Geometria e Algebra

Prova Scritta 26-05-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Determinare per quali valori del parametro reale k il sistema

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x + z = 0 \\ kx + y + 2z = 0 \\ (k-2)x + y + (k^2-1)z = 0 \\ 2x + ky + 3z = -1 \end{cases}$$

ammette soluzioni.

Descrivere *l'insieme* delle soluzioni del sistema $\mathcal{S}$ per $k = -1$ e del suo sistema omogeneo associato usando Cramer.

Esercizio 2

Determinare una matrice a gradini equivalente per righe alla seguente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Qual è la dimensione del sottospazio generato dalle righe della matrice A? Qual è invece la dimensione del sottospazio generato dalle colonne? Motivare le risposte.

La matrice A è invertibile? (Perché?) Scrivere la sottomatrice corrispondente ad un minore fondamentale di A. Trovarne l'inversa.

Esercizio 3

Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice invertibile P che realizzi la diagonalizzazione di B e la matrice diagonale D in cui B viene portata.

Esercizio 4

Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, -1)$ è autovettore della matrice

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ -\lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare se C sia diagonalizzabile per tali valori di λ.

Esercizio 5

Sia λ un parametro reale. Consideriamo la seguente applicazione:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\lambda x + y,\ \lambda z,\ (\lambda^2 + 1)y) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare per quali valori del parametro λ la funzione f è un omomorfismo, per quali una funzione iniettiva e per quali una funziona suriettiva. Giustificare il procedimento.

Geometria e Algebra

Prova Scritta 19-06-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Determinare (spiegandone i motivi) quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali e, in caso affermativo, determinarne la dimensione ed una base:

$$W_1 = \langle (1,0,-1),\, (10,0,-10) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$W_2 = \{(1,0,1),\, (0,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$W_3 = \{(x,y,z,t) \,:\, x-y=0;\; z+t=-2\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$W_4 = \{(x,y,z,t,u) \,:\, x-xu=0;\; u+t=0\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

$$W_5 = \{(x,y,z) \,:\, x-y-z=x-z=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Esercizio 2

Determinare, al variare del parametro reale h, il rango della seguente matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & 0 \\ 1+h & 0 & -1 & h \\ -h & 0 & h & -h \end{pmatrix}.$$

Descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $A_1 X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Determinare dimensione e una base dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A_0 X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3

Calcolare la distanza nello spazio tra la retta

$$r : \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e la retta

$$s : \begin{cases} y = -5 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Determinare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per ciascun autovalore λ scrivere un autovettore di autovalore λ.

Determinare una base per l'autospazio $V(-2)$ e una per l'autospazio $V(0)$.

Sia x un elemento di $V(-2)$ e y uno di $V(2)$. È vero che il sistema di vettori $\{x, y\}$ è sempre linearmente dipendente? È invece vero che è sempre indipendente? Fornire **chiare** spiegazioni per le risposte.

Esercizio 5

Sia F_A l'applicazione lineare determinata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- F_A è iniettiva?
- $(1, 1, 1) \in F_A(\mathbb{R}^4)$?
- Qual è la matrice associata ad F_A nel riferimento naturale di $\mathbb{R}^4$?
- Sia $\mathcal{R} = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$ un riferimento di $\mathbb{R}^4$. Determinare $M_{\mathcal{R}\mathcal{R}_{\text{nat}}}(F_A)$.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 07-07-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia r la retta nello spazio passante per il punto di coordinate $(1, 2, 3)$ e avente come numeri direttori $(0, 1, 2)$. Rappresentare parametricamente ed in forma ordinaria la retta r (con procedimento). Trovare infine l'equazione di un piano passante per la retta r ed il punto $B(1, 10, 19)$.

Esercizio 2

Determinare, al variare del parametro reale h, la dimensione dello spazio vettoriale

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+h & 0 \\ -1 & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h & 0 \\ h & -h \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 3

Calcolare per quali valori del parametro intero h, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^h \cdot 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

è simile ad una diagonale. Per tali valori scrivere sia una matrice diagonale a cui è simile, sia una che realizzi tale similitudine.

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x, siano

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(-x) = p(x)\}$$

e

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(-x) = -p(x)\}.$$

Si risponda vero o falso alle seguenti domande, motivando le risposte.

- U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, ma V non lo è.
- $U \cap V$ è il polinomio nullo.
- $\mathbb{R}[x] = U \oplus V$.

Esercizio 5

Per ogni $h \in \mathbb{R}$, sia F_{A_h} l'applicazione lineare determinata dalla matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

• Per quali valori del parametro h risulta $dim(Ker(F_{A_h})) = 1$? Determinare in questo caso una base per il nucleo dell'omomorfismo.

• Trovare due vettori distinti di $\mathbb{R}^4$ che abbiamo come immagine $(0, 0, 6)$ mediante F_{A_3}.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 21-07-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Al variare del parametro λ, sia

$$W_\lambda = \langle x^3 + x^2 + \lambda x,\ \lambda x^2 + x - \lambda,\ 2x^3 - x^2 + x - 1 \rangle$$

un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Determinare, al variare del parametro λ, la dimensione di W_λ.

Esercizio 2

Dire quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$ sono sottospazi vettoriali e quali no (giustificare le risposte).

$$W_1 := \{x^3 + x^2, 0, x^5\}$$

$$W_2 := \langle x^7, x^{100} \rangle$$

$$W_3 := \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}, a_1 = 2n - 1\}$$

$$W_4 := \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid \exists n \in \mathbb{N}_0, a_1 = 2n\}$$

$$W_5 := \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2 \geq 0\}$$

Esercizio 3

Considerati i due riferimenti

$$\mathcal{R} := ((1,4,1),(1,5,0),(2,5,-1))$$

ed

$$\mathcal{R}' := ((1,0,-1),(0,2,1),(2,3,-2))$$

di $\mathbb{R}^3$. Sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$ e si supponga che esso abbia componenti (x_1, x_2, x_3) nel riferimento $\mathcal{R}$, mentre abbia componenti (x'_1, x'_2, x'_3) nel riferimento $\mathcal{R}'$. Qual è la relazione che sussiste tra queste terne? DOPO aver descritto tale relazione in generale mostrare come tale relazione sia verificata con il vettore w espresso nella base canonica da $(1,0,1)$.

Esercizio 4

Assegnati i punti $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(1,-1)$ e $D(4,1)$, determinare quante circonferenze passano per questi 4 punti e rappresentarle.

Esercizio 5

Sia $f : \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita dalle seguenti posizioni

$$f(1,1,0) = (3,2,0)$$
$$f(0,1,1) = (0,2,1)$$
$$f(1,0,1) = (3,0,1)$$

Si può estendere f ad una applicazione lineare f' di $\mathbb{R}^3$? Se fosse possibile, in quanti modi si potrebbe fare? Quale sarebbe la matrice associata ad f' nel riferimento naturale? Dopodiché dire, usando semplicemente le definizioni, se tale funzione f' sia diagonalizzabile o meno e determinarne (sempre solo con la definizione) autovalori, autovettori ed autospazi.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 24-07-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

In $\mathbb{R}^3$, considerati i sistemi di vettori

$$U_1 = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$$

$$U_2 = \langle (0,2,0),(0,4,0) \rangle$$

$$U_3 = \langle (0,-2,2) \rangle$$

$$U_4 = \langle (1,1,0),(0,-1,3),(1,-2,3),(2,-4,6) \rangle$$

$$U_5 = \langle (1,-1,1),(0,1,1),(0,0,1) \rangle$$

determinare la dimensione ed una base di U_i, $U_i \cap U_j$ e $U_i + U_j$ con $i,j \in \{1,2,3,4,5\}$ e $i \neq j$.

Esercizio 2

Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 2)$ è autovettore della matrice

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ -\lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare se C sia diagonalizzabile per tali valori di λ.

Esercizio 3

Considerati i due riferimenti

$$\mathcal{R} := ((1,4,1),(1,5,0),(2,5,-1))$$

ed

$$\mathcal{R}' := ((1,0,-1),(0,2,1),(2,3,-2))$$

di $\mathbb{R}^3$. Sia v un vettore di $\mathbb{R}^3$ e si supponga che esso abbia componenti (x_1, x_2, x_3) nel riferimento $\mathcal{R}$, mentre abbia componenti (x'_1, x'_2, x'_3) nel riferimento $\mathcal{R}'$. Qual è la relazione che sussiste tra queste terne? DOPO aver descritto tale relazione in generale mostrare come tale relazione sia verificata con il vettore w espresso nella base canonica da $(1,0,1)$.

