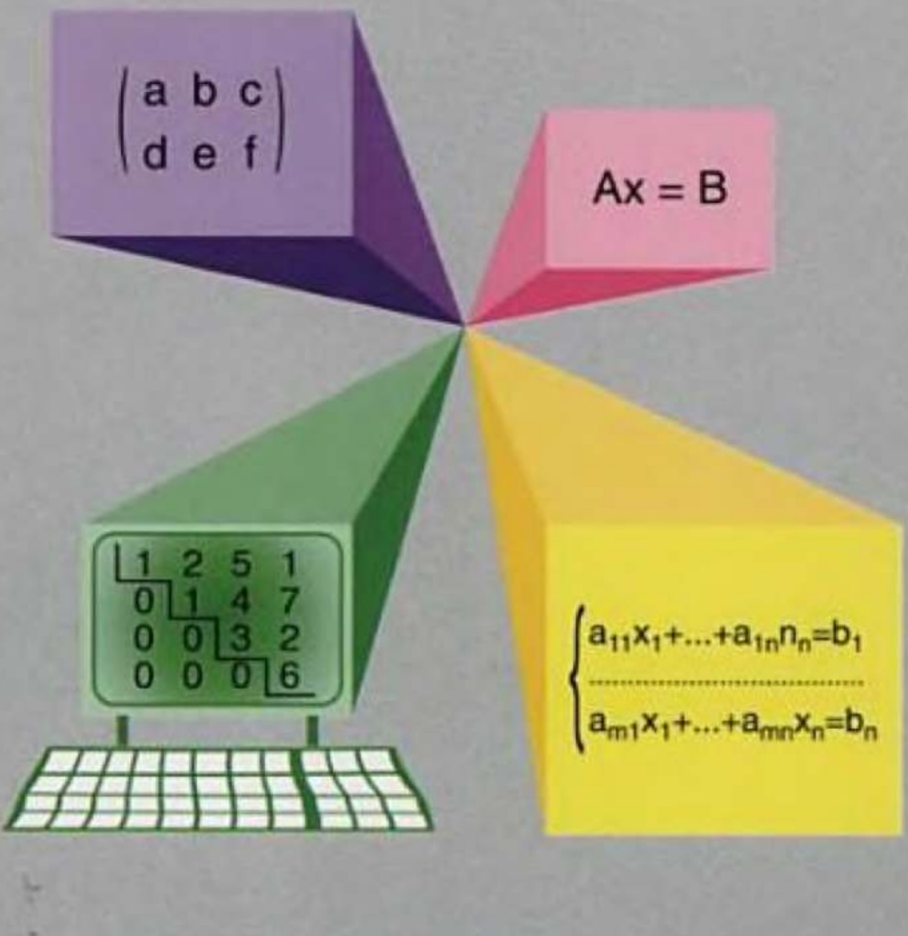
FERRUCCIO ORECCHIA

# ELEMENTI DI GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

## II. Matrici, determinanti e sistemi lineari




LIGUORI EDITORE

*Ferruccio Orecchia*

# Elementi di Geometria e Algebra Lineare

## *II. Matrici, determinanti e sistemi lineari*

Liguori Editore

Pubblicato da Liguori Editore
via Mezzocannone 19, 80134 Napoli



Prima edizione italiana Dicembre 1992

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1999 1998 1997 1996 1995 1994 1993 1992

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata.*

Printed in Italy, Officine Grafiche Liguori, Napoli

ISBN 88-207-2194-5

# Indice

**CAPITOLO TERZO**
**Aspetti computazionali (cenno)**

# *Introduzione*

Questo volume (come gli altri della serie) trae origine dalle lezioni tenute dall'autore in corsi di geometria del primo anno per fisici, ingegneri e matematici, presso le Università di Genova e Napoli.

In questo testo si parte dalla nozione preliminare di sistema lineare, già familiare allo studente dalla scuola media secondaria, e dal problema concreto della sua risoluzione, effettuata mediante il semplice procedimento di eliminazione delle incognite. Ciò costituisce una naturale introduzione al successivo sviluppo della teoria generale delle matrici, determinanti e sistemi lineari. Sebbene sia consueto in altri testi, qui non si fa uso del linguaggio astratto degli spazi vettoriali, che si ritiene non necessario e sovente di ostacolo ad una immediata comprensione degli argomenti. Un particolare accento è stato posto, inoltre, sugli aspetti computazionali, dato l'uso sempre più diffuso dei calcolatori per risolvere problemi di algebra lineare.

*L'Autore*

Elementi di Geometria e
Algebra Lineare

*Capitolo primo*

# Sistemi di equazioni lineari e matrici.

Supponiamo, in tutto il capitolo, di avere fissato un qualsiasi campo[1] k (ad esempio il campo dei numeri razionali **Q**, dei numeri reali **R**, dei numeri complessi **C**). Quando scriveremo «elementi», «costanti» o «scalari» intenderemo in tutti tre i casi «elementi del campo k». Negli esempi ed esercizi k è il campo **R** dei numeri reali.

## 1. Generalità sui sistemi di equazioni lineari

Un'equazione lineare in due variabili $x$ e $y$ è un'equazione che può essere scritta nella forma

$$ax+by=c$$

dove $a$, $b$ e $c$ sono costanti. Ad esempio l'equazione cartesiana di una retta del piano $xy$. Più generalmente, un'**equazione lineare** nelle n variabili $x_1, x_2,\dots,x_n$ è un'equazione che può essere espressa nella forma

(1) $$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\dots+a_nx_n=b$$

dove $a_1, a_2,\dots,a_n$ sono costanti che vengono denominate **coefficienti** delle variabili; la costante $b$ è detta **termine noto**. Se qualche variabile $x_i$ ha il corrispondente coefficiente $a_i$ nullo, si può omettere di scrivere $x_i$ nell'equazione. Se $a_i=0$ diremo allora che $x_i$ **non compare** nell'equazione o che l'equazione **non contiene** tale variabile.

[1] Si dice campo un insieme k su cui siano definite due operazioni + e · tali che qualunque siano $a$, $b$, $c \in k$ si ha:

1) $(a+b)+c=a+(b+c)$
2) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ associatività
3) $a+b=b+a$
4) $a\cdot b=b\cdot a$ commutatività
5) Esiste un'entità additiva 0 e moltiplicativa 1, tali che $a+0=a$ e $a\cdot 1=a$
6) Esiste l'opposto $-a$ e il reciproco $a^{-1}$, tali che $a+(-a)=0$, $a\cdot(a^{-1})=1$.

**Esempio 1.** Le seguenti equazioni sono lineari $2x+3y=1$, $x-3y+z=7$, $x-9y+z=0$, $\sqrt{3}x-5y+\pi z=0$, e $x+2y-z=1$[2], $x_1+2x_2+3x_3+5x_5+7x_7=0$. Non sono lineari le equazioni $2x+5y^2-z=0$, $\cos x - \operatorname{sen} y=1$, $x_1-2\sqrt{x_2}+$ $+x_3=2$, $x_1+x_2x_3-x_4=11$.

Una **soluzione** di un'equazione lineare **(1)** è una $n$-pla $(s_1,\dots,s_n)$ di elementi che soddisfano l'equazione, cioè tale che:

$$a_1s_1+a_2s_2+\dots+a_ns_n=b.$$

Spesso scriveremo tale soluzione anche nel seguente modo:

$$x_1=s_1,\ x_2=s_2,\dots,x_n=s_n.$$

**Esempio 2.** Una soluzione dell'equazione $2x-3y+z=2$ è $(0,1,5)$ poiché $2\cdot 0-3\cdot 1+5=2$. Anche $(-1,\ 1,\ 7)$ è una soluzione di tale equazione.

**Esempio 3.** $x=2$, $y=3$ non è soluzione dell'equazione $5x-3y=2$ poiché $5\cdot 2-3\cdot 3=1\neq 2$.

L'equazione lineare **nulla** $0x_1+0x_2+0x_3+\dots+0x_n=0$ ha come soluzioni tutte le $n$-ple $(s_1,\dots,s_n)$. L'equazione lineare $0x_1+0x_2+0x_3+\dots+0x_n=b\neq 0$ non ha soluzioni e si dice **incompatibile**. Tutte le altre equazioni sono **compatibili** cioè hanno soluzioni che si determinano come segue:

*se l'equazione $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\dots+a_nx_n=b$ ha $a_i\neq 0$, per un $i=1,\dots,n$, la si può moltiplicare per $\dfrac{1}{a_i}$, ottenendo la seguente equazione, detta* **ridotta**, *che (come è facile verificare) ha le stesse soluzioni*:

**(2)** $$a_1'x_1+a_2'x_2+\dots+a_{i-1}'x_{i-1}+x_i+a_{i+1}'x_{i+1}+\dots+a_n'x_n=b'$$

con $a_j'=\dfrac{a_j}{a_i}$, se $j\neq i$, $b'=\dfrac{b}{a_i}$

*Le soluzioni dell'equazione* **(2)** *si ottengono immediatamente attribuendo dei valori arbitrari, $t_j$, alle* **variabili** *$x_j$, $j\neq i$, cioè ponendo $x_j=t_j$ in* **(2)** *e ricavando la* **variabile** *$x_i$. Quindi sono date da:*

**(3)** $$x_1=t_1,\dots,x_{i-1}=t_{i-1},\ x_i=-a_1't_1-a_2't_2-\dots-a_{i-1}'t_{i-1}-a_{i+1}'t_{i+1}-\dots-a_nt_n-b',\ x_{i+1}=t_{i+1},\dots,x_n=t_n$$

*dove $t_1,\dots,t_{i-1}$, $t_{i+1},\dots,t_n$ variano su tutti gli elementi del campo*[3].

[2] Geometricamente, nello spazio cartesiano, ogni equazione lineare in tre variabili $ax+by+cz+d=0$, rappresenta un piano [Vol. I, Cap. II].

[3] In alcuni testi le variabili $x_j$, $j\neq i$, vengono dette **libere** o **indipendenti** e la variabile $x_i$ **dipendente**, mentre $t_j$ sono detti **parametri**.

**Osservazione 1.** Nel caso di equazioni in una sola variabile non si hanno parametri, poiché l'equazione $a_1x_1=b$ ha una sola soluzione data da $x_1=\frac{b}{a_1}$.

**Esempio 4.** L'equazione $3x+2y-z=0$ può essere scritta, ricavando $x$, nella forma $x=-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z$ e, ponendo $y=s$ e $z=t$ le sue soluzioni sono date da $x=-\frac{2}{3}s+\frac{1}{3}t$, $y=s$, $z=t$ al variare dei parametri $s$ e $t$.

Ricavando invece la y dall'equazione si ha $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}z$ e ponendo $x=s$ e $z=t$ le soluzioni sono anche date dalle terne

$$\left(s,\ -\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}t,\ t\right)$$

al variare dei parametri $s$ e $t$.

**Definizione.** Un sistema di equazioni lineari o **sistema lineare** nelle **variabili (o incognite)** $x_1,\dots,x_n$ è un insieme finito di equazioni lineari in tali variabili. Una **soluzione** del sistema è una $n$-pla $(s_1,\dots,s_n)$ di costanti che verifica ogni equazione del sistema.

Un sistema arbitrario di $m$ equazioni lineari in $n$ incognite può quindi essere scritto nella forma:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Si dice che (4) è un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite $x_1,\dots,x_n$. Le costanti $a_{ij}$ sono dette **coefficienti** e le costanti $b_i$ **termini noti** del sistema lineare. L'insieme delle soluzioni del sistema è quindi l'insieme delle $n$-ple $(s_1,\dots,s_n)$ tali che:

$$\begin{cases} a_{11}s_1+a_{12}s_2+a_{13}s_3+\dots+a_{1n}s_n=b_1 \\ a_{21}s_1+a_{22}s_2+a_{23}s_3+\dots+a_{2n}s_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}s_1+a_{m2}s_2+a_{m3}s_3+\dots+a_{mn}s_n=b_m \end{cases}$$

**Esempio 5.** Una soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3=7 \\ 2x_1-x_2+x_3=-1 \\ 6x_1+2x_2-4x_3=16 \end{cases}$$

è

$$x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-2$$

poiché tali valori verificano tutte e tre le equazioni.

Invece $(1, 3, 0)$ non è una soluzione del sistema poiché tali valori verificano solo le prime due equazioni e non la terza.

Non sempre un sistema di equazioni ha soluzioni. Un sistema lineare privo di soluzioni si dice spesso **incompatibile** o **inconsistente**. Se un sistema ha almeno una soluzione si dice **compatibile** o **consistente**.

**Esempio 6.** Il sistema $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$ è chiaramente incompatibile,

poiché moltiplicando per $\frac{1}{2}$ la seconda equazione si ottiene $x-y=1$ e se $(s_1, s_2)$ fosse una soluzione del sistema si avrebbe $0=s_1-s_2=1$; assurdo.

**Esempio 7.** Il problema delle soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite ha una facile interpretazione geometrica, utile per ricordare il seguente fatto generale che dimostreremo nel seguito: ogni sistema lineare ha una, nessuna o infinite soluzioni. Infatti una retta ha come equazione cartesiana un'equazione lineare onde determinare le soluzioni di un sistema di due equazioni in due incognite equivale geometricamente a determinare i punti di intersezione di due rette. Ci sono tre possibilità:

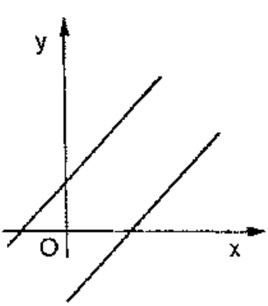



Figura 1.a

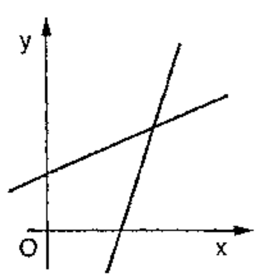



Figura 1.b

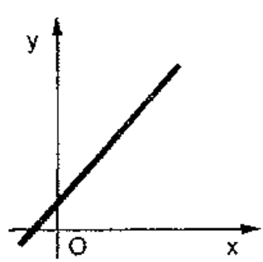



Figura 1.c

a) le rette sono parallele, nel qual caso non ci sono intersezioni e conseguentemente il sistema è incompatibile [Fig. 1.a];
b) le rette si incontrano in un punto e allora il sistema ha una ed una sola soluzione [Fig. 1.b];
c) le rette sono coincidenti e allora ci sono infiniti punti di intersezione cioè infinite soluzioni del sistema [Fig. 1.c].

Vediamo ora cosa significa risolvere un sistema lineare. Iniziamo con sistemi particolarmente semplici, i sistemi ridotti, le cui soluzioni si determinano immediatamente.

**Definizione.** Un sistema lineare si dice in **forma ridotta** o **ridotto** se ogni equazione non nulla contiene, con coefficiente 1, almeno una variabile che non compare in nessun'altra equazione[4].

**Esempio 8.** Dati i sistemi lineari

a) $\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3y-z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-3x_4+5x_5=2 \\ 3x_2-7x_5=4 \\ x_3+x_4\quad =0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_2+x_3 \quad =1 \\ x_1-2x_2+x_4=5 \end{cases}$

a) è ridotto, poiché la prima equazione contiene la variabile $x$ che non compare nella seconda, la seconda equazione contiene la $y$ che non compare nella prima ed entrambe hanno coefficiente 1;
b) non è ridotto, poiché nella seconda equazione tutte le variabili sono presenti anche nella prima equazione;
c) non è ridotto, perché, anche se la prima, seconda e terza equazione contengono rispettivamente $x_1$, $x_2$, $x_3$ che non compaiono nelle rimanenti equazioni, la variabile $x_2$ ha coefficiente 3 e non 1 come richiesto dalla definizione;
d) è ridotto, poiché la prima equazione contiene la variabile $x_3$ che non compare nella seconda e la seconda equazione contiene le variabili $x_1$ e $x_4$ che non compaiono nella prima; tutte hanno coefficiente 1.

Consideriamo un sistema lineare ridotto di $r$ equazioni in $n$ variabili $x_1$,

[4] Geometricamente, la nozione di sistema ridotto, in tre variabili, applicata alle equazioni di una retta dà luogo alla nozione di retta rappresentata in forma ridotta, vale a dire intersezione di piani paralleli agli assi [Vol. I, Cap. II, Esercizio 38].

$x_2,\dots,x_n$. Secondo la definizione per ogni $i=1,\dots,r$, l'$i$-esima equazione contiene una variabile $x_{k_i}$ che non compare nelle altre equazioni del sistema. Se $x_{p_1},\dots,x_{p_s}$, $s=n-r$, sono le variabili diverse da $x_{k_1},\dots,x_{k_r}$ l'i-esima equazione contiene solo le incognite $x_{k_i},x_{p_1},\dots,x_{p_s}$ onde, attribuendo valori arbitrari $t_j$ alle variabili $x_{p_j}$ nelle equazioni del sistema ridotto e ricavando le variabili $x_{k_i}$ [Formula (3)] si ha:

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} x_{k_1}=\Sigma\ (t_1,\dots,t_s) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{k_r}=\Sigma(t_1,\dots,t_s) \end{cases}$$

dove $\Sigma(\ )$ indica le somme contenenti $t_1,\dots,t_s$ che si ricavano immediatamente dalle equazioni del sistema. Abbiamo quindi provato il:

**Lemma 2.** *Un sistema lineare ridotto è sempre compatibile e le* (5) *insieme con $x_{p_1}=t_1,\dots,x_{p_s}=t_s$ determinano tutte le n-ple che sono soluzioni del sistema, al variare di $t_1,\dots,t_s$ nel campo considerato.*

**Osservazione 3.** Se $n=r$, cioè nel sistema lineare ridotto il numero delle equazioni non nulle coincide con quello delle variabili, il sistema non contiene variabili $x_{p_i}$ ed ha l'unica soluzione: $x_1=c_1,\dots,x_n=c_n$ dove $c_1,\dots,c_n$ sono costanti.

Vediamo alcuni esempi.

**Esempio 9.** Consideriamo il sistema lineare ridotto

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$

dell'esempio 8.a); ponendo $z=t$ si ha

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+2 \end{cases}$$

onde le terne

$$x=t+1, \quad y=t+2, \quad z=t$$

descrivono l'insieme delle soluzioni al variare di $t$ nei numeri reali. Ad esempio per $t=2$ si ottiene la soluzione (3,4,2); per $t=-1$ si ottiene la soluzione $(0,1,-1)$.

**Esempio 10.** Il sistema ridotto dell'esempio 8.d)

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} x_3 = -3x_2 \phantom{{}-x_4} + 1 \\ x_1 = 2x_2 - x_4 + 5 \end{cases}$$

Ponendo $x_2 = s$ e $x_4 = t$ le sue soluzioni sono date da $(2s - t + 5,\ s,\ -3s + 1,\ t)$ al variare dei numeri reali $s$ e $t$.

Ma lo stesso sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} x_3 = -3x_2 \phantom{{}-x_1} + 1 \\ x_4 = 2x_2 - x_1 + 5 \end{cases}$$

e, ponendo $x_1 = s$ e $x_2 = t$, le soluzioni possono anche essere descritte da $(s,\ t,\ -3t + 1,\ 2t - s + 5)$ al variare dei numeri reali $s$ e $t$.

Vediamo ora cosa vuol dire risolvere un sistema lineare qualsiasi.

**Definizione.** Due sistemi lineari, in $n$ variabili, si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni cioè ogni soluzione dell'uno è anche soluzione dell'altro e viceversa.

**Osservazione 4.** Chiaramente due sistemi lineari entrambi in n variabili e incompatibili sono sempre equivalenti. Inoltre due sistemi equivalenti possono avere un diverso numero di equazioni.

**Definizione. Determinare le soluzioni di** (o **risolvere**) **un sistema lineare** significa decidere se è incompatibile o meno e, se è compatibile, determinare le soluzioni di un sistema ridotto [Lemma 2] equivalente ad esso.

Per risolvere un sistema lineare compatibile è, di fatto, sufficiente ottenere un sistema lineare ridotto equivalente al sistema dato cioè **ridurre il sistema a forma ridotta.** Infatti, come visto, le soluzioni di un sistema ridotto si determinano immediatamente [Lemma 2].

Un semplice metodo per ottenere un sistema lineare ridotto equivalente ad un sistema dato consiste nell'applicare alle sue equazioni le seguenti operazioni.

**Definizione.** I seguenti tre tipi di operazioni, applicate alle equazioni di un sistema lineare, si dicono **trasformazioni elementari:**

**Tipo 1.** moltiplicare un'equazione per una costante non nulla
**Tipo 2.** scambiare due equazioni
**Tipo 3.** aggiungere un multiplo di un'equazione ad un'altra equazione

**Lemma 5.** *Ogni trasformazione elementare non cambia le soluzioni di un sistema lineare onde applicando ad un sistema dato un numero finito di trasformazioni elementari si ottiene un sistema equivalente ad esso.*

**Dim.** [Esercizio 49].

**Osservazione 6.** Mostreremo nel seguito [Cap. II, Cor. 38] che se due sistemi lineari compatibili, in $n$ variabili, sono equivalenti le equazioni di uno si possono sempre ottenere dalle equazioni dell'altro mediante un numero finito di trasformazioni elementari. Ciò motiva l'importanza delle trasformazioni elementari nello studio dei sistemi lineari.

**Esempio 11.** I sistemi lineari, nelle incognite $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 3 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

sono equivalenti. Infatti sommando, nel primo sistema, alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-2$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 12x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Moltiplicando ora la seconda equazione per $-1$ e scambiandola con la terza si ha poi il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Sommando alla seconda equazione la terza si ha:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+3x_3-x_4=0 \\ -3x_1+18x_2+6x_3-3x_4=0 \\ x_1+12x_2+2x_3-5x_4=-3 \end{cases}$$

e moltiplicando la seconda equazione per $\frac{1}{3}$ si ha il sistema b).

Si può facilmente determinare un procedimento, detto **metodo di eliminazione delle incognite** che consente di risolvere un qualsiasi sistema lineare. Tale procedimento, che descriviamo informalmente, consiste nell'eliminare via via variabili del sistema, fino ad arrivare ad un sistema incompatibile o ad uno ridotto, con l'applicazione ripetuta di trasformazioni elementari del tipo 1 e 3.

**(6) Metodo di eliminazione delle incognite.**

Si consideri una incognita $x_j$ che compare, con coefficiente $a$, in una equazione, $i$-esima, del sistema lineare dato **(4)**. Moltiplichiamo tale equazione per $\frac{1}{a}$ (trasformazione elementare di tipo 3), in modo da far diventare 1 il coefficiente di $x_j$. Poi se $b$ è il coefficiente di $x_j$ nell'$h$-esima equazione, $h \neq i$, sottraiamo a quest'ultima la $i$-esima equazione moltiplicata per $b$ (con questa trasformazione elementare si elimina $x_j$ da tutte le equazioni diverse dalla $i$-esima). Ripetiamo le stesse trasformazioni elementari per le altre incognite che compaiono nelle rimanenti equazioni. *Se durante il procedimento si ottiene l'equazione incompatibile* $0x_1+0x_2+0x_3+\ldots+0x_n=b\neq 0$ *allora il sistema* **(4)** *è incompatibile. Altrimenti si perviene ad un sistema ridotto le cui soluzioni sono quelle del sistema dato.*

**Osservazione 7.** Con il metodo di eliminazione sopra esposto si ha libertà nella scelta delle incognite che si vogliono eliminare. Sta all'abilità del solutore scegliere le incognite che consentono di fare meno calcoli (ad esempio quelle che compaiono nel minor numero di equazioni).

**Esempio 12.** Vogliamo determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad -x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2+ \qquad x_4=2 \\ x_1 \qquad -2x_3 \qquad =1 \end{cases}$$

Consideriamo l'incognita $x_4$ nella seconda equazione ed eliminiamo $x_4$ dalla prima equazione sommando quest'ultima con la seconda equazione. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Consideriamo poi l'incognita $x_2$ che compare nella prima equazione. Moltiplichiamo tale equazione per $-1$. Eliminiamo poi $x_2$ dalla seconda equazione aggiungendo ad essa 3 volte la prima equazione. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -1 \\ -7x_1 + x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Infine consideriamo l'incognita $x_3$ della terza equazione che moltiplicheremo per $-\frac{1}{2}$. Si ottiene così il sistema ridotto:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -1 \\ -7x_1 + x_4 = -1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

le cui soluzioni, ponendo $x_1 = t$ sono date da:

$$\left(t,\ -1+3t,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t,\ -1+7t\right)$$

**Esempio 13.** Vogliamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Consideriamo l'incognita $x_2$ della prima equazione ed eliminiamola dalla terza aggiungendovi due volte la prima. Si ha il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Ora consideriamo l'incognita $x_3$ della seconda equazione ed eliminiamola dalla terza sottraendovi la seconda. Si ottiene l'equazione incompatibile $0x_1 + + 0x_2 + 0x_3 = 3$ per cui il sistema dato non ha soluzioni.

Nei paragrafi successivi descriveremo un altro metodo di eliminazione delle incognite, detto di Gauss. Tale metodo è più sistematico perché non lascia libera la scelta delle variabili da eliminare. Infatti inizia l'eliminazione dalla prima incognita che compare nel sistema. Tuttavia il metodo di Gauss è per la sua efficienza e facilità di implementazione sui calcolatori generalmente il più usato per risolvere un sistema lineare. Inoltre, come vedremo, esso è legato alla teoria della riduzione che permette, di dimostrare vari risultati sulle matrici. In generale il metodo di Gauss consente di risolvere un sistema lineare con meno operazioni del metodo di eliminazione. Rimarchiamo però che, in taluni casi, un uso intelligente del metodo di eliminazione **(6)** consente di risolvere più rapidamente un sistema lineare [Esempio 32].

## 2. Generalità sulle matrici. Trasformazioni elementari e matrici equivalenti

Per studiare i sistemi lineari è fondamentale ricorrere alla nozione di matrice. Tale nozione che in questo volume sarà vista solo in riferimento ai sistemi lineari trova numerose applicazioni in svariati settori della matematica[5]. Ci è per ora solo necessaria la definizione di matrice. Le operazioni sulle matrici saranno introdotte successivamente.

**Definizione.** Si dice **matrice** $A$ una tabella rettangolare di elementi disposti secondo righe e colonne. Per individuare la posizione degli elementi di una matrice $A$ la si scrive nella forma:

**(7)**
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che diremo matrice a $m$ righe ed $n$ colonne o, più semplicemente matrice $m \times n$. L'elemento di posto $(i,j)$ in $A$, denotato con $a_{ij}$, appartiene alla **i-esima riga** $(a_{i1} \dots a_{in})$ e alla **j-esima colonna**

[5] Ad esempio è utile per il prodotto vettoriale e misto di vettori dello spazio euclideo [Vol. I, Cap. I, Par. 6].

$$\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Spesso scriveremo la matrice $A$ sinteticamente nella forma $A = (a_{ij})$. Solitamente denoteremo le matrici con lettere maiuscole.

Due matrici sono **uguali** se hanno la stessa dimensione (cioè sono entrambe matrici $m \times n$) e hanno i corrispondenti elementi uguali.

Una matrice i cui elementi sono tutti zero si dice **matrice nulla**.

**Esempio 14.** a. Consideriamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha $A \neq C$, poiché $A$ e $C$ non hanno la stessa dimensione. Per lo stesso motivo $B \neq C$. Anche $A \neq B$, poiché non tutti i corrispondenti elementi sono uguali.

**Esempio 15.** Le matrici nulle:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono diverse tra loro perché hanno dimensioni diverse.

**Esempio 16.** Per studiare un sistema lineare **(4)** si fa spesso riferimento alla seguente matrice $A$ che contiene i coefficienti e i termini noti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} & \dots & b_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

e che si dice **matrice completa** del sistema.

Se $A=(a_{ij})$ è una matrice $m\times n$ indicheremo con $\mathbf{r}_i$ la riga $i$-esima $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ (le virgole sono messe per chiarezza notazionale).

**Definizione.** Le seguenti operazioni si dicono **trasformazioni elementari** (sulle righe) $\mathbf{r}_i$ di $A$.

**Tipo 1.** Moltiplicare una riga $\mathbf{r}_i$ per una costante non nulla $c$, che indicheremo con $\mathbf{r}_i\to c\mathbf{r}_i$[6]
**Tipo 2.** Scambiare due righe $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{r}_j$ che indicheremo con $\mathbf{r}_i\leftrightarrow\mathbf{r}_j$
**Tipo 3.** Aggiungere un multiplo di una riga $\mathbf{r}_i$ ad un'altra riga $\mathbf{r}_j$ che indicheremo con $\mathbf{r}_i\to\mathbf{r}_i+c\mathbf{r}_j$[6]

**Esempio 17.** Se $A$ è la matrice completa (8) del sistema lineare (4) ogni trasformazione elementare sulle equazioni del sistema ha come corrispondente una trasformazione elementare, dello stesso tipo, sulle righe di $A$.

**Definizione.** Date due matrici non nulle $A$ e $B$, diremo che $A$ è **equivalente** (per righe) a $B$ se $B$ è ottenuta da $A$ mediante un numero finito di trasformazioni elementari applicate alle righe di $A$.

**Proposizione 8.** *Se $A$, $B$, $C$ sono matrici:*

a) *$A$ è equivalente ad $A$ (proprietà riflessiva)*
b) *se $A$ è equivalente a $B$ allora $B$ è equivalente ad $A$ (proprietà simmetrica)*
c) *se $A$ è equivalente a $B$ e $B$ è equivalente a $C$ allora $A$ è equivalente a $C$ (proprietà transitiva).*

*Quindi l'equivalenza di matrici è una relazione di equivalenza.*

**Dim.** a) e c) sono immediate.
b) Se una trasformazione elementare viene applicata alle righe di una matrice $A$ ottenendo così una nuova matrice $A'$, allora esiste una trasformazione inversa che applicata alle righe di $A'$, fa ritornare di nuovo ad $A$. Infatti la trasformazione di tipo 1) $\mathbf{r}_i\to c\mathbf{r}_i$ ha come trasformazione inversa $\mathbf{r}_i\to\left(\frac{1}{c}\right)\mathbf{r}_i$.
La trasformazione di tipo 2) $\mathbf{r}_i\leftrightarrow\mathbf{r}_j$ ha come trasformazione inversa $\mathbf{r}_j\leftrightarrow\mathbf{r}_i$. Infine la trasformazione di tipo 3) $\mathbf{r}_i\to\mathbf{r}_i+c\mathbf{r}_j$ ha come inversa $\mathbf{r}_i\to\mathbf{r}_i-c\mathbf{r}_j$. Quindi se $B$ è ottenuta da $A$ applicando un numero finito di trasformazioni elementari allora $A$ è ottenuta da $B$ applicando le inverse di tali trasformazioni elementari.

