Efficienza computazionale

Informatica@SEFA 2018/2019 - Lezione 12

Massimo Lauria <massimo.lauria@uniroma1.it>*

Venderdì, 26 Ottobre 2018

Usiamo i calcolatori elettronici invece di fare i conti a mano per sfruttare la loro velocità. Tuttavia quando le quantità di dati si fanno molto grandi, anche un calcolatore elettronico comincia ad essere lento. Se il numero di operazioni da fare diventa molto elevato, ci sono due opzioni:

- utilizzare un calcolatore più veloce;
- scrivere un programma più efficiente (i.e. meno operazioni).

Mentre la velocità dei calcolatori migliora con il tempo, questi miglioramenti sono sempre più limitati. Per ridurre il tempo di calcolo non ci sta altro modo che scoprire nuove idee e nuovi algoritmi.

1 Trovare uno zero di un polinomio

Considerate il problema di trovare un punto della retta $\mathbb{R}$ nel quale un dato polinomio P sia (approssimativamente) 0. Ovvero trovare un $x \in \mathbb{R}$ per cui $P(x) = 0$. Per esempio

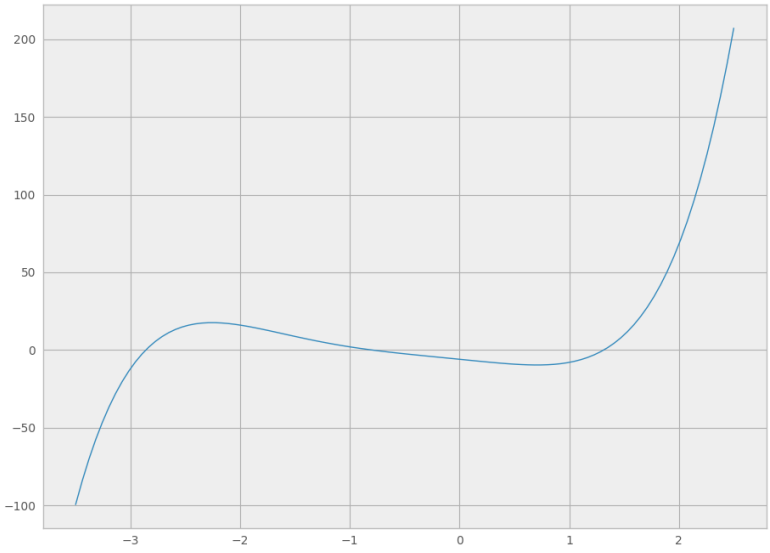
$$P(x) = x^5 - 12x^4 + 7x - 6$$

che in Python è calcolato

```
def P(x):                                                    1
    return x**5 + 3*x**4 + x**3 - 7*x - 6                    2
```

Ed ha questo aspetto.

*http://massimolauria.net/courses/infosefa2018/



Non è sempre possibile trovare uno zero di una funzione matematica. Tuttavia in certe condizioni è possibile per lo meno trovare uno zero approssimato (i.e. un punto x per il quale $|P(x)| \leq \epsilon$ per un ϵ piccolo a piacere).

Il polinomio P ha grado dispari e coefficiente positivo nel termine di grado più alto. Questo vuol dire che

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) \qquad \lim_{x \to \infty} P(x)$$

divergono rispettivamente verso $-\infty$ e $+\infty$.

Teorema 1 (Teorema degli zeri)**.** *Si consideri una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $f(a)$ è negativo e $f(b)$ è positivo (o viceversa), allora deve esistere un x_0 con $a < x_0 < b$ per cui $f(x_0) = 0$.*

Verifichiamo subito che ci sono due punti $a < b$ per cui il polinomio P cambia di segno.

```
print(P(-2.0),P(1.0))
```

```
16.0 -8.0
```

Quindi il teorema precedente vale e ci garantisce che esiste uno zero del polinomio tra a e b. Ma come troviamo questo punto? Una possibilità è scorrere tutti i punti tra a e b (o almeno un insieme molto fitto di essi).

```
def trova_zero_A(f,a,b):
  Delta= (b - a) / 10000000
  x = a
  steps=1
  while x <= b:
    if  -0.00001 < P(x) < 0.00001:
      print("Trovato in {1} passi lo zero {0}.".format(x,steps))
      print(" - P({}) = {}".format(x,P(x)))
      break
    steps +=1
    x += Delta

trova_zero_A(P,-2.0,1.0)
```

```
Trovato in 3996048 passi lo zero -0.8011859001873525.
 - P(-0.8011859001873525) = 7.449223347499867e-06
```

Questo programma trova uno "zero" di P e ci ha messo 3996048 passi. Possiamo fare di meglio? Cercheremo di trovare un'idea che renda questo calcolo molto più efficiente. Supponiamo che $P(a) < 0$ e $P(b) > 0$ (il caso opposto funziona più o meno nella stessa maniera). Possiamo provare a calcolate P sul punto $c = (a + b)/2$, a metà tra a e b.