Esercizio 4

Calcolare la distanza nello spazio tra la retta (no formulette ma procedimento)

$$r : \begin{cases} y - x = 0 \\ z = y \end{cases}$$

e la retta

$$s : \begin{cases} y = -5 + x \\ z = x \end{cases}$$

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 0$. Determinare tutti e soli i valori di m tale che lo spazio vettoriale V sia isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$? Per tali valori scrivere anche un isomorfismo tra V ed $\mathbb{R}^m$.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 11-09-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Consideriamo i due seguenti spazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$U_1 = \langle (1,1,1,1), (0,1,1,1), (22,10,11,5), (0,0,2,0), (0,0,0,5), (3,2,5,8) \rangle$$

e

$$U_2 = \langle (2,0,0,3), (0,0,0,2) \rangle$$

e l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da la seguente posizione $f(a,b,c,d) = (a,c,d)$. Determinare la dimensione e una base del seguente spazio vettoriale

$$f((U_1 \cap U_2) + \langle (0,1,0,0) \rangle)$$

di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2

Descrivere, usando il sistema omogeneo associato le soluzioni del seguente sistema

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_1 - hx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - hx_2 + x_4 = -3 \\ x_2 + x_3 = h \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

Esercizio 3

Rispondere alle seguenti domande:

- Cosa vuol dire rappresentare un sottoinsieme X del piano?
- Sia

$$X = \{(1,2),(0,3),(0,5)\}$$

e

$$Y = \{(0,1),(1,0),(2,0)\}.$$

Qual è la distanza tra gli insiemi X e Y nel piano?

Esercizio 4

Determinare per quali valori del parametro reale h il seguente insieme è un spazio vettoriale

$$\{(h^2-1)x^2 + a_1 x + h^2 \,:\, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 5

Sia V_4 uno spazio vettoriale di dimensione 4. Esistono due sottospazi U e W di V_4 entrambi di dimensione 3 che si intersechino in un sottospazio di dimensione 1? Se U e W sono due sottospazi distinti e non banali di V_4, entrambi di dimensione pari, allora la loro somma è un sottospazio di V_4 di dimensione 3?

Foglio bonus per i conti

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola:

Geometria e Algebra

Prova Scritta 27-10-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x \text{ e } x < 0\}$, $B = \{(0, 1/n) \,:\, n = 1, 2, \ldots\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = \sqrt{1 - x^2} \text{ e } x \geq 0\}$ sottoinsiemi del piano. Cacolare le distanze: dist(A,B), dist(B,C), dist(A,C).

Esercizio 2

Per quali valori di h il vettore $(1, 0, -1)$ è combinazione lineare dei vettori $(1, 1 + h, -h)$, $(h, 0, 0)$, $(0, -1, h)$, $(0, h, -h)$?

Esercizio 3

- Dare la definizione di sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico dello spazio.
- Siano R e R' due sistemi di r.c.o.m. del piano e sia P un punto del piano. Che relazione sussiste tra le coordinate di P in R e in R'?

Esercizio 4

Siano A, B e C definiti come nell'esercizio 1. Determinare dimensioni e basi dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$ generati da A, B e C rispettivamente.

Esercizio 5

Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ l'omomorfismo definito da

$$\begin{gathered} x^3 + x^2 + x + 1 \mapsto 954x^3 + 848x^2 + 41290x \\ x^2 + x + 1 \mapsto 200x^2 \\ x + 1 \mapsto 723x \\ 1 \mapsto x^3. \end{gathered}$$

Il numero 0 è un autovalore di f? Se sì descrivere l'autospazio associato a 0.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 18-12-2017

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Siano $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \geq 0 \vee y+z+x = 1\}$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x|+|y|+|z| \leq 0\}$ e $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 = 1\}$ sottoinsiemi dello spazio. Cacolare: dist(A,B), dist(B,C), dist(A,C).

Esercizio 2

Sia h un numero reale e sia $\mathcal{L} = \{L \leq \mathbb{R}^3 \ : \ L \supseteq \{(1, 1+h, -h), (0,0,0), (0,-1,h), (0,h,-h)\}\}$. Stabilire per quali valori di h il vettore $(1,0,-1)$ appartiene al seguente insieme:

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L.$$

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile. Dare la definizione di sottospazio generato da un sottoinsieme X di V. Dimostrare (avendola enunciata) la caratterizzazione in termini di combinazioni lineari del sottospazio generato.

Esercizio 4

Siano A, B e C definiti come nell'esercizio 1. Determinare dimensioni e basi (se esistono) dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ generati da $A \cap C$, $B \cap A$ rispettivamente.

Esercizio 5

Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ l'omomorfismo definito da

$$\begin{gathered} 200x^3 + 134x^2 + 10x + 1 \mapsto x^3 \\ x^2 + x + 12 \mapsto x^3 \\ x + 1 \mapsto x^3 \\ 1 \mapsto x^3. \end{gathered}$$

Quali sono gli autovalori di f?

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 11-01-2018

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| = |y|\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 4\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1/x = x\}$ sottoinsiemi dello spazio. Cacolare: dist(A,B), dist(B,C), dist(A,C).

Esercizio 2

Sia fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico dello spazio. Determinare al variare del parametro h, i vettori $\bar{v}(x, y, z)$ tale che il prodotto scalare di $\bar{v}$ con $(1, 1-h, -h)$ sia 1, $\bar{v}$ sia parallelo al piano $\pi : -y + hz = 0$ e il prodotto scalare di $\bar{v}$ con $(0, h, -h)$ sia -1.

Esercizio 3

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile. Dare la definizione di sottospazio generato da un sottoinsieme X di V. Dimostrare (avendola enunciata) la caratterizzazione in termini di combinazioni lineari del sottospazio generato.

Esercizio 4

Sia $(V, \top, \perp)$ uno spazio vettoriale ($\top$ è l'operazione interna, $\perp$ quella esterna). Siano x e x' vettori fissati in V tali che comunque si prenda un $y \in V$ risulti $x \top y = y$ e $x' \top y = y$. È vero o no che $x = x'$? (Dimostrare quanto affermato.)

Esercizio 5

Sia $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ l'omomorfismo definito da

$$\begin{gathered} 200x^3 + 134x^2 + 10x + 1 \mapsto x^2 \\ x^2 + x + 12 \mapsto x^2 \\ x + 1 \mapsto x^2 \\ 1 \mapsto x^2. \end{gathered}$$

Quali sono gli autovalori di f?

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 07-02-2018

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo dello spazio vettoriale finitamente generabile V. E' vero che se f è diagonalizzzabile allora il polinomio caratteristico ammette tutte radici reali e distinte? E' vera invece l'impicazione inversa? (Se vere dimostrarle, se false fornire controesempi).

Esercizio 2

Che relazione sussiste tra le soluzioni di un sistema di equazioni e il sistema omogeneo associato a questo? Dimostrare le relazioni citate.

Esercizio 3

Enunciare il Lemma di Steinitz e, usando questo, mostrare che il concetto di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generabile è ben posto.

Esercizio 4

Definire cosa vuol dire rappresentare un sottoinsieme dello spazio. Dopodiché dimostrare la rappresentazione parametrica di una retta nello spazio.

Esercizio 5

Che vuol dire che una funzione è iniettiva? suriettiva? biettiva? Dimostrare (ed enunciare) la relazione che sussiste tra kernel e iniettività quando la funzione è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 26-06-2018

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si determinino *se possibile* le seguenti matrici:

$$BA + A,\ AC + B(I_2^{-1}) \ \text{ e } \ C(B^{-1}) + (2I_2)C$$

Di queste ultime trovarne per ciascuna una a gradini equivalente.

Esercizio 2

Per quali valori del parametro reale $h \geq 2$ la funzione

$$f_h : ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow cx^h + bx^{h-1} + ax^{h-2} \in \mathbb{R}_h[x]$$

è invertibile? Determinare la funzione inversa in questi casi. Per quali valori di $h \geq 2$ la funzione è iniettiva?

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ un endomorfismo diagonalizzabile avente 1 come unico autovalore. Determinare $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Esercizio 4

Fissata la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$. Provare che $V = \{X \in \mathbb{R}_{2,2} \mid AX = XA\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_{2,2}$.

Determinare un supplementare W di V in $\mathbb{R}_{2,2}$.

Esprimere $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ come somma di due matrici di V e W.