In virtù della proposizione 8 si può dire che $A$ e $B$ sono **equivalenti** se $A$ è equivalente a $B$ oppure $B$ è equivalente ad $A$.

[6] In simboli, se $\mathbf{r}_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ e $\mathbf{r}_j=(a_{j1},\ldots,a_{jn})$, effettuando 1) si sostituisce, nella matrice $A$, la riga $i$-esima $(a_{i1},\ldots,a_{in})$ con la riga $(ca_{i1},\ldots,ca_{in})$; effettuando 3) la riga $i$-esima viene sostituita con $(a_{i1}+ca_{j1},\ldots,a_{in}+ca_{jn})$.

**Lemma 9.** *Due sistemi lineari le cui matrici complete sono equivalenti, sono anch'essi equivalenti.*

**Dim.** Basta osservare che tali sistemi possono essere ottenuti uno dall'altro mediante trasformazioni elementari e quindi hanno le stesse soluzioni [Esercizio 49].

**Esempio 18.** Le matrici $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ non sono equivalenti.

Infatti il sistema lineare $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$ di matrice completa A ha soluzione (1,1) che non è soluzione del sistema $\begin{cases} x+3y=4 \\ 4x+y=6 \end{cases}$ di matrice completa $B$. Quindi i due sistemi non sono equivalenti e neppure le matrici $A$ e $B$, in virtù del Lemma 9.

**Esempio 19.** Le matrici $3\times 5$ $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -7 & 3 \\ -4 & 6 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ e

$B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ sono equivalenti. Infatti $A$ e $B$ sono rispettivamente le matrici complete dei sistemi a) e b) dell'Esempio 11.

Il secondo sistema è ottenuto dal primo con trasformazioni elementari, come viene mostrato nell'esempio 11 e quindi $A$ e $B$ sono equivalenti [Esempio 17].

**Osservazione 10.** In virtù dell'Osservazione 6, per sistemi compatibili vale il viceversa del Lemma 9, cioè, se due sistemi lineari compatibili sono equivalenti anche le loro matrici complete sono tali.

## 3. Matrici a scalini e matrici a scalini ridotte. Riduzione di una matrice a forma a scalini o a scalini ridotta

**Definizione.** Una matrice non nulla si dice a **scalini** (relativamente alle righe) se ha le seguenti proprietà:

1) se una riga è nulla, tutte le righe successive sono nulle;
2) il primo elemento diverso da zero di una riga non nulla, detto **pivot**, è più

a sinistra del primo elemento non nullo delle righe successive[7].

Una matrice si dice **a scalini ridotta** se oltre le precedenti due proprietà verifica anche le seguenti:

3) il pivot di una qualunque riga non nulla è 1;
4) ogni colonna che contiene il pivot di una riga ha tutti gli altri elementi nulli.

**Esempio 20.** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ non è a scalini poiché il pivot della seconda riga è più a destra del pivot della terza riga.

**Esempio 21.** La seguente matrice è a scalini:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ non è a scalini ridotta poiché verifica la proprietà 3) ma non la proprietà 4). Infatti la quarta colonna che contiene il pivot 1 della terza riga, contiene l'elemento $-2$ non nullo.

**Esempio 22.** La matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è a scalini ridotta.

[7] In simboli una matrice è a scalini se soddisfa alle seguenti due proprietà:
1) se $a_{ij}=0$ per $j=1,\dots,n$ allora $a_{hj}=0$ per $h \geq i$ e $j=1,\dots,n$
2) se $a_{ij} \neq 0$ e $a_{ih}=0$, per ogni $h<j$, allora $a_{i+1,h}=0$, per ogni $h \leq j$.

**Esempio 23.** La matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è a scalini ma non a scalini ridotta, poiché verifica la proprietà 4) ma non la 3), essendo $-1$ il pivot della terza riga.

**Osservazione 11.** La denominazione di matrice a scalini è chiarita dalla Figura 2 osservando che il numero di righe non nulle coincide con il numero degli scalini della scala che separa gli zeri dagli altri elementi (abbiamo indicato con $\times$ i pivot della matrice):

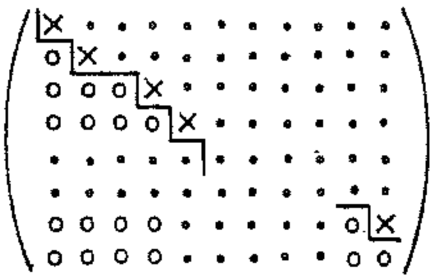


Figura 2

**Lemma 12.** *Consideriamo un sistema lineare di matrice completa R che verifica le seguenti due condizioni*:

a) *R è a scalini ridotta*
b) *l'ultima riga non nulla di R non è* (0, 0, ..., 0, 1), *ovvero nessun pivot di R appartiene all'ultima colonna.*

*Allora il sistema è ridotto.*

**Dim.** Ogni riga non nulla di S contiene un pivot, di valore 1, che appartiene ad una colonna con tutti gli altri elementi nulli, in virtù delle 3) e 4) della definizione di matrice a scalini ridotta. Tale pivot, in virtù della ipotesi b), è coefficiente di un'incognita del sistema che quindi è ridotto.

**Osservazione 13.** Un sistema lineare ridotto può avere matrice completa non a scalini. Tuttavia semplicemente riordinando le equazioni del sistema esso può diventare un sistema di matrice completa a scalini ridotta come mostra il seguente esempio.

**Esempio 24.** Il sistema

$$\begin{cases} \qquad\quad x_3 - 3x_4 = 1 \\ \quad x_2 \quad\; + \; x_4 = 5 \\ x_1 \qquad\quad + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

ha matrice completa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

che non è a scalini. Tuttavia scambiando la prima equazione con la terza il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + 3x_4 = 3 \\ \quad x_2 \quad\; + \; x_4 = 5 \\ \qquad\quad x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

che ha matrice completa a scalini ridotta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vediamo ora il procedimento, alla base del metodo di eliminazione di Gauss, che permette di trasformare ogni matrice in una matrice a scalini e quindi a scalini ridotta ad essa equivalente.

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$.

**(9)** **Algoritmo di riduzione.**

L'algoritmo si divide in due parti a) e b)

**(9.a) Riduzione di una matrice a forma a scalini**

**Passo 1.** Si individui la prima colonna non nulla (partendo da sinistra) di $A$ e il primo elemento (partendo dall'alto) non nullo $a$ di tale colonna. Sia $\mathbf{r}_k$ la riga che ha come pivot $a$[*].

**Passo 2.** Scambiamo le righe $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_k$ ($\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_k$) in modo da portare $a$ nella prima riga.

**Passo 3.** Per ogni riga $\mathbf{r}_h$, $h>1$, se $c$ è l'elemento di $\mathbf{r}_h$ che sta sotto ad $a$ operiamo la trasformazione elementare $\mathbf{r}_h \to \mathbf{r}_h - \left(\dfrac{c}{a}\right)\mathbf{r}_1$ (questa operazione annulla via via tutti gli elementi della colonna che contiene $a$ fino che $a$ resta l'unico elemento non nullo).

**Passo 4.** Escludiamo la prima riga, vale a dire consideriamo la sottomatrice delle righe $\mathbf{r}_i$, $2 \leq i \leq m$. Se quest'ultima è costituita da una sola riga o è la matrice nulla l'algoritmo termina; altrimenti ricominciamo dal passo 1 applicato a tale sottomatrice. Terminato l'algoritmo **(9.a)** si ricava quindi *una matrice a scalini $S$ equivalente ad $A$.*

**(9.b) Riduzione di una matrice a scalini a forma a scalini ridotta.**

Sia $S$ una matrice a scalini.

**Passo 1.** Consideriamo il pivot $a$ dell'ultima riga $\mathbf{r}_i$ non nulla di $S$. Moltiplichiamo $\mathbf{r}_i$ per $\dfrac{1}{a}$ $\left(\mathbf{r}_i \to \dfrac{1}{a}\mathbf{r}_i\right)$ in modo da ottenere una matrice in cui $\mathbf{r}_i$ ha 1 come pivot.

**Passo 2.** Per ogni riga $\mathbf{r}_h$, $h<i$, se $c$ è l'elemento di $\mathbf{r}_h$ che sta sopra ad 1, operiamo la trasformazione $\mathbf{r}_h \to \mathbf{r}_h - c\mathbf{r}_i$, in modo che il pivot 1 di $\mathbf{r}_i$ sia l'unico elemento non nullo della colonna che lo contiene.

**Passo 3.** Consideriamo la sottomatrice ottenuta escludendo la riga $\mathbf{r}_i$ e torniamo al passo 1. Il procedimento termina quando si è giunti al pivot della prima riga di $S$.

Terminato l'algoritmo 9.b) *si ottiene una matrice a scalini ridotta $R$ equivalente ad $S$.*

[*] In simboli se $a = a_{kh} \neq 0$ allora $a_{ij} = 0$ se $j<h$ oppure se $j=h$ e $i<k$.

**Applicando in successione i passi 1), 2), 3), 4) di (9.a) e 1), 2), 3) di b)** *si ottiene una matrice ridotta $R$ equivalente alla matrice $A$.*

La matrice $S$, del precedente algoritmo di riduzione si dice una **forma a scalini** di $A$. La matrice $R$ si dice la **forma a scalini ridotta** di $A$.

**Osservazione 14.** Con il precedente algoritmo resta provato che *ogni matrice è equivalente ad una matrice a scalini e ad una a scalini ridotta.* $S$ si dice **una** forma a scalini di $A$ poiché una matrice può essere equivalente a più di una matrice a scalini. Invece $R$ si dice **la** forma a scalini ridotta di $A$ poiché *ogni matrice è equivalente ad un'unica matrice a scalini ridotta*. Omettiamo la dimostrazione, non banale, di quest'ultimo risultato in quanto non rilevante per la nostra trattazione.

**Esempio 25.** Vogliamo ridurre la seguente matrice a forma a scalini e quindi a forma a scalini ridotta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Applichiamo dapprima l'algoritmo (9.a).

**Passo 1.** La 1ª colonna è non nulla ed ha come primo elemento non nullo il pivot 1 della prima riga.

**Passo 2.** Nessuna trasformazione da fare.

**Passo 3.** Annulliamo gli elementi sotto il pivot 1 mediante le trasformazioni elementari specificate a sinistra:

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

**Passo 4.** Escludiamo la prima riga $\mathbf{r}_1$ e applichiamo l'algoritmo alla sottomatrice delle righe rimanenti

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

La 2ª colonna è la prima colonna non nulla ed ha come primo elemento non nullo il pivot $-1$ di $\mathbf{r}_2$.

Annulliamo gli elementi sotto $-1$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 - 7\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Eliminiamo anche la seconda riga $\mathbf{r}_2$.

La 4ª colonna è la prima non nulla nella sottomatrice risultante ed ha $-1$ come primo elemento non nullo. Annulliamo l'elemento sotto $-1$.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 - 2\mathbf{r}_3 \end{array} \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminando anche la terza riga si è arrivati all'ultima riga di $A$ e l'algoritmo termina. Abbiamo ottenuto la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una forma a scalini di $A$.

Riduciamo $S$ alla forma a scalini ridotta con l'Algoritmo **(9.b)**.

**Passo 1.** Il pivot dell'ultima riga $\mathbf{r}_3$ non nulla è $-1$. Moltiplichiamo $\mathbf{r}_3$ per $-1$.

$$\mathbf{r}_3 \to -\mathbf{r}_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 2.** Annulliamo gli elementi sopra il pivot 1 di $\mathbf{r}_3$.

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Passo 3.** Escludiamo $\mathbf{r}_3$ e applichiamo l'algoritmo alla sottomatrice così ottenuta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il pivot dell'ultima riga non nulla $\mathbf{r}_2$ è $-1$

$$\mathbf{r}_2 \to -\mathbf{r}_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escludendo $\mathbf{r}_2$ si giunge alla prima riga che ha pivot 1 onde l'algoritmo termina e

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la forma a scalini ridotta di $A$.

**Esempio 26.** Vogliamo ridurre la seguente matrice a forma a scalini e poi a forma a scalini ridotta.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Passo 1.** La 2ª colonna è la prima non nulla e il suo primo elemento non nullo appartiene a $\mathbf{r}_2$.

**Passo 2.** $\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_1 \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**Passo 3.**

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

**Passo 4.** Escludiamo la prima riga e ritorniamo al passo 1.

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è la forma a scalini di } A.$$

Applichiamo ad $S$ l'algoritmo **(9.b)**.

$$\mathbf{r}_3 \to \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 4\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 \to 2\mathbf{r}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \to \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{è la forma a scalini ridotta di } A.$$

A volte può essere preferibile ridurre una matrice a forma a scalini senza effettuare divisioni (ad esempio ciò consente di sviluppare una teoria delle matrici e dei sistemi lineari su un anello, come vedremo nel Capitolo III). Vediamo un algoritmo per effettuare tale riduzione. L'algoritmo differisce dall'algoritmo **(9.a)** solo nel fatto che il Passo 3 viene spezzato in due parti, che permettono di evitare l'uso di frazioni.

**(10) Algoritmo di riduzione a forma a scalini senza l'uso di divisioni.**

**Passo 1.** e **Passo 2.** Come nell'algoritmo **(9.a)**.

**Passo 3.** Per ogni riga $\mathbf{r}_h$, $h > 1$, se $c$ è l'elemento di $\mathbf{r}_h$ che sta sotto ad $a$ operiamo le trasformazioni elementari $\mathbf{r}_h \to a\,\mathbf{r}_h$ e $\mathbf{r}_h \to \mathbf{r}_h - c\,\mathbf{r}_1$ (queste due operazioni potrebbero essere sintetizzate con la seguente $\mathbf{r}_h \to a\,\mathbf{r}_h - c\,\mathbf{r}_1$).

**Passo 4.** Come nell'algoritmo **(9.a)**.
Terminato l'algoritmo si ha quindi **una matrice a scalini** $S$ **equivalente ad** $A$.

**Esempio 27.** Consideriamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dell'esempio 26 e riduciamola a forma a scalini con l'algoritmo **(10)**.
I passi 1 e 2 sono identici a quelli dell'esempio 26.

$$\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La trasformazione elementare del passo 3, $\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \frac{3}{2}\,\mathbf{r}_1$, viene decomposta nelle due trasformazioni elementari:

$$\mathbf{r}_3 \to 2\mathbf{r}_3 \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

Proseguendo poi con la trasformazione $\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3$ si ottiene la matrice a scalini

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## 4. Metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare.

In questo paragrafo descriviamo il metodo di eliminazione delle incognite detto anche di Gauss che consente di risolvere un sistema lineare. Esso consiste nell'applicare l'algoritmo di riduzione **(9)** alla matrice completa di un sistema lineare per ottenere un sistema incompatibile od un sistema ridotto equivalente le cui soluzioni si determinano immediatamente. Spesso per «metodo di eliminazione di Gauss» si intende anche la riduzione della matrice completa a forma a scalini [Algoritmo **(9.a)**] determinando poi le eventuali soluzioni con un procedimento di sostituzione a ritroso delle variabili. Come vedremo i due metodi sono equivalenti poiché implicano le stesse operazioni sulle costanti per cui sta alle preferenze del lettore applicare l'uno o l'altro.

Consideriamo il sistema lineare

$$\textbf{(11)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

e la sua matrice completa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

**Proposizione 15.** *Sia $S$ la matrice a scalini ottenuta applicando ad $A$ l'algoritmo di riduzione* **(9.a)**. *Il sistema lineare* **(11)** *è compatibile se e solo se l'ultima riga non nulla di $S$ non è del tipo* $(0,0,\ldots 0,b)$, *con* $b \neq 0$ *o equivalentemente nessun pivot di $S$ appartiene all'ultima colonna. In tal caso la forma a scalini ridotta $R$ di $A$ è matrice completa di un sistema ridotto equivalente a* **(11)**.

**Dim.** Se l'ultima riga non nulla della matrice $S$ è del tipo $(0,0,\ldots,b)$, $b \neq 0$, allora il sistema che ha come matrice completa $S$ ha un'equazione del tipo $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$ ed è quindi incompatibile onde tale è il sistema **(11)** ad esso equivalente. Se l'ultima riga non nulla di $S$ non è del tipo $(0,0,\ldots,b)$, $b \neq 0$, per come è costruito l'algoritmo **(9.b)**, l'ultima riga non nulla della forma ridotta $R$ di $S$ non è $(0,0,\ldots,0,1)$ e quindi il sistema di matrice completa $R$ è ridotto [Lemma 12] quindi è compatibile [Lemma 2] onde è compatibile il sistema dato equivalente ad esso [Lemma 5]. Con ciò resta provata sia l'ultima asserzione sia l'equivalenza della proposizione.

Siamo ora in grado di descrivere il:

**Metodo di eliminazione di Gauss**

Il metodo si divide in due parti a) e b).

**a) Compatibilità del sistema lineare.**

Applichiamo alla matrice $A$ di **(11)** l'algoritmo **(9.a)**. Si ottiene una forma a scalini $S$ di $A$.

Se $S$ ha l'ultima riga non nulla del tipo $(0,0,\ldots,0,b)$, con $b \neq 0$, il sistema **(11)** è incompatibile [Prop. 15]. Altrimenti passiamo alla parte b).

**b) Riduzione del sistema a forma ridotta.**

Riduciamo $S$ a forma a scalini ridotta $R$ mediante l'algoritmo **(9.a)**. Il sistema di matrice completa $R$ è ridotto [Lemma 12] e le sue soluzioni, che si determinano immediatamente [Lemma 2], sono le soluzioni di **(11)**.

**Osservazione 16.** Se durante il procedimento di riduzione della matrice $A$ a forma a scalini si ottiene una matrice che, ancorché non a scalini, ha una riga del tipo $(0,\ldots,0,b)$, $b \neq 0$, si può immediatamente concludere che il sistema dato non ha soluzioni.

**Esempio 28.** Vogliamo risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x \phantom{{}+y} + z = 2 \\ \phantom{x+{}} y + z = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo tale matrice a forma a scalini.

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quest'ultima matrice è a scalini e ha l'ultima riga del tipo $(0,0,\dots,0,1)$ (cioè il pivot 1 della terza riga appartiene all'ultima colonna) e quindi il sistema dato non ha soluzioni.

**Esempio 29.** Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 10x_4 = 10 \end{cases}$$

la cui matrice completa è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Riduciamo $A$ a forma a scalini:

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - \dfrac{1}{2}\mathbf{r}_1 \\ \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ r_4 \to r_4 - \frac{5}{2} r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ r_4 \to r_4 - 2r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

e la forma a scalini $S$ di $A$ è:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Riduciamo $S$ a forma a scalini ridotta $R$, scrivendo in dettaglio i calcoli

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ r_4 \to -\frac{1}{3} r_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} r_1 \to r_1 + 2r_4 \\ r_2 \to r_2 - 2r_4 \\ r_3 \to r_3 - 3r_4 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 0+2(-1) \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2-2(-1) \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1-3(-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ r_3 \to -\frac{1}{2} r_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \to r_1 - 6r_3 \\ r_2 \to r_2 - 4r_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & -2-6(-2) \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4-4(-2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 \to \frac{1}{2} r_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \cdot 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad r_1 \to r_1 - 4r_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 10-4\cdot 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r_1 \to \frac{1}{2} r_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -14 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

forma ridotta di S e quindi di A è matrice completa del sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

onde la soluzione del sistema dato è $x_1 = -7$, $x_2 = 6$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$.

Esiste anche un altro modo, più informale, di descrivere il metodo di eliminazione di Gauss che consiste nel lasciare invariata la parte a) relativa alla compatibilità del sistema lineare e sostituire la parte b) con la seguente:

**b′) Sostituzione a ritroso**

Consideriamo il sistema che ha come matrice completa la matrice $S$ ricavata da a).

Consideriamo l'ultima equazione non nulla di tale sistema e la prima variabile, che compare nell'equazione. Attribuiamo dei valori arbitrari alle altre variabili dell'equazione e ricaviamo tale variabile sostituendola poi nelle precedenti equazioni. Applicando lo stesso procedimento alla penultima, terzultima, ..., prima equazione si ottengono le soluzioni del sistema dato.

**Esempio 30.** Consideriamo il sistema lineare dell'esempio 29.

Il sistema che ha come matrice completa la matrice a scalini $S$ ricavata nella parte a) dell'esempio 29 è:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ -2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -3x_4 = 3 \end{cases}$$

Ricaviamo $x_4$ dell'ultima equazione: $x_4 = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$, e sostituiamo nelle precedenti. Si ha:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 + 2(-1) = -2 \\ 2x_2 + 4x_3 = 2 - 2(-1) = \quad 4 \\ -2x_3 = 1 - 3(-1) = \quad 4 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Ricaviamo $x_3$ dalla terza equazione, $x_3 = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$, e sostituiamo nelle precedenti. Si ha:

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2=-2-6(-2)=10 \\ \quad 2x_2= \ \ 4-4(-2)=12 \\ \quad x_3=-2 \\ \quad x_4=-1 \end{cases}$$

Ricaviamo $x_2$ dalla seconda equazione, $x_2=\frac{12}{2}=6$ e sostituiamo nella prima equazione. Si ha

$$\begin{cases} 2x_1=10-4\cdot 6=-14 \\ x_2=6 \\ x_3=-2 \\ x_4=-1 \end{cases}$$

e ricavando $x_1$ dalla prima equazione si ha il sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 \qquad =-\frac{14}{2}=-7 \\ \quad x_2 \quad = \ \ 6 \\ \qquad x_3 \ =-2 \\ \qquad\quad x_4=-1 \end{cases}$$

che dà la soluzione $(-7, 6, -2, -1)$.

**Osservazione 17.** I due modi di descrivere l'eliminazione di Gauss a), b) e a), b′) sono equivalenti dal punto di vista computazionale. Infatti è immediato rendersi conto [Esempi 29, 30] che sono necessarie le stesse operazioni aritmetiche (somme, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni) per portare a termine i relativi algoritmi. In alcuni testi il metodo di eliminazione di Gauss con le procedure a) e b) è detto di Gauss-Jordan mentre è detto di Gauss il metodo basato su a) e sulla sostituzione a ritroso b′).

**Esempio 31.** Vogliamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad - x_4=-1 \\ -x_1-3x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_1-x_2+3x_3+x_4=1 \\ 2x_1-3x_2+7x_3+3x_4=4 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

che è stata ridotta a forma a scalini $S$ nell'esempio 25.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

poiché l'ultima riga di $S$ non è del tipo $(0, 0, \dots, 0, b)$, $b \neq 0$, il sistema è compatibile.

Le soluzioni del sistema si determinano considerando la forma ridotta $R$ di $A$ determinata nell'esempio 25

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

che è la matrice completa del sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 \quad = 1 \\ \quad x_2 - \ x_3 \quad = 2 \\ \qquad\qquad x_4 = 4 \end{cases}$$

Ponendo $x_3 = t$ e ricavando $x_1$, $x_2$ si hanno le riduzioni del sistema $x_1 = -2t + 1$, $x_2 = t + 2$, $x_3 = t$, $x_4 = 4$ al variare del numero reale $t$. Si potevano determinare le soluzioni anche con la sostituzione a ritroso applicata al sistema di matrice completa $S$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad -x_4= \ \ 1 \\ \quad -\ x_2+x_3+x_4= \ \ 2 \\ \qquad\qquad\quad -x_4=-4 \end{cases}$$

Si ha, ricavando $x_4$ dalla terza equazione, $x_4=4$, che sostituito nella prima e seconda equazione da:

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad = \ \ 5 \\ \quad -\ x_2+x_3 \quad =-2 \\ \qquad\qquad\quad x_4= \ \ 4 \end{cases}$$

Ponendo $x_3=t$, ricavando $x_2=t+2$ dalla seconda equazione nella prima si ha $x_1+2t+4=3$ da cui $x_1=-2t-1$, $x_2=t+2$, $x_3=t$, $x_4=4$ sono le soluzioni del sistema (come sopra).

Vogliamo ora confrontare il metodo di eliminazione di Gauss con il metodo di eliminazione delle incognite (6), descritto informalmente nel paragrafo 1. Come mostreremo nel capitolo III, paragrafo 1, in generale per risolvere un sistema lineare con il metodo di eliminazione (6) occorrono più operazioni che con il metodo di Gauss. Tuttavia in casi particolari (matrice completa con molti zeri) può essere più conveniente il metodo di eliminazione (6).

**Esempio 32.** Vogliamo determinare le soluzioni del sistema lineare dell'esempio 12

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad -x_4=-1 \\ 2x_1-3x_2 \qquad +x_4= \ \ 2 \\ x_1 \qquad -2x_3 \qquad = \ \ 1 \end{cases}$$

di matrice completa $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con il metodo di Gauss.

Riduciamo $A$ a forma a scalini $S$

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-\frac{2}{7}\mathbf{r}_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}=S$$

Riduciamo $S$ a forma ridotta $R$

$$r_3 \to -\frac{1}{2} r_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{14} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \qquad r_2 \to -\frac{1}{7} r_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$r_1 \to r_1 - 2r_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{14} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} = R$$

che è matrice completa del sistema ridotto:

$$\begin{cases} x_1 \qquad -\frac{1}{7} x_4 = \frac{1}{7} \\ \quad x_2 \quad -\frac{3}{7} x_4 = -\frac{4}{7} \\ \qquad x_3 - \frac{1}{14} x_4 = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

Ponendo $x_4 = t$ si hanno le soluzioni $\left(\frac{1}{7} t + \frac{1}{7}, \quad \frac{3}{7} t - \frac{4}{7}, \quad \frac{1}{14} t - \frac{3}{7}\right)$.

È facile verificare che con il metodo di Gauss abbiamo effettuato più operazioni che con il metodo di eliminazione delle incognite usato nell'esempio 12. Infatti, abbiamo effettuato 13 prodotti o divisioni e 10 somme o differenze contro 8 prodotti o divisioni e 6 somme o differenze dell'esempio 12.

## 5. Operazioni sulle matrici. Notazione matriciale di un sistema lineare

Le matrici scaturiscono in molti contesti diversi dalla teoria dei sistemi lineari. In questo paragrafo definiamo operazioni sulle matrici che saranno fondamentali per l'introduzione delle matrici nello studio dell'algebra lineare.

**Definizione.** Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrici della stessa dimensione $m \times n$.

Allora la **somma** $A+B$ delle due matrici è la matrice, $m \times n$, $C=(c_{ij})$, dove $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, cioè la matrice il cui elemento di posto $(i,j)$ è la somma degli elementi di posto $(i,j)$ di $A$ e $B$.

**Esempio 33.** Se $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 9 \\ 4 & 3 & 11 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ allora

$$A+B=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 17 \\ 6 & 0 & 15 \\ 7 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Per ogni matrice $A=(a_{ij})$ esiste un'unica matrice $B$ tale che $A+B=0$. Infatti si verifica subito che:

**(12)** $$B=(-a_{ij}) \quad \textbf{e si pone} \quad B=-A$$

**Esempio 34.** Se $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ allora $-A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

Porremo $A-B=A+(-B)$ onde se $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ si ha

**(13)** $$A-B=(a_{ij}-b_{ij})$$

**Esempio 35.** Se $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ allora $A-B$ $\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

**Definizione.** Sia $c$ uno scalare e $A=(a_{ij})$ una matrice. Allora il **prodotto** $cA$ è la matrice ottenuta moltiplicando ciascun elemento di $A$ per $c$, cioè $A=(b_{ij})$ dove $b_{ij}=ca_{ij}$.

**Esempio 36.** Se $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 11 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ $c=-3$ allora $cA=\begin{pmatrix} -15 & -21 & -33 \\ -27 & -24 & -18 \end{pmatrix}$

Dalle definizioni si ha $(-1)A=-A$.

Abbiamo appena definito la moltiplicazione di una matrice per uno scalare. È naturale a questo punto porsi il problema se sia possibile moltiplicare due matrici. La definizione di prodotto di matrici che apparirebbe più naturale è «moltiplicare i corrispondenti elementi delle matrici». Sorprendentemente questa definizione non si rivela adatta per molti problemi. L'esperienza ha portato i matematici alla seguente definizione di prodotto di matrici, meno intuitiva ma più utile. Già in questo paragrafo vedremo come tale definizione ha un'applicazione immediata per rendere più sintetica la notazione relativa ad un sistema lineare.

**Definizione.** Siano date due matrici: $A=(a_{ij})$, $m\times n$, e $B=(b_{ij})$, $n\times p$. Il **prodotto** $AB$ di $A$ e $B$ è la matrice $C=(c_{ij})$, $m\times p$, tale che:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

cioè l'elemento di posto $(i,j)$ di $AB$ è ottenuto moltiplicando i corrispondenti elementi della riga $i$-esima e della colonna $j$-esima e sommando i risultanti prodotti.

**Esempio 37.** Consideriamo le matrici

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 9 \\ -8 & 0 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $A$ è una matrice $2\times 3$ e $B$ è una matrice $3\times 4$, il prodotto $AB$ è una matrice $2\times 4$. Per determinare, per esempio, l'elemento della prima riga e prima colonna di $AB$, isoliamo la prima riga di $A$ e la prima colonna di $B$. Quindi, moltiplichiamo i corrispondenti elementi e sommiamo $5\cdot 2+3(-8)+7\cdot 3=7$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{5 \quad 3 \quad 7} \\ 0 \quad 2 \quad 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -8 \\ 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} -5 \\ 11 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

L'elemento della seconda riga e terza colonna è $0(-5)+2(11)+6(-1)=16$

$$\begin{pmatrix} 5 \quad 3 \quad 7 \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ -8 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -5 \\ 11 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 9 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & & & \\ & & 16 & \\ & & & \end{pmatrix}$$

I calcoli relativi ai rimanenti prodotti sono:

$5(-3)+3\cdot 0+7\cdot 7=34$, $5(-5)+3\cdot 11+7\cdot(-1)=1$, $5\cdot 9+3\cdot 4+7\cdot 0=57$, $0\cdot 2+2\cdot(-8)+6\cdot 3=2$, $0(-3)+2\cdot 0+6\cdot 7=42$, $0(-5)+2\cdot 11+6\cdot(-1)=16$, $0\cdot 9+2\cdot 4+6\cdot 0=8$, onde:

$$AB=\begin{pmatrix} 7 & 34 & 1 & 57 \\ 2 & 42 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

**Osservazione 18.** La definizione di prodotto di matrici richiede che il numero delle colonne del primo fattore $A$ sia uguale al numero delle righe del secondo fattore $B$. Se ciò non accade non si definisce il prodotto.

