PROVA MATEMATICA II

Esercizio 1. Data la matrice
$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
se ne calcoli il determinante e la matrice inversa. Si calcolino infine le soluzioni del sistema lineare
$$\mathtt{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Abbiamo che
$$\det(\mathtt{A}) = -(-3+2) = 1$$
e
$$\mathtt{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
La soluzione del sistema è quindi data da
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Si calcoli il polionomio di Taylor grado 3 e centro il punto $x = 0$ della funzione
$$f(x) = (x + \cos x)^2.$$

Soluzione. Abbiamo che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, e quindi
$$f(x) = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 = 1 + x^2 + 2x - x^2 - x^3 + o(x^3) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3).$$

Alternativamente si possono calcolare le derivate di f:
$$f(x) = (x + \cos x)^2$$
$$f'(x) = 2(x + \cos x)(1 - \sin x)$$
$$f''(x) = 2(1 - \sin x)^2 - 2(x + \cos x)\cos x$$
$$f'''(x) = -4(1 - \sin x)\cos x - 2(1 - \sin x)\cos x + 2(x + \cos x)\sin x,$$
da cui
$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 2, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -6$$
e quindi
$$f(x) = 1 + 2x - \frac{6}{3!}x^3 + o(x^3) = 1 + 2x - x^3 + o(x^3).$$

Data: 8 marzo 2023.

Esercizio 3. Trovare la soluzione generale del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = x\,\mathrm{e}^{2x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione omogena associata è $y'' - 4y = 0$, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = \pm 2$. La soluzione generale dell'omogena associata è quindi

$$y_{\mathrm{om}}(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} + \beta\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omeogena della forma

$$\bar{y}(x) = (ax^2 + bx)\,\mathrm{e}^{2x}$$

(dobbiamo mettere un polinomio di secondo grado in quanto e^{2x} è soluzione dell'omogena associata.) Otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= \big(2ax^2 + 2(a+b)x + b\big)\,\mathrm{e}^{2x} \\ \bar{y}''(x) &= \big(4ax^2 + 4(2a+b)x + 2(a+2b)\big)\,\mathrm{e}^{2x} \\ \bar{y}''(x) - 4\bar{y}(x) &= (8ax + 2(a+2b))\,\mathrm{e}^{2x}\,. \end{aligned}$$

Affinché $\bar{y}$ sia soluzione deve quindi valere che

$$\begin{cases} 8a = 1 \\ 2(a+2b) = 0 \end{cases}$$

da cui troviamo che

$$a = \frac{1}{8}, \qquad b = -\frac{1}{16}$$

e la soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{16}(2x^2 - x)\,\mathrm{e}^{2x}$$

e la soluzione generale della non omogenea è

$$y(x) = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} + \beta\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{16}(2x^2 - x)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali troviamo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - 2\beta = \frac{17}{16} \end{cases}$$

da cui segue che $\alpha = \frac{49}{64}$ e $\beta = \frac{15}{64}$ e al soluzine cercata è

$$y(x) = \frac{49}{64}\,\mathrm{e}^{2x} + \frac{15}{64}\,\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{16}(2x^2 - x)\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Esercizio 4. Determinare i punti critici di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

e precisarne la natura (massimi, minimi, selle).

Soluzione. Imponiamo l'annullarsi delle derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 0.$$

Sommando le due equazioni troviamo che $4x^3+4y^3=0$, e quindi $x^3=-y^3$ e ancora $x=-y$. Sostituiamo nella prima equazione. Troviamo $x^3-2x=0$. Quindi $x=0$ oppure $x^2=2$. Ne deduciamo che i punti critici sono

$$P_1=(0,0),\ P_2=(\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ P_3=(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Per determinarne la natura calcoliamo la la matrice Hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2-4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2-4.$$

e quindi

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix},$$

Otteniamo che

$$H(f)(P_1) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad H(f)(P_{2,3}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix},$$

e quindi i punti $P_{2,3}$ sono punti di minimo (assoluto e relativo), mentre poiché $\det H(f)(P_1)=0$ nulla possiamo dire con queste informazini sul carattere di P_1 (si può in mostrare che non è un massimo e non è un minimo locale: basta osservare che $f(t,t)=2t^4>f(0,0)$ per ogni $t\neq 0$ mentre $f(t,-t)=2t^4-8t^2<0$ per ogni $t\in(-2,2)\setminus\{0\}$).

