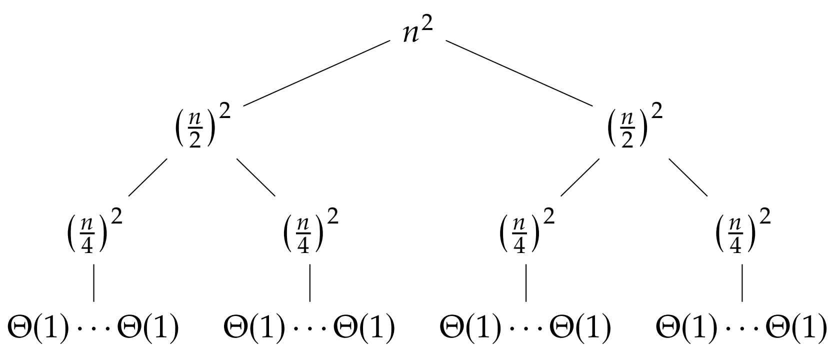
É il metodo che abbiamo utilizzato durante l'analisi delle performance di Mergesort. L'idea è quella di iterare l'applicazione della ricorrenza fino al caso base, sviluppando la formula risultante e utilizzando manipolazioni algebriche per determinarne il tasso di crescita.

Esempio: Analizziamo la ricorrenza $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n$

$$
\begin{aligned}
T(n) = & \quad n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) \\
= & \quad n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9T(\lfloor n/16 \rfloor) \\
= & \quad n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \\
= & \quad \ldots \\
\leq & \quad n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots + 3^{\log_4(n)}\Theta(1) \\
\leq & \quad n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta(n^{\log_4(3)}) \\
= & \quad 4n + O(n) = O(n)
\end{aligned}
$$

Per visualizzare questa manipolazione è utile usare un **albero di ricorsione**. Ovvero una struttura ad albero che descrive l'evoluzione dei termini della somma. Vediamo ad esempio $T(n) = 2T(n/2) + n^2$





- L'albero ha $\log n$ livelli
- Il primo livello ha n^2 operazioni, il secondo ne ha $n^2/2$, il terzo ne ha $n^2/4, \ldots$
- L'ultimo ha $\Theta(n)$ operazioni.

il numero totale di operazioni è $\Theta(n) + n^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = \Theta(n^2)$

1.3 Master Theorem

Questi due metodi richiedono un po' di abilità e soprattutto un po' di improvvisazione, per sfruttare le caratteristiche di ogni esempio. Esiste un teorema che raccoglie i casi più comuni e fornisce la soluzione della ricorrenza direttamente.

Teorema 1. *Siano $a \geq 1$ e $b > 1$ costanti e $f(n)$ una funzione, e $T(n)$ definito sugli interi non negativi dalla ricorrenza:*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) ,$$

dove n/b rappresenta $\lceil n/b \rceil$ o $\lfloor n/b \rfloor$. Allora $T(n)$ può essere asintoticamente limitato come segue

1. *Se $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ per qualche costante $\epsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$;*
2. *Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$ allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)} \log n)$;*
3. *Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$, per qualche costante $\epsilon > 0$, e se $af(n/b) < cf(n)$ per qualche $c < 1$ e per ogni n sufficientemente grande, allora $T(n) = \Theta(f(n))$.*

Notate che il teorema non copre tutti i casi. Esistono versioni molto più sofisticate che coprono molti più casi, ma questa versione è più che sufficiente per i nostri algoritmi.

- Mergesort è il caso 2, con $a = b = 2$ e $f(n) = \Theta(n)$.
- Ricerca binaria è il caso , con $a = 1$, $b = 2$ e $f(n) = \Theta(1)$.
- $T(n) = 2T(n/2) + n^2$ è il caso 3.

Non vedremo la dimostrazione ma è sufficiente fare uno sketch dell'abero di ricorsione per vedere che questo ha

- altezza $\log_b n$;
- ogni nodo ha a figli;
- al livello più basso ci sono $a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$ nodi che costano $\Theta(1)$ ciascuno;
- i nodi a distanza i da quello iniziale costano, complessivamente, $a^i f(n/b^i)$.