Esercizio 5

Sia V_n uno spazio vettoriale di dimensione n. Dimostrare che *ogni* sottospazio di dimensione n coincide con V_n.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 23-07-2018

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia data la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 1 & -1 & 0 \\ 0 & h-1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare al variare del parametro reale h tutti i minori fondamentali di A.

Esercizio 2

Considerato il sistema lineare

$$S : \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

aggiungervi *se possibile* una equazione lineare (diversa dalle precedenti) in modo che il nuovo sistema abbia ∞^1 soluzioni. Aggiungervene *se possibile* poi una (al nuovo sistema) in maniera tale che ammetta una sola soluzione. Spiegare i procedimenti.

Esercizio 3

Siano $v = (2, 10, 32)$ e $w = (32, 10, 2)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Determinare

$$(v \times w) + [(v \times w) \bullet 2w + 1](w \times v).$$

Il vettore risultante è perpendicolare al piano di equazione $4x + 20y + 64z = 0$?

Esercizio 4

Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (0, -1)$ è autovettore della matrice

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ -\lambda & \lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare i possibili autovalori per v al variare di λ.

Esercizio 5

Sia λ un parametro reale. Consideriamo la seguente applicazione:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\lambda x + y,\ \lambda z,\ (\lambda^2 + 1)y) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare per quali valori del parametro reale λ la funzione f è un omomorfismo non diagonalizzabile.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 10-09-2018

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia $\mathcal{R} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ il riferimento canonico di $\mathbb{R}^3$. È possibile estendere l'applicazione

$$f(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \underline{e}_3 - \underline{e}_1$$
$$f(2\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$$
$$f(-\underline{e}_1 - \underline{e}_3 + \underline{e}_2) = \underline{e}_2 + \underline{e}_3$$

ad un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$? Spiegarne i motivi.

Esercizio 2

Sia
$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$
l'applicazione definita dalla posizione
$$ax^2 + bx + c \mapsto 2ax + \lambda$$
con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e λ parametro reale. Determinare per quali valori del parametro λ l'applicazione f è lineare ed ammette 3 come autovettore.

Esercizio 3

Sia V_2 un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione 2 e sia $f : V_2 \longrightarrow V_2$ un endomorfismo diagonalizzabile che ammetta 1 e 0 come unici autovalori. Determinare la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Esercizio 4

Dare la definizione di distanza tra insiemi nel piano, di rappresentazione di un insieme nello spazio e dire, dimostrando, quali sono le coordinate del punto medio di un segmento nel piano.

Esercizio 5

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$:

$$A = \langle x^3 + x^2 \rangle, \quad B = \langle x \rangle$$

Determinare $A \cap B$ e, se possibile, due complementi distinti per B in $\langle A, B \rangle$.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 22-10-2018

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Si consideri $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale reale. Dire se i seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, determinarne dimensione e, per ciascuno, se possibile, due basi distinte:

$$A := \{r \in \mathbb{R} \,|\, \exists s \in \mathbb{R} \,:\, r = s \cdot 2\}$$

$$B := \{r \in \mathbb{R} \,|\, \exists s \in \mathbb{R} \,:\, r = s \cdot \pi\}$$

$$C := \{r \in \mathbb{R} \,|\, \exists s \in \mathbb{R} \,:\, r = s \cdot i\} \quad (i \text{ è l'unità immaginaria})$$

Esercizio 2

Sia

$$f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'applicazione definita dalla posizione

$$ax^2 + bx + c \mapsto 25 \cdot \lambda^2 + 5 \cdot \lambda + c \cdot \lambda$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e λ parametro reale. Determinare per quali valori del parametro λ l'applicazione f è lineare.

Esercizio 3

Sia V_2 un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione 2 e sia $f : V_2 \longrightarrow V_2$ un endomorfismo diagonalizzabile che ammetta λ e 0 come unici autovalori. Determinare la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$ al variare del parametro reale λ.

Esercizio 4

Dare la definizione di distanza tra insiemi nello spazio, di rappresentazione di un insieme nel piano e dire, dimostrando, quali sono le coordinate del punto medio di un segmento nello spazio.

Esercizio 5

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}[x]$:

$$A = \langle x^3 + x^2 + x \rangle, \quad B = \langle x \rangle, \quad C = \langle 3x^3, \, 2x^2 \rangle.$$

Dire se la seguente equivalenza è corretta

$$\langle (A + C) \cap B, \; (A + B) \cap C \rangle = A + B.$$

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 27-05-2019

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale e sia $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ un sottoinsieme indipendente di V. Dimostrare che se un certo vettore $v \in V$ dipende da S allora vi dipende in maniera univoca.
Mostrare, fornendo un controesempio, che in generale l'unicità della dipendenza non vale per sistemi di vettori dipendenti.

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una applicazione lineare diagonalizzabile che ammetta un solo autovalore di molteplicità geometrica 2 e tale che

$$f(2, 0) + f(1, 0) = f(2, 0).$$

Calcolare i possibili valori per $f(\pi, \pi/4)$.

Esercizio 3

Siano $A = \{(x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$, $B = \{(-x, 0) \,:\, x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$ e $C = \{(x, -x) \,:\, x^3 + x = 0\}$ sottoinsiemi del piano. Cacolare: $\text{dist}(A,B)$, $\text{dist}(B,C)$, $\text{dist}(A,C)$.

Esercizio 4

Qual è il numero massimo di minori fondamentali ottenibile da una matrice a valori reali 3×3 avente rango 2?

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile. Siano A, B e C sottospazi vettoriali di V. E' valida la seguente relazione?

$$(A + C) \cup B = \langle A \cup B, C \cup B \rangle$$

(se sì dimostrarla, altrimenti fornire un controesempio in $\mathbb{R}^2$).

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 15-07-2019

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile e siano H_1, H_2 e H_3 sottospazi di V. Si supponga che per ogni $v \in V$ esistano e siano univocamente determinati $h_i \in H_i$ tali che $v = h_1 + h_3 + h_2$. Dimostrare che $V = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$.

Esercizio 2

Sia $f : ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2$ una applicazione. Stabilire se f sia o meno lineare. In ogni caso, trovare (se possibile) due sottospazi C_1 e C_2 di $\mathbb{R}_2$ tale che $\mathbb{R}_2 = C_2 \oplus C_1 \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 3

Dimostrare la formula risolutiva che concerne i sistemi omogenei di $n-1$ equazioni in n incognite.

Esercizio 4

Sia $V = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_2[x]$. Dire (spiegando) se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. V ha dimensione 5.
2. $\{((y, 0, 0), a + bx + cx^2) \,:\, a, b, c, y \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale e sia H un sottoinsieme di V. Quale condizione deve soddisfare H affinché tutti i sottoinsiemi di V contenenti H siano sottospazi vettoriali?.

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 09-09-2019

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia $f : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare che ammetta i tre autovalori distinti λ_1, λ_2 e λ_3. Dimostrare che gli autospazi relativi sono in somma diretta.

Esercizio 2

Sia $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \,:\, a \in \mathbb{R} \right\}$.

- X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2$?
- Definire (se possibile) una applicazione lineare di X in $\mathbb{R}_2[x]$ tale che l'immagine abbia dimensione almeno 1 (un punto in più se si trova con dimensione 2).

Esercizio 3

Dimostrare o smentire le seguenti affermazioni per $n \geq 1$.

- Il prodotto righe per colonne nelle matrici quadrate di ordine n non è mai commutativo.
- La somma (di due matrici di ordine n) è distributiva rispetto alla moltiplicazione a destra per un'altra matrice di ordine n.

Esercizio 4

Sia $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_2[x]$. Dire (spiegando) se le seguenti affermazioni sono vere o false.

1. Chi è l'elemento neutro di V?
2. Determinare un sottospazio di V isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale e sia H un sottoinsieme di V. Quale condizione deve soddisfare H affinché tutti i sottoinsiemi di V contenuti in H siano sottospazi vettoriali?

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 28-10-2019

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia $f : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare che ammetta almeno un autovalore λ. Prendiamo $v \in V$ che non sia un autovettore. E' vero che l'autospazio $V(\lambda)$ e il sottospazio $\langle v \rangle$ sono in somma diretta?

Esercizio 2

Sia $X = \left\{ax^3 + ax^2 + ax + a \,:\, a \in \mathbb{R}\right\}$.

- X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_5[x]$?
- Definire (se possibile) una applicazione lineare di X in $\mathbb{R}_{3,3}$ tale che l'immagine abbia dimensione almeno 1 (un punto in più se si trova suriettiva).