**Esempio 38.** Se $A$ è una matrice $4\times 3$, $B$ è una matrice $3\times 5$, e $C$ è una matrice $5\times 4$ allora $AB$ è definito ed è una matrice $4\times 5$; $CA$ è definito ed è una matrice $5\times 3$; $BC$ è definito ed è una matrice $3\times 4$ mentre i prodotti $AC$, $CB$ e $BA$ non sono definiti.

La moltiplicazione di matrici ha un'applicazione notevole ai sistemi di equazioni lineari. Consideriamo un sistema di $m$ equazioni in $n$ incognite:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

La matrice:

$$\text{(15)} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice **matrice dei coefficienti** o **matrice incompleta** del sistema **(14)**; la matrice colonna $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ si dice *matrice delle incognite*, e $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ *matrice*

*dei termini noti.*
Per la definizione di prodotto righe per colonne si ha:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Poiché due matrici sono uguali se e solo se i loro corrispondenti elementi sono uguali, il sistema **(14)** può essere sostituito dall'unica equazione matriciale:

**(16)** $$AX = B$$

Quando si denota un sistema con la forma **(16)** si dice che esso è scritto in **forma matriciale.**

Vedremo nel seguito che in casi notevoli l'equazione **(16)** può essere trattata come se fosse un'equazione numerica e come conseguenza di tale interpretazione otterremo nuovi efficaci metodi per risolvere un sistema lineare.

## 6. Proprietà dell'aritmetica matriciale. L'inversa di una matrice

In questo paragrafo mostriamo che molte delle note regole dell'aritmetica dei numeri valgono anche per l'insieme delle matrici su cui siano definite le operazioni introdotte nel paragrafo 5 con qualche eccezione.

**Teorema 19.** (Proprietà basilari dell'aritmetica matriciale) *Siano $A$, $B$ e $C$ matrici qualsiasi e $c$, $c'$ scalari. Supponendo che le dimensioni delle matrici siano tali che le operazioni indicate possano essere effettuate, valgono le seguenti relazioni.*

a) $A + B = B + A$
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
c) $A + 0 = A$, *dove 0 è la matrice nulla*
d) $A + (-A) = 0$

*quindi rispetto all'operazione di somma l'insieme delle matrici della stessa dimensione $m \times n$ è un gruppo abeliano*[9].

f) $c(A + B) = cA + cB$

[9] Si dice gruppo abeliano un insieme su cui sia definita un'operazione di somma + che verifica le precedenti proprietà a), b), c), d).

g) $(c+c')A = cA + c'A$
h) $c(c'A) = (cc')A$
i) $1A = A$

*e quindi rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare l'insieme delle matrici della stessa dimensione $m \times n$ è uno spazio vettoriale sul campo degli scalari*[10]:

l) $A(BC) = (AB)C$
m) $A(B+C) = AB + AC$
n) $(A+B)C = AC + BC$
o) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

**Dim.** Ognuna delle precedenti equazioni esprime un'uguaglianza di matrici. Per provare queste uguaglianze, è necessario mostrare che le matrici sulla destra e sulla sinistra hanno la stessa dimensione, e che i corrispondenti elementi di entrambi i lati sono uguali. Le dimostrazioni di a), ..., i) e o) sono molto semplici e lasciate per esercizio; la dimostrazione di l) viene effettuata nei complementi. Qui dimostriamo la m), osservando che la dimostrazione di n) è del tutto analoga a quella di m). Se $A$ è una matrice $m \times n$ e $B$, $C$ hanno dimensione $n \times p$ allora $A(B+C)$ e $AB + AC$, per definizione di somma e prodotto di matrici, hanno la stessa dimensione $m \times p$. Inoltre, se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, allora l'uguaglianza fra gli elementi di $A(B+C)$ e $AB + AC$ è data da $a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \dots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \dots + a_{in}c_{nj}$.

Una matrice $A = (a_{ij})$ con n righe e n colonne si dice **matrice quadrata di ordine *n***, e gli elementi $a_{11}, \dots, a_{nn}$ si dicono appartenere alla **diagonale principale** di $A$ [Fig. 3].

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Figura 3

In virtù delle precedenti relazioni a), ..., l), m), n) l'insieme delle matrici

[10] Si dice spazio vettoriale su un campo $k$ (o $k$ spazio vettoriale) un gruppo abeliano su cui sia definito un prodotto esterno con gli elementi di $k$ che verifica le precedenti proprietà f), g), h), i).

quadrate di ordine $n$ è un anello[11] rispetto alla somma e al prodotto righe per colonne.

Tale anello ha identità, data dalla matrice quadrata di ordine $n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

che si dice **matrice identica**. Spesso quando sarà chiaro dal contesto l'ordine di $I_n$ la denoteremo semplicemente con $I$.

Tale anello non è tuttavia commutativo cioè in generale non si ha $AB=BA$, come mostra il seguente esempio:

**Esempio 39.** Consideriamo le matrici $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ onde $AB \neq BA$

Inoltre la nota regola di cancellazione che vale per gli insiemi numerici degli interi, razionali, reali, se $ab=ac$ allora $b=c$, non vale per le matrici, come mostra il seguente esempio.

**Esempio 40.** Basta considerare le matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} -8 & -7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $B \neq C$ e $AB=AC=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

In particolare esistono matrici $A$ e $D$ non nulle tali che $AD=0$ (cioè $A$ e $D$ sono **zero divisori** dell'anello delle matrici quadrate); basta considerare le

[11] Si dice anello un gruppo abeliano su cui sia definita un'operazione di prodotto che verifica le precedenti proprietà l), m), n), o).

matrici del precedente esempio e porre $D=B-C$. Si ha $AD=A(B-C)=AB-$ $-AC=0$.

Infine poiché l'insieme delle matrici quadrate di ordine $n$ è un anello ed anche uno spazio vettoriale e tali strutture sono compatibili in virtù della relazione o) del teorema 19, tale insieme è anche un'**algebra** sul campo degli scalari.

**Definizione.** Se $A$ è una matrice quadrata, diremo che $A$ è **invertibile** se esiste una matrice $B$ tale che $AB=BA=I$. $B$ si dice **matrice inversa** di $A$ e viene denotata con il simbolo $A^{-1}$.

Vedremo, nel corollario 38, che se $B$ è una matrice tale che $BA=I$ allora $B$ è un'inversa di $A$, cioè $AB=I$.

**Esempio 41.** Una matrice con una riga o colonna nulla non è invertibile. Infatti se $A=(a_{ij})$ ha la riga $i$-esima $(a_{i1},\dots,a_{in})$ nulla ed esistesse $B=(b_{ij})$ tale che $AB=I$, l'elemento $c_{ii}=1$ di $AB$ sarebbe per definizione $a_{i1}b_{1i}+\dots+a_{in}b_{ni}=0$. Assurdo. Analogamente per le colonne.

È chiaro dalla definizione che se $A$ è invertibile $A^{-1}$ è invertibile e si ha:

$$(A^{-1})^{-1}=A \tag{17}$$

*L'inversa di una matrice è unica.* Ciò è conseguenza del fatto più generale che in un anello l'inverso di un elemento è unico. Rivediamo la dimostrazione:

Se $B$ e $C$ sono inversi di $A$ si ha:

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$$

**Esempio 42.** Determiniamo l'inversa, quando esiste, di una matrice $2\times 2$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se $A$ ammette inversa $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ si ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè si ha il sistema lineare

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \\ ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}$$

Sommando la prima equazione del sistema moltiplicata per $-c$ alla seconda moltiplicata per $a$ si ha l'equazione $(ad-bc)z=-c$. Sommando la prima equazione moltiplicata per d alla seconda per $-b$ si ha $(ad-bc)x=d$. Quindi se $ad-bc=0$ allora $c=d=0$ e la matrice $A$ non è invertibile [Esempio 41]. Se $ad-bc\neq 0$ si ottiene $z=-\dfrac{c}{ad-bc}$ e $x=\dfrac{d}{ad-bc}$. Ragionando analogamente sulla 3ª e 4ª equazione del sistema si ottiene che, se $ad-bc\neq 0$, allora $y=-\dfrac{b}{ad-bc}$ e $t=\dfrac{a}{ad-bc}$. Abbiamo quindi dimostrato che $A$ è invertibile se e solo se $ad-bc\neq 0$ e in tal caso

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ -\dfrac{c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$ (la verifica al lettore)

**Teorema 20.** *Se $A$ e $B$ sono matrici invertibili della stessa dimensione, allora $AB$ è invertibile e $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$*

**Dim.** Si ha $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA=AA^{-1}=I$. Analogamente si prova che $(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$. Onde $AB$ è invertibile e $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

**Corollario 21.** *Se $A_1,A_2,\dots,A_n$ sono matrici invertibili della stessa dimensione allora $A_1A_2\dots A_n$ è invertibile e $(A_1A_2\dots A_n)^{-1}=(A_n)^{-1}\dots(A_2)^{-1}(A_1)^{-1}$.*

**Dim.** Procediamo per induzione. L'asserto è vero per $n=2$ [Teor. 20]. Supponiamolo vero per $n-1$ cioè $A_1A_2\dots A_{n-1}$ è invertibile e $(A_1A_2\dots A_{n-1})^{-1}=$ $=(A_{n-1})^{-1}\dots(A_2)^{-1}(A_1)^{-1}$. Allora, per il Teorema 19, $A_1A_2\dots A_n=(A_1A_2\dots A_{n-1})(A_n)$ è invertibile e $(A_1A_2\dots A_n)^{-1}=((A_1A_2\dots A_{n-1})(A_n))^{-1}=(A_n)^{-1}(A_1A_2\dots A_{n-1})^{-1}=$ $=(A_n)^{-1}(A_{n-1})^{-1}\dots(A_2)^{-1}(A_1)^{-1}$.

## 7. Matrici elementari e determinazione dell'inversa di una matrice

In questo paragrafo costruiamo un semplice algoritmo per determinare l'inversa di una matrice invertibile.

**Definizione.** Una matrice $n \times n$ si dice **elementare** se può essere ottenuta dalla matrice identica effettuando una trasformazione elementare.

**Esempio 43.** a) La matrice $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è elementare poiché è ottenuta scambiando, nella matrice identica, la prima riga con la seconda riga: $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$.

b) La matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è elementare poiché è ottenuta dalla matrice identica aggiungendo alla terza riga la quarta moltiplicata per 2: $\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 + 2\mathbf{r}_4$.

Moltiplicare a sinistra una matrice $A$ per una matrice elementare $E$ corrisponde ad effettuare una trasformazione elementare su $A$, come asserisce il seguente teorema la cui dimostrazione è rinviata ai complementi.

**Teorema 21.** *Se la matrice elementare $E$ è ottenuta mediante una certa trasformazione elementare su $I_m$ e se $A$ è una matrice $m \times n$, allora il prodotto $EA$ è la matrice che si ottiene quando la stessa trasformazione elementare è effettuata su $A$.*

**Dim.** [Esercizio 38].

**Osservazione 22.** L'interesse del teorema è principalmente di carattere teorico e sarà usato per ottenere alcuni risultati sulle matrici e sui sistemi di equazioni lineari. Da un punto di vista computazionale, è preferibile effettuare una trasformazione elementare direttamente piuttosto che moltiplicare a sinistra la matrice per una matrice elementare.

**Proposizione 23.** *Ogni matrice elementare è invertibile, e la sua inversa è ancora una matrice elementare.*

**Dim.** Se $E$ è una matrice elementare di ordine $n$, allora $E$ è ottenuta effettuando una trasformazione elementare sulle righe di $I_n$. Sia $E_0$ la matrice che si ottiene quando l'inversa di questa trasformazione viene effettuata su $I_n$. Applicando il teorema (e ricordando la dimostrazione della Proposizione 8) si ha che:

$$E_0E = I_n \quad \text{e} \quad EE_0 = I_n \quad \text{cioè} \quad E_0 \quad \text{è l'inversa di } E.$$

Come abbiamo visto con l'algoritmo **(9)**, per ridurre una matrice a forma a scalini ridotta è sufficiente applicare successivamente una serie di operazioni elementari. Secondo il teorema 21 questo equivale a moltiplicare a sinistra per una serie di matrici elementari. In simboli, *se $A$ è una matrice e se $R$ è la matrice a scalini ridotta equivalente ad $A$*, allora:

**(18)** $$R = E_h E_{h-1} \dots E_1 A$$

dove $E_h, E_{h-1}, \dots, E_1$ sono matrici elementari. La matrice $E_1$ effettua la prima operazione usata per ridurre $A$ a forma a scalini ridotta, la matrice $E_2$ effettua la seconda operazione, e così via.

**Esempio 44.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 \to \frac{1}{3}\mathbf{r}_2 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 4\mathbf{r}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_5 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$R = I_3 = E_4\ E_3 E_2 E_1 A$

La formula (**18**) e il fatto che le matrici elementari sono invertibili conducono a varie caratterizzazioni dell'invertibilità di una matrice quadrata $A$.

**Teorema 24.** *Sia $A$ una matrice quadrata. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) *$A$ è invertibile,*
2) *la forma a scalini ridotta di $A$ è l'identità,*
3) *$A$ è equivalente alla matrice identica,*
4) *$A$ è prodotto di matrici elementari.*

**Dim.** 1)$\Rightarrow$2) Sia $A$ invertibile. Allora, poiché le matrici elementari sono invertibili [Prop. 23], la forma ridotta $R$ di $A$ [Formula (**18**)], è prodotto di matrici invertibili e quindi è essa stessa invertibile [Cor. 20]. Quindi $R$ è ridotta e invertibile onde è la matrice identica [Esercizio 35].

2)$\Rightarrow$3) Basta osservare che la forma a scalini ridotta $R$ di $A$ è equivalente ad $A$.

3)$\Rightarrow$4) Supponiamo che $A$ sia equivalente alla matrice identica $I$. Allora per la proposizione 5.a), $I$ è equivalente ad $A$ onde $I$ può essere ridotta ad $A$ mediante un numero finito di trasformazioni elementari. Per il teorema 21 ognuna di queste operazioni può essere effettuata moltiplicando a sinistra per una matrice elementare. Quindi esistono matrici elementari $E_1,E_2,\dots,E_h$ tali che:

$$A = E_{h-1}\dots E_1 I = E_h E_{h-1}\dots E_1$$

4)$\Rightarrow$1) L'implicazione segue dal fatto che le matrici elementari sono invertibili [Prop. 23] e il prodotto di matrici è invertibile [Cor. 20].

Quindi, in virtù del teorema 24, 1)$\Leftrightarrow$2), per decidere se $A$ è una matrice invertibile basta effettuare l'algoritmo di riduzione e vedere se la forma a scalini ridotta $R$ di $A$ è la matrice identica. In tal caso moltiplicando a destra per $A^{-1}$ entrambi i membri della formula (**18**) si ha:

$$\textbf{(19)}\quad A^{-1} = I\,A^{-1} = RA^{-1} = (E_h E_{h-1}\dots E_1 A)A^{-1} = E_h E_{h-1}\dots E_1(AA^{-1}) = E_h E_{h-1}\dots E_1 I$$

Ora, ricordiamo che le matrici $E_i$, $i = 1,\dots,h$, sono quelle che consentono di ridurre A a forma a scalini ridotta e allora in virtù del teorema resta provato il seguente:

**Corollario 25.** *Se $A$ è invertibile l'inversa di $A$ si può ottenere applicando alla matrice identica le stesse trasformazioni elementari, nello stesso ordine, che consentono di ridurre $A$ a forma a scalini ridotta.*

Vediamo nei successivi esempi come si calcola l'inversa di una matrice:

**Esempio 45.** Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

vogliamo decidere se $A$ è invertibile e in tal caso determinare l'inversa di $A$. In virtù del corollario 25 basta ridurre $A$ a forma a scalini ridotta e contemporaneamente applicare le corrispondenti trasformazioni elementari sulle righe della matrice identica $I_3$. Il modo più semplice di fare questo è ricopiare $I_3$ alla destra di $A$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e ridurre la matrice $B$, $3\times 6$, così ottenuta a forma a scalini ridotta. Se la metà sinistra della matrice $B$ è l'identità, la matrice $A$ è invertibile [Teor. 24] e la sua inversa $A^{-1}$ è data dalla metà destra della matrice $B$. Questi sono i passi:

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2+2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3+4\mathbf{r}_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-\frac{6}{5}\,\mathbf{r}_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3\to 5\mathbf{r}_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} r_1 \to r_1 + 3r_3 \\ r_2 \to r_2 + 6r_3 \\ \phantom{x} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 25 & -18 & 15 \\ 0 & 5 & 0 & 50 & -35 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$r_2 \to \frac{1}{5} r_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 25 & -18 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$r_1 \to r_1 - 2r_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

$$r_1 \to -r_1 \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{matrice identica}} & \underbrace{\begin{matrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{matrix}}_{\text{inversa di } A} \end{array}\right)$$

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

**Esempio 46.** Determiniamo se esiste l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la matrice

$$B=\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e riduciamo $B$ a forma a scalini ridotta.

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-3\mathbf{r}_1 \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2 \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{r}_3\to-\mathbf{r}_3 \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2+2\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3 \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2\to-\frac{1}{6}\,\mathbf{r}_2 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

La matrice $A$ non è invertibile perché la sua forma a scalini ridotta non è la matrice identica.

**Osservazione 26.** Se durante il processo di riduzione nella parte sinistra della matrice $3\times 6$ compare una riga nulla (0,0,0) (come nell'Esempio 46) si può già concludere che $A$ non è invertibile poiché in tal caso $A$ è equivalente ad una matrice con una riga nulla e quindi non invertibile [Esempio 41].

## 8. La trasposta di una matrice. Trasformazioni elementari sulle colonne

In corrispondenza ad ogni matrice esiste un'altra matrice, detta matrice trasposta, che ha proprietà molto simili a quelle della matrice originale.

**Definizione.** Sia $A=(a_{ij})$ una matrice $m\times n$. Allora la **trasposta** di $A$, denotata $A^t$, è la matrice $n\times m$ ottenuta scambiando le righe e le colonne di $A$, cioè $A^t=(a_{ji})$. Quindi se

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Esempio 47.** La trasposta della matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{è} \quad A^t=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Teorema 27.** *Supponiamo che $A=(a_{ij})$ sia una matrice $m\times n$. Allora:*

i) $(A^t)^t=A$
ii) $(\lambda A)^t=\lambda A^t$, *$\lambda$ costante*
iii) *Se $B$ è una matrice $m\times n$, $(A+B)^t=A^t+B^t$*
iv) *Se $B=(b_{ij})$ è una matrice $n\times p$, $(AB)^t=B^tA^t$*
v) *Se $A$ è invertibile, $A^t$ è invertibile e $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$*

**Dim.** i), ii), iii) [Esercizio 43].

iv) Basta osservare che l'elemento di posto $(i,j)$ di $(AB)^t$ è l'elemento di posto

$(j,i)$ di $AB$ cioè $a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\ldots+a_{jn}b_{ni}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\ldots+b_{ni}a_{jn}$ ma quest'ultimo elemento è il prodotto della $i$-esima riga di $B^t$ per la $j$-esima colonna di $A^t$ e tale prodotto dà quindi l'elemento di posto $(i,j)$ di $B^tA^t$.

v) Dalla iv) si ha $(A^t)(A^{-1})^t=(A^{-1}A)^t=(I_n)^{-1}=I_n$ e $(A^{-1})^t(A^t)=(AA^{-1})^t=$ $=(I_n)^t=I_n$ e quindi la tesi.

**Definizione.** Una matrice $A$ tale che $A=A^t$ si dice **simmetrica.** Una matrice $A$ tale che $A=-A^t$ si dice **antisimmetrica**.

Si osservi che una matrice simmetrica o antisimmetrica deve essere una matrice quadrata.

**Esempio 48.** La trasposta della matrice $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ è

$B^t=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}=B$ onde la matrice $B$ è simmetrica.

**Esempio 49.** Utilizzando le proprietà del teorema 20 mostriamo che, per ogni matrice quadrata $A$, $A+A^t$ e $AA^t$ sono matrici simmetriche mentre la matrice $A-A^t$ è antisimmetrica. Infatti $(A+A^t)^t=(A^t)^t+A^t=A+A^t$ e $(AA^t)^t=$ $=(A^t)^tA^t=AA^t$. Inoltre $(A-A^t)^t=A^t-(A^t)^t=A^t-A=-(A-A^t)$.

La trasposta gioca un ruolo importante nella teoria delle matrici. Vedremo nel capitolo successivo che $A$ e $A^t$ hanno molte proprietà in comune. Poiché le colonne di $A^t$ sono le righe di $A$, useremo la trasposta per estendere i risultati relative alle righe di una matrice anche alle sue colonne. In questo paragrafo vediamo come la trasposta permette di legare le trasformazioni elementari relative alle righe di una matrice alle trasformazioni elementari relative alle colonne.

Sia $A=(a_{ij})$ una matrice $m\times n$ e indichiamo le sue colonne con

$$\mathbf{c}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad j=1,\ldots,n$$

**Definizione.** Le seguenti operazioni si dicono **trasformazioni elementari** sulle colonne $\mathbf{c}_j$ di $A$.

**Tipo 1.** Moltiplicare una colonna $\mathbf{c}_j$ per una costante non nulla $\lambda$, che indicheremo con $\mathbf{c}_j \to \lambda \mathbf{c}_j$

**Tipo 2.** Scambiare due colonne $\mathbf{c}_j$ e $\mathbf{c}_i$ che indicheremo con $\mathbf{c}_j \leftrightarrow \mathbf{c}_i$

**Tipo 3.** Aggiungere un multiplo di una colonna $\mathbf{c}_i$ ad un'altra colonna $\mathbf{c}_j$ che indicheremo con $\mathbf{c}_j \to \mathbf{c}_j + \lambda \mathbf{c}_i$.

È chiaro che ogni trasformazione elementare sulle colonne di $A$ corrisponde ad una trasformazione elementare sulle righe di $A^t$. Più precisamente:

**Lemma 28.** *Se una matrice $B$ è ottenuta effettuando una trasformazione elementare sulle colonne (righe) di $A$ allora $B^t$ è la matrice ottenuta effettuando la stessa trasformazione elementare sulle righe (colonne) di $A^t$.*

**Dim.** [Esercizio 45].

**Esempio 50.** Se aggiungiamo alla prima riga della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ la seconda moltiplicata per 3, $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_2$ si ha la matrice $B = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 13 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

La matrice $B^t = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 8 & 2 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$ è ottenuta effettuando la stessa trasformazione sulle colonne di $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ cioè $\mathbf{c}_1 \to \mathbf{c}_1 + 3\mathbf{c}_2$.

Il seguente lemma mostra che le matrici elementari possono essere definite anche a partire da trasformazioni elementari sulle colonne.

**Lemma 29.** *Se $E$ è una matrice ottenuta effettuando una trasformazione elementare sulle colonne (righe) $i$, $j$ della matrice identica $I_n$ allora $E^t$ può essere ottenuta effettuando la stessa trasformazione elementare sulle righe (colonne) $j$, $i$ di $I_n$* e quindi è una matrice elementare.

**Dim.** [Esercizio 45].

**Corollario 30.** *Se $E$ è una matrice elementare anche $E^t$ è una matrice elementare.*

**Dim.** Basta osservare che $E^t$ è ottenuta effettuando una trasformazione elementare sulle colonne di $I_n{}^t = I_n$ [Lemma 28] e l'asserto segue dal lemma 29.

**Esempio 51.** Se $E$ è la matrice ottenuta aggiungendo la prima colonna di $I_4$ moltiplicata per 4 alla terza colonna $\mathbf{c}_3 \to \mathbf{c}_3 + 4\mathbf{c}_1$, si ha:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $E$ è anche la matrice elementare ottenuta aggiungendo la terza riga di $I_4$ moltiplicata per 4 alla prima riga [Lemma 28].

Inoltre:

$$E^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice elementare ottenuta aggiungendo alla terza riga la prima moltiplicata per 4.

Vale anche l'analogo, per le colonne, del teorema 21.

**Teorema 31.** *Se la matrice elementare $E$ è ottenuta mediante una certa trasformazione elementare sulle colonne di $I_n$ e se $A$ è una matrice $m \times n$, allora il prodotto $AE$ è la matrice che si ottiene quando la stessa trasformazione elementare è effettuata su $A$.*

**Dim.** Basta osservare che $(AE)^t = E^t A^t$ e applicare il lemma 28 e il teorema 21.

**Osservazione 32.** Si potrebbe portare avanti l'analogia tra trasformazioni elementari per righe e colonne introducendo la nozione di matrice a scalini e a scalini ridotta per colonne e un analogo, per colonne, dell'algoritmo di riduzione (9). Il teorema precedente permette inoltre di estendere i risultati del paragrafo 6. Il motivo per cui abbiamo preferito trattare la teoria delle trasformazioni elementari per righe piuttosto che quella per colonne è che la prima gioca un ruolo più importante rispetto a quella delle trasformazioni elementari per colonne in quanto può essere applicata alla risoluzione di un sistema lineare. Infatti, le trasformazioni elementari per righe, se applicate alla matrice completa di un sistema lineare, non ne cambiano le soluzioni mentre le trasformazioni elementari per colonne possono alterarle.

**Esempio 52.** Consideriamo il sistema lineare $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ di soluzione (1,0).

Se alla sua matrice completa $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ applichiamo la trasformazione elementare che alla prima colonna aggiunge la seconda si ha la matrice $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ che è la matrice completa del sistema $\begin{cases} 2x+y=1 \\ -y=1 \end{cases}$ che ha soluzione $(1, -1)$.

## 9. Applicazioni dell'aritmetica matriciale ai sistemi lineari, in particolare omogenei. Se A è invertibile il sistema AX = B ha una ed una sola soluzione

In questo paragrafo vogliamo esaminare proprietà notevoli dei sistemi lineari che si dimostrano agevolmente usando la notazione matriciale $AX=B$.

Nel seguente teorema supponiamo che il campo degli scalari sia infinito.

**Teorema 33.** *Ogni sistema di equazioni lineari ha: nessuna soluzione, una sola soluzione o infinite soluzioni.*

**Dim.** Basta, chiaramente, provare che se un sistema ha più di una soluzione allora ne ha infinite. Supponiamo quindi che il sistema $AX=B$ abbia almeno due soluzioni distinte $S$ e $S'$. Allora $AS=B$ e $AS'=B$. Sottraendo queste equazioni si ha $AS-AS'=B-B=0$ cioè, in virtù delle proprietà dell'aritmetica matriciale, $A(S-S')=0$. Se $c$ è un qualsiasi scalare, si ha:

$$A[S+c(S-S')]=AS+cA(S-S')=AS+c0=AS=B.$$

Ma poiché $c$ può assumere infiniti valori, $AX=B$ ha infinite soluzioni [Esercizio 30].

Un sistema di equazioni lineari

$$
(20) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}
$$

in cui tutti i termini noti sono nulli si dice **omogeneo.** Con notazione matriciale un sistema omogeneo viene scritto nella forma: $AX=0$. Se

$$
(21) \qquad AX=B
$$

è un qualsiasi sistema lineare il sistema $AX=0$ si dice **sistema omogeneo associato a (21)**. Dalla precedente dimostrazione si ricava immediatamente il seguente risultato:

**Proposizione 34.** *Ogni soluzione di un sistema lineare si ottiene sommando una fissata soluzione del sistema con una soluzione del sistema omogeneo associato.*

**Dim.** Sia $S$ una fissata soluzione del sistema **(20)**. Se $S'$ è una qualsiasi soluzione del sistema, si ha $A(S-S')=0$ onde $S=S'+(S-S')$, dove $S-S'$ è una soluzione del sistema omogeneo associato.

**Proposizione 35.** *Se $A$ è una matrice invertibile il sistema $AX=B$ ha l'unica soluzione $A^{-1}B$ qualunque sia la matrice dei coefficienti $B$.*

**Dim.** Poiché $A(A^{-1}B)=B$, $X=A^{-1}B$ è una soluzione di $AX=B$. Inoltre moltiplicando per $A^{-1}$ entrambi i membri dell'equazione $AX=B$ si ha necessariamente $X=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}B$ e ciò prova l'unicità.

**Esempio 53.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile poiché $1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = -1 \neq 0$.

**Osservazione 36.** La formula $X=A^{-1}B$, unita al procedimento del paragrafo 7 per determinare l'inversa, fornisce un metodo per calcolare l'unica soluzione di un sistema con matrice dei coefficienti invertibile. In pratica però se si ha un fissato sistema lineare, con matrice dei coefficienti invertibile, è più conveniente computazionalmente determinare l'unica soluzione con il metodo di eliminazione di Gauss.

Il precedente teorema può essere esteso facilmente al seguente:

**Teorema 37.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) *$A$ è una matrice quadrata invertibile*
2) *$AX=B$ ha una sola soluzione per ogni matrice dei coefficienti $B$*
3) *$AX=B$ ha una sola soluzione per qualche matrice dei coefficienti $B$*
4) *$AX=0$ ha solo la soluzione nulla.*

**Dim.** 1)⇒2) È la proposizione 33. 2)⇒3) È ovvia. 3)⇒4) Sia $X_1$ l'unica soluzione di $AX=B$ e $X_2$ una soluzione di $AX=0$ allora $A(X_1-X_2)=AX_1-AX_2=$ $=B-0=B$ onde $X_1-X_2=X_1$ e $X_2=X_1-X_1=0$. 4)⇒1) Sia $R$ la matrice a scalini ridotta equivalente ad $A$. Allora, se $AX=0$ ha solo la soluzione nulla, $RX=0$ deve essere il sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 \qquad\; = 0 \\ \quad x_2 \quad = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\quad x_n = 0 \end{cases}$$

onde $R$ deve essere la matrice identica. Quindi, per il teorema 24, $A$ è invertibile.