Esercizio 5. Sia f la funzione $f(x,y)=x^2+y$ e $\mathcal{D}$ la parte di corona circolare delimitata dalle circonferenze $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$ e dalle rette $y=x$ e $y=-x$. Si rappresenti la regione $\mathcal{D}$ e si calcoli l'integrale $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$.

Soluzione. La regione $\mathcal{D}$ è la porzione di corona circolare rappresentata in figura 1.

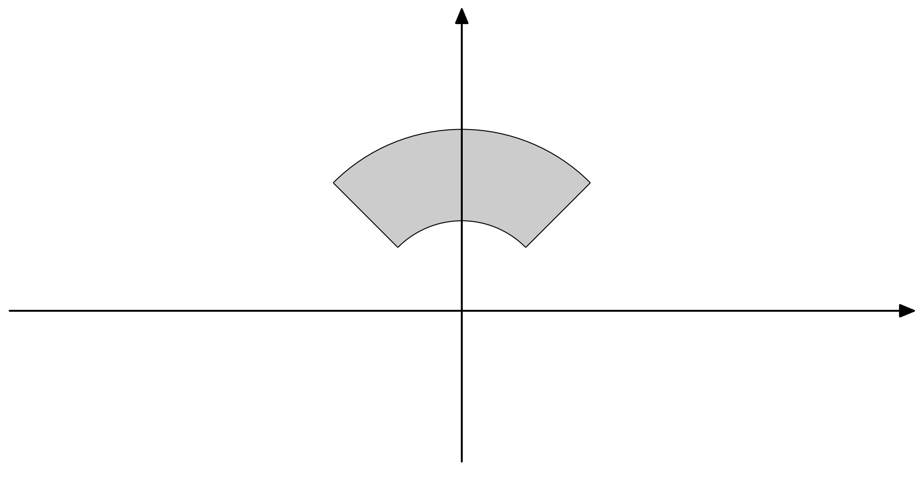

FIGURA 1. La regione $\mathcal{D}$

Il più semplice per calcolare l'integrale è passare a coordinate polari. Otteniamo che $\mathcal{D} = \left\{ (,\theta) \;\middle|\; 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \right\}$ e quindi

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_1^2 \left(\rho^2 \cos^2\theta + \rho\sin\theta\right)\,\rho\,d\rho \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{\rho^4}{4}\cos^2\theta + \frac{\rho^3}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\
&= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\frac{15}{4}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \frac{7}{3}\sin\theta\right) d\theta \\
&= \left(\frac{15}{8}\theta + \frac{15}{16}\sin 2\theta - \frac{7}{3}\cos\theta\right)\Bigg|_{\theta=\pi/4}^{\theta=3\pi/4} \\
&= \frac{15}{16}\pi + \frac{7}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

PROVA MATEMATICA II

Nome .... Cognome ....

Istruzioni: Scrivere in **stampatello e in modo leggibile** nome, cognome qui e su tutti i fogli, e consegnare questa traccia insieme a tutti i fogli distribuiti.

Nei fogli (non sulla traccia) dovranno essere indicati **chiaramente i risultati e i procedimenti** seguiti. I soli risultati senza i dettagli dei procedimenti seguiti **non saranno valutati**.

Nella valutazione si terrà conto anche della chiarezza nella presentazione.

Esercizio 1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 1 & -7 & 1 \\ -1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

se ne calcoli il determinante e la matrice inversa. Trovare infine un autovettore relativa all'autovalore $\lambda = -4$.

Esercizio 2. Si determini il polinomio di McLaurin (cioè di Taylor con centro 0) di grado 4 della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Se determini poi l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

Esercizio 3. Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare i punti critici di

$$f(x, y) = x^3 + xy + y^2 + x^2$$

e precisarne la natura (massimi, minimi, selle).

Esercizio 5. Sia f la funzione $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ e

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 0 \right\}.$$

Si rappresenti la regione $\mathcal{D}$ e si calcoli l'integrale $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy$.

Data: 20 giugno 2023.