SOLUZIONI

- $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 720 = 5'040.$
  $8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5040 = 40'320.$

$$\frac{16!}{14!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot \cancel{14!}}{\cancel{14!}} = 240.$$

$$\frac{8!}{10!} = \frac{1 \cdot \cancel{8!}}{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}} = \frac{1}{90} = 0,0\bar{1}.$$

- $$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{1 \cdot \cancel{n!}} = (n+2)(n+1)$$
  $$= n^2 + 3n + 2.$$

$$\frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{1 \cdot \cancel{(n-1)!}}{(n+2)(n+1)\,n\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} = \frac{(n-r+1)(n-r)\cancel{(n-r-1)!}}{\cancel{(n-r-1)!}}$$
$$= (n-r)(n-r+1).$$

TABLE 19 FACTORIAL n

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

n	$n!$
0	1 (by definition)
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40,320
9	362,880
10	3,628,800
11	39,916,800
12	479,001,600
13	6,227,020,800
14	87,178,291,200
15	1,307,674,368,000
16	20,922,789,888,000
17	355,687,428,096,000
18	6,402,373,705,728,000
19	121,645,100,408,832,000
20	2,432,902,008,176,640,000
21	51,090,942,171,709,440,000
22	1,124,000,727,777,607,680,000
23	25,852,016,738,884,976,640,000
24	620,448,401,733,239,439,360,000
25	15,511,210,043,330,985,984,000,000
26	403,291,461,126,605,635,584,000,000
27	10,888,869,450,418,352,160,768,000,000
28	304,888,344,611,713,860,501,504,000,000
29	8,841,761,993,739,701,954,543,616,000,000
30	265,252,859,812,191,058,636,308,480,000,000
31	8.22284×10^{33}
32	2.63131×10^{35}
33	8.68332×10^{36}
34	2.95233×10^{38}
35	1.03331×10^{40}
36	3.71993×10^{41}
37	1.37638×10^{43}
38	5.23023×10^{44}
39	2.03979×10^{46}
40	8.15915×10^{47}
41	3.34525×10^{49}
42	1.40501×10^{51}
43	6.04153×10^{52}
44	2.65827×10^{54}
45	1.19622×10^{56}
46	5.50262×10^{57}
47	2.58623×10^{59}
48	1.24139×10^{61}
49	6.08282×10^{62}
50	3.04141×10^{64}
51	1.55112×10^{66}
52	8.06582×10^{67}
53	4.27488×10^{69}
54	2.30844×10^{71}
55	1.26964×10^{73}
56	7.10999×10^{74}
57	4.05269×10^{76}
58	2.35056×10^{78}
59	1.38683×10^{80}
60	8.32099×10^{81}
61	5.07580×10^{83}
62	3.14700×10^{85}
63	1.98261×10^{87}
64	1.26887×10^{89}
65	8.24765×10^{90}
66	5.44345×10^{92}
67	3.64711×10^{94}
68	2.48004×10^{96}
69	1.71122×10^{98}
70	1.19786×10^{100}
71	8.50479×10^{101}
72	6.12345×10^{103}
73	4.47012×10^{105}
74	3.30789×10^{107}
75	2.48091×10^{109}
76	1.88549×10^{111}
77	1.45183×10^{113}
78	1.13243×10^{115}
79	8.94618×10^{116}
80	7.15695×10^{118}
81	5.79713×10^{120}
82	4.75364×10^{122}
83	3.94552×10^{124}
84	3.31424×10^{126}
85	2.81710×10^{128}
86	2.42271×10^{130}
87	2.10776×10^{132}
88	1.85483×10^{134}
89	1.65080×10^{136}
90	1.48572×10^{138}
91	1.35200×10^{140}
92	1.24384×10^{142}
93	1.15677×10^{144}
94	1.08737×10^{146}
95	1.03300×10^{148}
96	9.91678×10^{149}
97	9.61928×10^{151}
98	9.42689×10^{153}
99	9.33262×10^{155}
100	9.33262×10^{157}

SOLUZIONI

- $$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\,13!} = \frac{16\cdot \overset{5}{\cancel{15}}\cdot \overset{7}{\cancel{14}}\cdot \cancel{13!}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1\ \cancel{13!}} = 560.$$

$$\binom{16}{13} = \frac{16!}{13!\,3!} = \frac{16!}{3!\,13!} = 560.$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\,8!} = \frac{\overset{1}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot \underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1\ \cancel{8!}} = 495.$$

$$\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!\,4!} = \frac{12!}{4!\,8!} = 495.$$

