ESERCIZIO 1: Risolvere le seguenti disequazioni algebriche su $\mathbb{R}$:

1. $(x-1)(x^3 - x^2 - 2x) > 0$;

2. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \leq 0$;

3. $2^{2x+1} < 4^{x^2}$;

4. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}$;

5. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right) > 0$;

6. $2\log(3x) < \log(3x + 2)$;

7. $\sqrt{x^2 + 4 - 4x} > x - 3$;

8. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} > \sqrt{3x}$;

9. $\sqrt[3]{x^2 + x} < x$;

10. $\sqrt{x + 4} < x + 3$;

11. $3^{-2x} - 4 \cdot 3^{-x} + 5 \leq 0$;

12. $|x^2 + 5x + 3| > 3$;

ESERCIZIO 2: Determinare e disegnare i domini delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x^2 - 2}{x}\right)$;

2. $f(x) = \log(\sin(x))$;

3. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{|x|x - 1|}{x}}$;

4. $f(x) = \sqrt{\log_2(x) - 2} + \dfrac{1}{|x - 7|}$;

5. $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6. $f(x) = \sqrt{\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$;

7. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{2x + 1}} + \log(\sqrt{x} - 1)$;

ESERCIZIO 3: Calcolare sup e inf e, se esistono, max e min dei seguenti insiemi:

$$A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$B = \left\{\frac{2n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$C = \left\{\frac{n^2 + 1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$D = \left\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$E = \left\{\frac{n - 3}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup (0, 2);$$

$$F = \left\{\frac{n - 1}{n + 1} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$G = \left\{\frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$H = \left\{2\log(n) - \frac{1}{4}\log(n^2) : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$I = \left\{-\frac{n^2}{n + 1} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$L = \left\{\frac{n^2 + (-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

$$M = \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$N = \left\{ \frac{n! + 1}{(n+1)!} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$O = \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} : |2x^2 - 1| < \frac{1}{|x|} \right\};$$

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}^3 (x) - \log_{\frac{1}{2}} (x) > 0 \right\};$$

$$R = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x - 3 \geq 0 \wedge x \leq 4 \right\};$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x - 1|} < x \right\};$$

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x - 2|} \leq \frac{1}{|x - 3|} \right\}.$$

Analisi Matematica 1-Informatica-UniNa
Foglio 2

ESERCIZIO: Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + n^2 + 1}{5n^3 + n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + \sqrt{n^4} + n}{e^{2\log(n)} + 4n}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3 \cdot 2^{2n}}{\left(\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} + 16^{\frac{n}{2}}}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + n^{-3}}{3\frac{\sqrt{n}}{n} + n^{-4}}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(n^3) + 2n^2 + n}{e^{2\log(n)} + \frac{3}{n^{-2}} + 1}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin\left(\frac{3}{n^3}\right)}{e^{-2\log(n)}}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{n\log(n)} + n!}{4^n + \sqrt[n]{n^{2n}} + 1}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log(n)\sin(\frac{1}{n})}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}\right)\sqrt{n^3}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \cos^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\dfrac{n^3 + 1}{n}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(\frac{n+1}{n})}{\sin(\frac{4}{n})}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!e^n n}{n^{n+1}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log(1 + e^n)}{\sqrt{2n^2 + n + 1}}$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{2n}$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \log(\sqrt{n} + 5^n)\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$;

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2 + n}{n^2 - 2n - 1}\right)^n$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3(n!) - 4e^{n\log(n+3)}}{n^n}$;

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$;

ESERCIZIO 1: Partendo dai grafici delle funzioni elementari, tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

    1. $f(x) = e^{-|x|} + 1$ 2. $f(x) = |\arctan(x+1)|$;   3. $f(x) = |\sin(x) - 1|$;

    4. $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$;   5. $f(x) = \log(x+1) - 1$;   6. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}$.