Esercizio 3

Dimostrare o smentire le seguenti affermazioni per $n \geq 1$.

- Il prodotto righe per colonne nelle matrici quadrate di ordine n non è mai associativo.
- Per ogni matrice A di ordine n esiste sempre una matrice B di ordine n tale che $AB = I_n = BA$.

Esercizio 4

Sia $V = \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x]$. Trovare tutti gli n per cui V è isomorfo a $R_n[x]$.

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale e sia H un sottoinsieme di V avente un numero finito di oggetti n. Per quali valori di n il sottoinsieme H di V è un sottospazio vettoriale di V?

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 25-11-2019

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia A una matrice diagonalizzabile di ordine 2 e avente come autovalori 3 e 4. La matrice $A \cdot A \cdot A \cdot A$ è diagonalizzabile? Se sì, quali sono i suoi autovalori?

Esercizio 2

Sia $X = \{ax^3 + ax^2 + ax + a \,:\, a \in \mathbb{R}\}$.

- X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_5[x]$?
- Definire (se possibile) una applicazione lineare di X in $\mathbb{R}$ tale che non sia suriettiva.

Esercizio 3

Dimostrare o smentire le seguenti affermazioni.

- Il prodotto vettoriale è simmetrico.
- Un riferimento cartesiano ortonormale monometrico è una coppia ordinata.

Esercizio 4

Sia $V = \mathbb{R}_4[x] \times \mathbb{R}_{2,2}$. Determinare due distinti sottospazi di V che siano isomorfi.

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale e sia H un sottoinsieme di V tale che $V \setminus H$ abbia un numero finito di oggetti, diciamo n. Per quali valori di n risulta H un sottospazio vettoriale di V?

Foglio bonus per i conti

Geometria e Algebra

Prova Scritta 26-02-2020

Prof. Marco Trombetti

Esercizio 1

Sia A una matrice diagonalizzabile di ordine 2 e avente come autovalori 3 e 4. L'insieme

$$\{B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \,:\, B \text{ sia proporzionale ad } A\}$$

è uno sottospazio vettoriale di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

Esercizio 2

Sia $X = \left\{ax^{40} + bx^2 + ax + b \,:\, a,\, b \in \mathbb{R}\right\}$.

- Quanti sottospazi di $\mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ sono isomorfi ad X?
- Quanti sottospazi di X sono isomorfi ad $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$?

Esercizio 3

Dimostrare, smentire o rispondere alle seguenti affermazioni per due vettori dello spazio v e w.

- $v \times w = 0$ se e solo se v e w sono dipendenti.
- Quando si ha che $v \times w = 2(v \times w)$?

Esercizio 4

Sia $V = \mathbb{R}_5[x] \times \mathbb{R}_{2,2}$. Qual è il massimo numero di sottospazi 1-dimensionali a due a due distinti che è possibile ottenere?

Esercizio 5

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e sia H un sottospazio di V tale che non esista nessun sottospazio $K \neq V$ per cui $V = H \oplus K$. Chi è H?

Foglio bonus per i conti

Esercizi per "Geometria e Algebra"

Prof. Marco Trombetti

(0) Si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} = \{(1,0,2),(-1,0,1),(3,0,0),(1,1,0)\}.$$

• Si provi che $\mathcal{S}$ è linearmente dipendente.
• Si determini una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{S}$ con coefficienti non tutti nulli che sia uguale a $(0,0,0)$.
• Si determini un vettore di $\mathcal{S}$ che dipende dai rimanenti.
• Si determinino due sottoinsiemi distinti di $\mathcal{S}$ che siano massimali indipendenti.
• Quanti sottoinsiemi distinti indipendenti di ordine 3 si possono estrarre da $\mathcal{S}$? Quanti di ordine 2? E di ordine 1?

(1) Si provi che nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ i vettori del sistema

$$\mathcal{S} = \{(0,1,0,0),(2,2,2,1),(0,1,-1,1),(0,1,1,1)\}$$

sono linearmente indipendenti e sono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$. Si scriva inoltre il vettore $(0,0,1,0)$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{S}$. Esistono due combinazioni lineari distinte che producono il vettore $(0,0,1,0)$? (Giustificare la risposta.)

(2) In $\mathbb{R}^3$, considerati i sistemi di vettori

$$U_1 = \langle (0,1,0),(0,0,1)\rangle$$
$$U_2 = \langle (0,2,0),(0,4,0)\rangle$$
$$U_3 = \langle (0,-2,2)\rangle$$
$$U_4 = \langle (1,1,0),(0,-2,3),(1,-2,3),(2,-4,6)\rangle$$
$$U_5 = \langle (1,-1,1),(0,1,1),(0,0,1)\rangle$$

determinare la dimensione ed una base di U_i, $U_i \cap U_j$ e $U_i + U_j$ con $i,j \in \{1,2,3,4,5\}$ e $i \neq j$.

(3) Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali e, in caso affermativo, determinarne la dimensione ed una base.
• $W_1 = \{(1,0,-1,-1),(1,0,1,1),(0,1,1,0),(2,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
• $W_2 = \langle (5,0,-3,1),(0,2,3,1),(4,1,0,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
• $W_3 = \langle (0,0,0),(1,1,1),(2,2,2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
• $W_4 = \langle (0,0),(-1,1),(5,-5)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$.
• $W_5 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 - x_2 - x_3 = x_5 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$.
• $W_6 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2 + x_2 - x_3 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
• $W_7 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_1 + x_2 - x_3 = x_4 - 3x_5 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^5$.
• $W_8 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_2 = 0;\ x_3 + x_4 = -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
• $W_9 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = 2x_2 - x_3;\ x_4 = x_5 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
• $W_{10} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2 = x_2;\ x_3 + x_4 = 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(4) In $\mathbb{R}^3$, per ciascuno dei seguenti sistemi di vettori

$$S_1 = \{(1,0,1),(0,-1,0),(0,1,1),(0,2,-2)\}$$

$$S_2 = \{(1,0,2),(0,1,-1),(0,1,-1)\}$$

$$S_3 = \{(0,1,1),(-1,1,1)\}$$

$$S_4 = \{(2,2,2),(1,1,1)\}$$

$$S_5 = \{(2,-2,1),(4,4,1),(0,0,1)\}$$

$$S_6 = \{(2,2,3),(0,2,1),(-5,0,0)\}$$

$$S_7 = \{(1,0,0),(1,1,2),(-1,1,5)\}$$

$$S_8 = \{(1,1,0),(0,-2,0),(2,2,0),(2,0,0),(3,1,0)\}$$

stabilire, giustificando le risposte, se è linearmente dipendente o indipendente; se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$; se è una base di $\mathbb{R}^3$; se è possibile completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, esibirne una.

(5) In $\mathbb{R}^4$, per ciascuno dei seguenti sistemi di vettori

$$T_1 = \{(0,1,0,1),(2,0,-1,1),(-2,1,1,0)\}$$

$$T_2 = \{(1,0,0,2),(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$$

$$T_3 = \{(1,0,1,0),(1,0,1,-1)\}$$

$$T_4 = \{(-1,0,-2,1),(0,1,-1,0),(1,0,-3,0),(0,0,1,1)\}$$

$$T_5 = \{(1,0,1,0),(0,-2,0,2),(0,0,1,2),(1,0,0,5),(1,0,-1,-1),(0,0,0,1)\}$$

stabilire, giustificando le risposte, se è linearmente dipendente o indipendente; se è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$; se è una base di $\mathbb{R}^3$; se è possibile completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, esibirne una.

(6) Si provi che il sottoinsieme

$$\mathcal{S} = \{2-x, 1+x, x^2+x^3, 1-x+x^4, x^3\}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_4[x]$ dei polinomi di grado al più 4 è linearmente indipendente ed è un sistema di generatori per lo spazio stesso. Si scriva il polinomio $1+x^2$ come combinazione lineare dei polinomi di $\mathcal{S}$.
Infine, descrivere il sottospazio vettoriale generato dai vettori $2-x$ e $1+x$.

(7) Sia $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ un insieme di vettori di uno spazio vettoriale finitamente generato V e sia S un sistema di generatori per V contenente m vettori. Stabilire , motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.
- Se X è linearmente indipendente, allora $t > m$.
- Se $|X| = |S|$, allora X è linearmente indipendente.
- Se X è linearmente indipendente, allora contiene al più m vettori.