Dunque il costo totale è: $\Theta(n^{\log_b(a)}) + \sum_{j=0}^{\log_b(n)-1} a^j f(n/b^j)$. In ognuno dei tre casi enunciati dal teorema, l'asintotica è quella indicata.

2 Ordinamenti in tempo lineare

Esistono modi di ordinare che impiegano solo $\Theta(n)$, ma questi metodi non sono, ovviamente, ordinamenti per confronto. Sfruttano invece il fatto che gli elementi da ordinare appartengano ad un dominio limitato.

2.1 Esempio: Counting Sort

Il counti sort si basa su un idea molto semplice: se ad esempio dobbiamo ordinare una sequenza di n elementi, dove ognuno dei quali è un numero da 1 a 10, possiamo farlo facilmente in tempo lineare:

1. tenendo 10 contatori $n_1, \ldots, n_{10}$;
2. fare una scansione della lista aggiornando i contatori;
3. riporre nella lista n_1 copie di 1, n_2 copie di 2, ecc. . .

```
def countingsort1(seq):
    if len(seq)==0:
        return
    # n operazioni
    a = min(seq)
    b = max(seq)
    # creazione dei contatori
    counter=[0]*(b-a+1)
    for x in seq:
        counter[x-a] = counter[x-a] + 1
    # costruzione dell'output
    output=[]
    for v,nv in enumerate(counter,start=a):
        output.extend( [v]*nv  )
    return output

print(countingsort1([7,6,3,5,7,9,3,2,3,5,6,7,8,8,9,9,5,4,3,2,2,3,4,6,8,8]))
```

```
[2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9]
```

Ovviamente qualunque tipo di dato ha un minimo e un massimo, in una lista finita. Tuttavia se la lista contiene elementi in un dominio molto grande (e.g. numeri tra 0 e n^{10} dove n è la lunghezza dell'input) allora questo algoritmo è meno efficiente degli algoritmi per confronti.

2.2 Dati contestuali

Negli algoritmi di ordinamento per confronto ci i dati originali vengono spostati o copiati all'interno della sequenza, e tra la sequenza ed eventuali liste temporanee.

Si immagini ad esempio il caso in cui ogni elemento nella lista di input sia una tupla `(i,dati)` dove `i` è la **chiave** rispetto a cui ordinare, ma `dati` invece è informazione contestuale arbitraria. Negli ordinamenti per confronto l'informazione contestuale viene spostata insieme alla chiave. La nostra implementazione del countingsort non gestisce questo caso, e va modificata.

1. Dati i contatori n_i, calcoliamo in quale intervallo della sequenza di output vadano inseriti gli elementi in input con chiave i. L'intervallo è tra le due quantità $\sum_{j=0}^{i-1} n_j$ (incluso) e $\sum_{j=0}^{i} n_j - 1$ (escluso).

2. Scorriamo l'input nuovamente e copiamo gli elementi in input nella lista di output.

```python
def countingsort2(seq):
    if len(seq)==0:
        return
    # n operazioni
    a = min(k for k,_ in seq)
    b = max(k for k,_ in seq)

    # creazione dei contatori
    counter=[0]*(b-a+1)
    for k,_ in seq:
        counter[k-a] += 1
    # posizioni finali di memorizzazione
    posizioni=[0]*(b-a+1)
    for i in range(1,len(counter)):
        posizioni[i]=posizioni[i-1]+counter[i-1]

    # costruzione dell'output
    for k,data in seq[:]:
        seq[posizioni[k-a]]=(k,data)
        posizioni[k-a] = posizioni[k-a] + 1

sequenza=[(3,"paul"),(4,"ringo"),(1,"george"),(1,"pete"),(3,"stuart"),(4,"john")
    ]
countingsort2(sequenza)
print(sequenza)
```

```
[(1, 'george'), (1, 'pete'), (3, 'paul'), (3, 'stuart'), (4, 'ringo'), (4, 'john')]
```