**Corollario 38.** *Sia $A$ una matrice quadrata:*

a) *Se $B$ è una matrice quadrata tale che $BA=I$, allora $B=A^{-1}$.*
b) *Se $B$ è una matrice quadrata tale che $AB=I$, allora $B=A^{-1}$.*

**Dim.** a) Dimostriamo dapprima che $A$ è invertibile. Basta mostrare che il sistema $AX=0$ ha solo la soluzione nulla [Teor. 37]. Moltiplicando entrambi i fattori di $AX=0$ a sinistra per $B$, otteniamo $X=IX=(BA)X=B(AX)=B0=0$. Il sistema $AX=0$ ha quindi solo la soluzione nulla. Proviamo ora che $B=A^{-1}$. Moltiplicando $BA=I$ a sinistra per $A^{-1}$ si ottiene $B=B(AA^{-1})=(BA)A^{-1}=IA^{-1}=A^{-1}$. b) Invertendo il ruolo di $A$ e $B$ in a) si ha che $A=B^{-1}$ e in virtù della formula **(17)** la tesi.

Possiamo ora aggiungere un'ulteriore equivalenza a quelle del teorema 37:

**Teorema 39.** *Sia $A$ una matrice quadrata. Allora $A$ è invertibile se e solo se il sistema $AX=B$ ha soluzioni per ogni matrice dei coefficienti $B$.*

**Dim.** Supponiamo che $AX=B$ abbia soluzioni per ogni matrice $B$. In particolare i sistemi

$$\mathrm{AX}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{AX}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\qquad \mathrm{AX}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

avranno soluzioni. Sia $X_1$ una soluzione del primo sistema, $X_2$ una soluzione del secondo sistema, ..., $X_n$ una soluzione dell'ultimo sistema e sia $C$ la matrice che ha queste soluzioni come colonne. Tenuto conto della definizione di prodotto righe per colonne è facile rendersi conto che $AC=I$ onde $A$ è invertibile per il Corollario 38.

## 10. Esercizi e complementi

1. Quale delle seguenti equazioni è lineare?

a) $y=3$ b) $x-3y=2$ c) $\cos x-y=0$
d) $xyz=0$ e) $x-y=tg\ k$ ($k$ costante) f) $e^2x+y=2$
g) $x^{-1}+y=0$ h) $x+\pi y=5$

2. Determinare le soluzioni di ognuna delle seguenti equazioni lineari.

a) $x+2y=1$ b) $x_1-2x_2+3x_3-x_4=0$ c) $x-y+z-t-w=3$

3. Dire se le seguenti sono soluzioni o meno dei sistemi dati.

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ $x=1,\ y=1$

b) $\begin{cases} x+2y=2a \\ 2x-3y=7b-3a \end{cases}$ $x=2b,\ y=a-b$ $a,b$ costanti

c) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$ $x=2,\ y=3,\ z=0,\ t=1$

d) $\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ x_2+x_3=2 \end{cases}$ $x_1=2,\ x_2=-1,\ x_3=0$

4. Dire, giustificando le risposte, quali tra i seguenti sistemi sono compatibili.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ x+2z=0 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1 \qquad\qquad +x_4=1 \end{cases}$

5. Per quali valori della costante $k$ il seguente sistema lineare è incompatibile, ha una soluzione, infinite soluzioni?

$$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=k \qquad k \text{ costante} \end{cases}$$

6. Considerato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=l \qquad \text{a, b, c, d, e, f, k, l, m costanti} \\ ex+fy=m \end{cases}$$

Discutere le posizioni relative delle 3 rette rappresentate dalle equazioni del sistema, quando:

a) il sistema è incompatibile
b) il sistema ha esattamente una soluzione
c) il sistema ha infinite soluzione.

Mostrare poi che se il sistema è compatibile allora almeno un'equazione può essere eliminata senza alterare l'insieme delle soluzioni.

7. Quali dei seguenti sistemi lineari sono ridotti?

a) $\begin{cases} y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ \quad x_2-x_3=4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ \qquad x_3=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ y-2z+t=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 2x_1+x_4=1 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$

8. Determinare le soluzioni dei sistemi lineari ridotti dell'esempio 7.
9. Perché i seguenti sistemi lineari sono tutti equivalenti?

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=2 \\ 4x+2y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -4x-6y=0 \end{cases}$

10. Dire quali tra i seguenti sistemi lineari sono equivalenti.

a) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+4z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-2x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=2 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3=2 \\ x_1+x_2-3x_3=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x-+2y+3z=4 \\ 2x-3y+4z=2 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$

11. Risolvere, con il metodo di eliminazione delle incognite, i seguenti sistemi lineari.

a) $\begin{cases} 3x \quad -2z=1 \\ 2x+y \quad =2 \\ y \quad =3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 \quad +x_3+2x_4 \quad =-2 \\ x_2 \quad -5x_4 \quad = 3 \\ x_1 \quad -2x_5= 0 \\ x_5=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+z=2 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ -x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$

12. Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 14 \\ 5 & 6 & 0 & 8 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

scrivere la matrice equivalente ad $A$ ottenuta applicando successivamente le seguenti trasformazioni elementari: $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2+2\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_3 \to \frac{1}{2}\,\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1-\frac{1}{3}\,\mathbf{r}_3$.

13. Perché le seguenti matrici non possono essere equivalenti?

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 11 \\ 123 & -7 & 1 & 0 & 2 \\ 18 & 11 & 13 & 17 & 21 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

14. Dire quali tra le seguenti matrici sono a scalini e quali a scalini ridotte.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Dati i sistemi lineari ridotti

$$\text{a)} \begin{cases} z+2t = 1 \\ 2x+y+3t = 2 \\ 5x+5t+w=0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ -x_3+x_4=1 \end{cases}$$

Per quali di essi è possibile riordinare le equazioni in modo da ottenere sistemi con matrice completa a scalini ridotta.

16. Sia $A$ una matrice quadrata a scalini ridotta. Dimostrare che se $A$ non ha righe nulle allora $A$ è la matrice identica.

17. Ridurre le seguenti matrici prima a forma a scalini e poi a forma a scalini ridotta.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

18. Ridurre le matrici dell'esempio 17 a forma a scalini senza effettuare divisioni.

19. Si considerino i sistemi lineari le cui matrici complete sono le matrici dell'esempio 17. Risolvere tali sistemi con il metodo di eliminazione di Gauss.

20. Risolvere il seguente sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss usando la sostituzione a ritroso.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+\ \ x_4=2 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=5 \\ 2x_1 \qquad\ \ +x_3+3x_4=3 \end{cases}$$

21. Risolvere i sistemi lineari dell'esempio 11, con il metodo di eliminazione di Gauss e mostrare che in tal modo si effettuano più operazioni che con il metodo di eliminazione delle incognite (opportunamente applicato) relativamente agli esempi a) e b) e meno operazioni relativamente agli esempi c) e d).

22. **Sistemi con parametro**. Spesso, in alcuni tipi di problemi, si presentano sistemi con coefficienti o termini noti parametrici. Ciò non altera in alcun modo le operazioni dell'algoritmo di Gauss. La soluzione del problema si spezza in vari casi e dobbiamo considerare tutti i possibili modi in cui l'algoritmo può procedere, sulla base di ipotesi sui parametri. Mostrare che, al variare del parametro reale $\lambda$, le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+(\lambda+2)x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2-x_3=1 \end{cases}$$

sono date da $(\lambda t-t+2,\ -(\lambda+1)t+t-1,\ t)$, per $\lambda\neq-1$ e da $(-2s-t-1,\ s,\ t)$ se $\lambda=-1$.

23. Risolvere, al variare del parametro $\lambda$, i seguenti sistemi lineari

a) $\begin{cases} x-y+\ \ z=1 \\ \lambda x+y-\ \ z=0 \\ x-y+\lambda z=\lambda \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=2 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=\lambda \end{cases}$

24. Siano

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcolare le seguenti matrici:

a) $A+B$ b) $A-B$ c) $5A$

d) $5B-3A$ e) $\lambda A+\mu B$ f) $\frac{1}{2}A+\frac{2}{3}B$

25. Consideriamo le matrici $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$$C=\begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare:

a) $AB$ b) $C+E$ c) $DA$
d) $A(BC)$ e) $CD$ f) $(BE)A$

26. Mostrare che se i prodotti $AB$ e $BA$ sono definiti allora $A$ e $B$ sono matrici quadrate.

27. Scrivere i seguenti sistemi nella forma matriciale $AX=B$ (cioè determinare le matrici $A$, $X$ e $B$)

a) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -x+5y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-7y+z=1 \\ y+3z=2 \\ z=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$ d) $2x+y-z=2$

28. Date le matrici $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Verificare che: a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ b) $(AB)C=A(BC)$
c) $A(B+C)=AB+AC$ d) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ e) $AB\neq BA$

29. Se $A=(a_{ij})$ è una matrice $m\times n$, $B=(b_{ij})$ una matrice $n\times p$ e $C=(c_{ij})$ una matrice $p\times q$ allora $(AB)C=A(BC)$. (Infatti $\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk}\right) c_{kj}=\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{hk}\ c_{kj}\right)$).

30. Siano $A$ e $B$ matrici delle stesse dimensioni. Se $c\neq c'$ sono scalari allora $A+cB\neq A+c'B$ (basta usare l'aritmetica matriciale).

31. Verificare che la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ha inversa

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

32. Dimostrare che se $A$ è una matrice invertibile e se $AB=AC$ allora $B=C$.

33. Usare la formula data nell'esempio 42 per calcolare le inverse delle seguenti matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

34. Sia $A$ una matrice quadrata invertibile. Dimostrare che $A$ non ha righe uguali.

35. Dedurre dall'esercizio 16 e dall'esempio 36 che se $A$ è una matrice quadrata a scalini ridotta e invertibile allora $A$ è la matrice identica.

36. Dire quali tra le seguenti matrici sono elementari:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\quad \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

37. Per ognuna delle matrici elementari dell'esempio 36 scrivere l'inversa.

38. Dimostrare che una matrice elementare $E$ è ottenuta mediante una certa trasformazione elementare su $I_m$ e se $A$ è una matrice $m \times n$, allora il prodotto $EA$ è la matrice $B$ che si ottiene quando la stessa trasformazione elementare è effettuata su $A$. (Occorre naturalmente distinguere tre casi distinti, secondo il tipo di trasformazione elementare sulle righe di $A$. In ogni caso si deve provare che per $i,j$ arbitrari l'elemento di posto $i,j$ di $B$ coincide con l'elemento di posto $i,j$ di $EA$. In tutti i tre i casi basta considerare gli elementi che appartengono a righe che vengono trasformate, e per tali elementi l'asserto è una facile verifica).

39. Determinare l'inversa della seguente matrice, se esiste:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

40. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice $P$ tale che $PA$ sia a scalini ridotta. (Basta ricopiare la matrice identica $I_3$ alla destra di $A$ e ridurre la matrice così ottenuta a forma a scalini ridotta. Le ultime tre colonne di tale matrice danno $P$ [Formula (18)]).

41. Data una matrice quadrata, $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dimostrare che $A$ è invertibile se e solo se

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$$

(Basta ridurre a forma a scalini ridotta $R$. Allora $A$ è inverbile se e solo se $R$ è l'identità [Teorema 24]. Occorre distinguere vari casi: $a_{11}\neq 0$, $a_{12}a_{22}-$ $-a_{21}a_{12}\neq 0$, ecc.).

42. **Potenze di una matrice.** Se $A$ è una matrice $m\times m$ definiamo $A^0=I_m$ e se $r>0$, $A^r=\underbrace{A\ldots A}_{r\text{-volte}}$. Se $r<0$ e $A$ è invertibile $A^r=\underbrace{A^{-1}\ldots A^{-1}}_{r\text{-volte}}$. Mostrare che se $r,s\geq 0$ $A^{r+s}=A^rA^s$ e $(A^r)^s=A^{rs}$. Mostrare anche che se $A$ è invertibile le precedenti relazioni valgono per tutti gli interi $r,s$.

43. Se $A$ è una matrice qualsiasi provare che $(A^t)^t=A$, $(\lambda A)^t=\lambda A^t$, $\lambda$ costante. Se una matrice $B$ ha la stessa dimensione di $A$, allora $(A+B)^t=A^t+B^t$.

44. Scrivere la trasposta della matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

45. Dimostrare che se una matrice $B$ è ottenuta effettuando una trasformazione elementare sulle colonne (righe) di una matrice $A$ allora $B^t$ è la matrice ottenuta effettuando la stessa trasformazione elementare nelle righe (colonne) di $A$.

46. Dimostrare che se $E$ è una matrice ottenuta effettuando una trasformazione elementare sulle colonne (righe) $i,j$ della matrice identica $I_n$ allora $E$ può essere ottenuta effettuando la stessa trasformazione elementare sulle righe (colonne) $j,i$ di $I_n$.

47. Mostrare che le matrici $2\times 2$ che hanno inversa uguale alla trasposta sono del tipo $\begin{pmatrix} sen\theta & \pm cos\theta \\ \pm sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} sen\theta & \pm cos\theta \\ \mp sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$.

48. Considerate le matrici

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

risolvere l'equazione $AX=X$.

49. Dimostrare che applicando una trasformazione elementare alle equazioni di un sistema lineare l'insieme delle sue soluzioni non cambia. (È facile dimostrare il risultato per via diretta. Si possono però anche usare le matrici elementari. Infatti se $AX=B$ è il sistema e $E$ è la matrice elementare corrispondente alla trasformazione elementare data basta provare che il sistema $EAX=EB$ ha le stesse soluzioni di $AX=B$).

50. L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Usare tale informazione per risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+2y+3z=\phantom{-}2 \\ 2x+3y+4z=-2 \\ 3x+4y+6z=\phantom{-}2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=1 \\ 3x+4y+6z=3 \end{cases}$$

*Capitolo secondo*

# Determinanti e soluzioni dei sistemi di equazioni lineari.

Anche in questo capitolo supponiamo fissato un campo $k$ a cui apparterranno tutti gli elementi, detti anche costanti o scalari. Negli esempi ed esercizi $k$ è sempre il campo dei numeri reali.

## 1. Introduzione ai determinanti

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato il problema della caratterizzazione dell'invertibilità di una matrice. Come visto le matrici invertibili hanno rilevanza in varie questioni sulle matrici e sui sistemi lineari, ad esempio nell'unicità della soluzione di un sistema con matrice di coefficienti quadrata. Con il teorema 24 del capitolo I abbiamo ottenuto la seguente caratterizzazione: una matrice è invertibile se e solo è equivalente alla matrice identica. In questo capitolo daremo un'altra caratterizzazione dell'invertibilità usando la nozione di determinante.
Consideriamo dapprima la matrice quadrata di ordine 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Nell'esempio 42 del capitolo I abbiamo visto che $A$ è invertibile se e solo se

**(1)** $$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

L'espressione **(1)** si dice **determinante di** $A$.
Nel caso delle matrici di ordine 3

**(2)** $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

abbiamo visto [Esercizio 41, Cap. I] che la matrice $A$ è invertibile se e solo se la seguente combinazione algebrica di elementi di $A$ è non nulla

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{3}$$

L'espressione (3) si dice **determinante di** $A$; il determinante viene notato con $\det A$ o con $|A|$.

È quindi naturale porsi la seguente domanda: data una matrice $A$ di ordine $n$, esiste una combinazione algebrica, degli elementi di $A$, non nulla se e solo se la matrice $A$ è invertibile? Nei paragrafi successivi daremo una risposta affermativa a tale domanda e denomineremo tale combinazione algebrica, determinante della matrice $A$.

**Osservazione 1.** Esistono anche motivazioni geometriche per la nozione di determinante di matrici di ordine 2 o 3. Per esse rinviamo al Volume I, Capitolo I, paragrafi 5, 6, 7, 8 di questa serie.

Per introdurre la definizione di determinante di una matrice qualsiasi che vedremo nel paragrafo successivo facciamo ulteriori considerazioni sul determinante det A di una matrice $A$ di ordine 3, data dalla (2).

Si ha dalle definizioni (1) e (3) che:

$$\det A=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{4}$$

e quindi il determinante di una matrice $3\times 3$ è **combinazione lineare** di determinanti $2\times 2$. Osserviamo che i coefficienti della combinazione sono gli elementi della prima riga della matrice presi con segno alterno $+\ -\ +$. Inoltre i determinanti che compaiono nella (4) sono i determinanti $A_{1j}$ delle matrici $2\times 2$ ottenute da $A$ cancellando la prima riga e la $j$-esima colonna, $j=1,\ldots,3$, onde

$$\det A=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{5}$$

La formula (5) fornisce spunto per la definizione di determinanti di una matrice qualsiasi che sarà data nel paragrafo successivo.

## 2. Definizione di determinante

Vogliamo definire il determinante di una matrice quadrata qualsiasi. Seguendo la linea suggerita dai determinanti $3\times 3$ definiamo il determinante di una matrice $n\times n$ a partire da determinanti di una matrice $(n-1)\times(n-1)$, cioè per ricorrenza. Quindi il determinante di una matrice $4 \times 4$ viene definito in termini di determinanti di matrici $3 \times 3$, il determinante di una matrice $5 \times 5$ in termini di determinanti di matrici $4 \times 4$ e così via.

**Definizione.** Il **determinante** di una matrice $1 \times 1$ $A = (a)$ è $\det A = a$. Supponiamo di aver definito il determinante di una matrice $(n-1) \times (n-1)$, allora per $n \geq 2$, il determinante $\det A = |A|$ di una matrice $n \times n$

$$A = \left( \begin{array}{cccc:cc} a_{11} & a_{12} & \ldots & & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & & \ldots & a_{nn} \end{array} \right)$$

è definito come segue. Per ogni elemento $a_{1j}$ nella prima riga di $A$ consideriamo il determinante $A_{1j}$ della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da $A$ cancellando la prima riga e la $j$-esima colonna.

$$A_{1j} = \left| \begin{array}{cccc|cc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1j}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right|$$

Allora il *determinante* di $A$ è definito da

$$\text{(6)} \qquad \det A = |A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}A_{1n}$$

**Esempio 1.** Mostriamo che la precedente definizione coincide con quelle date nel paragrafo 1 per i determinanti $2 \times 2$ e $3 \times 3$.

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ si ha $\det A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ cioè la (1).

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ si ha $\det A = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ cioè la (5).

**Esempio 2.** Sia $A$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

vogliamo calcolare det $A$. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Ora dobbiamo calcolare i determinanti di ordine 3. Lasciamo al lettore verificare che

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -60, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 48, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 60,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

onde det $A = 4(-60) - 2 \cdot 48 + (-2)\ 60 - 3\ (6) = -474$.

**Osservazione 2.** Un metodo per ricordare la formula (3) che dà il determinante di una matrice $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è la seguente regola di Sarrus. Si ricopiano le prime due colonne della matrice, come mostrato in Figura 1. Il determinante si calcola sommando i prodotti degli elementi che stanno sulle frecce che volgono a destra e sottraendo i prodotti degli elementi che stanno sulle frecce che volgono a sinistra, come si trae dalla (3).

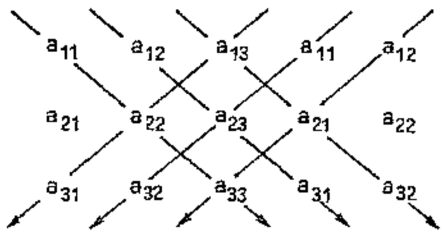



Figura 1

## 3. Sviluppo di un determinante secondo una qualsiasi riga o colonna

In questo paragrafo esamineremo un metodo per il calcolo del determinante, fondamentale sia per gli esercizi sia da un punto di vista teorico.

**Definizione.** Sia $A$ una matrice $n \times n$ e consideriamo il determinante $A_{ij}$ della matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da $A$ cancellando l'$i$-esima riga e la $j$-esima colonna. Si dice che $A_{ij}$ è il **minore complementare** di $a_{ij}$ nella matrice $A$. Si dice **aggiunto o complemento algebrico** dell'elemento $a_{ij}$ nella matrice $A$ il prodotto $(-1)^{i+j}A_{ij}$, notato $a'_{ij}$.

**Esempio 3.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

vogliamo calcolare il minore complementare e il complemento algebrico di $a_{32}=2$. Si ha, cancellando la terza riga e la seconda colonna di $A$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=11\cdot 4\cdot 0+3\cdot 1\cdot 1+1(-1)3-1\cdot 4\cdot 1-3\cdot 1\cdot 1-0(-1)3=-7$$

e $a'_{32}=(-1)^{3+2}(-7)=7$.

**Teorema 3 (1° teorema di Laplace).** Sia $A$ una matrice $n\times n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Allora il determinante di $A$ può essere calcolato usando una delle seguenti equazioni:

(7) $$\det A=(-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2}+\dots+(-1)^{i+n}a_{in}A_{1n}= \\ =a_{i1}a'_{i1}+a_{i2}a'_{i2}+\dots+a_{in}a'_{in}$$

dove $i$ è qualsiasi intero tale che $1\le i\le n$ **(sviluppo del determinante secondo la i-esima riga)**

oppure

(8) $$\det A=(-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j}+\dots+(-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj}= \\ =a_{1j}a'_{1j}+a_{2j}a'_{2j}+\dots+a_{nj}a'_{nj}$$

dove $j$ è qualsiasi intero tale che $1\le j\le m$ **(sviluppo del determinante secondo la j-esima riga)**

**Dim.** [Esercizio 30].

**Esempio 4.** Vogliamo verificare, sviluppando secondo la 3ª riga e poi secondo la 4ª colonna, che il determinante della matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

dell'esempio 3 è 8. Si ha

$$\det A = a_{31}a'_{31} + a_{32}a'_{32} + a_{33}a'_{33} + a_{34}a'_{34} = a_{32}a'_{32} + a_{33}a'_{33}$$

Ora nell'esempio 3 abbiamo visto che $a'_{32} = (-1)^{3+2}(-7) = 7$. Inoltre

$$a'_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1(-1)(-2) -$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot 1(-2) - 2(-1)0 = 6$$

onde $\quad \det A = 2 \cdot 7 + (-1)6 = 8$

Sviluppando secondo la 1ª colonna si ha:

$$\det A = a_{14}a'_{14} + a_{24}a'_{24} \quad \text{e}$$

$$a'_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [6 + 0 + 0 - 8 + 2 + 0] = +12$$

$$a'_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 0 - 6 - 2 + 0 = -4$$

onde $\quad \det A = 1 \cdot (12) + 1(-4) = 12 - 4 = 8.$

Dal teorema di Laplace segue subito la

**Proposizione 4.** Det $A = $ Det $A^t$

**Dim.** Per induzione. Il risultato è ovvio per matrici $1 \times 1$. Supponiamolo vero per matrici $(n-1)\times(n-1)$. Se $A$ è una matrice quadrata di ordine $n$, si ha $A_{1i} = A^t_{i1}$ per l'ipotesi induttiva, onde sviluppando, con il teorema di Laplace, det $A$ secondo la prima riga e det $A^t$ secondo la prima colonna si ha det $A =$ det $A^t$.

## 4. Proprietà dei determinanti

In questo numero vediamo le principali proprietà dei determinanti che si deducono facilmente dal Teorema di Laplace. Tali proprietà consentono spesso di semplificare lo sviluppo di un determinante, ad esempio introducendo in esso vari zeri.

**Proposizione 5.** *Sia A una matrice quadrata. Se A ha due righe (o colonne) proporzionali allora det A = 0. In particolare se A ha due righe (colonne) uguali oppure una riga nulla allora det A = 0*[1].

**Dim.** Per induzione sull'ordine della matrice. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}$ oppure $A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ a & b \end{pmatrix}$ è una matrice di ordine 2 a righe proporzionali allora det $A$ $= \lambda ab - \lambda ab = 0$. Analogamente per le colonne . Supponiamo il risultato vero per matrici di ordine $n-1$ e sia $A$ una matrice di ordine $n$ in cui due righe (colonne) sono proporzionali. Sviluppando det $A$ secondo una riga diversa da quelle proporzionali si ottiene che det $A$ è una combinazione lineare di determinanti di matrici $(n-1)\times(n-1)$ con due righe (colonne) proporzionali e quindi nulli per l'ipotesi induttiva. Onde det $A = 0$.

**Proposizione 6.** Siano $A$, $A'$ e $A''$ matrici $n \times n$ che differiscono per una singola riga (colonna), sia la $i$-esima, e supponiamo che, in $A''$, questa possa essere ottenuta aggiungendo i corrispondenti elementi delle $i$-esime righe (colonne) di $A$ e $A'$. Allora

[1] Si dice che due righe (colonne) di una matrice sono proporzionali se gli elementi di una di esse differiscono dai corrispondenti elementi dell'altra per un fattore moltiplicativo $c$. L'uguaglianza è un caso particolare di proporzionalità cioè il caso in cui $c = 1$. Una riga (colonna) nulla è proporzionale a qualsiasi altra riga (colonna), come si ottiene ponendo $c = 0$.

$$\det A'' = \det A + \det A'$$

**Dim.** Il risultato si ottiene immediatamente sviluppando $\det A$ secondo la $i$-esima riga.

**Esempio 5.** Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Gli elementi $2 \quad 4 \quad 7$ della seconda riga di $A$. Si possono ottenere come somme $1+1 \quad 3+1 \quad 5+2$. Consideriamo allora le matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Le matrici $A$, $B$, $C$ soddisfano le ipotesi della proposizione 6 onde:

$$\det A = \det B + \det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

poiché $\det B = 0$ (ha la $1^a$ e la $2^a$ riga uguali) e $\det C = 0$ (la terza riga è due volte la seconda) [Prop. 5].

Vediamo ora l'effetto di una trasformazione elementare [Cap. I, Par. 2] di righe o colonne sul determinante di una matrice.

**Proposizione 7.** *Sia $A$ una matrice quadrata.*

1) *Se una matrice $B$ si ottiene dalla matrice $A$ moltiplicando tutti gli elementi di una riga (colonna) di $A$ per una costante $\lambda$, si ha $\det B = \lambda \det A$;*
2) *se nella matrice $A$ si scambiano tra loro due righe (colonne), si ottiene una matrice tale che $\det B = -\det A$;*
3) *se una matrice $B$ è ottenuta da $A$ aggiungendo ad una riga (colonna) il multiplo di un'altra riga (colonna) allora $\det B = \det A$.*

**Dim.** Basta provare gli asserti per le righe. Infatti, a questo punto, per le colonne seguono dal lemma 28 del capitolo I e dalla proposizione 4.

1) Supponiamo che $B$ sia ottenuta da $A$ moltiplicando la riga $i$-esima per una costante $\lambda$. Allora

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che i complementi algebrici $a'_{ij}$ degli elementi della $i$-esima riga di $A$ e $B$ sono uguali, poiché ottenuti cancellando tale riga. Onde sviluppando det $B$ secondo la riga $i$-esima si ha $\det B = \lambda a_{i1}a'_{i1} + \dots + \lambda a_{in}a'_{in} = \lambda(a_{i1}a'_{i1} + + \dots + a_{in}a'_{in}) = \lambda \det A$.

2) Per induzione. Se $A$ è una matrice $2\times2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

allora $\det A = ad - bc = -(cb - ad) = -\det B$. Supponendo l'asserto vero per matrici di ordine $n-1$, esso si ottiene immediatamente, per matrici di ordine $n$, sviluppando secondo una riga diversa da quelle che si scambiano.
3) In virtù della proposizione $\det B = \det A + \det C$ dove $C$ ha due righe proporzionali onde $\det C = 0$.

**Esempio 6.** Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Vogliamo calcolare det $A$. Osserviamo che i primi due elementi della prima o seconda riga sono proporzionali; considerando quindi la matrice $B$ ottenuta da $A$ con la trasformazione elementare $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2$ si ha $\det A = \det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ [Prop. 7]. Ora sviluppando det $B$ secondo la prima riga si ha immediatamente $\det A = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12.$

**Corollario 8.** *Se una matrice $B$ è ottenuta da una matrice $A$ effettuando una permutazione*[2] *sulle righe (colonne) di $A$ allora $\det B = \pm \det A$.*

**Dim.** Basta osservare che ogni permutazione di righe (colonne) può essere ottenuta mediante un numero finito di successivi scambi di righe (colonne) e applicare la proposizione 7.

**Corollario 9.** *Se una matrice $B$ è ottenuta aggiungendo ad una riga (colonna) una somma di multipli, cioè una* **combinazione lineare,** *di righe (colonne) di $A$ allora $\det B = \det A$.*

**Dim.** Basta osservare che tale operazione consiste nel ripetere un numero finito di trasformazioni elementari del tipo 3 [Cap. I, § 2], che non alterano il determinante in virtù della proposizione 7.3).

**Esempio 7.** Vogliamo calcolare

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sottraiamo alla prima colonna la seconda colonna più due volte la terza $\mathbf{c}_1 \to \mathbf{c}_1 - (\mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3)$. Si ha [Cor. 9]

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

(sviluppando secondo la prima colonna). Se ora nell'ultimo determinante mettiamo, in luogo di $\mathbf{c}_3 \to \mathbf{c}_3 - (\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2)$ si ha:

$$\det A = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \left( -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

[2] Per una definizione rigorosa di permutazione si veda il paragrafo 12.

**Corollario 10.** *Se in una matrice $A$ una riga (colonna) è somma di multipli, cioè combinazione lineare, di altre righe (colonne) di $A$ allora* $\det A = 0$.

**Dim.** Basta sottrarre tale combinazione lineare alla riga data. La matrice che si ottiene ha determinante uguale a quello di $A$ [Cor. 9] e nullo poiché ha una riga nulla [Prop. 5].

**Esempio 8.** Se

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 14 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

poiché si ha $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_4 = (-2,4,6,8) + (18,24,15,9) - (14,28,20,14) = (2,0,1,3)$, allora $\det A = 0$.

**Osservazione 11.** Vedremo che vale il viceversa del corollario 10 nel successivo corollario 34 del paragrafo 9 (si veda anche l'esercizio 20).