(8) Determinare la dimensione ed una base dei sottospazi

$$U = \langle (1,0,-1,0),\ (0,0,0,1),\ (1,0,-1,2) \rangle$$

e

$$V = \langle (1,1,2,1) \rangle$$

di $\mathbb{R}^4$ e scrivere le equazioni nella base naturale. Stabilire, inoltre, se U e V sono sommandi diretti e se sono supplementari.

(9) Si considerino gli spazi vettoriali

$$V = \langle (2,2,4,1,-1),\ (1,1,2,-1,1),\ (0,0,0,1,-1) \rangle$$

e

$$W = \langle (1,-2,2,0,2),\ (0,1,0,-1,-1) \rangle.$$

Si determinino:
• le equazioni che definiscono gli spazi V e W.
• la dimensione ed una base per V, W, $V \cap W$ e $V + W$.
• si completi la base di $V + W$, determinata al punto precedente, ad una base di tutto lo spazio.

(10) Sia V_4 uno spazio vettoriale 4-dimensionale. Stabilire, motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.
• Esistono due sottospazi U e W entrambi di dimensione 3 che si intersecano in un sottospazio 1-dimensionale.
• Se U e W sono due sottospazi distinti e non banali di V_4, entrambi di dimensione pari, allora la loro somma è un sottospazio di V_4 di dimensione 3.
• Esistono due sottospazi non banali U e W di V_4, uno di dimensione pari e l'altro di dimensione dispari, la cui somma sia un sottospazio di dimensione 3.

(11) Considerato lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2, sia U il sottospazio costituito dalle matrici A tali che $A = A^T$ (A^T è la matrice trasposta di A).
• Si determinino la dimensione ed una base di U.
• Si rappresenti U nella base naturale di $\mathbb{R}_{2,2}$.
• Si determini per quali valori del parametro reale k il vettore

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 2-k \\ 2(k+1) & -1 \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}_{2,2}$ appartiene a U e per quali valori di k il vettore A_k ha componenti $(1,1,2,-1)$ nella base ordinata

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

(12) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottoinsieme

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 - x_2 = x_3 + x_4\}.$$

Si provi che U è un sottospazio e se ne calcoli la dimensione ed una base. Inoltre, si determinino, se esistono,
• un sottospazio supplementare di U in $\mathbb{R}^4$;
• un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ che intersechi U in un sottospazio 1-dimensionale;
• un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^4$ che intersechi U in un sottospazio di dimensione 1;
• un sottospazio 3-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ che intersechi U nel solo vettore nullo.

(13) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio U di $\mathbb{R}_{2,3}$ rappresentato nel riferimento naturale dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_4 - x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

Determinare
• un sottospazio 2-dimensionale V tale che $V \subset U$;
• un sottospazio W di $\mathbb{R}_{2,3}$ tale che la dimensione di W sia 2 e la dimensione dell'intersezione $U \cap W$ sia 1;
• un sottospazio H di $\mathbb{R}_{2,3}$ tale che $dim H = 3$ e $dim(U \cap H) = 2$.

(14) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$ si considerino i seguenti insiemi:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \,:\, x + y - z = 0 \right\}.$$

Dimostrare le seguenti affermazioni:
• $\langle T \rangle \neq \langle S \rangle$;
• $\langle T \rangle \subseteq U$;
• $\langle S \rangle \not\subseteq U$.

(15) Considerata la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 1 & h \\ 0 & 2 & 0 & h^2 + 1 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ essa invertibile; ha rango 3; ha rango 2; ha rango 1.

(16) Determinare al variare del parametro reale h il rango delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & h \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h & 0 \\ h & 1 & 0 & 1 \\ -h & 0 & -1 & h \end{pmatrix}.$$

(17) Si provi che il sottoinsieme

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$ delle matrici quadrate di ordine 2 è linearmente indipendente ed è un sistema di generatori. Si scriva la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare delle matrici di $\mathcal{S}$.

(18) Considerati i seguenti sistemi di vettori in $\mathbb{R}_{2,2}$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

studiare i sottospazi $\langle \mathcal{S} \rangle$, $\langle \mathcal{T} \rangle$ determinandone la dimensione ed una base; completare, se possibile, i sistemi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ in basi di $\mathbb{R}_{2,2}$; determinare una base di $\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \rangle$.

(19) Sia assegnato il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{S} = \{(1,-1,0,-1),(0,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}.$$

Si estraggano da $\mathcal{S}$ i seguenti sottoinsiemi, motivando le risposte.
• Un sistema linearmente indipendente e di generatori per $\mathbb{R}^4$.
• Un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$ che non sia linearmente indipendente.
• Un sistema di vettori linearmente indipendenti che non sia un sistema di generatori.

(20) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x, siano

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-x) = p(x)\}$$

e

$$V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(-x) = -p(x)\}.$$

Si risponda vero o falso alle seguenti domande, motivando le risposte.
• U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$, ma V non lo è.

• $U \cap V$ è il polinomio nullo.
• $\mathbb{R}[x] = U \oplus V$
(*Suggerimento.* Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, tale polinomio si può allora scrivere come somma di un polinomio in cui figurano solo potenze pari e uno in cui figurano solo potenze dispari della incognita x).

(21) Si considerino i seguenti vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$:

$$f(x) = x^5 + 2x^6 - x^8, \quad g(x) = x^6 + 3x^8, \quad h(x) = 2x^5 + 5x^6 + x^8$$

$$k(x) = 2g(x) = 2x^6 + 6x^8.$$

Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivando la risposta).
• $2f(x) + g(x) - h(x)$ è il polinomio nullo.
• $f(x)$ e $h(x)$ sono linearmente dipendenti.
• Ciascuno dei vettori $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ può essere espresso come combinazione lineare degli altri due.
• $\{f(x),\, g(x),\, k(x)\}$ è un sistema linearmente indipendete.
• Ciascuno dei vettori $f(x), g(x)$ e $k(x)$ può essere espresso come combinazione lineare degli altri due.
• Il vettore $l(x) = 3k(x)$ può essere espresso in unico modo come combinazione lineare di $f(x), g(x)$ e $k(x)$.

(22) Sia assegnato l'insieme di vettori

$$\mathcal{S} = \{2 + x,\, -1 - x^2,\, x^4\}$$

dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_5[x]$.
• Si determini se S è linearmente indipendente o meno. È una base per $\mathbb{R}_5[x]$?
• Si verifichi se i vettori $x^3 - x^2 + 1$ e $1 + x^2$ dipendono o no dai vettori di S.
• Descrivere il sottospazio $\langle \bar{S} \rangle$ generato dagli elementi di

$$\bar{S} = \{1\} \cup (S \backslash \{2 + x\}),$$

determinarne una base ed un riferimento per il sottospazio $\langle \bar{S} \rangle$.
• Si scriva il vettore $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ di $\mathbb{R}_5[x]$ come combinazione lineare dei vettori di $\bar{S}$.

(23) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di vettori dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$.

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}; \quad U_2 = \{(x,\, x + 1,\, x + 2) \in \mathbb{R}^3\};$$

$$U_3 = \langle (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle; \quad U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1\}.$$

Si dica quale dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono (e non sono) sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, motivando le risposte.

(24) Considerati i riferimenti

$$\mathcal{R} = ((1,4,1),(1,5,0),(2,5,-1))$$

ed

$$\mathcal{R}' = ((1,0,-1),(0,2,1),(2,3,-2))$$

di $\mathbb{R}^3$, determiniamo le formule di passaggio da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$.

Soluzione Parziale

Poiché

$$(1,4,1) = (1,0,-1) + 2(0,2,1) + 0(2,3,-2)$$
$$(1,5,0) = -(1,0,-1) + (0,2,1) + (2,3,-2)$$
$$(2,5,-1) = 0(1,0,-1) + (0,2,1) + (2,3,-2),$$

le formule richieste sono

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_2 + x_3 \end{cases}$$

Note le componenti di un vettore di $\mathbb{R}^3$ nel riferimento $\mathcal{R}$, possiamo allora conoscere mediante le formule di passaggio, le componenti dello stesso vettore nel riferimento $\mathcal{R}'$. Ad esempio, le componenti in $\mathcal{R}'$ del vettore

$$(-3,2,7) = 3(1,4,1) + 2(1,5,0) - 4(2,5,-1)$$

sono

$$x_1' = 3-2 = 1, \quad x_2' = 6+2-4 = 4, \quad x_3' = 2-4 = -2;$$

è infatti

$$(-3,2,7) = 1(1,0,-1) + 4(0,2,1) - 2(2,3,-2).$$

(25) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente il vettore $v_1 = (1,0,2)$.