ESERCIZIO 2: Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

  1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 + 3x^3 + x}{4x^4 + 2x^2 + 7x}$;   2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 3x}$;   3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 2x}{x^4 + 2x^3}$;

  4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8 - 6x^2 + 12x}{2x^2 - 8x + 8}$;   5. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x) + e^{x-1} + (x-1)^2}{(x-1)^2 + 4e^x}$;   6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(e^x)$;

  7. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin(x)(e^{\frac{x}{x+1}} + 2)$;   8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)\sin(x^{-1})$;   9. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \cos(x)\left(\frac{x^2 + 2x}{2x^2 - 1} - \frac{1}{2}\right)$;

 10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\log(1+x)}{\sin^2(3x)}$;   11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^x(1+x)}{\sin^2(x)(2e^{\frac{x^2}{x+1}} - 2)}$;   12. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan^2(x-1)}{(x+1)(1 - \cos(x-1))}$;

 13. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2x^3 + x^2 + x}{2x^2 + x}\right)^{\frac{1}{x}}$;   14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{7(x+1)}$;   15. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin(1-x^2)(e^{x^2-1} - 1)}{(x^2 - 1)^3}$.

ESERCIZIO 3: Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali per cui le seguenti funzioni siano continue:

    1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}, & -1 < x < 1, \\ ax^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

    Se $a = 5$, f che tipo di discontinuità presenta in $x = 1$?

    2)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b(x^2 + x)}{(x-1)^2 - 1}, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ \dfrac{a\,(\log(1+x)\sin(x))}{1 - \cos(x)}, & x > 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 4: Determinare dominio e studiare gli asintoti delle seguenti funzioni:

  1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x + 1}$ 2. $f(x) = \dfrac{e^x + \log(x)}{x^2 + 6e^x}$;   3. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x^2$;

  4. $f(x) = x + \dfrac{\cos(x)}{x}$;   5. $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2x^2+1}} + \dfrac{1}{x}$;   6. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) - \log\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

ESERCIZIO 1: Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x^3 e^x}{x+1}$

2. $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)$;

3. $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$;

4. $f(x) = 2^x \log(x^2)$;

5. $f(x) = \arccos(x^2 + x)$;

6. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$;

7. $f(x) = \sin(\cos(x^2))$;

8. $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$;

9. $f(x) = \tan(x^2 + 1)$;

10. $f(x) = e^{\sin^2(x)+x}$;

11. $f(x) = \arccos^3(x^2)$;

12. $f(x) = \log(\cos^2(x^2))$.

ESERCIZIO 2: Determinare, se esiste, la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0:

1. $f(x) = \log(x^2) + 1$, $\quad x_0 = e$;

2. $f(x) = (x+1)^{\frac{4}{3}} + 1$, $\quad x_0 = -1$;

3. $f(x) = \arctan(x^2 + 1) + 3x$, $\quad x_0 = 0$;

4. $f(x) = |x|^3$, $\quad x_0 = 0$.

ESERCIZIO 3: Determinare, se esistono, minimo e massimo assoluto di $f(x)$:

1. $f(x) = x^3 + x^2 - x$, $\quad x \in [-2, 3]$;

2. $f(x) = \log(x^2 - 2x + 3)$, $\quad x \in [-1, 2]$;

3. $f(x) = |x^2 - x - 2|$, $\quad x \in \left[0, \dfrac{5}{2}\right]$;

4. $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & -\pi \le x < 0, \\ -x + 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 4: Determinare la derivata di $f(x)$ stabilendo la natura degli eventuali punti di non derivabilità (punto angoloso, a tangente verticale o cuspide):

1)
$$f(x) = |x^2 - 1|e^x;$$

2)
$$f(x) = |\log(x)| + (x-2)^{\frac{1}{3}} + x^2;$$

3)
$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 1), & 0 \le x < 1, \\ x^2 + 1, & 1 \le x < 2, \\ 2e^{2x-4} + 3, & 2 \le x < 3; \end{cases}$$

ESERCIZIO 5: Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $f(x)$ sia derivabile:

1)
$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x^2-1}, & 0 < x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ a\log(x^2) + b, & 1 \le x < 2; \end{cases}$$

2)
$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} + \log^2(x), & 0 < x < 1, \\ ax^2 + b, & 1 \le x < 2. \end{cases}$$

ESERCIZIO 1: Studiare le seguenti funzioni:

1. $f(x) = x \log(|x|)$
2. $f(x) = \arccos(e^x)$;
3. $f(x) = \arctan(x^2 - 1)$;

4. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$;
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x + 4}$;
6. $f(x) = \log\left(\dfrac{x}{x + 1}\right) - x$;

7. $f(x) = \left|\dfrac{x^2}{x^2 - 1}\right|$;
8. $f(x) = e^{-|x|}|x - 1|$;
9. $f(x) = \sqrt{(x - 1)}|x - 2|$;

ESERCIZIO 2: Determinare dominio, asintoti, continuità, derivabilità, monotonia e natura degli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2 - 4}{x + 3}\right)$;
2. $f(x) = e^{-|x|\sqrt{x+1}}$;

3. $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x + 2}\right)$;
4. $f(x) = \arccos(x^2 - 1)$;

5. $f(x) = \log\left(\dfrac{1}{3}x^3 - x\right)$;
6. $f(x) = \sqrt{\log\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)}$;

ESERCIZIO 3: Determinare dominio, asintoti, continuità, derivabilità, monotonia e natura degli eventuali punti stazionari delle seguenti funzioni::

1)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & x \geq 1, \\ e^{\frac{x^2}{2x^2+1}}, & 0 \leq x < 1, \\ \log(1 + x) + 1, & x < 0; \end{cases}$$

2)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x^2 - 1}, & x > 1, \\ \frac{1}{2x}, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{3}{2}\log(2 - x) + \frac{3}{2}, & x < -1; \end{cases}$$

(1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

1. $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

2. $\int x(\cos x + \sin x)\,dx$

3. $\int (x^3+1)^3 x^2\,dx$

4. $\int xe^{x^2}\,dx$

5. $\int \cos(x^2)x\,dx$

6. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

7. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

8. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

9. $\int \frac{1}{(2x+1)^2+2}\,dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

12. $\int \frac{1}{x\log(x)}\,dx$

13. $\int \frac{\log(x)}{(x+1)^2}\,dx$

14. $\int \tan^2(x)\,dx$

15. $\int \frac{x+3}{x+1}\,dx$

16. $\int 3\sin^2(x)\,dx$

17. $\int \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{3\sin(x)+1}\,dx$

18. $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin(x)+1}\,dx$

19. $\int \frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)}\,dx$

20. $\int \frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

21. $\int \frac{x^5+x^4+2x^3+x^2+2x+3}{x^2+x+2}\,dx$

22. $\int \frac{x^4}{x-1}\,dx$

23. $\int \frac{2x-1}{2+x}\,dx$

24. $\int \frac{2}{4x^2+2}\,dx$

25. $\int \frac{3x+1}{3x^2+2x+4}\,dx$

26. $\int \frac{13x+1}{x^2-2x+1}\,dx$

27. $\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$

28. $\int \log\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\,dx$

29. $\int (x^2+1)e^x\,dx$

30. $\int \frac{x+1}{4x^2+4x+5}\,dx$

31. $\int e^x\sin(x)\,dx$

32. $\int x\tan^2(x)\,dx$

33. $\int x^3\cos(x)\,dx$

34. $\int \cos(x)\log(\cos(x))\,dx$

35. $\int \log(1+\cos(x))\cos(x)\sin(x)\,dx$

36. $\int x\log^2(x)\,dx$

37. $\int \frac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

38. $\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$

39. $\int \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\,dx$

40. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$

41. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+3}\,dx$

42. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+2}}\,dx$

43. $\int e^{\sqrt{x}}\sqrt{x}\,dx$

44. $\int (x+1)\arctan(x)\,dx$

45. $\int \arcsin(x)\,dx$

46. $\int \dfrac{5x - 12}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

47. $\int \dfrac{3e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3} \, dx$