## 5. Applicazioni: calcolo del determinante per riduzione; determinante del prodotto di matrici

Vediamo, in questo paragrafo, due applicazioni notevoli delle proprietà viste nel precedente paragrafo: il calcolo del determinante per riduzione a scalini e il determinante di un prodotto di matrici.

Vediamo innanzitutto quanto vale il determinante di una matrice a scalini. Una **matrice** quadrata si dice **triangolare superiore** se tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli, vale a dire $a_{ij} = 0$, se $i > j$. Una **matrice** quadrata si dice **triangolare inferiore** se tutti gli elementi sopra la diagonale principale sono nulli, cioè $a_{ij} = 0$, se $i < j$. Una matrice che è sia triangolare superiore che inferiore è una matrice che ha tutti gli elementi nulli al di fuori della diagonale principale, cioè $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e si dice **matrice diagonale**.

**Esempio 9.** Ogni matrice quadrata a scalini è triangolare superiore. Infatti ogni pivot $a_{ij}$ è, per definizione, tale che $i \leq j$.

Non tutte le matrici triangolari superiori sono a scalini, come mostra il seguente esempio.

**Esempio 10.** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è triangolare ma non a scalini.

**Proposizione 12.** *Il determinante di una matrice triangolare superiore o inferiore è uguale al prodotto degli elementi della diagonale.*

**Dim.** Consideriamo una matrice $A$ triangolare superiore (il ragionamento nel caso di matrice triangolare inferiore è identico)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sviluppando det $A$ secondo gli elementi della prima colonna si ottiene:

$$\det A = a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e operando successivamente allo stesso modo si ha che det $A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

**Esempio 11.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2(-3)6 \cdot 9 \cdot 4 = -1296.$

**Teorema 13.** *Sia $A$ una matrice quadrata e $R = (b_{ij})$ la matrice a scalini equivalente ad $A$ ottenuta applicando l'algoritmo (9.a) del capitolo I. Allora det $A = (-1)^i b_{11} \dots b_{nn}$ dove $i$ è il numero degli scambi di righe (cioè di operazioni del tipo 2) effettuati.*

**Dim.** Basta osservare che per ridurre $A$ a forma di scalini, usando l'algoritmo (9.a), sono sufficienti trasformazioni elementari del tipo 2) e 3) che non cambiano il determinante [Prop. 7] salvo il segno che è dato dal numero $i$ di scambi di righe. Quindi $\det A=(-1)^i \det R$. A questo punto basta osservare che $R$ è una matrice triangolare superiore e quindi $\det R=b_{11}...b_{nn}$ [Prop. 12].

**Esempio 12.** Vogliamo calcolare $\det A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ con l'algoritmo di riduzione 9.a) del capitolo I. Si ha:

$$\begin{array}{r} \mathbf{r}_1\leftrightarrow\mathbf{r}_2 \\ \det A= \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{r} \\ \det A=- \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-\frac{1}{3}\mathbf{r}_1 \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \det A=- \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-4\mathbf{r}_2 \end{array}\begin{vmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{3} \end{vmatrix}=-3(1)\left(-\frac{59}{3}\right)=59$$

**Osservazione 14.** Se nel corso del procedimento di riduzione a scalini si incontra una riga nulla si può concludere subito che $\det A=0$.

**Esempio 13.** Vogliamo calcolare $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 7 & -2 & 12 \\ 2 & 17 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 12 & 11 \end{vmatrix}$. Allora:

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2+3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4\to\mathbf{r}_4-5\mathbf{r}_1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -9 \end{vmatrix}=\det A$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ r_3 \to r_3 - r_2 \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -9 \end{vmatrix} = \det A \qquad \text{onde } \det A = 0.$$

**Osservazione 15.** Per calcolare un determinante per riduzione non occorre usare la trasformazione elementare del tipo 1. Tuttavia essa può essere utile per semplificare il calcolo del determinante raccogliendo l'eventuale fattore comune $\lambda$ degli elementi di una riga [Prop. 7.1].

**Esempio 14.** Vogliamo calcolare $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Raccogliendo 2 dalla prima riga, cioè moltiplicando la prima riga di $A$ per $\frac{1}{2}$, si ha:

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + 3r_1 \end{array}$$

onde raccogliendo $-3$ dalla seconda riga si ha $\det A = 2(-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ e

$$\det A = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ r_3 \to r_3 - 7r_2 \end{array} \qquad \text{quindi } \det A = -6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = -12.$$

**Osservazione 16.** Per matrici di grandi dimensioni il metodo di riduzione richiede considerevolmente meno operazioni del calcolo determinante con lo sviluppo di Laplace [Cap. III, § 1]. Invece per matrici di piccole dimensioni, ad esempio $3 \times 3$, $4 \times 4$, la differenza non è elevata. In particolare può essere più conveniente usare le proprietà dei determinanti, esposte nel paragrafo 4, per fare comparire zeri nella matrice.

**Esempio 15.** Consideriamo il determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 2 & 7 \\ 8 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ dell'esempio 7. Per calcolarlo con il metodo di riduzione occorrono 14 somme e 23 prodotti [Cap. III, Teor. 1]. Nell'esempio 7 abbiamo effettuato 15 somme e 9 prodotti.

Vogliamo ora dimostrare un risultato fondamentale della teoria dei determinanti, se $A$ e $B$ sono matrici quadrate $\det(AB) = \det A \det B$. Ci occorre premettere alcune considerazioni sulle matrici a blocchi.

Sia $E$ una matrice quadrata di ordine $n$. Se $p$ è un intero positivo minore di $n$ si può decomporre la matrice $E$ in **blocchi** nel seguente modo:

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

dove $A$ è la sottomatrice quadrata relativa alle prime $p$ righe e colonne di $E$; $B$ è la sottomatrice relativa alle prime $p$ righe ed alle ultime $n-p$ colonne di $E$; $C$ è la sottomatrice relativa alle ultime $n-p$ righe e alle prime $p$ colonne di $E$; $D$ è la sottomatrice quadrata relativa alle ultime $n-p$ righe e colonne di $E$.

La matrice $E$ si dice a **blocchi** $A$, $B$, $C$, $D$.

**Proposizione 17.** *Siano $A$ una matrice $n \times n$, $O$ la matrice nulla $n \times m$, $C$ una matrice $m \times n$ e $D$ una matrice $m \times m$.*
i) *Sia $E$ la matrice a blocchi $A$, $O$, $C$, $D$*

$$E = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

*Allora $\det E = \det A \det D$.*
ii) *Se $B$ è una matrice $n \times m$, $O$ è la matrice nulla e $F$ è la matrice a blocchi $A$, $B$, $O$, $D$*

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$$

*allora $\det F = \det A \det D$.*

**Dim.** i) Per induzione. Per $n = 1$ la matrice $E$ ha come prima riga $(a_{11}, 0, \ldots, 0)$

e quindi sviluppando secondo la prima riga si ha det $E = a_{11}$ det $D$ = det $A$ det $D$. Supponiamo il risultato vero per $A$ di dimensione $n-1$ e proviamolo per $A$ di dimensione $n$. Sviluppando det $E$ secondo la prima riga e indicando con $b'_{ij}$ il complemento algebrico dell'elemento di posto $1,j$ in $E$ si ha det $E = a_{11}b'_{11} + \ldots + a_{1n}b'_{1n} = a_{11}a'_{11}$ det $D + \ldots + a_{1n}a'_{1n}$ det $D$ dove $a'_{ij}$ indica il complemento algebrico di $a_{1j}$ nella matrice $A$ e la seconda uguaglianza è conseguenza dell'ipotesi induttiva. Quindi det $E = (a_{11}a'_{11} + \ldots + a_{1n}a'_{1n})$ det $D$ = det $A$ det $D$. ii) Basta osservare che:

$$F^t = \begin{pmatrix} A^t & O \\ B^t & D^t \end{pmatrix}$$

e quindi det $F$ = det $F^t$ = det $A^t$ det $D^t$ = det $A$ det $D$ per i) e per la proposizione 4.

**Esempio 16.** Sia data la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E$ è a blocchi. Infatti $E = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Allora det $E$ = det $A$ det $D = -6 \cdot 18 = -108$.

**Proposizione 18.** *Siano A, B e C matrici quadrate di ordine n tali che C = AB. Allora det C = det A det B.*

**Dim.** Poniamo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$.
Si consideri la matrice a blocchi $A$ d'ordine $2n$

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ -I_n & O \end{pmatrix}$$

dove 0 è la matrice nulla di ordine $n$, e la matrice a blocchi

$$E = \begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix}$$

La $n+1$-esima colonna di $E$ è ottenuta aggiungendo alla $(n+1)$-esima colonna di $D$ la combinazione lineare delle prime $n$ colonne coi coefficienti $-b_{11}$, $-b_{21},\dots,-b_{n1}$, la $(n+2)$-esima colonna di $E$ è ottenuta aggiungendo alla $(n+2)$-esima colonna di $D$ la combinazione lineare delle prime $n$ colonne coi coefficienti $-b_{12}$, $-b_{22},\dots,-b_{n2}$, ecc., onde $\det E = \det D$ [Cor. 10]. Ma $\det E = \det A \det B$ [Prop. 17]. Inoltre $\det D = \det C$ (basta sviluppare $\det D$ secondo le righe $n+1,\dots,2n$) e quindi $\det C = \det A \det B$.

## 6. Una matrice quadrata $A$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. La regola di Cramer

In questo paragrafo utilizzando il determinante otteniamo una formula per il calcolo dell'inversa di una matrice $A$ invertibile. Ne deduciamo una formula per il calcolo della soluzione del sistema $AX=B$.

**Teorema 19 (Secondo teorema di Laplace).** *In ogni matrice quadrata $A=(a_{ij})$ è nulla la somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per gli aggiunti dei corrispondenti elementi di un'altra riga (o colonna), cioè*

$$a_{i1}a'_{j1} + a_{i2}a'_{j2} + \dots + a_{in}a'_{jn} = 0, \quad \text{se } i \neq j. \tag{9}$$

**Dim.** Consideriamo la matrice $B$ ottenuta da $A$ sostituendo alla riga $j$-esima la riga $i$-esima
$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{i1} & \dots\dots\dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots\dots\dots & a_{in} \\ a_{n1} & \dots\dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$ si ha $\det B = 0$ [Prop. 5].

Sviluppando $\det B$ secondo la riga $j$-esima di $B$ [Teor. 3] e osservando che i complementi algebrici della riga $j$-esima di $B$ coincidono con i complementi algebrici della riga $i$-esima di $A$ si ha la formula (9).

Riunendo assieme il primo e secondo teorema di Laplace, si ha la relazione (dove $\delta_{ij}$ è il cosiddetto simbolo di Kronecker: $\delta_{ij}=1$ se $i=j$, $\delta_{ij}=0$ se $i\neq j$):

$$a_{i1}a'_{j1} + a_{i2}a'_{j2} + \dots + a_{in}a'_{jn} = \delta_{ij} \det A \tag{10}$$

Ora, se

$$C = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots\dots & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots\dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

è la matrice dei complementi algebrici, **detta matrice complementare**, la trasposta di $C$ si dice **matrice aggiunta di** $A$.

$$agg(A) = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{21} & \dots\dots & a'_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots\dots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

In virtù di **(10)** si ha

**(11)** $$A \cdot agg(A) = (\delta_{ij} \det A) = \det A \cdot I_n$$

cioè:

$$A \cdot agg\ A = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & \det A \end{pmatrix}$$

**Proposizione 20.** *Se $A$ è una matrice quadrata $n \times n$ tale che* $\det A \neq 0$. *Allora $A$ è invertibile e l'inversa è data dalla matrice:*

**(12)** $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a'_{11}}{\det A} & \dfrac{a'_{21}}{\det A} & \dots\dots & \dfrac{a'_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{a'_{1n}}{\det A} & \dots\dots & & \dfrac{a'_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

*il cui elemento di posto $(i,j)$ è l'aggiunto $a'_{ji}$ dell'elemento $a_{ji}$ di $A$, diviso per* $\det A$.

**Dim.** In virtù di **(11)** si ha $A\left(\dfrac{1}{\det A}\, agg(A)\right) = \dfrac{1}{\det A}\left(A\ agg(A)\right) = I_n$ onde $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, agg(A)$ [Cor. 38, Cap. I]. Vale anche il viceversa della proposizione 20 cioè se $A$ è invertibile allora $\det A \neq 0$.

**Proposizione 21.** *Sia $A$ una matrice quadrata. Allora $A$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In tal caso $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.*

**Dim.** In virtù della proposizione 20 basta provare che se $A$ è invertibile allora $\det A \neq 0$. Ma $\det (AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I_n = 1$ onde $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} =$ $= \dfrac{1}{\det A}$.

**Esempio 17.** Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcoliamo innanzitutto la matrice complementare $C$ di $A$. Si ha:

$$a'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12, \quad a'_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3, \quad a'_{13} = -3, \quad a'_{21} = -13,$$

$$a'_{22} = 5, \quad a'_{23} = 2, \quad a'_{32} = 2 \quad \text{e} \quad a'_{33} = 2 \quad \text{onde} \quad C = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'aggiunta di $A$ è ora data da $agg(A) = C^t = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Inoltre $\det A = 3 \neq 0$ onde $A$ è invertibile. L'inversa di $A$ è quindi data da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La formula (12) che permette di calcolare l'inversa di una matrice consente anche di ottenere una formula esplicita per il calcolo della soluzione del sistema:

$$AX = B \tag{13}$$

quando la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è invertibile, vale a dire quando $\det A \neq 0$ [Prop. 21].

Abbiamo già dimostrato [Prop. 35, Cap. I] che se $A$ è invertibile il sistema **(13)** ha un'unica soluzione data da

$$X = A^{-1}B \tag{13}$$

e se $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è la colonna dei termini noti definiamo $n$ nuove matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Cioè $A_i$ è la matrice ottenuta sostituendo l'i-esima colonna di $A$ con la colonna dei termini noti.

**Teorema 22 (Regola di Cramer).** *Sia $A$ una matrice $n \times n$ tale che $\det A \neq 0$. Allora l'unica soluzione del sistema $AX = B$ è data da*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

**Dim.** La soluzione di $AX = B$ è $X = A^{-1}B$, cioè

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a'_{11}}{\det A} & \frac{a'_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{a'_{n1}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a'_{1n}}{\det A} & \frac{a'_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{a'_{nn}}{\det A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

onde $$x_i = \frac{b_1 a'_{1i} + b_2 a'_{2i} + \ldots + b_n a'_{ni}}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}$$

(come si vede subito sviluppando $\det A_i$ secondo la i-esima colonna dei termini noti).

**Esempio 18.** Vogliamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1 \end{cases}$$

si ha $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

onde il sistema ha un'unica soluzione. Se

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 9 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 9 & 6 \\ 3 & -1 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=-\frac{464}{160}\,,\quad x_2=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{280}{160}\,,\quad x_3=\frac{\det A_3}{\det A}=-\frac{56}{160}\,,$$

$$x_4=\frac{\det A_4}{\det A}=\frac{112}{160}$$

La verifica dei calcoli è lasciata al lettore.

Nel seguito diremo che un sistema lineare $AX=B$ con $A$ matrice quadrata e invertibile (cioè con $\det A\neq 0$) è un **sistema di Cramer**.

**Osservazione 23.** Anche per risolvere un sistema $AX=B$ con $A$ invertibile solitamente è più conveniente usare il metodo di eliminazione di Gauss invece della regola di Cramer, come mostrato nel paragrafo 1 del Capitolo III.

## 7. Minori e rango di una matrice

**Definizione.** Data una matrice $A=(a_{ij})$, $m\times n$, ed un intero positivo $p$ non superiore né a $m$ né a $n$, possiamo fissare $p$ righe e $p$ colonne della matrice $A$ di indici rispettivi $i_1,i_2,\dots,i_p$ (con $i_1<i_2<\dots<i_p$) e $j_1,j_2,\dots,j_p$ (con $j_1<j_2<\dots<j_p$). Gli elementi di $A$ che si trovano all'incrocio delle suddette $p$ righe e $p$ colonne costituiscono la sottomatrice quadrata di ordine $p$

$$M=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots\dots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots\dots & a_{i_2j_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \dots\dots & a_{i_pj_p} \end{pmatrix}$$

il cui determinante si dice **minore di ordine** $p$ della matrice $A$ relativo alle righe $i_1,\dots,i_p$ e alle colonne $j_1,j_2,\dots,j_p$ (a volte lo noteremo con $a_{i_1\dots i_p,j_p\dots i_p}$)[3].

**Esempio 19.** Data la seguente matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[3] Osserviamo che, se $A=(a_{ij})$ è una matrice quadrata, il minore complementare $A_{ij}$ di un elemento $a_{ij}$ (definito nel paragrafo 3) coincide con il minore $a_{1\dots i-1\ i+1\dots n,\ 1\dots j-1\ j+1\dots n}$.

il minore di ordine 2 relativo alla 1ª, 2ª riga e alla 2ª, 4ª colonna è dato dagli incroci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2-14 = -12$;

il minore di ordine 3 relativo alla 1ª, 2ª, 3ª riga e 1ª, 2ª, 4ª colonna è dato dagli incroci $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ cioè $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 33$

Diamo ora la nozione di **rango** di una matrice che sarà utile per approfondire lo studio dei sistemi lineari. Se $A$ è la matrice nulla il rango di $A$ si definisce uguale a zero. Sia $A$ non nulla. Allora:

**Definizione.** Il massimo ordine di un minore non nullo di $A$ si dice **rango di** $A$ e si denota con $\rho(A)$. Quindi $\rho(A)=p$ se e solo se esiste un minore di ordine $p$ non nullo e i minori di ordine maggiore di $p$ sono nulli.

**Osservazione 24.** Se $A$ è una matrice $m \times n$ per definizione $\rho(A) \leq Min\{m,n\}$.

**Esempio 20.** Vogliamo calcolare il rango $\rho(A)$ della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

poiché il minore di ordine 3 relativo alla 1ª, 2ª, 3ª riga e 1ª, 2ª, 3ª colonna è $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10$ e quindi è non nullo, si ha $\rho(A) \geq 3$.

D'altra parte $\rho(A) \leq 3$ [Osservazione 24] e quindi $\rho(A)=3$.

**Esempio 21.** Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ il minore di ordine $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 5+3=8$ è non nullo. D'altra parte $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ poiché la terza riga è la somma della prima e della seconda. Ne segue $\rho(A)=2$.

**Lemma 25.** *Il rango di una matrice è uguale a quello della sua trasposta.*

**Dim.** Basta osservare che il determinante di una matrice è uguale a quello della sua trasposta.

**Lemma 26.** *Se tutti i minori di ordine $p+1$ di una matrice sono nulli, il rango della matrice non supera $p$.*

**Dim.** Basta provare che tutti i minori d'ordine $p+2$, $p+3, \dots$ sono nulli. Ora sviluppando un minore d'ordine $p+2$ secondo una qualsiasi riga lo si ottiene come combinazione lineare di minori d'ordine $p+1$; dunque tutti i minori d'ordine $p+2$ sono nulli. Ripetendo il ragionamento per $p+3$, ecc., si ha l'asserto.

**Teorema 27.** *Due matrici equivalenti hanno lo stesso rango.*

**Dim.** Basta mostrare che effettuando su una matrice $A$ una qualsiasi trasformazione elementare di tipo 1,2,3 [Cap. I, Par. 2] il rango non cambia. Ciò è evidente per la trasformazione di tipo 1, poiché essa non altera l'annullamento dei minori. Consideriamo una trasformazione di tipo 2. Sia $B$ la matrice ottenuta scambiando due righe di $A$. È facile rendersi conto che ogni minore di $B$ è un minore di $A$ oppure è ottenuto permutando due righe della matrice di un minore di $A$; onde, in virtù della proposizione 7, $\rho(B)=\rho(A)$. Sia infine $B=(b_{ij})$ la matrice ottenuta da $A=(a_{ij})$ mediante una trasformazione elementare di tipo 3: $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \lambda \mathbf{r}_j$. Se proviamo che $\rho(B) \leq \rho(A)$, poiché ogni trasformazione elementare ha una trasformazione inversa dello stesso tipo [Prop. 8.b), Cap. I], si ha anche $\rho(A) \leq \rho(B)$ onde la tesi $\rho(B)=\rho(A)$. Per provare che $\rho(B) \leq$ $\leq \rho(A) = p-1$ basta dimostrare che ogni minore di ordine $p$, $b_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots i_p}$ di $B$ è nullo. Ora se $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, oppure $\{i,j\} \subset \{i_1, \dots, i_p\}$, si ha [Prop. 7] $b_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots i_p} =$ $= a_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots i_p}$. Se invece $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ e $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ consideriamo la matrice $C=(c_{ij})$ ottenuta con lo scambio $\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j$ in $A$. Si ha [Propp. 6 e 7] $b_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots i_p} = a_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots i_p} -$ $- \lambda \cdot c_{i_1 \dots i_p, j_1 \dots i_p} = 0 - \lambda 0 = 0$.

**Proposizione 28.** *Il numero di righe non nulle (cioè il numero dei pivot) di una matrice a scalini coincide con il suo rango.*

**Dim.** Basta osservare che se $p$ è il numero di righe non nulle della matrice a scalini $S$, da $S$ si può estrarre il minore

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i_2j_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}$$

individuato dalle righe e colonne che contengono i pivot $a_{i_hj_h}$ di $S$. La matrice $M$ è triangolare superiore e quindi [Prop. 12] $\det(M) = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_pj_p} \neq 0$, ossia $\rho(S) \geq \rho(M) = p$, ma poiché $S$ ha esattamente $p$ righe non nulle ogni minore di ordine $p+1$ è nullo onde $\rho(S) = p$ per il lemma.

**Corollario 29.** *Sia $A$ una matrice non nulla. Il rango di $A$ coincide con il numero di righe non nulle (cioè il numero dei pivot) di una matrice a scalini equivalente ad $A$.*

**Dim.** È immediata conseguenza del teorema 27 e della proposizione 28.

**Esempio 22.** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ la forma a scalini di $A$ è $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, onde $\rho(A) = 2$.

## 8. Il teorema di Rouché-Capelli

La nozione di rango permette di caratterizzare la compatibilità di un sistema lineare.

Consideriamo un sistema lineare:

$$(15) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

di matrice incompleta $A$ e completa $A'$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n}b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots\dots & a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

**Teorema 30 (di Rouché Capelli).** *Il sistema* (15) *è compatibile se e solo se* $\rho(A)=\rho(A')$.

**Dim.** Sia $S'$ la forma a scalini di $A'$, e consideriamo il sistema equivalente a (15) di matrice completa $S'$. La matrice incompleta $S$ di tale sistema è equivalente ad $A$, onde $\rho(A')=\rho(S')$ e $\rho(A)=\rho(S)$ [Teor. 27]. Basta quindi provare l'asserto per sistemi con matrice completa a scalini. Ora un tale sistema ha soluzioni se e solo se l'ultima riga non nulla della matrice a scalini $S'$ non è del tipo $(0,0,\dots,b)$, con $b\neq 0$, [Prop. 15, Cap. I] vale a dire $S$ e $S'$ hanno lo stesso numero di righe non nulle cioè $\rho(S)=\rho(S')$ [Prop. 28].

**Esempio 23.** Il sistema lineare $\begin{cases} 2x+3y-\ z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \\ 4x+6y+\ z=1 \end{cases}$ è incompatibile.

Infatti il determinante della matrice $A$ dei coefficienti

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

è nullo in quanto l'ultima riga è somma delle prime due. Poiché il minore

$a_{13,13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=2+4=6$ è non nullo, la matrice $A$ ha rango 2. La matrice completa $A'$ ha invece rango 3 in quanto è non nullo il minore

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1(4+2)=6.$$

**Esempio 24.** Il sistema lineare $\begin{cases} 2x+3y=\ \ 2 \\ x-\ y=-1 \\ 7x+3y=\ \ 1 \end{cases}$ è compatibile.

Infatti poiché il minore $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2-3=-5$, della matrice incompleta

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, è non nullo, $A$ ha rango 2. Tale minore è anche un minore

della matrice completa $A'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e poiché $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}=$

$=2(-1+3)-3(1+7)+2(3+7)=4-24+20=0$. Si ha $\rho(A')=2$ ed allora $\rho(A)=\rho(A')=2$.

## 9. Dipendenza lineare. Un'altra definizione il rango di una matrice. Il teorema degli orlati

La nozione di rango di una matrice è strettamente connessa alla nozione di dipendenza lineare delle righe o colonne di una matrice. Anzi si potrebbe definire, come vedremo, il rango come il numero massimo di righe o colonne linearmente indipendenti. Iniziamo con il formalizzare la nozione di dipendenza lineare di $n$-ple.
Date le $m$ $n$-uple di elementi di un campo

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1=(a_{11},\dots,a_{1n}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}_m=(a_{m1},\dots,a_{mn}) \end{cases}$$

e $m$ scalari $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, diremo che l'$n$-pla $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)$ è **combinazione lineare,** a coefficienti $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, delle (o è linearmente dipendente dalle) $n$-ple $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ e scriveremo $\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\dots+\lambda_m\mathbf{a}_n$ se

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_m a_{mn} \end{cases}$$

Le $n$-ple si dicono **linearmente dipendenti** se esiste una combinazione lineare nulla, di esse, a coefficienti non tutti nulli cioè esistono $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} = (0,\ldots 0)$. Altrimenti $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ si dicono **linearmente indipendenti.**

La nozione di lineare dipendenza può essere immediatamente applicata alle righe $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_n$ di una matrice. Si può applicare anche alle $n$-ple delle colonne di una matrice. Quindi una colonna $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ è combinazione lineare $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{c}_n$ delle colonne $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ se esistono scalari $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tali che

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m = \lambda_1 a_{m1} + \ldots + \lambda_n a_{mn} \end{cases}$$

**Teorema 31.** *Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ di rango $p$ e consideriamo le righe (colonne) di $A$ che contengono un minore non nullo di ordine $p$. Allora queste $p$ righe (colonne) sono linearmente indipendenti mentre le altre sono combinazioni lineari di quelle. Viceversa se $p$ righe (colonne) di una matrice $A$ sono linearmente indipendenti e le altre sono combinazione lineare di esse allora $\rho(A) = p$.*

**Dim.** Dimostriamo il risultato per le colonne (l'asserto per le righe si ottiene immediatamente considerando la trasposta di $A$ [Lemma 28, Cap. I]). Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che un minore non nullo di ordine $p$ sia quello che si trova all'incrocio delle prime $p$ righe e $p$ colonne. Dire che le prime $p$ colonne sono linearmente indipendenti equivale a dire che il sistema lineare omogeneo

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mp}x_p = 0 \end{cases}$$

ha soltanto la soluzione nulla. Ora, poiché il minore $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots\ldots & a_{pp} \end{vmatrix}$ è per ipotesi non nullo, il sistema di Cramer

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pp}x_p = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla [Teor. 22] e a maggior ragione il sistema (16) ha solo la soluzione nulla.

La $j$-esima colonna ($p+1 \le j \le m$) della matrice $A=(a_{ij})$ sarà poi combinazione lineare delle prime $p$ righe se è possibile risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = a_{1j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mp}x_p = a_{mj} \end{cases}$$

Ora i minori della matrice completa $C'$ e incompleta $C$ di tale sistema sono minori di $A$. Poiché $\rho(A)=p$ si ha $\rho(C)=\rho(C')=p$ e il sistema ha soluzioni in virtù del teorema di Rouché-Capelli.

**Esempio 25.** Vogliamo calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & -4 & 6 & 13 \\ -3 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1-8 = -7 \neq 0$ onde le prime due righe di $A$ sono linearmente indipendenti. Inoltre $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ onde $\rho(A)=2$ per il teorema 31.

Dal teorema 31 discende subito il:

**Corollario 32.** *Consideriamo l'insieme $S$ delle righe (colonne) di una matrice $A$. Ogni sistema massimale di righe o di colonne di $A$ linearmente indipendenti ha lo stesso numero di elementi che coincide con il rango di $A$.*

**Dim.** Dimostriamo il risultato per le righe. Per le colonne la dimostrazione è identica. Sia $\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_p$ un sistema massimale di righe linearmente indipendenti della matrice $A$. Ciò vuol dire che se $\mathbf{r}$ è un'altra riga di $A$ allora $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_p$, $\mathbf{r}$ sono linearmente dipendenti cioè $\lambda_1\mathbf{r}_1+\dots+\lambda_p\mathbf{r}_p+\lambda\mathbf{r}=0$. Ma si deve avere $\lambda\neq\mathbf{r}$, altrimenti $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_p$ sarebbero dipendenti e quindi $\mathbf{r}$ è combinazione lineare di $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_p$ [Esercizio 20]. Onde $p=\rho(A)$ [Teor. 31].

**Osservazione 33.** Il corollario permette di dare un'altra definizione di rango di una matrice come massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti.

**Corollario 34.** *La righe (colonne) di una matrice* $A=(a_{ij})$, m×n, sono linearmente dipendenti se e solo se $\rho(A)<m(\rho(A)<n)$. *Quindi in particolare se $A$ è una matrice quadrata le righe di $A$ sono linearmente dipendenti se e solo se* $\det A=0$.

**Dim.** Dal teorema 31 segue che se $\rho(A)=m(\rho(A)=n)$ le righe (colonne) di $A$ sono linearmente indipendenti. Se viceversa $\rho(A)<m(\rho(A)<n)$ si ha la tesi in virtù del teorema 31 e dell'esercizio 20.

**Esempio 26.** Data la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

si ha $2\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2-3\mathbf{r}_3-2\mathbf{r}_4=0$ cioè le righe di $A$ sono linearmente dipendenti e $\det A=0$.

Il teorema 31 permette di ricavare un criterio più efficiente per calcolare il rango di una matrice.

**Definizione.** Si dice che un minore $\mu$ di ordine $p+1$ **orla** un minore $\nu$ di ordine $p$ se $p$ righe e $p$ colonne tra quelle che individuano $\mu$ individuano $\nu$.

**Esempio 27.** Dato il minore $a_{24,15}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=5-4=1$ della matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

il minore $a_{234,135}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}=50$ orla il minore $a_{24,15}$.