Soluzione Parziale

Un vettore che non dipende da v_1 , ad esempio, il vettore $(1,1,0)$. Il sottospazio

$$H = \langle (1,0,2),\ (1,1,0) \rangle$$

ha dimensione due e quindi non contiene tutti e tre i vettori della base naturale di $\mathbb{R}^3$. Si vede facilmente, ad esempio, che $(1,0,0) \notin H$; il sistema

$$\{(1,0,2),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

è dunque indipendente e costituisce quindi una base di $\mathbb{R}^3$.

(26) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente i vettori $(2,-1,0,0)$ e $(0,1,3,0)$.

Soluzione Parziale
Il sottospazio $H = \langle (2,-1,0,0),\ (0,1,3,0) \rangle$ ha dimensione due e quindi non contiene tutti e quattro i vettori della base naturale di $\mathbb{R}^4$. Si vede facilmente, ad esempio, che $(1,0,0,0) \notin H$. Il sistema

$$T = \{(2,-1,0,0),(0,1,3,0),(1,0,0,0)\}$$

è dunque indipendente. Il sottospazio $K = \langle T \rangle$ ha dimensione tre e pertanto non contiene tutti e quattro i vettori della base natural di $\mathbb{R}^4$. Il vettore $(0,0,0,1)$ non è in K e dunque il sistema

$$T \cup \{(0,0,0,1)\}$$

è indipendente, per cui esso è una base di $\mathbb{R}^4$.

(27) Determinare una base del sottospazio

$$H = \langle (1,0,1,2),(-1,2,3,0),(3,-2,1,4),(-2,4,6,0) \rangle$$

di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione Parziale
Poiché il vettore $(-2,4,6,0)$ dipende dai rimanenti (infatti

$$(-2,4,6,0) = 2(-1,2,3,0),$$

allora

$$H = \langle (1,0,1,2),(-1,2,3,0),(3,-2,-1,4) \rangle.$$

Poiché $(3,-2,-1,4)$ dipende dai vettori $(1,0,1,2)$ e $(-1,2,3,0)$ (infatti

$$(3,-2,-1,4) = 2(1,0,1,2) - (-1,2,3,0),$$

allora $H = \langle (1,0,1,2),\ (-1,2,3,0) \rangle$. I vettori

$$(1,0,1,2) \quad \text{e} \quad (-1,2,3,0),$$

che generano H, sono indipendenti e costituiscono perciò una base di H. Ne segue che $\dim H = 2$. Osserviamo che avendo H dimensione due, due qualsiasi vettori indipendenti appartenenti ad H ne costituiscono una base. Ne segue, as esempio, che anche i sistemi

$$\{(1,0,1,2),(3,-2,-1,4)\},$$

$$\{(1,0,1,2),(-2,4,6,0)\},$$

$$\{(-1,2,3,0),(3,-2,-1,4)\}$$

sono basi di H.

(28) Determinare una base del sottospazio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, \ \text{con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

di $\mathbb{R}_{2,2,}$.

Soluzione Parziale

Si può scrivere

$$\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni elemento di W è dunque combinazione lineare delle due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che, ovviamente appartengono a W. Ne segue che W coincide con il sottospazio generato da queste. Essendo inoltre le due matrici indipendenti, esse costituiscono una base di W.

(29) Determinare i pivot delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(30) Determinare una matrice a gradini equivalente alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(31) Determinare una matrice a gradini equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(32) Determinare se la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è invertibile ed in caso affermativo calcolarne l'inversa.

(33) Determinare, al variare del parametro reale h, il rango della matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & h^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Posto $h = 0$, calcolare, se esiste, l'inversa della matrice $A = A_0 A_0^T$.

(34) Stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, determinarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(35) Ridurre a gradini le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(36) Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 92 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 5 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

(37) Stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(38) Stabilire per quali valori del parametro reale k le seguenti matrici sono invertibili:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 0 & k^2 \\ 4 & k & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -k & 0 \\ 2k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & k^2 & k^3 \end{pmatrix}$$

(39) Si h un parametro reale e sia A_h la seguente matrice a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcoli il determinante di A_h, si dica per quali valori del parametro h la matrice A_h è invertibile e si determini l'inversa in tali casi.

(40) Si calcoli, al variare del parametro reale h, il rango della seguente matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & h^2 & 1 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(41) In $\mathbb{R}^4$, considerati i sottospazi

$$V = \{(x, y, z, t) \,:\, y + 3t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \,:\, x - 2z = 0;\ y + t = 0\}$$

studiare i sottospazi V, W, $V \cap W$ e $W + V$ determinandone la dimensione ed una base.

(42) Sia f l'applicazione che associa al vettore numerico $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ il vettore $(x + 2y + z,\ y + z) \in \mathbb{R}^2$.
• Verificare che f è lineare, determinare una base per il kernel di f e stabilire se f è iniettiva.
• Inoltre calcolare $f(3, 4, 5)$ e $f^{-1}(2, 1)$.
• Determinare la matrice associata ad f nel riferimento canonico e nel riferimento $((1, 1, 0),\ (1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

(43) Siano

$$U_1 = \langle (1, 0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 1, 1, -1),\ (1, 0, 1, 2, 0) \rangle,$$

$$U_2 = \langle (1, 0, 0, 0, 2),\ (3, 0, 0, 1, -1),\ (-5, 0, 0, 2, 2) \rangle,$$

$$U_3 = \langle (0, 0, 0, 1, 5),\ (0, -2, -1, 1, 0) \rangle$$

sottospazi di $\mathbb{R}^5$. Determinare la dimensione ed una base di U_1, U_2, U_3, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_3$, $U_2 \cap U_3$, $U_1 + U_2$, $U_1 + U_3$, $U_2 + U_3$.

(44) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$S = \{(0, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, -1, 5, 6)\},$$

$$T = \{(0, -3, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, y + 3t = x - 2y = z + t = 0\},$$

$$X = \{(0, -1, 1, 2), (0, 2, 3, 1)\}$$

e si determini, motivando le risposte, quali affermazioni seguenti sono vere e quali false:

$$\langle S\rangle \nsubseteq \langle X\rangle$$
$$\langle T\rangle = \langle X\rangle$$
$$\langle X\rangle = \langle S\rangle$$
$$\langle T\rangle \nsubseteq \langle X\rangle.$$

(45) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$S = \langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rangle$$

e

$$T = \langle \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \,:\, x + y = y + z - t = 0 \rangle.$$

Determinare la dimensione e una base di S, T, $S \cap T$ e $T + S$. Stabilire per quale valore di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} k-7 & 4 \\ -2 & -k+5 \end{pmatrix}$$

appartiene a $S \cap T$.

(46) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{2,2}$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$S = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$T = \langle \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2} \,:\, z + t = x = y = 0 \rangle.$$

Determinare dimensione e base di S e di W. Stabilire motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false: $T \neq S$; $S \neq W$; S e W sono supplementari in $\mathbb{R}_{2,2}$. Determinare dimensione e una base di $T \cap W$, $T + W$, $S \cap W$ e $S + W$. Stabilire infinite per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+3k & 2k-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

appartenga a $S \cap W$.

(47) Studiare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} hx + hz = h \\ hy = 1 \\ hx + hz = h - 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h.

(48) Si studino i seguenti sistemi lineari determinandone le soluzioni in caso di compatibilità.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y + 5z = -1 \\ x + y + z = -4 \\ 5x + 4y + 7z = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = -2 \\ 6x - 3y = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 1 \\ 3x + z = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z + t - w = -1 \\ 2x + y - 2t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \end{cases}$$

(49) Si studino i seguenti sistemi lineari al variare del parametro reale h, determinandone le soluzioni in caso di compatibilità.

$$\begin{cases} hx - y + t = 1 \\ y - z = 0 \\ x - z + t = 1 \\ hy = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + hy + z = h \\ x - hz = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} hx + y - hz = -2h \\ x - hy + z = -4h \\ hx + y + (h+1)z = 2h + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - hy + z = 0 \\ x + hz = 1 \\ hy - z = h \end{cases} \qquad \begin{cases} hx + y - z = h \\ (1-h)y - z = -h \\ hx + (2-h)y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z + t = 1 \\ x + h^2 y + z = h \\ hx + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hx + y = 2 \\ 2x + y = h \end{cases}$$

(50) Si studino i seguenti sistemi lineari determinandone le soluzioni in caso di compatibilità.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ x + 3y + z = 4 \\ 2x + 4y - 2z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2t = 2 \\ y + z - 6t = -1 \\ x + z - 3t = 2 \\ 2x + y + 2z - 7t = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 3x + 4z = -2t \\ t = 0 \\ 4x + y + 5z + 4t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-z=1 \\ 2x+z-t=1 \\ -x+y+t=0 \\ y-z+t=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x-z=0 \\ y-z=0 \\ 2x+y+z=-1 \\ x+2y-z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y+2z=-1 \\ -x+y-2z+t=1 \\ 2x-2y+4z=-2 \\ 2x-2y+4z+t=-2 \end{cases}$$

(51) Sia S un sistema lineare di 5 equazioni in 5 incognite. Stabilire, motivando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.
- S è sempre un sistema determinato.
- S può essere determinato qualche volta.
- S ha sempre infinite soluzioni.
- S è determinato se e solo se il rango della matrice incompleta è 5.