48. $\int \dfrac{2x}{x^2 + 4x + 4} \, dx$

49. $\int \dfrac{x}{x^2 + 4x + 6} \, dx$

50. $\int \dfrac{5x - 1}{x^2 - 1} \, dx$

51. $\int \dfrac{x + 3}{2x^2 + 4x + 6} \, dx$

52. $\int \dfrac{2x - 8}{(x - 2)^2} \, dx$

53. $\int \dfrac{x \tan(x)}{\sin^2(x) \cot(x)} \, dx$

54. $\int \dfrac{1}{\tan^2(x) + 1} \, dx$

55. $\int \dfrac{2 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

56. $\int \dfrac{\cos(x) \sin(x)}{2 \sin(x) + \sin^2(x) + 1} \, dx$

57. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x} + 2} \, dx$

58. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x} + x^{\frac{1}{3}}} \, dx$

59. $\int \dfrac{\sqrt{x}(x - 1)}{x + 2} \, dx$

60. $\int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 2e^x + 2} \, dx$

61. $\int \dfrac{3x^3 + 8x^2 + 15x + 8}{x^2 + 2x + 3} \, dx$

62. $\int \dfrac{1}{x^2 - 4x + 6} \, dx$

63. $\int \arccos(x) \, dx$

(2) Calcolare i seguenti integrali definiti

1. $\int_0^1 \sqrt{2 - x^2} \, dx$

2. $\int_1^{16} e^{-\sqrt{x}} \, dx$

3. $\int_1^e \dfrac{\log(x)}{(\log(x) + 2)x} \, dx$

4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{x^4}} \, dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x) + 1}} \, dx$

6. $\int_0^1 3x\sqrt{1 - x^2} \, dx$

7. $\int_1^e \log(x) \, dx$

8. $\int_0^1 e^x \log(e^x + 1) \, dx$

9. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

10. $\int_0^4 \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x + 3} \, dx$

11. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + \sqrt{x + 2}} \, dx$

12. $\int_1^e x^2 \log(x) \, dx$

(3) Calcolare le seguenti aree tramite calcolo integrale
  i) L'area della zona compresa tra il grafico di $\cos(x)$ e l'asse x dove x varia tra 0 e π.
  ii) L'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.
  iii) L'area del triangolo di vertici $(0,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$.
  iv) L'area della zona che si trova al di sotto della bisettrice del primo e del terzo quadrante e sopra la parabola $y = x^2$.
  v) L'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,2)$ e $(1,2)$.
  vi) L'area del quadrilatero di vertici $(0,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ e $(2,1)$.
  vii) L'area della zona compresa tra il grafico di
$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \ x \le 2, \\ -x + 3, \ x > 2. \end{cases}$$
  dove x varia tra 0 e 4.
  viii) L'area della zona compresa tra il grafico di $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = e^{-\sqrt{x}}$.

Analisi Matematica 1-Informatica-UniNa
Foglio 7

ESERCIZIO: Studiare le seguenti serie. In particolare stabilire il carattere per le serie a termini non negativi
e convergenza assoluta e semplice per serie a segno variabile:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\log(2)3^k k!}{k^k}$;

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(e^{\frac{2k^2+1}{2k^2+k+2}} - e \right)$;

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log \left(\dfrac{k^2+k}{k^2+k-1} \right)^{\frac{1}{k}}$;

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log(k) \sin \left(\dfrac{1}{k} \right) \log \left(\dfrac{k^2+k}{k^2+1} \right)$;

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k k}{k^2+1}$;

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k+1}{(k^2+k)\log^k(k+1)}$;

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k \cos(k\pi)}{k^2+k}$;

8. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin(k) \log \left(\dfrac{1+k^2}{k^2} \right) (e^{\frac{1}{k}} - 1)$;

9. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}} - 1 \right)(k+2)$;

10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{4^{k+2}}{5^k}$;