Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 24-07-2023)

Prof. Marco Trombetti

- Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
- NON STACCARE I FOGLI.
- NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Calcolare il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & 3 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ al variare del parametro λ.

Esercizio 2 (5 punti)

Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando (solo ed esclusivamente) il metodo del sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + t = 1 \\ 2x + 6y + z + t = 2 \\ x + y + z + t = 3 \end{cases}$$

Esercizio 3 (3 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un endomorfismo. La funzione f è diagonalizzabile? Quali sono i suoi autovettori?

Esercizio 4 (4 punti)

Siano $r: \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1/2 - 1t \end{cases}$ e $r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1/2 - 1t \end{cases}$ rette. Qual è la loro intersezione?

Esercizio 5 (6 punti)

Siano $A = (1, 0, 0)$ e $B = (1, 1, 1)$ punti dello spazio. Determinare l'equazione del luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B.

Esercizio 6 (5 punti)

Sia V spazio vettoriale finitamente generato. Dimostrare che $W = V$ se e solo $\dim(W) = \dim(V)$

Esercizio 7 (3 punti)

La matrice di passaggio è invertibile? Se sì dimostrare, altrimenti fornire un controesempio.

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 23-10-2023)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Fornire un esempio di applicazione lineare f tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

Esercizio 2 (5 punti)

Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando (solo ed esclusivamente) il metodo del sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z + t = 1 \\ 2x + 5y + z + 2t = 2 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 (3 punti)

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qual è il kernel della funzione F_A?

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $\pi : \begin{cases} x = 2t + s \\ y = 1 + 5t + 2s \\ z = 1/2 - 1t + s \end{cases}$ un piano e $r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1/2 - 1t \end{cases}$ una retta. Qual è la loro intersezione? Scrivere la retta r e il piano π in forma ordinaria.

Esercizio 5 (6 punti)

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo lineare avente 3 e 4 come unici autovalori. Sapendo che f è diagonalizzabile e che $\dim(V) = 3$ determinare le possibili molteplicità algebriche e geometriche di 3 e 4.

Esercizio 6 (5 punti)

Qual è la dimensione della somma diretta di due sottospazi? Dimostrare la formula.

Esercizio 7 (3 punti)

Sia $f : V \to W$ un isomorfismo lineare. Dimostrare che f^{-1} è a sua volta un isomorfismo lineare.

Nome e Cognome (leggibili):

Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 22-01-2024)

Prof. Marco Trombetti

• Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
• NON STACCARE I FOGLI.
• NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Dare la definizione di sottospazio generato da un insieme di vettori e dimostrare la caratterizzazione in termini di combinazioni lineari.

Esercizio 2 (5 punti)

Risolvere il seguente sistema lineare utilizzando (solo ed esclusivamente) il metodo del sistema omogeneo associato:

$$\begin{cases} 2x + y + 5z + t = 1 \\ 2x + 5y + z + 2t = 2 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 (3 punti)

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Descrivere $Im(F_A)$.

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $\pi : \begin{cases} x = 2t + 3s \\ y = 1 + 5t + 3s \\ z = 1/2 - 1t + s \end{cases}$ un piano e $r : \begin{cases} x = 4 + r \\ y = 1 + r \\ z = 1/2 - 1r \end{cases}$ una retta. Qual è la loro intersezione? Scrivere la retta r e il piano π in forma ordinaria.

Esercizio 5 (6 punti)

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e siano $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ due riferimenti di V. Dimostrare che le matrici associate a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ sono simili.

Esercizio 6 (5 punti)

Qual è la dimensione della somma diretta di due sottospazi? Dimostrare la formula.

Esercizio 7 (3 punti)

Sia

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y + \lambda, y - z, z - x) \in \mathbb{R}^3.$$

Per che valori di λ, la funzione f è un endomorfismo? Per quali valori è iniettiva (possibilmente anche non un endomorfismo)?

Nome e Cognome (leggibili):
Matricola: Punteggio: ______ /32

Geometria e Algebra (Prova scritta 19-02-2024)

Prof. Marco Trombetti

- Rispondere in maniera **esaustiva** alle seguenti domande riportando nelle apposite sezioni vuote il **procedimento** utilizzato nella forma più precisa e meticolosa possibile.
- NON STACCARE I FOGLI.
- NON SI ACCETTANO RISPOSTE SU ALTRI FOGLI.

Esercizio 1 (6 punti)

Dare la definizione di sottospazio generato da un insieme di vettori e dimostrare la caratterizzazione in termini di combinazioni lineari.

Esercizio 2 (5 punti)

Dimostrare che:

- gli autospazi sono sottospazi vettoriali
- se l'equazione caratteristica di un endomorfismo f ammette tutte le radici reali e distinte, allora f è diagonalizzabile
- che il viceversa del punto precedente non vale

Esercizio 3 (3 punti)

Determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base per $Ker(F_A)$.

Esercizio 4 (4 punti)

Sia $\pi : \begin{cases} x = 2t + 3s \\ y = 1 + 5t + 3s \\ z = 1/2 - 1t + s \end{cases}$ un piano e $r : \begin{cases} x = 4 + r \\ y = 1 + r \\ z = 1/2 - 1r \end{cases}$ una retta. Qual è la loro intersezione? Trovare una retta passante per l'intersezione e perpendicolare al piano.

Esercizio 5 (6 punti)

Dimostrare la rappresentazione parametrica e ordinaria della retta (compreso di viceversa, cioè che se ho un sistema di equazioni... allora questo rappresenta una retta).

Esercizio 6 (5 punti)

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo iniettivo. Dare la definizione di funzione iniettiva e dimostrare che f conserva l'indipendenza lineare.