- Se $P(c) > 0$ allora esiste $a < x_0 < c$ per cui $P(x_0) = 0$;
- se $P(c) < 0$ allora esiste $c < x_0 < b$ per cui $P(x_0) = 0$;
- se $P(c) = 0$ allora $x_0 = c$.

In questo modo dimezziamo ad ogni passo l'intervallo di ricerca.

```
def trova_zero_B(f,a,b):
    passi = 1
    start,end = a,b
    mid   = (a + b) / 2
    while not (-0.00001 < f(mid) < 0.00001):
        if f(start)*f(mid) < 0:
            end   = mid
        else:
            start = mid

        mid   = (start + end)/2
        passi = passi + 1

    print("Trovato in {1} passi lo zero {0}.".format(mid,passi))
    print(" - P({}) = {}".format(mid,f(mid)))

trova_zero_B(P,-2.0,1.0)
```

```
Trovato in 17 passi lo zero -0.8011856079101562.
 - P(-0.8011856079101562) = 4.764512533839138e-06
```

Il secondo programma è molto più veloce perché invece di scorrere tutti i punti da -2.0 a 1.0, o comunque una sequenza abbastanza fitta di punti in quell'intervallo, esegue un dimezzamento dello spazio di ricerca. Per utilizzare questa tecnica abbiamo usato il fatto che un polinomio è una funzione continua. Questo è un elemento **essenziale**. Il teorema degli zeri non vale per funzioni discontinue e `trova_zero_B` si basa su di esso.

> Se i dati in input hanno della struttura addizionale, questa può essere sfruttata per scrivere programmi più veloci.

Prima di concludere questa parte della lezione voglio sottolineare che i metodi visti sopra possono essere adattati in modo da avere precisione maggiore.

2 Ricerca di un elemento in una lista

Come abbiamo visto nella parte precedente della lezione, è estremamente utile conoscere la struttura o le proprietà dei dati su cui si opera. Nel caso in cui in dati abbiano delle caratteristiche particolari, è possibile sfruttarle per utilizzare un algoritmo più efficiente, che però **non è corretto** in mancanza di quelle caratteristiche.

Uno dei casi più eclatanti è la ricerca di un elemento in una sequenza. Per esempio

- cercare un nome nella lista degli studenti iscritti al corso;
- cercare un libro in uno scaffale di una libreria.

Per trovare un elemento `x` in una sequenza `seq` la cosa più semplice è di scandire `seq` e verificare elemento per elemento che questo sia o meno uguale a `x`. Di fatto l'espressione `x in seq` fa esattamente questo.

```
def trova(x,seq):
    for i,y in enumerate(seq):
        if x==y:
            print("Trovato l'elemento dopo {} passi.".format(i+1))
            return
    print("Non trovato. Eseguiti {} passi.".format(len(seq)))
```

Per testare `trova` ho scritto una funzione

```
test_ricerca(S,sorted=False)
```

che produce una sequenza di `1000000` di numeri compresi tra `-2000000` e `2000000`, generati a caso utilizzando il generatore **pseudocasuale** di python. Poi cerca il valore 0 utilizzando la funzione `S`. Se `sorted` è vera allora la sequenza viene ordinata prima che il test incominci.

```
test_ricerca(trova)
```

```
Non trovato. Eseguiti 1000000 passi.
```

Per cercare all'interno di una sequenza di n elementi la funzione di ricerca deve scorrere **tutti** gli elementi. Questo è **inevitabile** in quanto se anche una sola posizione non venisse controllata, si potrebbe costruire un input sul quale la funzione di ricerca non è corretta.

2.1 Ordinamento

Nella vita di tutti i giorni le sequenze di informazioni nelle quali andiamo a cercare degli elementi (e.g. un elenco telefonico, lo scaffale di una libreria) sono ordinate e questo ci permette di cercare più velocemente. Pensate ad esempio la ricerca di una pagina in un libro. Le pagine sono numerate e posizionate nell'ordine di enumerazione. È possibile trovare la pagina cercata con poche mosse.

Se una lista `seq` di n elementi è ordinata, e noi cerchiamo il numero 10, possiamo già escludere metà della lista guardando il valore alla posizione $n/2$.

- Se il valore è maggiore di 10, allora 10 non può apparire nelle posizioni successive, e quindi è sufficiente cercarlo in quelle precedenti;
- analogamente se il valore è maggiore di 10, allora 10 non può apparire nelle posizioni precedenti, e quindi è sufficiente cercarlo in quelle successive.