- $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

- $$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7\cdot \overset{1}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot \overset{1}{\cancel{4!}}}{\underset{1}{\cancel{6}}\cdot \underset{1}{\cancel{4!}}} = 35.$$

$$\left.\begin{array}{l} \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{6}\cdot \cancel{3!}} = 20 \\ \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot \overset{1}{\cancel{4!}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\ \underset{1}{\cancel{4!}}} = 15 \end{array}\right] + \; = 35.$$

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{\overset{1}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \overset{2}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot \underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot \cancel{4!}} = 70.$$

$$\left.\begin{array}{l} \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\cdot \overset{1}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot \overset{1}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3!}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot \underset{1}{\cancel{3}}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot \cancel{3!}} = 35 \\ \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35 \end{array}\right] + \; = 70.$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,[n-(k-1)]!}$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k)!\,(n-k+1)}+\frac{n!\,k}{(k-1)!\,k\,(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}+\frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!\,(n-k+1)+n!\,k}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!\,[(n-k+1)+k]}{k!\,(n-k+1)!}=\frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$=\binom{n+1}{k}.$$

SOLUZIONI

- $$(2x+y^2)^5 = \sum_{K=0}^{5} \binom{5}{K} (2x)^K (y^2)^{5-K}$$

$$= \binom{5}{0}(2x)^0(y^2)^5 + \binom{5}{1}(2x)^1(y^2)^4 + \binom{5}{2}(2x)^2(y^2)^3 +$$

$$+ \binom{5}{3}(2x)^3(y^2)^2 + \binom{5}{4}(2x)^4(y^2)^1 + \binom{5}{5}(2x)^5(y^2)^0$$

$$= y^{10} + 10xy^8 + 40x^2y^6 + 80x^3y^4 + 80x^4y^2 + 32x^5.$$

$$(x^2-2y)^6 = \sum_{K=0}^{6} \binom{6}{K} (x^2)^K (-2y)^{6-K}$$

$$= \binom{6}{0}(x^2)^0(-2y)^6 + \binom{6}{1}(x^2)^1(-2y)^5 + \binom{6}{2}(x^2)^2(-2y)^4 + \binom{6}{3}(x^2)^3(-2y)^3$$

$$+ \binom{6}{4}(x^2)^4(-2y)^2 + \binom{6}{5}(x^2)^5(-2y)^1 + \binom{6}{6}(x^2)^6(-2y)^0$$

$$= 64y^6 - 192x^2y^5 + 240x^4y^4 - 160x^6y^3 + 60x^8y^2 +$$
$$-12x^{10}y + x^{12}.$$

- $$\sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} 1^K \, 1^{n-K} = (1+1)^n = 2^n$$

- $$\sum_{K=0}^{n} (-1)^K \binom{n}{K} = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} (-1)^K 1^{n-K} = (-1+1)^n = 0.$$

SOLUZIONI

- $\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3!}}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3!}} = 60.$

$\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4!\,3!\,1!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{6}\cdot 1\,\cancel{4!}} = 280.$

$\binom{10}{5,3,2,2}$ non ha significato

$\binom{8}{4,4,1}$ non ha significato

- $\binom{7}{5,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot \cancel{5!}}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{5!}} = 21.$

$\binom{8}{7,1} = \frac{8!}{7!\,1!} = \frac{8\cdot \cancel{7!}}{1\cdot \cancel{7!}} = 8.$

$\binom{9}{3,6} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{\cancel{9}^{3}\cdot \cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{1\cancel{6}\cdot \cancel{6!}} = 84.$

$\binom{10}{8,2} = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{\cancel{10}^{5}\cdot 9\cdot \cancel{8!}}{\cancel{2}_{1}\cdot \cancel{8!}} = 45.$

- $\binom{n}{k,\,n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$

SOLUZIONI

a a	b a	c a
a b	b b	c b
a c	b c	c c

a a a	b a a	a
a a b	b a b	c a b
a a c	b a c	c a c
a b a	b b a	c b a
a b b	b b b	c b b
a b c	b b c	c b c
a c a	b c a	c c a
a c b	b c b	c c b
a c c	b c c	c c c

- $D^{(r)}_{3;2} = 3^2 = 9$; $D^{(r)}_{3;3} = 3^3 = 27.$

- $D^{(r)}_{3;14} = 3^{14} = 4'782'969.$

- $D^{(r)}_{10;6} = 10^6 = 1'000'000.$

- Il primo elemento della K-selezione può essere scelto in n modi, il secondo elemento della K-selezione può essere scelto in n modi e così via fino al K-uno elemento. Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio si ha:

$$D^{(r)}_{n;k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{-volte}} = n^k.$$

SOLUZIONI

- ab ba ca | abc bac cab
  ac bc cb | acb bca cba

- $D_{3;2} = 3 \cdot 2 = 6$; $D_{3;3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

- $D_{8;3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

- $$(n-k)\, D_{n;k} = (n-k) \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!\,(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-1-k)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}$$
$$= n\, D_{n-1;k}.$$

- $D_{x+1;3} = 8\, D_{x;2} \iff (x+1)(x)(x-1) = 8\,x\,(x-1)$

$\iff x = 0$ oppure $x = 1$ oppure $x+1 = 8$

da scartare   da scartare

$x \cancel{+1} = 7 \cancel{+1}$

$\boxed{x = 7}$.