**Teorema 35 (degli orlati o di Kronecker).** *Sia $A=(a_{ij})$ una matrice e sia $\mu$ un minore non nullo di ordine $p$ di $A$. Se tutti i minori di ordine $p+1$ ottenuti orlando $\mu$ sono nulli, allora $A$ ha rango $p$.*

**Dim.** Possiamo supporre per semplicità che il minore non nullo sia individuato dalle prime $p$ righe e $p$ colonne $\mu=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}$. In virtù del teorema 31 basta provare che ogni colonna $(a_{1j},\dots,a_{mj})$ $(p<i\leq n)$ è combinazione lineare delle prime $p$ colonne, cioè esistono degli scalari $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tali che:

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} a_{11}\lambda_1+\dots+a_{1p}\lambda_p=a_{1j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\lambda_1+\dots+a_{mp}\lambda_p=a_{mj} \end{cases}$$

Ora se $C_i$ sono le matrici complete dei sistemi, $p<i\leq m$

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1p}=a_{1j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+\dots+a_{pp}x_p=a_{pj} \\ a_{i1}x_1+\dots+a_{ip}x_p=a_{ij} \end{cases}$$

Si ha che det $C_i$ sono i minori di ordine $p+1$ che orlano $\mu$ e quindi se $C_i$ è la matrice incompleta di **(19)** si ha per ipotesi $\rho(C_i)=\rho(C_i')$ onde i sistemi **(19)** hanno sempre soluzioni. Inoltre il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{p1}x_p=a_{1j} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+\dots+a_{pp}x_p=a_{pj} \end{cases}$$

è di Cramer, poiché $\mu$ è non nullo e quindi ha una sola soluzione $\lambda_1,\dots\lambda_p$ che è anche soluzione dei sistemi **(19)**, cioè valgono le **(18)**.

**Esempio 28.** Calcoliamo il rango di

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Un minore non nullo di ordine 2 è $a_{13,12}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2.$

Orliamo con la 2ª riga e 3ª colonna

$$a_{123,123}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

Orliamo con la 2ª riga e 4ª colonna

$$a_{123,124}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Orliamo con la 4ª riga e 3ª colonna

$$a_{134,123}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix}=0$$

Orliamo con la 4ª riga e 4ª colonna

$$a_{134,124}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Poiché abbiamo orlato $a_{13,12}$ in tutti i modi possibili ai può concludere per il teorema di Kronecker che $\rho(A)=2$.

## 10. Un altro metodo per determinare le soluzioni di un sistema lineare. Sistemi equivalenti e matrici equivalenti

Il teorema di Rouché-Capelli è alla base di un procedimento, alternativo al metodo di Gauss, per determinare le soluzioni di un sistema lineare. Occorre però premettere il seguente risultato.

**Proposizione 36.** *Se il sistema lineare* **(15)** *ha soluzioni e* $\rho(A)=\rho(A')=p$, *consideriamo p righe di A relative ad un minore di ordine p non nullo. Allora il sistema* **(15)** *è equivalente a quello costituito dalle p equazioni corrispondenti a tali p righe.*

**Dim.** Basta osservare che $p$ righe relative ad un minore di ordine $p$ non nullo di $A'$ sono linearmente indipendenti mentre le altre sono combinazioni lineari di tali righe [Teor. 31]. Ora è facile verificare che ogni soluzione delle $p$ equazioni corrispondenti a righe di $A'$ linearmente indipendenti è soluzione delle rimanenti equazioni.

A partire dai precedenti risultati si ottiene il seguente metodo, per determinare le soluzioni di un sistema lineare.

Consideriamo un sistema lineare qualsiasi **(15)** di matrice completa $A$ e incompleta $A'$.

1) Calcoliamo $\rho(A)$ e $\rho(A')$. Se $\rho(A)\neq\rho(A')$ il sistema non ha soluzioni.

2) Se $\rho(A)=\rho(B)=p$ il sistema ammette soluzioni ed è equivalente al sistema costituito da $p$ equazioni relative ad un minore di ordine $p$ non nullo. Supponiamo, per semplicità, che tale minore non nullo sia quello determinato dalle prime $p$ righe e $p$ colonne:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1p} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{p1} & \dots\dots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

onde il sistema dato è equivalente al sistema

$$\textbf{(20)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\dots+a_{pn}x_n=b_p \end{cases}$$

per determinare le soluzioni di **(20)** basta sostituire i valori arbitrari $x_{p-1}=t_1$, $x_n=t_{n-p}$ nel sistema e ricavare con la regola di Cramer le incognite $x_1,\dots,x_p$.

**Esempio 29.** Determinare le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

Determiniamo il rango della matrice incompleta e completa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Orliamo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9 = -8 \neq 0$ con la 3ª riga e 2ª colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

e poi con la 3ª riga e 4ª colonna

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $\rho(A) = 2$.

Per calcolare $\rho(A')$ basta orlare $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ con la 3ª riga e 5ª colonna. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Onde $\rho(A) = \rho(A') = 2$ e il sistema è equivalente a quello costituito dalle prime 2 equazioni

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-\ x_4=2 \\ 3x_1-6x_2+\ x_3-2x_4=1 \end{cases}$$

poiché il minore $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1-9=-8$ e individuato dalla prima e terza colonna ponendo $x_2=s$ e $x_4=t$ si ha

$$\begin{cases} x_1+3x_3=2s+\ t+2 \\ 3x_1+\ x_3=6s+2t+1 \end{cases}$$

e dalla regola di Cramer

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2s+t+2 & 3 \\ 6s+t+1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-16s-2t-1}{-8}=2s+\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2s+t+2 \\ 3 & 6s+2t+1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-t-5}{-8}=\frac{1}{8}t+\frac{5}{8}$$

onde le soluzioni sono

$$\left(2s+\frac{1}{4}t+\frac{1}{8}\,,\ s,\quad \frac{1}{8}t+\frac{5}{8}\,,\quad t\right)$$

al variare dei numeri reali $s$ e $t$.

Siamo ora in grado di provare i risultati enunciati nelle osservazioni 6 e 10 del Capitolo I. Precisiamo innanzitutto che una combinazione lineare delle equazioni di un sistema lineare è un'equazione lineare la cui matrice completa (che è una riga) è combinazione lineare delle righe della matrice completa del sistema.

**Teorema 37.** *Due sistemi lineari compatibili sono equivalenti se e solo se le equazioni di uno qualsiasi di essi sono combinazioni lineari delle equazioni dell'altro.*

**Dim.** Consideriamo un sistema lineare compatibile

$$\text{(21)}\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

tale che $\rho(A)=\rho(A')=p$ e supponiamo per semplicità che

$$a_{1\dots p,1\dots p}=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots\dots & a_{pp} \end{vmatrix}\neq 0;$$

consideriamo l'equazione lineare

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b \tag{22}$$

Per provare l'asserto basta provare che se le soluzioni di (21) sono anche soluzioni di (22) allora (22) è combinazione lineare delle prime $p$ equazioni di (21). Consideriamo allora il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+\dots+a_{pn}x_n=b_p \\ a_1x_1+\dots+a_nx_n=b \end{cases} \tag{23}$$

e siano $B$ e $B'$ le matrici complete di (23).

Poiché (23) è compatibile, per la proposizione 36 e per l'ipotesi, si ha $p\le\rho(B)=\rho(B')\le p+1$. Se $\rho(B)=\rho(B')=p$ l'ultima riga di $B'$ è combinazione lineare delle prime $p$ righe [Teor. 31] onde l'asserto. Supponiamo quindi $\rho(B)=$ $=\rho(B')=p+1$ e supponiamo per semplicità che un minore non nullo di $B$ di ordine $p+1$ sia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1p+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots\dots & a_{pp+1} \\ a_1 & \dots\dots & a_{p+1} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{24}$$

Ponendo in (23) $x_{p+1}=x_{p+2}=\dots=x_n=0$ e poi $x_{p+1}=1$, $x_{p+2}=\dots=x_n=0$ e ricavando, con la regola di Cramer, $x_1,\dots,x_p$ dalle prime $p$ equazioni si ottengono due soluzioni distinte delle prime $p$ equazioni e quindi due soluzioni distinte del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p+1}x_{p+1} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pp+1}x_{p+1} = b_p \\ a_1x_1 + \ldots + a_{p+1}x_{p+1} = b \end{cases}$$

che per l'ipotesi (24) ha una sola soluzione. Assurdo.

**Corollario 38.** *Se due sistemi lineari sono equivalenti, uno può essere ottenuto dall'altro applicando ad esso un numero finito di trasformazioni elementari.*

**Dim.** Basta osservare che ogni combinazione lineare delle equazioni di un sistema lineare si può ottenere con un numero finito di trasformazioni elementari del tipo 1 o 3. La trasformazione elementare del tipo 2 si rende necessaria se si vuole mantenere l'ordine delle equazioni nel sistema.

**Corollario 39.** *Due sistemi lineari equivalenti hanno matrici complete equivalenti.*

**Dim.** Basta osservare che ogni riga di una delle due matrici complete è combinazione lineare delle righe dell'altra matrice completa.

## 11. Soluzioni linearmente indipendenti di un sistema lineare omogeneo

In questo paragrafo consideriamo il caso notevole dei sistemi lineari omogenei. In tal caso si possono determinare le soluzioni del sistema come combinazioni lineari di soluzioni particolari, linearmente indipendenti in una forma che sarà utile per la teoria degli spazi vettoriali.

Consideriamo un sistema lineare omogeneo:

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Tale sistema, come già osservato, è sempre risolubile poiché ammette la soluzione banale o nulla $(0,\ldots,0)$. Si dimostra immediatamente la seguente:

**Proposizione 40.** *Ogni combinazione lineare di un numero finito di soluzioni del sistema* (25) *è ancora una soluzione di* (25).

**Dim.** Con notazione matriciale il sistema può essere scritto nella forma $AX=0$. Inoltre se indichiamo con matrici colonna $S_1,\dots,S_n$ $n$ soluzioni del sistema, si ha $AS_1=\dots=AS_n=0$, e, in virtù delle proprietà dell'aritmetica matriciale [Teor. 19, Cap. I], $A(\lambda_1 S_1+\dots+\lambda_n S_n)=\lambda_1(AS_1)+\dots+\lambda_n(AS_n)=0$.

Supponiamo che il rango della matrice $A$, dei coefficienti del sistema (25), sia $p$ e che un minore $a_{1\dots p,\,1\dots p}$ non nullo sia individuato dalle prime $p$ righe e $p$ colonne di $A$. Allora tutti i minori che si ottengono orlando $a_{1\dots p,\,1\dots p}$ con l'ultima colonna sono nulli (gli elementi dell'ultima colonna sono nulli) e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, ogni soluzione del sistema:

$$(26)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+\dots+a_{pn}x_n=0 \end{cases}$$

è anche una soluzione del sistema (25) cioè i due sistemi sono equivalenti e possiamo dunque limitarci a studiare il sistema (26).

Se $p=n$ il sistema è di Cramer e quindi ha solo la soluzione nulla [Teor. 22]; se $p<n$ vogliamo determinare un insieme $S$ di soluzioni linearmente indipendenti tali che ogni soluzione del sistema è combinazione lineare degli elementi di $S$ ($S$ si dice **una base dello spazio delle soluzioni** del sistema omogeneo).

Dando a $x_{p+1}, x_{p+2},\dots, x_n$ i seguenti valori $x_{p+1}=1$, $x_{p+2}=\dots=x_n=0$ il sistema (26) diventa un sistema di Cramer (il determinante della matrice dei coefficienti è il minore $a_{1\dots p,\,1\dots p}\neq 0$) e quindi ha l'unica soluzione $x_1=s_{11},\dots,x_p=s_{1p}$ onde $(s_{11}, s_{12},\dots, s_{1p}, 1, 0,\dots,0)$ è una soluzione del sistema.

Diamo ora a $x_{p+1},\dots,x_n$ i valori $x_{p+1}=0$, $x_{p+2}=1$, $x_{p+3}=0$, $x_{p+4}=0$, ..., $x_n=0$. Si ottiene $x_1=s_{21}$, $x_2=s_{22}$, ..., $x_p=s_{2p}$ e la soluzione $(s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2p}, 0, 1, 0, 0)$. Proseguendo così, daremo a $x_{p+1},\dots,x_n$ i valori $x_{p+1}=x_{p+2}=0$, $x_{p+3}=1$, $x_{p+4}=\dots=x_n=0$ ecc. Otterremo le seguenti $h=n-p$ soluzioni particolari non nulle del sistema:

$$(27)\qquad \begin{cases} \mathbf{s}_1=(s_{11},s_{12},\dots,s_{1p},1,0,0,\dots,0) \\ \mathbf{s}_2=(s_{21},s_{22},\dots,s_{2p},0,1,0,\dots,0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{s}_h=(s_{h1},s_{h2},\dots,s_{hp},0,0,\dots,0,1) \end{cases}$$

**Proposizione 41.** *Un sistema lineare omogeneo* $AX=0$, *tale che il rango* *della matrice $A$ sia minore del numero delle incognite, ha sempre soluzioni non nulle. Se $a_{1\ldots p,\ 1\ldots p} \neq 0$, tutte le soluzioni del sistema si ottengono come combinazione lineare delle $n-p$ soluzioni (27) che sono linearmente indipendenti.*

**Dim.** È chiaro dalla discussione precedente che, se $p=\rho(A)<n$, il sistema ha almeno una soluzione non nulla $\mathbf{s}_1$. Consideriamo una qualsiasi combinazione lineare $\lambda_1\mathbf{s}_1+\ldots+\lambda_h\mathbf{s}_h$ di $\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_h$. Innanzitutto essa è una soluzione del sistema [Prop. 40]. Tralasciando di scrivere le prime $p$ componenti si ha $\lambda_1\mathbf{s}_1+\ldots+\lambda_h\mathbf{s}_h=(\ldots,\ldots,\ldots,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_h)$ e quindi $\lambda_1\mathbf{s}_1+\ldots+\lambda_h\mathbf{s}_h=0$ se e solo se $(\ldots,\ldots,\ldots,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=(0,0,\ldots,0,0,\ldots,0)$ cioè $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0,\ldots,\lambda_h=0$ onde $\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_h$ sono linearmente indipendenti. Mostriamo ora che ogni soluzione $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ del sistema si ottiene come combinazione lineare di $\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_h$ a coefficienti $y_{p+1},\ldots,y_n$. Infatti $\mathbf{y}-(y_{p+1}\mathbf{s}_1+\ldots+y_n\mathbf{s}_n)$ è una soluzione del sistema, poiché è differenza di due soluzioni. Inoltre $\mathbf{y}-(y_{p+1}\mathbf{s}_1+\ldots+y_n\mathbf{s}_n)=(z_1,\ldots,z_p,y_{p+1}-y_{p+1},\ldots,y_n-y_n)=(z_1,\ldots,z_p,0,\ldots 0)$. Quindi la $p$-pla $(z_1,\ldots,z_p)$ è soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1p}x_p=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+\ldots+a_{pp}x_p=0 \end{cases}$$

che è di Cramer e ha solo la soluzione nulla $z_1=0,\ldots,z_p=0$ onde $\mathbf{y}=y_{p+1}\mathbf{s}_1+\ldots+y_n\mathbf{s}_n$ come si voleva.

**Osservazione 42.** L'estensione della proposizione 41, al caso in cui al posto del minore $a_{1\ldots p,\ 1\ldots p}$ della matrice $A$ si consideri un altro minore di ordine $p$ non nullo, è immediata e lasciata al lettore.

**Esempio 30.** Determinare una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x_3-2x_4=0 \\ -x_1+4x_2-2x_3+4x_4=0 \\ -2x_1+8x_2-2x_3+4x_4=0 \\ -x_1+4x_2=0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo $\rho(A)$. Il minore $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4$ è non nullo. Orliamo tale minore in tutti i modi possibili. Si ha:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (3^a \text{ colonna} = -2 \cdot 2^a \text{ colonna})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

onde $\rho(A) = 2$ e il sistema dato è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo $n - p = 4 - 2 = 2$ soluzioni $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ che formano la base.

**1° Passo.** Poniamo $x_1 = 1$, $x_4 = 0$. Si ha $x_3 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$ e $\mathbf{s}_1 = \left(1, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$

**2° Passo.** Poniamo $x_1 = 0$, $x_4 = 1$ e si ha: $x_3 = 2$, $x_2 = 0$ cioè $\mathbf{s}_2 = (0,0,2,1)$.

**Esempio 31.** Consideriamo in particolare il sistema

$$(28)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1p}x_p+a_{1p+1}x_{p+1}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1+\ldots+a_{pp}x_p+a_{pp+1}x_{p+1}=0. \end{cases}$$

di $p$ equazioni in $p$ incognite, per il quale supponiamo ancora

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} \ldots\ldots a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

In base alle considerazioni precedenti esiste $p+1-p=1$ soluzione s del sistema tale che ogni altra soluzione è del tipo $\lambda$s. Chiaramente ogni altra soluzione soddisfa alle stesse proprietà. Infatti se s$'$ è un'altra soluzione allora s$'=\lambda$s e $s=\lambda' s'$ dove $\lambda'=\dfrac{1}{\lambda}$ e quindi tutte le altre soluzioni sono proporzionali a s$'$. Indichiamo con $b_j$ il minore d'ordine $p$ che si estrae dalla matrice del sistema **(28)** escludendo la colonna $j$-esima. Si ha allora

$$b_{p+1}=\begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} \ldots\ldots a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0$$

onde la $(p+1)$-pla $\mathbf{b}=(b_1, -b_2, b_3,\ldots,(-1)^p b_{p+1})$ non è nulla. Vogliamo mostrare che questa $(p+1)$-pla risolve il sistema. Per ogni intero $i$, $1\leq i\leq p$, si ha:

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ip} & a_{ip+1} \\ a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1p} & a_{1p+1} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p1} \ldots\ldots a_{pp} & a_{pp+1} \end{vmatrix} = 0$$

poiché nella relativa matrice la prima riga è uguale ad una delle successive. Quindi sviluppando il determinante secondo la prima riga si ha:

$$a_{i1}b_1-a_{i2}b_2+\ldots+(-1)^{p+2}a_{ip+1}b_{p+1}=0$$

onde l'$n$-pla $(b_1, -b_2, b_3,\ldots,(-1)^p b_{p+1})$ è soluzione del sistema lineare. Si poteva giungere alla medesima conclusione sostituendo, nel sistema, a $x_{p+1}$ il valore $(-1)^p b_{p+1}$, ricavando con la regola di Cramer le rimanenti incognite e applicando le proprietà 1 e 2 della proposizione 7. Lasciamo i dettagli al lettore.

**Osservazione 43.** Una base dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $AX=0$, si può anche determinare con il metodo di eliminazione di Gauss. Infatti, se $R$ è la matrice a scalini ridotta equivalente ad $A$ e $RX=0$ è il sistema ridotto equivalente a $AX=0$, ponendo nelle (5) del capitolo I, $t_1=1$, $t_2=0$, ..., $t_h=0$ e poi $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=0,\ldots$, $t_h=0,\ldots$, $t_1=0,\ldots$, $t_{h-1}=0$, $t_h=1$ si ricavano immediatamente $h=n-\rho(A)$ soluzioni del sistema $RX=0$ che sono una base dello spazio delle soluzioni del sistema $AX=0$.

## 12. Altri modi di introdurre il determinante di una matrice

In questo paragrafo vedremo altri due modi di introdurre la nozione di determinante. Noi abbiamo preferito introdurre la definizione di determinante con lo sviluppo di Laplace perché è il metodo con cui si calcola praticamente un determinante ed inoltre esso consente di dimostrare facilmente le proprietà dei determinanti.

**Definizione.** Una **permutazione** dell'insieme di interi $\{1,2,\ldots,n\}$ è una $n$-pla ottenuta disponendo tali interi, in un ordine qualsiasi, senza ripetizione[4].

**Esempio 32.** Le permutazioni di $\{1,2,3\}$ sono $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

È un facile esercizio provare che il numero delle permutazioni di $\{1,\ldots,n\}$ è $n!=n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1$ [Esercizio 25]. Per denotare una qualsiasi permutazione dell'insieme $\{1,\ldots,n\}$ scriveremo $(j_1,\ldots,j_n)$. Si dice che nella permutazione $(j_1,\ldots,j_n)$ c'è un'**inversione** se un intero più grande precede un intero più piccolo, vale a dire $j_h>j_k$ con $h<k$. Il numero totale di inversioni di una permutazione si può facilmente determinare considerando dapprima il numero degli interi che sono minori di $j_1$ nella permutazione, poi considerando il numero degli interi, escluso $j_1$, che sono minori di $j_2$, poi il numero degli interi, esclusi $j_1$ e $j_2$, che sono minori di $j_3$ e così via fino a $j_{n-1}$. La somma di questi numeri sarà il numero totale di inversioni nella permutazione.

**Esempio 33.** La permutazione $(3,4,2,1)$ di $\{1,2,3,4\}$ presenta 5 inversioni $3>2$, $3>1$, $4>2$, $4>1$, $2>1$.

**Definizione.** Una permutazione si dice **pari** se il numero totale di inversioni è un intero pari e **dispari** altrimenti.

[4] Più precisamente, con rigore algebrico, una permutazione dell'insieme $S=\{1,\ldots,n\}$ è un'applicazione biettiva di $S$ in sé stesso.

**Esempio 34.** La permutazione (1,3,5,4,2) di $\{1,2,3,4,5\}$ è pari poiché ha 4 inversioni. La permutazione (1,3,4,5,2) è dispari poiché ha 3 inversioni.

Consideriamo la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con il termine **prodotto dedotto** da $A$ intenderemo ogni prodotto di $n$ elementi di $A$, tali che qualsiasi due non stanno sulla stessa riga o sulla stessa colonna.

**Esempio 35.** Se $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 11 & 17 & 13 \\ 14 & 15 & 12 & 10 \end{vmatrix}$.

I prodotti $1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 10$, $2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 10$, $4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 15$ sono dedotti da $A$ mentre $1 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 10$, $5 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 9$, $6 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 13$, $2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10$ no.

In generale i prodotti dedotti hanno la forma $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ (dove $j_1,\ldots,j_n$) è una permutazione dell'insieme $\{1,\ldots,n\}$. Con il termine **prodotto dedotto con segno da** $A$ intenderemo un prodotto dedotto $a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$ con il segno $+$ o $-$ secondo che, rispettivamente, $(j_1,\ldots,j_n)$ è una permutazione di classe pari o dispari.

**Esempio 36.** Data la matrice dell'esempio 35 il prodotto $1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 10$ è del tipo $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{34}$ e la permutazione (1,2,3,4) è pari onde il segno è $+$. Il prodotto $2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 10$ è del tipo $a_{12}\, a_{21} a_{33}\, a_{44}$, la permutazione (2,1,3,4) è dispari onde $-1 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 10$ è un prodotto dedotto con segno da $A$. Infine $-4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 15$ è un altro prodotto dedotto con segno da $A$.

Il seguente teorema fornisce un secondo modo di introdurre il determinante. Rimandiamo la dimostrazione ai complementi.

**Teorema 44.** *Sia $A$ una matrice quadrata. Allora* $\det(A)$ *è somma di tutti i prodotti dedotti con segno da $A$.*

**Dim.** [Esercizio 31].

Possiamo infine interpretare il determinante come l'unica funzione o applicazione, dall'insieme $M_n(k)$ delle matrici $n \times n$ al campo degli scalari $k$, invariante per trasformazioni elementari di $M_n(k)$ e il cui valore sulla matrice identica sia 1. Supponiamo che il campo $k$ abbia caratteristica diversa da 2 (cioè che $2=2\cdot 1_k\neq 0_k$). Denotata con det: $M_n(k)\to k$ l'applicazione che associa ad ogni matrice $A$ il suo determinante si ha:

**Teorema 45.** det *è l'unica applicazione* $\Phi$: $M_n(k)\to k$ *che soddisfa alle seguenti proprietà*:

1) *Se una matrice $B$ si ottiene dalla matrice $A$ moltiplicando tutti gli elementi di una riga di $A$ per una costante $\lambda$ non nulla, si ha* $\Phi(B)=\lambda\Phi(A)$
2) *Se nella matrice $A$ si scambiano tra loro due righe, si ottiene una matrice $B$ tale che* $\Phi(B)=-\Phi(A)$
3) *Se una matrice $B$ è ottenuta da $A$ aggiungendo ad una riga il multiplo di un'altra riga allora* $\Phi(B)=\Phi(A)$
4) $\Phi(I_n)=1$.

*Quindi* det *è l'unica applicazione invariante per trasformazioni elementari su $M_n(k)$ il cui valore sulla matrice identica è* 1.

**Dim.** Innanzitutto det verifica le proprietà 1), 2), 3), 4) [Prop. 7 e 12]. Inoltre osserviamo che dalla 1) segue che se $A$ è una matrice con una riga nulla allora $\Phi(A)=0$. Infatti moltiplicando tale riga per 2 si ha $\Phi(A)=2\Phi(A)$ onde $\Phi(A)=0$. Ora se applichiamo ad $A$ l'algoritmo di riduzione **(9)** del capitolo I, che consiste in un numero finito di trasformazioni elementari del tipo 2) o 3) si ha $\Phi(A)=(-1)^i\Phi(S)$ dove $S$ è la forma a scalini di $A$ e $i$ è il numero di scambi di righe effettuati nell'algoritmo. Se proviamo che $\Phi(S)=\det(S)$, poiché $\det A=$ $=(-1)^i\det S$, abbiamo dimostrato il risultato.

La matrice $S$ è triangolare [Es. 9, Cap. I] onde

$$S=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se fosse $b_{ii}=0$ per un $i$, $S$ avrebbe una riga nulla e quindi $\Phi(S)=\det(S)=0$. Se $\det S=b_{11}\,b_{22},\dots,b_{nn}\neq 0$ riducendo, con l'algoritmo **(9.b)** del capitolo I, $S$ a forma a scalini ridotta $R$ (vale a dire applicando un numero finito di trasformazioni elementari del tipo 1) e 3) si ha $R=I_n$ [Teor. 18, Cap. I e Prop. 20, Cap. II]. Onde $\Phi(S)=b_{11}\cdots b_{nn}\det I_n=b_{11}\cdots b_{nn}=\det S$ per la 4). Cioè la tesi.

**Osservazione 46.** Il teorema precedente fornisce quindi una definizione assiomatica di determinante. Tale definizione può essere espressa in altri modi equivalenti [Esercizio 38].

## 13. Esercizi e complementi

1. Calcolare i seguenti determinanti e dire in quali casi le corrispondenti matrici sono invertibili:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)}\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{f)}\ \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Calcolare $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ sviluppando secondo la seconda riga e poi secondo la prima colonna.

3. Calcolare i seguenti determinanti:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} 13 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{d)}\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

4. Calcolare il determinante della matrice $A=(a_{ij})$ $n \times n$ dove

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j} & \text{se} \quad i\le j\\ 0 & \text{se} \quad i>j\end{cases}$$

5. Calcolare il determinante della matrice $A=(a_{ij})$ $n\times n$ dove

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i} & \text{se} \quad i=j\\ 0 & \text{se} \quad i\ne j\end{cases}$$

6. Usando le proprietà dei determinanti trovare un semplice motivo per cui i seguenti determinanti sono nulli:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\-1&0&1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\2&2&2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0&0&0\\1&2&3\\-1&0&3\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&3&5\\4&1&3\\5&4&8\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&-1&2\\2&0&4\\3&2&6\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}4&-1&3&1\\5&0&5&2\\7&3&10&3\\8&2&10&4\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}2&5&-1&6\\3&4&0&7\\7&1&2&10\\1&8&3&12\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}-1&0&3&4\\2&2&-6&5\\1&1&-3&7\\2&1&-6&2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&3&5&1\\2&2&2&2\\0&1&1&0\\3&7&9&3\end{vmatrix}.$$

7. Perché si ha $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-1&0&2&1\\1&5&7&1\\0&2&4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&2&1\\1&5&7&1\\1&2&3&4\\0&2&4&8\end{vmatrix}$?

8. Dimostrare, in modo analogo alla proposizione 12, che se $A=(a_{ij})$ e $a_{ij}=0$ per $j\le n-i$ allora $\det A=(-1)^n\, a_{i,n-i+1}$.

9. Calcolare con l'algoritmo di riduzione i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 11 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}.$$

10. **Determinante di Vandermonde.** Date $n$ costanti $a_1,\ldots,a_n$ si dice di Vandermonde il determinante della seguente matrice $n\times n$ ($n\geq 2$):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Provare che $\det A = \prod_{i>j} (a_i - a_j)$. (Si può provare l'asserto per induzione e applicando la prima parte dell'algoritmo di riduzione relativamente alla prima colonna di $A$).

11. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici a blocchi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 11 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 17 & 21 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 11 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

12. Date le seguenti matrici:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 11 \\ 5 & 7 & 19 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 13 & 1 \end{pmatrix}$

determinare le relative matrici complementari e le matrici aggiunte. Quindi dire quali tra di esse sono invertibili e determinare le relative inverse.

13. Risolvere, se possibile, con la regola di Cramer i seguenti sistemi lineari:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 5x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 1 \\ x - 4y + 5z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

14. Dimostrare che se $A$ è una matrice triangolare superiore, allora $A^{-1}$ è triangolare inferiore.

15. Determinare tutti i minori di ordine 3 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Determinare, calcolandone i minori, il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

17. Calcolare con l'algoritmo di riduzione il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

18. Dire, utilizzando il teorema di Rouché-Capelli, se i seguenti sistemi lineari hanno soluzioni e nel caso calcolarle:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 - \ x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + \ x_2 - \ x_3 + \ x_4 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7 \\ 5x_1 + \ 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ -7x_1 - 10x_2 + 8x_3 - \ x_4 = 13 \end{cases}$$

19. Calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -1 & 4 & 19 & 20 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

usando il teorema degli orlati.

20. Dimostrare che $m$ $n$-ple di costanti sono linearmente dipendenti se e solo se una di esse è combinazione lineare delle rimanenti. Più precisamente se $\mathbf{r}_1,\dots,\mathbf{r}_m$ sono $m$ $n$-ple e $\lambda_1\mathbf{r}_1 + \dots + \lambda_m\mathbf{r}_m = 0$ con $\lambda_i \neq 0$ per un $i$, $i \leq m$, allora $\mathbf{r}_i = \mu_1\mathbf{r}_1 + \dots + \mu_{i-1}\,\mathbf{r}_{i-1} + \mu_{i+1}\,\mathbf{r}_{i+1} + \dots + \mu_m\mathbf{r}_m$, e viceversa.