2.2 Ricerca binaria

La ricerca binaria è una tecnica per trovare dati all'interno di una sequenza `seq` **ordinata**. L'idea è quella di dimezzare ad ogni passo lo spazio di ricerca. All'inizio lo spazio di ricerca è l'intervallo della sequenza che va da `0` a `len(seq)-1` ed x è l'elemento da cercare.

Ad ogni passo

- si controlla il valore v a metà dell'intervallo;
- se $v > x$ allora x può solo trovarsi prima di v;
- se $v < x$ allora x può solo trovarsi dopo v;
- altrimenti v è uguale al valore cercato.

```
def ricerca_binaria(x,seq):
    start=0
    end=len(seq)-1
    step = 0
    while start<=end:
        step += 1
        mid = (end + start) // 2
        val = seq[mid]
        if val == x:
            print("Trovato l'elemento dopo {} passi.".format(step))
            return
        elif val < x:
            start = mid + 1
        else:
            end = mid-1
    print("Non trovato. Eseguiti {} passi.".format(step))
```

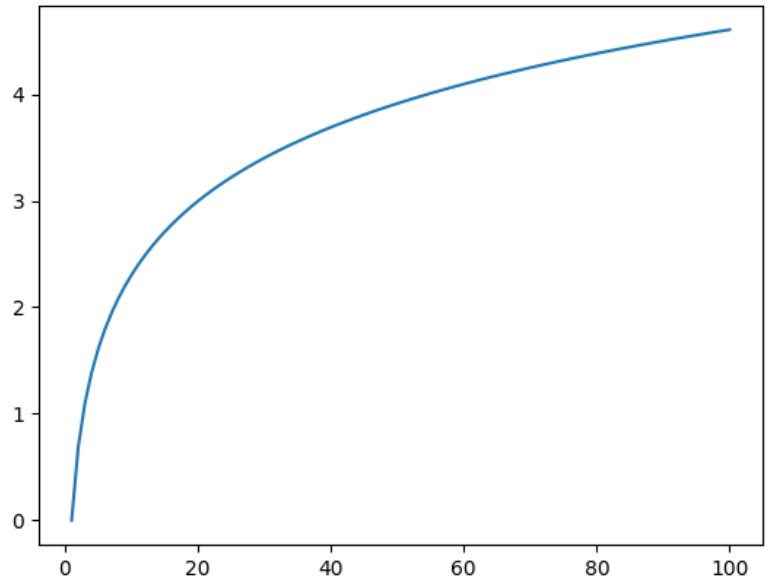
```
test_ricerca(ricerca_binaria,sorted=True)
```

```
Non trovato. Eseguiti 20 passi.
```

La nuova funzione di ricerca è estremamente più veloce. Il numero di passi eseguiti è circa uguale al numero di

- divisioni per due che rendono la lunghezza di `seq` uguale a 1,

ovvero una sequenza di lunghezza n richiede $\lceil log_2 n \rceil$ iterazioni. Mentre la funzione di ricerca che abbiamo visto prima ne richiede n.



Naturalmente ordinare una serie di valori ha un costo, in termini di tempo. Se La sequenza ha n elementi e vogliamo fare t ricerche, ci aspettiamo all'incirca

- Ricerca sequenziale: nt
- Ricerca binaria: $t \log n + \text{Ord}(n)$

operazioni, dove $\text{Ord}(n)$ è il numero di passi richiesti per ordinare n numeri. Quindi se i dati non sono ordinati fin dall'inizio, si può pensare di ordinarli, a seconda del valore di t e di quanto costi l'ordinamento. In generale vale la pena ordinare i dati se il numero di ricerche è abbastanza consistente, anche se non elevatissimo.

Non stiamo neppure parlando di quanto costi mantenere i dati ordinati in caso di inserimenti e cancellazioni.

3 La misura della complessità computazionale

Quando consideriamo le prestazioni di un algoritmo, spesso non vale sempre la pena considerare l'effettivo tempo di esecuzione, a meno che non ci si voglia concentrare su uno specifico ambiente operativo. Al contrario

è utile considerare il numero di **operazioni elementari** che l'algoritmo esegue.

- accessi in memoria
- operazioni aritmetiche
- ecc. . .

In molti casi questo tipo di approssimazione è lecito ma bisogna fare attenzione (e.g. in Python si possono fare operazioni aritmetiche tra numeri di dimensione arbitraria e quindi in quel caso non si può considerare queste come elementari). Ad ogni modo misurare le prestazioni di un algoritmo in questo modo porta vantaggi

- indipendenza dalla macchina
- indipendenza dal linguaggio di programmazione
- validità nel tempo.

La potenza di calcolo della macchina ed il tipo di linguaggio e compilatore/interprete utilizzato influenzano il tempo di esecuzione, tuttavia questi elementi non possono essere controllati interamente dallo studioso di algoritmi e lo stesso algoritmo può essere implementato in diversi linguaggi di programmazione e può essere eseguito su diverse macchine.