SOLUZIONI

- $P_5 = 5! = 120$.

- $P_7 = 7! = 5040$.

- Siccome le sedie sono disposte in circolo le 7 permutazioni che si ottengono da una permutazione qualsiasi facendo permutare circolarmente le persone sono del tutto equivalenti. Ad esempio:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \Leftrightarrow \\
7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \Leftrightarrow \\
6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \Leftrightarrow \\
5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & \Leftrightarrow \\
4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & \Leftrightarrow \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & \Leftrightarrow \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & \Leftrightarrow \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 &
\end{array}
$$

Quindi, il numero di modi diversi per disporre le 7 persone sulle 7 sedie in circolo è dato da:

$$P_7/7 = \frac{7!}{7} = 6! = 720.$$

SOLUZIONI

- $$\binom{6}{4 \quad 2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 .$$

- $$\binom{4}{1,1,1,1} = 4! = 24 \; ;$$

  $$\binom{7}{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 840 ;$$

  $$\binom{12}{2,2,2,1,2,3} = \frac{12!}{2!\,2!\,2!\,1!\,2!\,3!} = 4989600 .$$

- Il numero delle n-permutazioni e n! se gli elementi sono tutti distinti. Ce ne sono K_1 uguali al primo elemento di S che si possono permutare in $K_1!$ senza cambiare la n-selezione. Ce ne sono K_2 uguali al secondo elemento di S che si possono permutare in $K_2!$ senza cambiare la n-selezione. E cosi via fino a K_n.

SOLUZIONE

- $\binom{90}{2} = \frac{90!}{2!\,88!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88!}{2 \quad 88!} = 4005$;

$\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \; 87!} = 117'480$;

$\binom{90}{4} = 2'555'190$; $\binom{90}{5} = 43'949'268$

- Dal momento che l'ordine di presentazione degli elementi non è importante allora il permutare in tutti i modi possibili gli elementi di una K- disposizione semplice non ne altera il significato. Quindi:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\;k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

- $C_{90,6} = \binom{90}{6} = 622'614'630$.

- $C_{32,8} = \binom{32}{8} = 10'518'300$.

- $C_{10,8} = \binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \quad 8!} = \frac{90}{2} = 45$.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 4

Basta identificare ogni k-combinazione con ripetizione con una $(n+k-1)$-permutazione con ripetizione fatta con k lettere "P" e $(n-1)$ lettere "A".

Ad esempio se $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $k = 4$ l'identificazione è fatta al seguente modo (ovviamente, $n = 7$):

		a	b	c	d	e	f	g				
a a a a	$\longleftrightarrow$	P	A	A	A	A	A	A	P	P	P	A
a b c d	$\longleftrightarrow$	P	P	P	P	A	A	A	A	A	A	A
a a b b	$\longleftrightarrow$	P	P	A	A	A	A	A	P	A	P	A
a a a g	$\longleftrightarrow$	P	A	A	A	A	A	P	P	P	A	A
a e e g	$\longleftrightarrow$	P	A	A	A	P	A	P	A	P	A	A

Allora, osservando che l'ultima lettera è in ogni caso la "A", la permutazione cui ca (e viceversa) che rappresenta una combinazione con ripetizione è lunga $4 + (7-1) = 10$, in quanto in essa ci sono 4 lettere "P" e 6 lettere "A". $\square$

SOLUZIONI

- Al primo posto della K-selezione vi è il numero della casella che ospita la prima pallina (A); al secondo posto della K-selezione vi è il numero della casella che ospita la seconda pallina (B) e così via. Gli elementi della K selezione possono non essere tutti distinti in quanto le caselle possono ospitare più di una pallina.
- È identica al caso precedente solo che gli elementi della K-selezione sono tutti distinti.
- Al primo posto della K-selezione vi è il numero della casella che è stata utilizzata per la prima collocazione di una pallina; al secondo posto della K-selezione vi è il numero della casella che è stata utilizzata per la seconda collocazione di una pallina e così via. Gli elementi della K-selezione possono non essere tutti distinti.
- È identica al caso precedente solo che gli elementi della K-selezione sono tutti distinti.