(52) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema è compatibile, determinandone in questi casi, le soluzioni.

$$\begin{cases} (k-1)z+k^2t=0 \\ -kx+2y+kt=1 \\ -ky+z=1 \end{cases}$$

Risolvere il precedente sistema lineare per $k=1$.

(53) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il seguente sistema è compatibile, determinandone in questi casi, le soluzioni.

$$\begin{cases} kx+z=k \\ -x+y+2kz=0 \\ x+z=0 \\ (k^2-1)y=k+1 \end{cases}$$

Stabilire, motivando la risposta, per quali valori di k l'insieme delle soluzioni del precedente sistema lineare è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Risolvere il precedente sistema lineare per $k=-1$.

(54) Data l'applicazione

$$f:(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mapsto (x+y, 2x+3z, 3x+y+3z)\in\mathbb{R}^3,$$

determinare se è suriettiva, iniettiva e se il vettore $(0,0,1)$ appartiene all'immagine di $\mathbb{R}^2$ tramite f. Scrivere inoltre la matrice associata ad f nel riferimento

$$\mathcal{R}'=((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)).$$

(55) Sia

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ rappresentato nel riferimento $\mathcal{R} = ((0,1),\,(1,1))$ dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Determinare $Im(f)$.

Soluzione Parziale
Dalla definizione di matrice associate ad f nel riferimento $\mathcal{R}$ segue che
$$f(0,1) = 1(0,1) + 3(1,1) = (3,4);$$
$$f(1,1) = 2(0,1) + 1(1,1) = (1,3).$$
Poiché risulta $Im(f) = f(\mathbb{R}^2) = f(\langle(1,0),(0,1)\rangle)$, segue anche (da una proposizione nota) che $\mathbb{R}^2 = \langle(3,4),(1,3)\rangle = Im(f)$.

(56) Per ognuna delle seguenti matrici:
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
• calcolare autovalori e autospazi;
• stabilire se sono diagonalizzabili e, in caso affermativo scrivere un riferimento dello spazio corrispondete costituito da autovettori, una matrice che le diagonalizza ed una matrice diagonale simile ad esse;
• (bonus)[1] stabilire se sono ortogonalmente diagonalizzabili e, in caso affermativo, scrivere: un riferimento ortonormale dello spazio corrispondente costituito da autovettori, una matrice che le diagonalizza ortogonalmente e una matrice diagonale simile (e congruente) ad esse.

(57) Stabilire per quali valori del parametro h la matrice
$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$
è diagonalizzabile. Trovare una base di autovettori per A_0.

(58) (bonus) Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ assegnati i vettori
$$\underline{u} = (k-2, k-1, 1)$$

[1] Gli esercizi classificati come *bonus* richiedono conoscenza di argomenti che è in dubbio se vengano affronti o meno al corso.

$$\underline{v} = (k-3, 1, 1)$$

e

$$\underline{w} = (-1, 1, 2-k)$$

si stabilisca:
• per quali valori del parametro reale k il vettore $\underline{w}$ appartiene a $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^{\perp}$;
• per quali valori del parametro reale k i vettori $\underline{w}$ e $\underline{v}$ formano un angolo pari a $\pi/4$;
• per quali valori del parametro reale k risulta $\underline{u} \wedge \underline{w} = (-1, 0, -1)$;
• per $k = 2$ determinare le equazioni rappresentative di $\langle u \rangle^{\perp}$ nella base natural di $\mathbb{R}^3$.

(59) Rappresentare (parametricamente e tramite singola equazione) la retta r passante per il punto $A(-2, 1)$ e parallela al vettore $\underline{v}(4, 3)$.

(60) Rappresentare (parametricamente e tramite singola equazione) la retta r per i punti $A(1, -2)$ e $B(0, 2)$.

(61) Assegnati i punti $A(1, 1)$, $B(2, 1)$ e $C(1, -1)$, determinare quante circonferenze passano per questi tre punti e rappresentarle.

Soluzione Parziale
Essendo $\overline{AB}(1, 0)$ non proporzionale a $\overline{AC}(0, -2)$, i punti non sono allineati e dunque possiamo trovare una sola circonferenza passante per essi. La circonferenza richiesta ha equazione del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, con a, b e c opportuni. Per determinare a, b e c, i impone che le coordinate dei punti A, B e C soddisfino tale equazione. Si ottiene in questo modo il sistema lineare nelle incognite a, b e c

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ 2a + b + c = -5 \\ a - b + c = -2 \end{cases}$$

esso è equivalente al sistema a gradini

$$\begin{cases} a + b + c = -2 \\ b + c = 1 \\ 2c = 2 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione la terna $(-3, 0, 1)$. Un'equazione della circonferenza richiesta è quindi $x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$.

(62) Rappresentare la retta r tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2 = 1$ nel punto $P(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Soluzione Parziale
La circonferenza assegnata ha centro nell'origine e raggio 1, per cui la retta

r è la retta per P ortogonale al vettore $\overline{OP}(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Si ha quindi che r è rappresentata dal sistema parametrico

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}/2 - t \\ y = \sqrt{2}/2 + t \end{cases}$$

o, equivalentemente, dall'equazione $x + y - \sqrt{2} = 0$.

(63) Rappresentare la retta r' per il punto $A(5, 1, -3)$ parallela alla retta

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Soluzione Parziale
Possiamo scegliere come numeri direttori di r' la terna $(1, 2, -1)$ di numeri direttori di r. Una rappresentazione parametrica di r' è allora

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

(64) Considerata la retta r rappresentata da

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} ,$$

determinare due rette per l'origine ortogonali ad r.

Soluzione Parziale
Poiché $(-3, 0, 1)$ è una terna di numeri direttori di r, allora una retta avente come numeri direttori (l, m, n) è ortogonale ad r se e solo se $(l, m, n) \cdot (-3, 0, 1) = 0$, ovvero $-3l + n = 0$. Ad esempio,

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 6t \end{cases}$$

sono due rette distinte per O entrambe ortogonali ad r.

(65) Determinare la distanza del punto $A(1,2,0)$ della retta r rappresentata dalle equazioni

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 4x - z + 9 = 0 \end{cases}$$

Nome e Cognome (leggibili):

Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra

Prova scritta 27-06-2022

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Fornire un esempio di applicazione lineare f tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle (1,0,1) \rangle$.

Esercizio 2 (5 punti)

Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Si consideri il seguente sistema omogeneo di 3 equazioni indipendenti in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

Per questo genere di sistemi si è studiato un metodo particolare di risoluzione. Quale? e quali sono allora le soluzioni?

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $2x + 3y + 1 = 0$ una retta del piano. Rappresentarla in forma parametrica e trovare l'equazione di una retta perpendicolare passante per il punto $(1, 0)$.

Esercizio 5 (6 punti)

Sia λ un parametro reale. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\lambda x^2 + y, \lambda z, (\lambda^2 + 1)y) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare per quali valori di λ la funzione è 1) lineare; 2) iniettiva; 3) suriettiva.

Esercizio 6 (5 punti)

Determinare una base per $\langle (1,2,3),(0,0,1)\rangle \cap \langle (0,1,0),(8,8,8)\rangle$

Esercizio 7 (3 punti)

Dimostrare la formula per le coordinate del punto medio del segmento nel piano. Dare la definizione di distanza tra insiemi nel piano.

Nome e Cognome (leggibili):

Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 18-07-2022)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Cosa vuol dire matrici simili? Dimostrare che la similitudine è una relazione d'equivalenza. Le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

sono simili?

Esercizio 2 (5 punti)

Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$:

(1) $\{a^2x^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a^2 - b^2)x^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{(a^2 - b^2)x^2 + cx + d \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $2x + 3y + 2z = 0$ una piano dello spazio. Rappresentarlo in forma parametrica e trovare la forma parametrica di una retta perpendicolare passante per il punto $(1, 0, 0)$.