> L'obiettivo di chi scrive algoritmi è ridurre le risorse di calcolo, misurate attraverso una versione idealizzata del
>
> - numero di operazioni
> - numero di celle di memoria utilizzate.

In questo modo il suo lavoro è applicabile indipendentemente dalle contingenze tecnologiche. Normalmente si definisce

1. **modello computazionale** ovvero un modello astratto della macchina che esegue l'algoritmo
2. **risorse computazionali** utilizzate da un algoritmo in questo modello computazionale.

Per questo corso non è assolutamente necessario vedere modelli computazionali formali. Ci basta capire a livello intuitivo il numero di operazioni elementari che i nostri algoritmi fanno per ogni istruzione.

Esempio:

- una somma di due numeri `float` : 1 operazione
- verificare se due numeri `float` sono uguali: 1 operazione
- confronto lessicografico tra due stringhe di lunghezza n: n operazioni
- ricerca lineare in una lista Python di n elementi: ??
- ricerca binaria in una lista ordinata di n elementi: ??
- inserimento nella 4a posizione in una lista di n elementi: ??

3.1 Notazione asintotica

Quando si contano il numero di operazioni in un algoritmo, non è necessario essere estremamente precisi. A che serve distinguere tra $10n$ operazioni e $2n$ operazioni se in un linguaggio di programmazione le $10n$ operazioni sono più veloci delle $2n$ operazioni implementate in un altro linguaggio? Al contrario é molto importante distinguere, ad esempio, n^2 operazioni da $\sqrt{n}$ operazioni. Anche una macchina più veloce paga un prezzo alto se esegue un algoritmo da n^2 operazioni invece che uno da $\sqrt{n}$.

Per discutere in questi termini utilizziamo la notazione asintotica che è utile per indicare quanto cresce il numero di operazioni di un algoritmo, al crescere della lunghezza dell'input.

Definizione: date $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diciamo che

$$f \in O(g)$$

se esistono $c > 0$ e n_0 tali che $f(n) \leq cg(n)$ per ogni $n > n_0$.

Ad esempio $\frac{n^2}{100} + 3n - 10$ è in $O(n^2)$, non è in $O(n^\ell)$ per nessun $\ell < 2$ ed è in $O(n^\ell)$ per $\ell > 2$.

Complessità di un algoritmo: dato un algoritmo A consideriamo il numero di operazioni $t_A(x)$ eseguite da A sull'input $x \in \{0,1\}^*$. Per ogni taglia di input n possiamo definire il **costo nel caso peggiore** come

$$c_A(n) := \max_{x \in \{0,1\}^n} t_A(x) \, .$$

Diciamo che un algoritmo A ha complessità $O(g)$ se il suo costo nel caso peggiore $c_A \in O(g)$. Per esempio abbiamo visto due algoritmi di ricerca (ricerca lineare e binaria) che hanno entrambi complessità $O(n)$, ed il secondo ha anche complessità $O(\log n)$.

La notazione $O(g)$ quindi serve a dare un approssimativo limite superiore al numero di operazioni che l'algoritmo esegue.

Esercizio: osservare che per ogni $1 < a < b$,

- $\log_a(n) \in O(\log_b(n))$; e
- $\log_b(n) \in O(\log_a(n))$.

Quindi specificare la base non serve.

Definizione (Ω e Θ): date $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ diciamo che

$$f \in \Omega(g)$$

se esistono $c > 0$ e n_0 tali che $f(n) \geq cg(n)$ per ogni $n > n_0$. Diciamo anche che

$$f \in \Theta(g)$$

se $f \in \Omega(g)$ e $f \in O(g)$ simultaneamente.

Complessità di un algoritmo (II): dato un algoritmo A consideriamo ancora il **costo nel caso peggiore** di A su input di taglia n come

$$c_A(n) := \max_{x \in \{0,1\}^n} t_A(x) \ .$$

Diciamo che un algoritmo A ha complessità $\Omega(g)$ se $c_A \in \Omega(g)$, e che ha complessità $\Theta(g)$ se $c_A \in \Theta(g)$.

Per esempio abbiamo visto due algoritmi di ricerca (ricerca lineare e binaria) che hanno entrambi complessità $\Omega(\log n)$, ed il primo anche complessità $\Omega(n)$. Volendo essere più specifici possiamo dire che la ricerca lineare ha complessità $\Theta(n)$ e quella binaria ha complessità $\Theta(\log n)$.

Fate attenzione a questa differenza:

- se A ha complessità $O(g)$, allora A gestisce tutti gli input con al massimo g operazioni circa, asintoticamente.
- se A ha complessità $\Omega(g)$, allora esiste una famiglia infinita di input tali che A richiede almeno g operazioni circa.