21. Data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 13 & 7 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

verificare che $\det A = 0$. Determinare $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ non tutti nulli tali che $\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \lambda_3\mathbf{r}_3 + \lambda_4\mathbf{r}_4 = 0$. (Basta determinare una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo $A^t X = 0$).

22. Determinare, con il metodo del paragrafo 10, le soluzioni del sistema lineare dell'esercizio 18.a).

23. Dati i sistemi lineari:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+2y-2z=3 \end{cases} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{cases} 2x+5y-7z=0 \\ 3x+2y-4z=1 \\ -5x+2y+4z=1 \end{cases}$$

Dimostrare che a) e b) hanno le stesse soluzioni e determinare le combinazioni lineari delle equazioni di a) che danno le equazioni di b).

24. Determinare una base delle soluzioni, se esiste, dei seguenti sistemi lineari omogenei:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} y+z=0 \\ -2x+z=0 \\ -x+4y-z=0 \\ -x+2y-4z=0 \end{cases} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \\ 7x_1-3x_2+5x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-9x_2-x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-2x_4=0. \\ 3x_1-x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

25. Dimostrare che il numero delle permutazioni di $\{1,2,\ldots,n\}$ è $n!$

26. Stabilire se le seguenti permutazioni dell'insieme $\{1,2,3,4\}$ sono pari o dispari: $(1,2,3,4)$, $(4,3,2,1)$, $(3,2,4,1)$, $(2,3,4,1)$, $(4,2,1,3)$.

27. a) Determinare tutti i prodotti dedotti dalla matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Verificare che det $A$ è somma di tutti i prodotti dedotti con segno da $A$.

28. Provare, senza usare il 1° teorema di Laplace, che l'applicazione det: $M_n(k)\to k$ soddisfa le proprietà del teorema 45. (Si può provare l'asserto per induzione. La dimostrazione della proprietà 1 è facile. La dimostrazione della proprietà 2 è facile se le righe che si scambiano sono diverse dalla prima riga. Altrimenti è sufficiente dimostrare l'asserto relativamente ad una matrice $B$ che si ottiene da $A$ scambiando la 1ª e la 2ª riga. In tal caso sviluppando i comple-

menti algebrici della prima riga ancora secondo la prima riga si verifica facilmente che si ottengono combinazioni lineari di minori $(n-2)\times(n-2)$ con gli stessi coefficienti. La proprietà 3 si dimostra agevolmente una volta mostrato che se $B$ ha due righe uguali $\det B=0$. E questo si deduce facilmente dalla proprietà 2. La proprietà 4 è di immediata dimostrazione).

29. Sia $\Delta_j : M_n(k)\to k$ la funzione definita da $\Delta_j(A)=a_{1j}\, a'_{1j}+a_{2j}\, a'_{2j}+ +\ldots+a_{nj}\, a'_{nj}$. Provare che $\Delta_j$ verifica le proprietà 1, 2, 3, 4 del teorema 45.

30. Dimostrare il primo teorema di Laplace: se $A=(a_{ij})$ è una matrice quadrata allora $\det A=a_{i1}\, a'_{i1}+a_{i2}\, a'_{i2}+\ldots+a_{in}\, a'_{in}=a_{1j}\, a'_{1j}+\ldots+a_{nj}\, a'_{nj}$, dove $1\le i\le n$ e $1\le j\le m$. (In virtù degli esercizi 28 e 29 del teorema 45 si ha che $\det A=a_{1j}\, a'_{1j}+\ldots+a_{nj}\, a'_{nj}$. Inoltre da quest'ultima uguaglianza applicata al caso $j=1$ segue che $\det A=\det A^t$. Infine sviluppando secondo la $i$-esima colonna $A^t$ si ha $\det A=\det A^t=a_{i1}\, a'_{i1}+\ldots+a_{in}\, a'_{in}$).

31. Dimostrare il teorema 44, cioè che $\det(A)$ è somma di tutti i prodotti con segno da $A$. (Basta provare che tale somma verifica le proprietà 1, 2, 3, 4 del teorema).

32. **Primo teorema di Laplace generalizzato.** Sia $A$ una matrice quadrata e consideriamo un minore $a_{i_1\ldots i_p,\, j_1\ldots j_p}$. Il minore $a_{i_{p+1}\ldots i_n j_{p+1}\ldots j_n}$ individuato dalle righe e colonne residue $i_{p+1},\ldots,i_n$ e $j_{p+1},\ldots,j_n$ si dice minore complementare e $(-1)^{i_1+\ldots+i_p+j_1+\ldots+j_p}\, a_{i_1,\ldots,i_p,\, j_1,\ldots,j_p}$ complemento algebrico di $a_{i_1,\ldots,i_p,\, j_1,\ldots,j_p}$. Fissate in $A$ le righe (colonne) di indici $i_1,\ldots,i_p$ $(j_1,\ldots,j_p)$, provare che $\det A$ è uguale alla somma dei prodotti di ogni minore di ordine $p$ estratto dalle righe (colonne) fissate per il corrispondente complemento algebrico. Tale somma si dice sviluppo secondo le righe (colonne) $i_1,\ldots,i_p$. (Si può procedere per induzione utilizzando il primo teorema di Laplace).

33. Calcolare il determinante della seguente matrice sviluppando secondo la prima e la quarta riga

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

34. Calcolare il determinante della seguente matrice sviluppando secondo la seconda e terza colonna

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

35. **Secondo teorema di Laplace generalizzato.** Data una matrice quadrata $A$ di ordine $n$ e fissati in essa due insieme distinti di $p$ righe (colonne) $(i \leq p \leq n)$, è nulla la somma dei prodotti dei minori di ordine $p$ estratti dal primo insieme per i complementi algebrici dei corrispondenti minori del secondo insieme. (Sia $B$ la matrice quadrata ottenuta da $A$ per sostituzione delle righe di indici $h_1,\dots,h_p$ colle righe di indici $i_1,\dots,i_p$. È chiaro che in $B$ vi sono almeno due righe uguali onde $\det B = 0$. Basta a questo punto sviluppare $\det B$ con il primo teorema di Laplace generalizzato).

36. **Teorema di Binet.** Siano $A$ una matrice $m \times n$, $B$ una matrice $n \times m$ e $C = AB$. Dimostrare che se $m > n$ $\det C$ è nullo; se invece $m \leq n$ $\det C$ è uguale alla somma dei prodotti dei determinanti dei minori di ordine massimo $m$ di $A$ per i determinanti dei minori corrispondenti di $B$, dove un minore di $A$ ed uno di $B$ (entrambi di ordine $m$) sono corrispondenti se gli indici delle colonne di $A$ che individuano il primo sono anche gli indici delle righe di $B$ che individuano il secondo. (La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione 18.

Consideriamo le matrici $D = \begin{pmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ e $D' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix}$ Si ha $\det C = \det D = \det D'$. Si può sviluppare $\det D'$ secondo i minori contenuti nella sottomatrice $S$ di $D'$ formata dalle prime $m$ righe. Se $m > n$ questi minori hanno tutti una colonna nulla e si ha $\det C = \det D = 0$. Se $m \leq n$ si ha la seconda parte dell'asserto).

37. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ calcolare $\det(AB)$ usando il teorema di Binet.

38. Provare che det può anche essere definita nel seguente modo: det è l'unica applicazione $\Phi : M_n(k) \to k$ che soddisfa alle condizioni 1), 2), 4) del teorema 45 e alla condizione 3'). Se $A$, $A'$, $B$ sono tre matrici che differiscono per una singola riga, sia la $i$-esima, e supposto che questa possa essere ottenuta aggiungendo i corrispondenti elementi delle $i$-esime righe di $A$ e $A'$ allora $\det B = \det A + \det A'$. Le proprietà 1), 2), 3'), 4) vengono sovente sintetizzate dicendo che: det **è l'unica applicazione bilineare alternante su $M_n(k)$ il cui valore sulla matrice identica è 1.**

*Capitolo terzo*

# Aspetti computazionali (cenno).

In questo capitolo esaminiamo alcuni aspetti computazionali della risoluzione dei sistemi lineari (e quindi del calcolo del determinante, dell'inversa e del rango di una matrice). Negli esempi concreti i sistemi lineari sono spesso risolti usando i calcolatori e in quest'ambito è di notevole importanza, usando un qualsiasi metodo per risolvere un sistema lineare, il suo costo computazionale, cioè il numero di operazioni aritmetiche richieste dal metodo. Inoltre i calcolatori possono memorizzare un numero limitato di cifre decimali onde arrotondano o troncano i numeri. Per esempio un calcolatore che conserva 8 cifre decimali può memorizzare 8/3 come 2,66666667 (arrotondamento) oppure come 2,66666666 (troncamento). In ogni caso viene introdotto un errore detto errore di arrotondamento. Infine attualmente è possibile usare sui calcolatori i cosiddetti sistemi di Computer Algebra che permettono di manipolare i simboli oltreché i numeri. Questi sono i motivi per cui: nel primo paragrafo prendiamo in esame il costo computazionale dei vari metodi presentati nel testo, nel secondo paragrafo vedremo una variazione del metodo di Gauss e due metodi iterativi che permettono di minimizzare gli errori di arrotondamento, nel terzo paragrafo faremo alcune considerazioni utili a trattare le matrici e i sistemi lineari a coefficienti simbolici.

## 1. Costi computazionali

Nei capitoli I e II abbiamo visto metodi diversi per calcolare il determinante, l'inversa e il rango di una matrice e quindi per risolvere un sistema lineare. I metodi del capitolo I sono basati sull'algoritmo di riduzione (o sull'analogo metodo di eliminazione di Gauss per risolvere un sistema lineare). I metodi del capitolo II sono invece basati sullo sviluppo di Laplace, per calcolare un determinante, e sulla regola di Cramer per risolvere un sistema lineare con matrice dei coefficienti invertibile. Quindi per confrontare i costi computazionali dei metodi dei capitoli I e II è sufficiente considerare un sistema $AX=B$ con $\det A \neq 0$ (cioè con matrice dei coefficienti invertibile).

**Teorema 1.** *Sia $AX=B$ un sistema dove $A$ è una matrice $n\times n$ con determinante non nullo.*

a) *Il numero di operazioni necessarie per determinare, con il metodo di eliminazione di Gauss, l'unica soluzione del sistema è dato da:*

$$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \qquad \textit{moltiplicazioni o divisioni}$$

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5}{6}n \qquad \textit{somme o sottrazioni}$$

b) *Il numero di operazioni necessarie per determinare* det $A$ *è*

$$\frac{n^3}{3}+\frac{2n}{3}-1 \qquad \textit{moltiplicazioni o divisioni}$$

$$\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \qquad \textit{somme o sottrazioni}$$

**Dim.** Ricordiamo che determinare l'unica soluzione di $AX=B$ con il metodo di Gauss equivale a ridurre la matrice completa $A'$ del sistema a forma a scalini ridotta con l'algoritmo (9) del capitolo I. Supponiamo, per semplicità, che nel corso della riduzione non siano necessari scambi di righe. Questa ipotesi è giustificata dal fatto che gli scambi di righe su un calcolatore hanno un costo computazionale notevolmente inferiore ad un'operazione aritmetica. Descriviamo schematicamente l'algoritmo indicando, a sinistra, prima le matrici che si ottengono riducendo a zero gli elementi sotto il pivot della colonna **1,2,...,n − 1** [algoritmo (9.a), Cap. I], poi le matrici che si ottengono trasformando in 1 il pivot della colonna **n − 1,n − 2,...2,1** e riducendo a zero gli elementi sopra di esso [algoritmo (9.b), Cap. I]. A destra abbiamo indicato il numero di operazioni necessarie per tali riduzioni. Nella discussione seguente abbiamo raggruppato le moltiplicazioni e le divisioni, sotto il nome di moltiplicazioni, che sono più costose computazionalmente delle somme e sottrazioni, da noi chiamate entrambe somme. Nel diagramma che segue X indica un elemento da calcolare mentre ● indica invece un elemento che non viene calcolato. Le dimensioni delle matrici sono $n\times(n+1)$, poiché tali sono quelle di $A'$.
Algoritmo (9.a), capitolo I: riduzione a forma a scalini

**1.**

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & X & X & \cdots & X & X & X \\ 0 & X & X & \cdots & X & X & X \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & X & X & \cdots & X & X & X \\ 0 & X & X & \cdots & X & X & X \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} n+1 \text{ moltiplicazioni} \\ n \text{ somme} \end{array}\right\} \text{ per } n-1 \text{ righe} =$$

$$= \begin{cases} (n+1)(n-1) = n^2-1 \text{ moltiplicazioni} \\ n(n-1) = n^2-n \text{ somme} \end{cases}$$

**2.**

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & X & \cdots & X & X & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & X & \cdots & X & X & X \\ 0 & 0 & X & \cdots & X & X & X \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} n \text{ moltiplicazioni} \\ n-1 \text{ somme} \end{array}\right\} \text{ per } n-2 \text{ righe} =$$

$$= \begin{cases} n(n-2) = (n-1)^2-1 \text{ moltiplicazioni} \\ (n-1)(n-2) = (n-1)^2-(n-1) \\ \text{somme} \end{cases}$$

........................

........................

........................

**n − 1.**

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X & X \end{bmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} 3 = \text{moltiplicazioni} \\ 2 = \text{somme} \end{array}\right\} \text{ per 1 riga}$$

$$= \begin{cases} 3 = 2^2-1 \text{ moltiplicazioni} \\ 2 = 2^2-2 \text{ somme} \end{cases}$$

Quindi il numero delle operazioni richieste per completare la riduzione a forma a scalini è:

Moltiplicazioni: $n^2+(n-1)^2+\ldots+2^2+1^2-n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\dfrac{n^3}{3}+$ $+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{5}{6}n$ [Esercizio 2].

Somme: $[n^2+(n-1)^2+\ldots+1^2]-[n+(n-1)+\ldots+1]=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$ $-\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{3}$ [Esercizio 1].

Algoritmo (9.b), capitolo I: riduzione a forma a scalini ridotta.

**n − 1.**

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & X \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & X \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & 0 & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & X \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} n \text{ moltiplicazioni} \\ n-1 \text{ somme} \end{array}$$

**n − 2.**

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & 0 & 0 & X \\ 0 & \bullet & \bullet & \cdots & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & 0 & 0 & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} n-1 \text{ moltiplicazioni} \\ n-2 \text{ somme} \end{array}$$

..........................
..........................
..........................

**2.**

$$\begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{2 moltiplicazioni} \\ \text{1 somma} \end{array}$$

**1.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \quad \text{1 moltiplicazione}$$

Quindi il numero delle operazioni per questa seconda fase è

moltiplicazioni $\quad n+n-1+\ldots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$ e

somme $\quad n-1+n-2+\ldots+2+1=\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}$

Quindi il costo totale per l'eliminazione di Gauss è:

moltiplicazioni $\quad \left(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{5}{6}n\right)+\left(\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{n^3}{3}+n^2-\dfrac{n}{3}$

somme $\quad \left(\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{3}\right)+\left(\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}-\dfrac{5}{6}n.$

b) Per dimostrare le formule relative al determinante basta ripetere i calcoli, fatti per ridurre a forma a scalini una matrice $n\times(n+1)$, per una matrice $A$ $n\times n$. Si ottiene che per ridurre $A$ a forma a scalini occorrono:

$$n(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+2=n^2+(n-1)^2+\ldots+1-(1+\ldots+n)=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}$$ moltiplicazioni o divisioni e

$$(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1+1=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$ somme o sottrazioni.

A questo punto basta aggiungere gli $n-1$ prodotti degli elementi della diagonale di $A$ e si hanno le formule dell'enunciato b).

Nelle applicazioni pratiche non è inconsueto dover risolvere sistemi lineari con migliaia di equazioni in migliaia di incognite. Quindi i precedenti costi computazionali assumono interesse per grandi valori di $n$. È un fatto ben noto che per un valore molto grande della variabile, un polinomio può essere ben approssimato dal suo termine di grado più grande; cioè:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_kx^k\sim a_kx^k \quad \text{per valori grandi di } x \text{ [Esercizio 3]}$$

onde il costo computazionale dell'algoritmo di Gauss è, per valori grandi di $n$, approssimativamente $\frac{n^3}{3}$.

Vediamo ora qual è il numero delle operazioni necessarie per calcolare $\det A$ o per risolvere il sistema $AX=B$ con la regola di Cramer, sviluppando i determinanti con la regola di Laplace.

**Proposizione 2.** *Sia $A$ una matrice invertibile. Per calcolare* $\det A$ *o per risolvere il sistema $AX=B$, sviluppando i determinanti con la regola di Laplace occorrono almeno $n!$ prodotti e $n!-1$ somme.*

**Dim.** Basta osservare che i prodotti e le somme ottenuti con lo sviluppo di Laplace di $\det A$ sono i prodotti dedotti definiti nel paragrafo e le relative somme. Tali somme sono tante quante sono le permutazioni di $\{1,\ldots,n\}$, cioè $n!$, meno 1. Chiaramente il numero di prodotti è superiore, come superiore è il numero di operazioni per calcolare la soluzione di $AX=B$.

Riassumendo possiamo dire che per valori non piccoli di $n$ (ad esempio $n\geq 6$) occorrono approssimativamente $\frac{n^3}{3}$ operazioni per calcolare $\det A$ e risolvere $AX=B$ con il metodo di riduzione o di Gauss, mentre ne occorrono più di $n!$ con lo sviluppo di Laplace. Consideriamo vari valori di $n$ e vediamo la differenza tra $\frac{n^3}{3}$ e $n!$ con la seguente tabella:

| $n$ | 6 | 8 | 10 | 12 | 20 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{n^3}{3}$ | 72 | 171 | 333 | 576 | 2.667 | 41,667 |
| $n!$ | 720 | 40.320 | 3.628.800 | 479.001.600 | $2{,}4\times 10^{18}$ | $3\times 10^{64}$ |

Come si vede $n!$ è molto più grande di $\frac{n^3}{3}$. Per avere un'idea più concreta della differenza tra questi due numeri, immaginiamo di aver programmato un calcolatore per calcolare la soluzione di un sistema lineare $20\times 20$ con il metodo di riduzione e con il metodo dello sviluppo di Laplace. Supponiamo che il tempo di calcolo sia di $10^6$ moltiplicazioni per secondo. Approssimativamente ci vogliono $2667/10^6 \approx 0{,}003$ secondi per calcolare il determinante con il metodo di riduzione. Con il metodo di Laplace ci vogliono più di $(2{,}4\cdot 10^{18})/10^6 = 2{,}4\cdot 10^{12}$ secondi o 76.103 anni. Invece nei determinanti (o sistemi) che si possono risolvere facilmente con carta e penna (diciamo al più di 4 equazioni in 4 incognite) la differenza tra il calcolo di det $A$ (oppure della soluzione di un sistema lineare $AX=B$) con lo sviluppo di Laplace oppure con il metodo di riduzione non è notevole. In particolare se la matrice contiene molti zeri oppure, se con trasformazioni elementari ci si può ridurre a questo caso, le operazioni necessarie per lo sviluppo di Laplace possono essere di numero inferiore a quelle del metodo di riduzione, come visto nell'esempio 15 del capitolo II.

**Osservazione 3.** Abbiamo visto nel primo paragrafo del capitolo I, un metodo di eliminazione delle incognite diverso dal metodo di Gauss per risolvere un sistema lineare. Tale metodo (detto spesso di eliminazione di Gauss-Jordan) è meno efficiente dell'eliminazione di Gauss. Infatti, con considerazioni analoghe a quelle relative al Teorema 1, si prova che esso richiede $\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$ somme o sottrazioni e $\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2}$ moltiplicazioni o divisioni; tali numeri sono sempre superiori a quelli del Teorema 1 per tutti gli $n \geq 3$ [Esercizio 4].

## 2. Metodi di calcolo numerico

I metodi di calcolo numerico per risolvere un sistema lineare si dividono in due classi, metodi diretti o esatti e metodi indiretti o iterativi. I metodi diretti, se non vi sono errori di arrotondamento, nei calcoli, forniscono sempre, dopo un numero finito di passi, la soluzione esatta. I metodi iterativi forniscono, a partire da un'approssimazione iniziale della soluzione, una successione di approssimazioni della soluzione che, sotto certe condizioni, si avvicinano sempre di più alla soluzione esatta. In questo paragrafo vedremo un miglioramento del metodo diretto di eliminazione di Gauss e due metodi iterativi detti di Jacobi e di Gauss-Seidel.

**a. Eliminazione di Gauss con il metodo del pivot massimo.**

Non è difficile programmare un calcolatore per risolvere un sistema lineare con il metodo di eliminazione di Gauss [§ 3, Cap. I]. Tuttavia tale metodo presenta un problema computazionale. Se dividiamo per un numero piccolo che è stato approssimato, il risultato può contenere un errore di approssimazione notevole. Per esempio $1/0{,}00074 \approx 1351$ mentre $1/0{,}0007 \approx 1429$. Chiaramente tale errore si propaga ai calcoli successivi. Per evitare questo problema si può introdurre una variazione al metodo di Gauss che è concepita per minimizzare gli effetti cumulativi degli errori di arrotondamento nel risolvere i sistemi lineari. L'idea è molto semplice: dividere per l'elemento di valore assoluto massimo nella colonna in modo da evitare, nei limiti del possibile la divisione per un numero piccolo.

Consideriamo il metodo di eliminazione di Gauss, basato sull'algoritmo (9) del capitolo I per ridurre una matrice a forma a scalini, (9.a), e poi a forma ridotta, (9.b). Nell'algoritmo (9.a) sostituiamo il passo 1 con il seguente:

**Passo 1.** Si individui la prima colonna non nulla (partendo da sinistra) di $A$ e **un elemento $a$ di valore assoluto massimo** tra quelli di tale colonna. Sia $r_k$ la riga che contiene $a$.

Tutti i passi successivi e l'algoritmo (9.b) restano invariati.

Il metodo di eliminazione di Gauss con tale variazione si dice **metodo di eliminazione di Gauss con il pivot massimo.**

**Esempio 1.** Risolviamo il seguente sistema usando l'eliminazione di Gauss con il pivot massimo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

**Passo 1.** La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Nella prima colonna l'elemento 6 ha il valore assoluto massimo.

**Passo 2.** Scambiamo la prima con la seconda riga

$$\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_1 \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

**Passo 3.** Annulliamo gli elementi sotto il pivot 6.

$$\begin{array}{r} \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2}\,\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \frac{1}{2}\,\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**Passo 4.** Escludiamo la prima riga e applichiamo l'algoritmo alla sottomatrice delle righe rimanenti

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$-5$ è l'elemento di massimo valore assoluto nella seconda colonna.

$$\mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_3 \quad \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \frac{1}{5}\,\mathbf{r}_2 \end{array} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 2 & 12 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

e la matrice è a scalini. Il sistema dato è quindi equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = \phantom{-}12 \\ \phantom{6x_1 +} -5x_2 \phantom{+ 2x_3} = \phantom{-}5 \\ \phantom{6x_1 + 6x_2} -2x_3 = -6 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema con la sostituzione a ritroso si ha la soluzione:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

L'esempio successivo mostra concretamente come la tecnica del pivot massimo sia superiore ai fini della determinazione della soluzione di un sistema, rispetto al normale metodo di eliminazione di Gauss. I calcoli sono stati fatti su un calcolatore che arrotonda a tre cifre significative. Ciò vuol dire che se la quarta cifra del numero è $\geq 5$ si aggiunge 1 alla terza cifra; altrimenti il numero è troncato a tre cifre. Ad esempio $\frac{2}{3}$ viene scritto 0,667 e $\frac{1}{3}$ 0,333. Ricordiamo inoltre che su un calcolatore le cifre significative si contano a partire dalla prima cifra non nulla. Ad esempio un calcolatore che arrotonda a tre cifre significative memorizzerà $\frac{4}{3}$ come 1,33, $\frac{1}{3}$ come 0,33 e $\frac{1}{13}$ come 0,0769.

**Esempio 2.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 0{,}0002x_1 - 0{,}00031x_2 + 0{,}0017x_3 = 0{,}00609 \\ 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 7 \\ 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

La soluzione esatta è $x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4$. Risolviamo dapprima il sistema con l'eliminazione di Gauss senza il pivot massimo, arrotondando a tre cifre significative.

$$\begin{pmatrix} 0{,}0002 & -0{,}00031 & 0{,}0017 & 0{,}00609 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - \dfrac{5}{0{,}0002}\,\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \dfrac{8}{0{,}0002}\,\mathbf{r}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}0002 & -0{,}00031 & 0{,}0017 & 0{,}00609 \\ 0 & 0{,}75 & -36{,}5 & -145 \\ 0 & 18{,}4 & -65 & -242 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \frac{18,4}{0,75}\,\mathbf{r}_2 \quad \begin{pmatrix} 0,0002 & -0,00031 & 0,0017 & 0,00609 \\ 0 & 0,75 & -36,5 & -145 \\ 0 & 0 & 829 & 3310 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_3 \to \frac{1}{829}\,\mathbf{r}_3 \quad \begin{pmatrix} 0,0002 & -0,00031 & 0,0017 & 0,00609 \\ 0 & 0,75 & -36,5 & -145 \\ 0 & 0 & 1 & 3,99 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 0,0017\,\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + 36,5\,\mathbf{r}_3 \\ \phantom{x} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0,0002 & -0,00031 & 0 & -0,000693 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0,635 \\ 0 & 0 & 1 & 3,99 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 \to \frac{1}{0,75}\,\mathbf{r}_2 \quad \begin{pmatrix} 0,0002 & -0,00031 & 0 & -0,000693 \\ 0 & 1 & 0 & 0,847 \\ 0 & 0 & 1 & 3,99 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 + 0,00031\,\mathbf{r}_2 \quad \begin{pmatrix} 0,0002 & 0 & 0 & -0,00043 \\ 0 & 1 & 0 & 0,847 \\ 0 & 0 & 1 & 3,99 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \to \frac{1}{0,0002}\,\mathbf{r}_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2,15 \\ 0 & 1 & 0 & 0,847 \\ 0 & 0 & 1 & 3,99 \end{pmatrix}$$

che dà la soluzione approssimata $x_1 = -2,15$, $x_2 = 0,847$, $x_3 = 3,99$.

Applichiamo ora il metodo di Gauss con il pivot massimo. Si ha:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0002 & -0{,}00031 & 0{,}0017 & 0{,}00609 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 8 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_3 \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & -7 & 6 & 7 \\ 0{,}0002 & -0{,}00031 & 0{,}0017 & 0{,}000609 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 \rightarrow r_2 - \dfrac{5}{8}\, r_1 \\ r_3 \rightarrow r_3 - \dfrac{0{,}0002}{8}\, r_1 \end{array} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -10{,}8 & 4{,}13 & 5{,}75 \\ 0 & -0{,}00046 & 0{,}00163 & 0{,}00604 \end{bmatrix}$$

$$r_3 \rightarrow r_3 - \frac{0{,}00046}{10{,}8}\, r_2 \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & -10{,}8 & 4{,}13 & 5{,}75 \\ 0 & 0 & 0{,}00145 & 0{,}00058 \end{bmatrix}$$

$$r_3 \rightarrow \frac{1}{0{,}00145}\, r_3 \begin{bmatrix} 8 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 10{,}8 & 4{,}13 & 5{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}00 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_1 \rightarrow r_1 - 3r_3 \\ r_2 \rightarrow r_2 - 4{,}13 r_3 \end{array} \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & -10{,}00 \\ 0 & -10{,}8 & 0 & -10{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}00 \end{bmatrix}$$

$$r_2 \rightarrow -\frac{1}{10{,}8}\, r_2 \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & -10{,}00 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 6\mathbf{r}_2 \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -16{,}00 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}00 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \to \frac{1}{8}\mathbf{r}_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2{,}00 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4{,}00 \end{bmatrix}$$

Quindi con il metodo del pivot massimo si è ottenuta la soluzione esatta fino a tre cifre significative.

**Osservazione 4.** Ci sono alcune matrici per cui un piccolo errore di arrotondamento, porta sempre a un grande errore nella soluzione del sistema effettuato, tali matrici si dicono **mal condizionate.** C'è poco che si possa fare computazionalmente per evitare grandi errori nella soluzione dei sistemi lineari la cui matrice completa è mal condizionata.

**Esempio 3.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 1{,}005x_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione, come si vede facilmente, è $x_1 = 201$, $x_2 = -200$. Se i coefficienti sono arrotondati a tre cifre significative otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 1{,}01x_2 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $x_1 = 101$, $x_2 = -100$. Come possiamo vedere un piccolo cambiamento nei coefficienti ha provocato un grande cambiamento nella soluzione.

L'eliminazione di Gauss è normalmente la migliore tecnica per risolvere un sistema di equazioni lineari. Tuttavia, quando il numero di equazioni è grande, ad esempio 100 o più, e quando la matrice è **sparsa**, cioè ha pochi elementi non nulli, i metodi iterativi possono essere più efficienti. Esaminiamo due di tali metodi relativamente ad un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Supponiamo che gli elementi della diagonale della matrice $A = (a_{ij})$ dei coefficienti del sistema, $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, siano non nulli e che il sistema abbia esattamente una soluzione.
Innanzitutto si riscrive il sistema (1) ricavando $x_1$ dalla prima equazione, $x_2$ dalla seconda equazione,..., $x_n$ dall'ultima equazione (ciò è possibile in virtù dell'ipotesi $a_{ii} \neq 0$ per ogni $i$). Si ha:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

**b. L'iterazione di Jacobi.**

Il passo iniziale nell'iterazione di Jacobi è sostituire un'approssimazione della soluzione, che chiameremo 0-esima, nei membri di destra delle equazioni (2). Se non si ha a disposizione di meglio sostituiamo $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Si ottengono così altri valori di $x_1, \ldots, x_n$ che costituiscono la prima approssimazione della soluzione. La seconda approssimazione della soluzione è ottenuta sostituendo la prima approssimazione nei membri di destra delle equazioni e ricavando i nuovi valori delle variabili a sinistra. In generale la $k$-esima approssimazione è ottenuta sostituendo la $(k-1)$-esima approssimazione nei secondi membri di (2) e ricavando i nuovi valori delle variabili a sinistra. In questo modo si ottiene una successione di approssimazioni che, sotto certe condizioni, si avvicinano sempre di più alla soluzione esatta del sistema.