Esercizio 5 (6 punti)

Sia λ un parametro reale. Si consideri la seguente applicazione lineare:

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (y, \lambda z + \lambda, (\lambda^2 + 1)y) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinare per quali valori di λ la funzione è lineare.

Esercizio 6 (5 punti)

Dimostrare che due autovettori di autovalore distinti formano un sistema indipendente.

Esercizio 7 (3 punti)

Definire il prodotto vettoriale e dimostrare che esso è 0 se e solo se i vettori sono paralleli.

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 12-09-2022)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Dare la definizione di determinante. Per quale valore del parametro t la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & t & 1 & 5 \\ t & 2 & 0 & 0 \\ t+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & t & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante 0?

Esercizio 2 (5 punti)

Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$:

(1) $\{a^2x^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a^2 - b^2)x^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{(a^2 - b^2)x^2 + cx + d \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $2x + 3y + 2z = 0$ una piano dello spazio. Rappresentarlo in forma parametrica e trovare la forma parametrica di una retta perpendicolare passante per il punto $(1, 0, 0)$.

Esercizio 5 (6 punti)

Dare la definizione di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Quali sono le formule di passaggio tra due sistemi di riferimento ortogonali monometrici (dimostrare)?

Esercizio 6 (5 punti)

Cos'è un autospazio? Autospazi relativi ad autovalori distinti sono in somma diretta? (se sì, dimostrare, altrimenti controesempio)

Esercizio 7 (3 punti)

Definire il prodotto vettoriale, il prodotto scalare e dare la definizione di distanza tra insiemi nello spazio.

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 17-10-2022)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Dare la definizione di determinante. Per quale valore del parametro t la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ t & 2 & 0 & 0 \\ t^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & t & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

Esercizio 2 (5 punti)

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qual è il kernel della funzione F_A?

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$:

(1) $\{a^2x^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a^2 - b^2)x^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{(a^2 - b^2)x^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $2x + 3y + 2z = 0$ una piano dello spazio. Rappresentarlo in forma parametrica e trovare la forma parametrica di una retta perpendicolare passante per il punto $(1, 0, 0)$.

Esercizio 5 (6 punti)

Dare la definizione di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Quali sono le formule di passaggio tra due sistemi di riferimento ortogonali monometrici (dimostrare)?

Esercizio 6 (5 punti)

Dare la definizione di molteplicità geometrica. Che rapporto c'è con la molteplicità algebrica? (dimostrare)

Esercizio 7 (3 punti)

Come si ottengono le formule di passaggio da un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico ad un altro?

Nome e Cognome (leggibili):

Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 23-01-2023)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Dare la definizione di determinante. Per quale valore del parametro t la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ t^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & t & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

Esercizio 2 (5 punti)

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quali sono dominio e codominio della funzione F_A? La funzione F_A è iniettiva? suriettiva?

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$, che dimensione hanno nel caso lo fossero?

(1) $\{(a^2+b)x+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a^2-b^2)x^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{(a^2-b^2)x^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $2x + 3y + 2z = 1$ una piano dello spazio. Rappresentarlo in forma parametrica e trovare la forma parametrica di una retta perpendicolare passante per il punto $(1, 0, 0)$.

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ punti dello spazio. Determinare il luogo geometrico dei punti equidistanti da questi due.

Esercizio 6 (5 punti)

Un endomorfismo è diagonalizzabile se è solo se ammette una base di autovettori (dimostrare)

Esercizio 7 (3 punti)

Come si ottengono le formule di passaggio da un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico ad un altro?

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 17-02-2023)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Per quale valore del parametro λ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

Esercizio 2 (5 punti)

Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra i due spazi vettoriali arbitrari V e W. Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ rispettivamente un riferimento di V e di W. Cos'è la matrice associata ad f nei riferimenti $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$? Fare un esempio concreto di una funzione f per cui $V = \mathcal{R}$ e $W = \mathcal{R}^2$ (scegliere due riferimenti diversi da quelli canonici e calcolare la matrice associata).

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$, che dimensione hanno nel caso lo fossero?

(1) $\{(a^2+b+c)x+c \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a^2-b^2)x^2+bx+c \,|\, a,b,c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{(a^2-b^2)x^2+cx+d \,|\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Siano $2x + 3y + 2z = 1$ e $2x + 3y + z = 0$ due piani dello spazio. Qual è la loro intersezione (descriverla in forma parametrica)?

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ punti dello spazio. Determinare due rette distinti perpendicolari alla retta passante per i punti A e B.

Esercizio 6 (5 punti)

Se un endomorfismo ammette tutti autovalori reali e distinti allora è diagonalizzabile. Se la precedente affermazione è vera dimostrarla, altrimenti fornire un controesempio.

Esercizio 7 (3 punti)

Come si ottengono le formule di passaggio da un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico ad un altro?

Nome e Cognome (leggibili):

Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 20-03-2023)

Prof. Marco Trombetti

- Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
- NON STACCARE I FOGLI.
- NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Per quale valore del parametro λ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

Esercizio 2 (5 punti)

Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare tra i due spazi vettoriali arbitrari V e W. Siano $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ rispettivamente un riferimento di V e di W. Cos'è la matrice associata ad f nei riferimenti $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$? Se la matrice associata presenta una riga tutta nulla, cosa possiamo affermare riguardo l'iniettività o suriettività della funzione?.

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$, che dimensione hanno nel caso lo fossero?

(1) $\{(a^2+b+c^2)x+c^2-a^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a^2-b^2)x^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{(a^2-b^2)x^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $\pi : 2x + 3y + 2z = 1$ un piano e $r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1/2 - 1t \end{cases}$ una retta. Qual è la loro intersezione?

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ punti dello spazio. Determinare tre rette distinte perpendicolari alla retta passante per i punti A e B.

Esercizio 6 (5 punti)

Se un endomorfismo ammette tutti autovalori reali e distinti allora è diagonalizzabile. Se la precedente affermazione è vera dimostrarla, altrimenti fornire un controesempio.

Esercizio 7 (3 punti)

Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. $dim\big(f(V)\big) + dim(Ker(f)) = ?$ (dimostrare).

Nome e Cognome (leggibili):

Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 26-06-2023)

Prof. Marco Trombetti

- Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
- NON STACCARE I FOGLI.
- NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Per quale valore del parametro λ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^2+2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

Esercizio 2 (5 punti)

Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando (solo ed esclusivamente) la formula con i minori a segno alterno:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + t = 0 \\ 2x + 6y + z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3 (3 punti)

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$, che dimensione hanno nel caso lo fossero?

(1) $\{a^3x + c^2 - a^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (2) $\{(a-b)x^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$; (3) $\{a^3x^2 + b^6x + c^7 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $\pi : 2x + 3y + 1z = 1$ un piano e $r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1/2 - 1t \end{cases}$ una retta. Qual è la loro intersezione? Scrivere la retta r in forma ordinaria.

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$ punti dello spazio. Determinare tre rette distinte perpendicolari alla retta passante per i punti A e B.

Esercizio 6 (5 punti)

Determinare 4 sottospazi di $\mathbb{R}^2$ ad intersezione triviale a due a due. Fannno prodotto diretto?

Esercizio 7 (3 punti)

Sia $f : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare. $dim\big(f(V)\big) + dim(Ker(f)) = ?$ (dimostrare).

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 24-07-2023)

Prof. Marco Trombetti

- Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
- NON STACCARE I FOGLI.
- NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Per quali valori del parametro λ, l'endomorfismo

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x - z, \lambda^2 + 2 + y, \lambda y, \lambda x + \lambda y + \lambda z + t) \in \mathbb{R}^4$$

è diagonalizzabile?

Esercizio 2 (5 punti)

Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando (solo ed esclusivamente) il metodo del sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + t = 1 \\ 2x + 6y + z + t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases}$$

Esercizio 3 (3 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un endomorfismo. Fornire un esempio di un autovettore di f.

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $\pi : 2x + 3y + 1z = 1$ un piano e $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1/2 - 1t \end{cases}$ una retta. Qual è la loro intersezione? Scrivere la retta r in forma ordinaria.

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$ punti dello spazio. Determinare l'equazione del luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B.

Esercizio 6 (5 punti)

Qual è la dimensione della somma diretta di due sottospazi? Dimostrare la formula.

Esercizio 7 (3 punti)

La matrice di passaggio è invertibile? Se sì dimostrare, altrimenti fornire un controesempio.