**Esempio 4.** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 15x - y + z = 14 \\ x + 20y - z = 59 \\ x - 2y + 30z = 55 \end{cases}$$

e supponiamo di usare un calcolatore che arrotonda a 5 cifre significative.

Per effettuare l'iterazione di Jacobi lo riscriviamo nella seguente forma:

$$(3) \qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{15}\,(14+y-z) \\[2ex] y=\dfrac{1}{20}\,(59-x+z) \\[2ex] z=\dfrac{1}{30}\,(55-x+2y) \end{cases}$$

Sostituendo la 0-esima approssimazione $x=0$, $y=0$, $z=0$ alla destra di **(3)** otteniamo la prima approssimazione

**1ª** $\qquad x=0{,}93333 \qquad y=2{,}9500 \qquad z=1{,}8333$

Sostituendo questi valori nel secondo membro di **(3)** si ottiene la seconda approssimazione

**2ª** $\qquad x=1{,}0078 \qquad y=2{,}9950 \qquad z=1{,}9989$

Continuando in questo modo, otteniamo le seguenti approssimazioni

**3ª** $\qquad x=0{,}99974 \qquad y=2{,}9996 \qquad z=1{,}9994$

**4ª** $\qquad x=1{,}0000 \qquad y=3{,}0000 \qquad z=2{,}0000$

Come è facile verificare, la soluzione esatta del sistema è $x=1$, $y=3$, $z=2$; abbiamo quindi ottenuto un'approssimazione accurata fino a cinque cifre significative della soluzione in quattro iterazioni.

Discutiamo, ora, una lieve modifica del metodo di Jacobi che spesso riduce il numero di iterazioni necessarie per ottenere un dato grado di precisione. Il metodo viene detto:

**c. L'iterazione di Gauss-Seidel.**

In ogni iterazione del metodo di Jacobi, la nuova approssimazione viene ottenuta sostituendo l'approssimazione precedente nei secondi membri delle **(2)** e ricavando i nuovi valori di $x_1,\ldots,x_n$. Questi nuovi valori delle $x$, non sono tutti calcolati simultaneamente; dapprima $x_1$ è ottenuto dalla prima equazione, poi $x_2$ è ottenuto dalla seconda equazione, poi $x_3$ ecc... Poiché i nuovi valori di $x$ sono in generale più vicini alla soluzione esatta, questo suggerisce che una maggior precisione può essere ottenuta usando i nuovi valori di $x$ non appena vengono determinati.

**Esempio 5.** Consideriamo il sistema dell'esempio 4, sostituendo l'approssimazione iniziale $x=0$, $y=0$, $z=0$ nel secondo membro della prima equazione di (3). Si ottiene il nuovo valore $x=0{,}93333$. Usiamo questo nuovo valore immediatamente sostituendo:

$$x=0{,}93333 \qquad y=0 \qquad z=0$$

nel secondo membro della seconda equazione di (3). Ciò fornisce il nuovo valore $y=2{,}9033$. Usiamo questo nuovo valore di $y$ immediatamente sostituendo

$$x=0{,}93333 \qquad y=2{,}9033 \qquad z=0$$

nel secondo membro della terza equazione di (3). Ciò dà il nuovo valore di $z=1{,}9958$. Così dopo un'iterazione completa abbiamo ottenuto la prima approssimazione

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1ª** | $x=0{,}93333$ | $y=2{,}9033$ | $z=1{,}9958$ |

Applicando ancora l'iterazione di Gauss-Seidel si ottengono le approssimazioni

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2ª** | $x=0{,}9938$ | $y=3{,}0001$ | $z=2{,}0002$ |
| **3ª** | $x=1{,}0000$ | $y=3{,}0000$ | $z=2{,}0000$ |

Abbiamo ottenuto un'approssimazione, accurata fino a cinque cifre decimali della soluzione in tre iterazioni invece che con quattro come nell'esempio 4.

A prima vista il metodo di Gauss-Seidel sembra essere un metodo migliore che l'iterazione di Jacobi e in generale è così. Tuttavia, sorprendentemente, esiste qualche sistema per cui l'iterazione di Jacobi è più veloce dell'iterazione di Gauss-Seidel.

I metodi di Gauss-Seidel e Jacobi non sempre funzionano. In qualche caso infatti le soluzioni calcolate con uno o entrambi questi metodi, per quante iterazioni siano fatte, possono non avvicinarsi mai alla soluzione effettiva del sistema. In tali casi, le approssimazioni si dicono **divergere.** Se, effettuando un numero sufficiente di iterazioni, la soluzione può essere ottenuta ad ogni grado di precisione desiderato, le approssimazioni si dicono **convergere**.

**Osservazione 5.** Chiaramente quando si risolve un sistema lineare con un metodo iterativo, esiste il problema di determinare l'iterazione a cui ci si può fermare. Se sappiamo che le approssimazioni convergono ci si può fermare quando i valori di due successive approssimazioni sono entro un fissato margine di tolleranza. Diamo ora alcune condizioni che assicurano la convergenza.

Si dice che una matrice quadrata

$$(4) \qquad A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ha **diagonale strettamente dominante** se il valore assoluto di ogni elemento della diagonale è maggiore della somma dei valori assoluti dei rimanenti elementi della stessa riga, cioè

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \ldots + |a_{2n}| \\ &\vdots \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nn-1}| \end{aligned}$$

**Esempio 6.** La matrice

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ha diagonale non strettamente dominante poiché nella seconda riga $|3| = 3 < |5| + |-9| = 14$. Se però scambiamo la seconda riga con la terza riga, la matrice risultante:

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

ha diagonale strettamente dominante poiché

$$|8| > |-3| + |1|, \quad |4| > |2| + |1|, \quad |-9| > |5| + |3|$$

Una matrice quadrata (4) simmetrica (cioè tale che $a_{ij}=a_{ji}$) si dice **definita positiva** se i minori principali $a'_{1\ldots i,1\ldots i}$, $i=1,\ldots,n$ sono positivi, cioè

$$a'_{1}=|a_{11}|>0, \quad a'_{12,\,12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \quad a'_{123,\,123}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ldots$$

**Teorema 6.** *Sia $AX = B$ un sistema lineare.*

a) *Se la matrice dei coefficienti $A$ ha diagonale strettamente dominante allora i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel danno approssimazioni convergenti alla soluzione.*

b) *Se $A$ è simmetrica definita positiva allora il metodo di Gauss-Seidel dà approssimazioni convergenti alla soluzione.*

Omettiamo la dimostrazione del teorema che si può trovare in testi specialistici di calcolo numerico.

## 3. Metodo di calcolo algebrico e simbolico

Con i moderni sistemi di calcolo algebrico e simbolico (Macsyma, muMath, Maple, Reduce, Axiom, Mathematica, ecc.) si possono effettuare, su un calcolatore, operazioni oltreché sui numeri anche sui simboli. Ad esempio si può calcolare il determinante di una matrice i cui elementi sono polinomi. Occorre quindi spesso usare risultati della teoria delle matrici, determinanti e sistemi lineari a elementi in strutture più generali di quella di campo; solitamente gli elementi appartengono ad un anello commutativo con identità. Nel seguito esaminiamo le principali proprietà che valgono ancora in tale ambito più generale.

### a. Matrici, determinanti e sistemi lineari su un anello.

Consideriamo sempre matrici, determinanti e sistemi lineari a elementi in un fissato anello che supporremo commutativo con identità. Anche le soluzioni dei sistemi avranno componenti in tale anello. Iniziamo con le matrici.

1) *Le definizioni di trasformazione elementare, matrice equivalente ad un'altra matrice, matrice a scalini e matrice a scalini ridotta [Par. 2 e 3, Cap. I] continuano a valere.*

2) *L'algoritmo (10) del capitolo I, permette di ridurre $A$ a forma a scalini.*

**Osservazione 7.** Se una matrice $A$ è equivalente alla matrice $B$ non è detto che $B$ sia equivalente ad $A$, cioè l'equivalenza di matrici non è una relazione di equivalenza.

**Esempio 7.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a elementi nell'anello degli interi, è equivalente alla matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (basta applicare $r_1 \to 2r_1$, ad $A$)

ma $B$ non è equivalente ad $A$ poiché ci si rende subito conto che ogni trasformazione elementare su $B$ determina una matrice i cui elementi sono tutti numeri pari.

Non tutte le matrici $A$ possono essere ridotte a forma a scalini ridotta, come mostra il seguente esempio:

**Esempio 8.** La matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ a elementi nell'anello degli interi relativi $\mathbf{Z}$ non può essere equivalente ad una matrice a scalini ridotta poiché i pivot di quest'ultima sono 1, mentre ogni trasformazione elementare su $B$ determina una matrice i cui elementi sono tutti numeri pari.

3) *Valgono tutte le operazioni sulle matrici e le relative proprietà dei paragrafi 5 e 6, del capitolo I.*

**Osservazione 8.** La formula dell'esempio 37 del Capitolo I, che determina l'inversa di una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ continua a valere nel caso in cui $ad - bc$ sia un elemento invertibile dell'anello.

4) *Si può definire, allo stesso modo, la trasposta di una matrice e valgono tutte le proprietà del paragrafo 8 del capitolo I.*

Passiamo ora ai determinanti.

5) *Si può dare la stessa definizione, per il determinante di una matrice quadrata (a elementi in un anello), introdotta nel paragrafo 1 del Capitolo II e la definizione di determinante con i prodotti dedotti che scaturisce dal Teorema del paragrafo 10 del Capitolo II.*

6) *Valgono tutti i teoremi di Laplace [Teorr. 3 e 19, Esercizi 32 e 35, Cap. II].*

7) *Valgono tutte le proprietà del determinante viste nel paragrafo 4 del Capitolo I.*

8) *Si possono definire allo stesso modo i minori e il rango di una matrice A [Par. 5, Cap. II].*

9) *Il determinante si può calcolare per riduzione [Esercizio 15]. Il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei rispettivi determinanti.*

10) *Si può definire l'aggiunta agg(A) di una matrice A e si ha:*

$$A \cdot agg(A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}$$

Ne segue che:

11) *A è invertibile e vale formula* **(12)** *del capitolo II se e solo se* det $A$ *è un elemento invertibile dell'anello.*

Supponiamo, nelle successive proprietà 12) e 13), che l'anello a cui appartengono gli elementi delle matrici sia privo di zero divisori (cioè, se $a$, $b$ sono elementi non nulli, allora $ab$ è non nullo). Ad esempio l'anello **Z** degli interi relativi e gli anelli $k[x_1,\ldots,x_n]$ dei polinomi su un campo $k$.

12) *Valgono tutti i risultati del paragrafo 6 del Capitolo II, quindi il rango può essere calcolato per riduzione, ove si sostituisca l'algoritmo (9.a) con l'algoritmo (10) del Capitolo I [Esercizio 16].*

13) *Valgono tutti i risultati del paragrafo 7 del Capitolo II, in particolare il teorema degli orlati, con l'eccezione del Teorema 31. Si noti tuttavia che continua a valere il Corollario 32 [Esercizi 18, 19, 20, 21].*

**Osservazione 9.** Su un anello qualsiasi non è vero che il rango di una matrice coincide con il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti [Esercizio 9].

Consideriamo infine i sistemi di equazioni lineari. È sùbito chiaro che per risolvere un sistema lineare, qualunque metodo si usi, occorre, generalmente, invertire elementi per cui i relativi risultati dei primi due capitoli non si estendono ad anelli. Tuttavia alcuni risultati continuano a valere. Segnaliamo in particolare i seguenti.

14) *Se* det $A$ *è un elemento invertibile nell'anello base, si ha ancora che il sistema $AX = B$ ha un'unica soluzione $X = A^{-1}B$ e vale la regola di Cramer [Teor. 22, Cap. II].*

Supponiamo, nelle successive proprietà 15) e 16), che l'anello a cui appartengono i coefficienti, i termini noti e le componenti delle soluzioni dei sistemi lineari considerati, sia privo di zero divisori.

15) *Se un sistema lineare ha soluzioni allora il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa [Esercizio 23].*

Ci si rende subito conto che non vale il viceversa di 15) (cioè non si può estendere ad un anello il teorema di Rouché-Capelli), come mostra il seguente esempio.

**Esempio 9.** Il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

non ha soluzioni nell'anello degli interi relativi **Z**. Infatti sommando la prima e la seconda equazione si ha $2x=1$ che non ha soluzioni in **Z**. Tuttavia $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ hanno rango entrambe uguale a due.

16) *Si possono determinare con una piccola variazione del metodo di eliminazione di Gauss [Par. 4, Cap. I] tutte le soluzioni a valori in un anello di un sistema lineare omogeneo a coefficienti nello stesso anello. Infatti, dato il sistema lineare omogeneo*

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

applicando a (5) la parte a) del metodo di eliminazione di Gauss, in cui si sostituisce l'algoritmo (9.a) con l'algoritmo (10) del Capitolo I, si ottiene il sistema:

$$(6) \qquad \begin{cases} a_{i_1k_1}x_{i_1k_1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =0 \\ \qquad\qquad a_{i_2k_2}x_{i_2k_2}+\ldots\ldots\ldots\ldots =0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{i_rk_r}x_{i_rk_r}+\ldots =0 \end{cases}$$

Se $r=n$, il sistema ha solo la soluzione nulla [Esercizio 24]. Se $r<n$ e $x_{p_1},\ldots,x_{p_h}$, $h+r=n$, sono le incognite diverse da $x_{k_1},\ldots,x_{k_r}$, sostituiamo $x_{p_1}=ct_1,\ldots,x_{p_n}=ct_n$ nel sistema, dove $c=a_{i_1k_1}\,a_{i_2k_2}\cdots a_{i_rk_r}$. Con il procedimento di sostituzione a ritroso ricaviamo $x_{k_r}$ dall'ultima equazione (non sono necessarie divisioni, poiché tutti i coefficienti dell'equazione hanno come fattore $a_{i_rk_r}$) e sostituiamola nella penultima equazione. Poi ricaviamo $x_{k_{r-1}}$ dall'equazione così ottenuta

(non sono necessarie divisioni poiché tutti i coefficienti dell'equazione hanno come fattore $a_{i_{r-1}k_{r-1}}$) e sostituiamo nella precedente equazione e così via fino alla prima equazione. Si ottiene così l'insieme delle soluzioni:

$$x_{k_1}=\Sigma(t_1,\ldots,t_h),\ldots,x_{k_r}=\Sigma(t_1,\ldots,t_h),\ x_{p_1}=ct_1,\ldots,x_{p_h}=ct_h$$

dove $\Sigma$ sono combinazioni lineari di $t_1,\ldots,t_h$ a coefficienti nell'anello.

**Esempio 10.** In **Z** sia dato il sistema omogeneo $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ 2x_1+5x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$ esso è equivalente al sistema $\begin{cases} 3x_1+\ 2x_2-\ x_3+\ x_4=0 \\ \quad\quad 11x_2+5x_3-5x_4=0 \end{cases}$. Ponendo nel sistema $x_3=33s$, $x_4=33t$ si ha $x_2=-15s+15t$ e $3x_1=30s-30t+33s-33t=63s-63t$ onde le soluzioni sono $x_1=21s-21t$, $x_2=-15s+15t$, $x_3=33s$, $x_4=33t$.

Un altro aspetto dei sistemi di Computer Algebra è che essi permettono di effettuare i calcoli in aritmetica razionale esatta, cioè rappresentano esattamente un numero razionale (in particolare intero), senza effettuare arrotondamenti. Ovviamente esiste un massimo numero di cifre (normalmente molto grande) che è possibile rappresentare, in dipendenza della memoria del calcolatore (comunque se tale numero di cifre viene superato il calcolatore non approssima ma semplicemente non termina il calcolo).

È opportuno quindi fare considerazioni teoriche su:

## b. Matrici, determinanti e sistemi lineari su Q, Z e $\mathbf{Z}_p$.

Nel seguito, con il simbolo $\mathbf{Z}_p$, $p$ numero primo, indicheremo il campo degli interi modulo $p$. Ricordiamo dall'algebra che in $\mathbf{Z}_p\{\bar{0},\ \bar{1},\ldots,\overline{p-1}\}$ le operazioni sono definite da $\bar{m}+\bar{n}=\bar{r}$ se $r$ è il resto della divisione di $m+n$ per $p$ e $\overline{mn}=\bar{r}$ se $r$ è il resto della divisione di $mn$ per $p$.

Osserviamo innanzitutto che in aritmetica esatta, su **Q** o **Z**, ogni operazione ha un costo computazionale dipendente dalla grandezza del numero. Inoltre la grandezza dei numeri che si ottengono per calcolare (con qualunque metodo) un determinante, un rango, ecc., di una matrice non sparsa (cioè con pochi zeri) tende a crescere con il numero dei passi effettuati e quindi il tempo di computazione in aritmetica esatta cresce molto più rapidamente che nell'aritmetica a precisione finita. Ad esempio spesso le matrici $50\times50$ sono già un limite per il calcolo del determinante o del rango di una matrice. Invece se si effettuano i calcoli sul campo $\mathbf{Z}_p$ ($p$ primo) il tempo di computazione delle somme e dei prodotti è costante (in realtà tali calcoli si possono effettuare esattamente con qualsiasi linguaggio; è sufficiente che $p$ sia inferiore al massimo intero rappresentato esattamente nel linguaggio).

Acquistano quindi grande importanza i risultati che permettono di ridurre i calcoli da $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{Z}_p$.

Qui vediamo solo alcuni risultati che permettono tale riduzione, poiché un'analisi più approfondita (che è possibile) va oltre gli scopi del libro:

**Lemma 10.** *Sia* $A=\left(\dfrac{a_{ij}}{b_{ij}}\right)\in M_{m,n}(\mathbf{Q})$ *e* $m_i=m.c.m.(b_{i1},\dots,b_{in})$.

*Sia* $C=(c_{ij})\in M_{m,n}(\mathbf{Z})$ *dove* $c_{ij}=a_{ij}\dfrac{m_i}{b_{ij}}$. *Si ha* $\rho(A)=\rho(B)$.

**Osservazione 11.** Se $m<n$, per ottenere numeri $m_i$ più piccoli è conveniente considerare invece di $A$ la matrice $A^t$, $n\times m$, ricordando che $\rho(A)=\rho(A^t)$ (cioè conviene razionalizzare le colonne).

**Dim.** Basta osservare che $C$ è ottenuta da $A$ mediante le trasformazioni elementari $\mathbf{r}_i\to m_i\mathbf{r}_i$, $i=1,\dots,m$. Sia ora $\bar{C}=(\bar{c}_{ij})\in M_{m,n}(\mathbf{Z}_p)$ dove $\bar{c}_{ij}$ è la classe del numero $c_{ij}$ (cioè $\bar{c}_{ij}=$ resto della divisione di $c_{ij}$ per $p$) in $\mathbf{Z}_p$. Allora

**Proposizione 12.** $\rho(\bar{C})\leq\rho(C)=\rho(A)$.

**Dim.** Basta osservare che se $D=(d_{ij})$ è una matrice quadrata a elementi in $\mathbf{Z}$ e $\bar{D}=(\bar{d}_{ij})$ allora $\det\bar{D}=\overline{\det D}$ onde $\det\bar{D}\neq 0$ implica $\det D\neq 0$.

**Teorema 12.** *Nelle ipotesi precedenti si ha:*

a) *se* $\rho(\bar{C})=Min\{m,n\}$ *(cioè* $\rho(\bar{C})$ *è massimo) allora* $\rho(\bar{C})=\rho(C)=\rho(A)$.

b) *se* $p>\left(\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}|c_{ij}|^2\right)^{1/2}\right)$ *allora* $\rho(\bar{C})=\rho(C)=\rho(A)$.

**Dim.** a) Discende immediatamente dalla Proposizione 11 osservando che si ha sempre $\rho(A)\leq Min\{m,n\}$.

b) Omettiamo la dimostrazione che si può trovare in testi specialistici di calcolo numerico.

**Esempio 11.** Vogliamo calcolare il rango della matrice

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{12}{17} & \dfrac{17}{31} & \dfrac{93}{87} & \dfrac{12}{15} \\[2ex] -\dfrac{7}{11} & \dfrac{138}{13} & \dfrac{51}{7} & \dfrac{137}{10} \\[2ex] \dfrac{11}{13} & 0 & \dfrac{1}{3} & 5 \end{pmatrix}$$

Poiché $A$ è $3\times 4$ conviene calcolare il rango della trasposta (o equivalentemente razionalizzare le colonne di $A$). Si ha:

$$A^t=\begin{pmatrix} \frac{12}{17} & -\frac{7}{11} & \frac{11}{13} \\ \frac{17}{31} & \frac{138}{13} & 0 \\ \frac{93}{87} & \frac{51}{7} & \frac{1}{3} \\ \frac{12}{15} & \frac{137}{10} & 5 \end{pmatrix}$$

Ora $m_1=m.c.m.(17,\ 11,\ 13)=2431$, $m_2=m.c.m.(31,\ 13)=403$, $m_3=$ $=m.c.m.(87,\ 7,\ 3)=609$, $m_4=m.c.m.(15,\ 10)=30$. Onde

$$C=\begin{pmatrix} 1716 & -1547 & 2057 \\ 221 & 4278 & 0 \\ 651 & 4437 & 203 \\ 24 & 411 & 150 \end{pmatrix} \quad \text{e in } \mathbf{Z}_5 \quad \bar{C}=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

ora $\begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{vmatrix}=\bar{3}\neq 0$ onde $\rho(\bar{C})=3$ e poiché $\rho(A)\leq 3$ si ha

$\rho(\bar{C})=\rho(C)=\rho(A)$.

**Esempio 12.** Calcolare il rango della matrice

$$C=\begin{pmatrix} 1212123 & 798543214 & 854321322 \\ -7457231 & 55555678 & 11111111 \\ -22345678 & 532748 & -739857 \\ 52431157 & 6328435 & 8765321 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che in $\mathbf{Z}_2$

$$\bar{C}=\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

e il minore $\begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{vmatrix} = \bar{1} \neq \bar{0}$ onde $\rho(C)=3$.

## 4. Esercizi e complementi

1. Dimostrare che $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (per induzione).

2. Dimostrare che $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (per induzione).

3. (Si suppone nota la nozione di limite). Dimostrare che se $P(x)=a_0+$ $+a_1x+\ldots+a_kx^k$, dove $a_k\neq 0$, allora:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a_kx^k}=1$$

Ciò giustifica l'approssimazione $a_0+a_1n+\ldots+a_kn^k \approx a_kn^k$, per $n$ intero molto grande.

4. Dimostrare che il metodo di eliminazione delle incognite, detto di Gauss-Jordan [Par. 1, Cap. I], applicato ad un sistema $AX=B$, dove $A$ è una matrice invertibile $n\times n$, richiede: $\dfrac{n^3}{2}-\dfrac{n}{2}$ somme o sottrazioni e $\dfrac{n^3}{2}+n^2-\dfrac{n}{2}$ moltiplicazioni o divisioni.

5. Confrontare per $n=5$, $n=10$, $n=50$, $n=100$ i costi computazionali dei metodi di Gauss (Teorema 1) e Gauss-Jordan (Esercizio 4).

6. Dimostrare che per determinare l'inversa di una matrice $A$ con l'algoritmo di riduzione occorrono $n^3-2n^2+n$ somme o sottrazioni e $n^3$ moltiplicazioni o divisioni.

7. Calcolare il numero di somme e moltiplicazioni necessarie per calcolare $AB$ se $A$ è una matrice $m\times n$ e $B$ è una matrice $n\times p$.

8. Dimostrare che per risolvere un sistema lineare $AX=B$ ($A$ invertibile)

con la formula $X = A^{-1}B$ occorrono $n^3 - n^2$ somme o sottrazioni e $n^3 + n^2$ moltiplicazioni o divisioni.

9. Risolvere i seguenti sistemi lineari usando l'eliminazione di Gauss con il metodo del massimo pivot. Usare un calcolatore tascabile e arrotondare ad ogni passo a sei cifre significative.

$$\text{a)}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0{,}3 \\ -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1{,}4 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0{,}1 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 4{,}7x_1 + 1{,}81x_2 + 2{,}6\ x_3 = 5{,}047 \\ -\ 3{,}4x_1 - 0{,}25x_2 + 1{,}1\ x_3 = 11{,}495 \\ 12{,}3x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}77x_3 = 7{,}9684 \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} -\ 7{,}4\ x_1 + 3{,}61x_2 + 8{,}04\ x_3 = 25{,}1499 \\ 12{,}16x_1 - 2{,}7\ x_2 - 0{,}891x_3 = 3{,}2157 \\ -\ 4{,}12x_1 + 6{,}63x_2 - 4{,}38\ x_3 = -36{,}1383 \end{cases}$$

10. Risolvere i seguenti sistemi lineari con l'eliminazione di Gauss, con e senza pivot massimo, arrotondando a tre cifre significative. Quindi risolvere i sistemi esattamente e fare un confronto tra i valori ottenuti

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 = 1{,}3 \\ 12x_1 + 25x_2 - 3x_3 = 10 \\ -7x_1 + 8x_2 + 15x_3 = 2 \end{cases}$$

11. Risolvere i seguenti sistemi lineari prima con l'iterazione di Jacobi e poi con l'iterazione di Gauss-Seidel. Iniziare con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e fermarsi alla terza iterazione arrotondando i calcoli alla terza cifra significativa. Confrontare i risultati con la soluzione esatta:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 10x_2 - x_3 = \dfrac{3}{2} \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 = -9 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 20x_1 - x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 + 10x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 - 20x_3 = -18 \end{cases}$$

12. Quali delle seguenti matrici hanno diagonale strettamente dominante?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ -1 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

13. Quali delle seguenti matrici simmetriche è definita positiva?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

14. Dimostrare che una matrice simmetrica è definita positiva se e solo se i pivot ottenuti mediante l'algoritmo (9.a) del Capitolo I sono maggiori di zero.

15. Sia $A$ una matrice a scalini a coefficienti in un anello commutativo con identità e $S=(b_{ij})$, la matrice a scalini ottenuta da $A$ applicando l'algoritmo (10) del Capitolo I. Provare che $\det A=(-1)^i\, b_{11}\dots b_{nn}$ dove $i$ è il numero degli scambi di righe effettuati.

16. Sia $A$ una matrice a scalini non nulla a coefficienti in un anello commutativo con identità privo di zero-divisori. Mostrare che il rango di $A$ coincide con il numero di righe non nulle di una matrice a scalini equivalente ad $A$.

17. Sia $\mathfrak{A}$ un anello privo di zero-divisori e $k=\left\{\dfrac{a}{b} \mid a,\ b\in\mathfrak{A},\ b\neq 0\right\}$ il suo campo dei quozienti. Date $m$ $n$-ple $\mathbf{a}_1=(a_{11},\dots,a_{1n}),\dots,\mathbf{a}_m=(a_{m1},\dots,a_{mn})$, dove $a_{ij}\in\mathfrak{A}\subset k$ provare che esse sono linearmente dipendenti su $\mathfrak{A}$ (vale a dire $\lambda_1\mathbf{a}_1+\dots+\lambda_m\mathbf{a}_m=0$ con $\lambda_i\in\mathfrak{A}$, $i=1,\dots,m$ e $\lambda_j\neq 0$ per un $j$) se e solo se $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$ sono linearmente dipendenti su $k$).

18. Sia $A=(a_{ij})$ una matrice $m\times n$, a elementi $a_{ij}$ nell'anello $\mathfrak{A}$, privo di zero divisori. Provare che il rango di $A$, $\rho(A)$, è uguale a $p$ se e solo se esistono $p$ righe (colonne) di $A$ linearmente indipendenti e qualunque siano $p+1$ righe (colonne) di $A$ sono linearmente dipendenti. (Basta considerare $A=(a_{ij})$ come matrice di $M_{m,n}(k)$, dove $k$ è il campo dei quozienti di $\mathfrak{A}$ e applicare il Teorema 31 e l'esercizio 17).

19. Data la matrice $A=(a_{ij})$ dell'esercizio 17, provare che $\rho(A)$ coincide con il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti di $A$.

20. Provare il Corollario 34 relativamente alla matrice $A$ dell'esempio 18.

21. Se $A=(a_{ij})$ è una matrice a elementi in un anello $\mathfrak{A}$ privo di zero divisori, provare il teorema di Kronecker relativamente ad $A$. (Basta osservare che $k$ è il campo dei quozienti di $\mathfrak{A}$ allora $\rho(A)$, su $\mathfrak{A}$, coincide con $\rho(A)$, su $k$).

22. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix}$ a elementi in $\mathbf{Z}_4$, provare che $\det A\neq 0$, quindi $\rho(A)=2$, ma le righe di $A$ sono linearmente dipendenti.

23. Sia dato un sistema lineare compatibile a coefficienti e termini noti in un anello $\mathfrak{A}$, privo di zero divisori. Sia $A$ la matrice incompleta e $A'$ la ma-

trice completa del sistema. Allora $\rho(A)=\rho(A')$ (se $k$ è il campo dei quozienti di $A$, allora $\rho(A)=\rho(A')$, su $k$, per il teorema di Rouché-Capelli e quindi $\rho(A)=\rho(A')$ su $\mathfrak{A}$).

24. Provare che, se $a_{ii}\neq 0$ per ogni $i=1,\dots,n$, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots\dots\dots\dots\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \qquad a_{22}x_2+\dots\dots\dots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3+\dots+a_{3n}x_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

a coefficienti in un anello $\mathfrak{A}$ privo di zeri divisori ha solo la soluzione nulla (basta osservare che dall'ultima equazione si ha $x_n=0$ e procedere per sostituzione a ritroso).

25. Calcolare il rango della matrice

$$A=\begin{pmatrix} \frac{11}{13} & -\frac{7}{8} & \frac{15}{13} & \frac{8}{4} & 5 \\ -\frac{12}{17} & \frac{121}{3} & 4 & 7 & \frac{28}{3} \\ \frac{98}{7} & \frac{111}{3} & -8 & \frac{5}{4} & -\frac{11}{9} \end{pmatrix}$$

riducendo modulo un primo $p$.

# Indice analitico