NOME: COGNOME: MATRICOLA:

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2021-2022
Laurea in Informatica

Napoli, 9 maggio 2022

COMPITO 1

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Determinare la dimensione e una base del sottospazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & -2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +2x_5 & = & 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{a}^2 \to \underline{a}^2 - \underline{a}^1 \\ \underline{a}^3 \to \underline{a}^3 - 2\underline{a}^1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \underline{a}^3 \to \underline{a}^3 - 3\underline{a}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{a}^2 \to -\underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \to (1/6)\underline{a}^3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{a}^1 \to \underline{a}^1 - \underline{a}^3 \\ \underline{a}^2 \to \underline{a}^2 - 3\underline{a}^3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \underline{a}^1 \to \underline{a}^1 - 2\underline{a}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - x_3 + 4/3x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 & = & 0 \\ x_4 - 1/3x_5 & = & 0 \end{cases}.$$

$\mathcal{S}_O = \{(x_3 - 4/3x_5, -x_3 + x_5, x_3, 1/3x_5, x_5) \mid x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$

$\dim(\mathcal{S}_O) = 2$

$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1, 0, 0), (-4/3, 1, 0, 1/3, 1)\}$

2. Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con base ordinata $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, si determini

(i) un insieme di tre vettori non nulli che sia linearmente dipendente;

(ii) una base che contenga i vettori $v = u_3 - u_2$ e $w = u_1 + u_2$.

(i) Per esempio, basta prendere $\{u_1, 2u_1, 3u_1\}$

(ii) Consideriamo le componenti di v e w nella base $\mathcal{B}$ assegnata e consideriamo la matrice che le ha come righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora basta aggiungere i vettori che hanno come componenti $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$, ossia una base del tipo cercato è $\{v, w, u_3, u_4\}$

3. Esibire un esempio di matrice su $\mathbb{R}$ di tipo 4×3 che abbia rango 2.

Per esempio, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Data l'applicazione lineare $T : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to (x + y, 2x + y - z, y + z, x - z) \in \mathbb{R}^4$,

(i) dire se T è iniettiva e/o suriettiva e determinare una base del nucleo e una base dell'immagine

(ii) dire se il vettore $(1, 1, 0, 0)$ appartiene all'immagine

(i) $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z) \mid (x + y, 2x + y - z, y + z, x - z) = \underline{0}\}$: $\begin{cases} x + y & = & 0 \\ 2x + y - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ x - z & = & 0 \end{cases}$, da cui

$\mathrm{Ker}(T) = \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e una base è $\{(1, -1, 1)\}$. Quindi l'applicazione non è iniettiva.

Siccome la dimensione del dominio è strettamente minore di quella del condominio, T non è suriettiva. Inoltre, $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}(T((1, 0, 0)), T((0, 1, 0)), T((0, 0, 1)))$ e estraendo una base di $\mathrm{Im}(T)$ si ha $\{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$

(ii) Basta osservare che il vettore $(1, 1, 0, 0)$ non è combinazione lineare dei vettori della base di $\mathrm{Im}(T)$ determinata.

5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ una sua base. Esibire un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ e $u_1 \in \mathrm{Im}(f)$.

Osserviamo che $\{u_1 - u_2, u_2\}$ è una base di V e poniamo

$f(u_1 - u_2) = \underline{0}$ e $f(u_2) = u_1$

Adesso basta applicare il Teorema fondamentale delle applicazioni lineari che garantisce l'esistenza dell'applicazione cercata

NOME: COGNOME: MATRICOLA:

Corso di Geometria (gruppo Df-M) A.A. 2021-2022
Laurea in Informatica

Napoli, 10 giugno 2022

COMPITO 2

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali.

1. Dati i riferimenti $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ e $\overline{\mathcal{B}} = ((1,-1),(1,1))$ di $\mathbb{R}^2$, determinare la matrice di passaggio P da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ e la matrice di passaggio Q da $\overline{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considerato l'endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ nella base canonica, determinare autovalori e autospazi di T. Inoltre, stabilire se T è diagonalizzabile e, in caso di risposta affermativa, esibire una base spettrale di $\mathbb{R}^3$ e una matrice che diagonalizza A.

Polinomio caratterisrico: $(\lambda+1)^2(2-\lambda)$
$m_g(-1) = 2$, $m_g(2) = 1$
$U_2 = \{(-3z, -z, z) | z \in \mathbb{R}\}$
$U_{-1} = \{(-y-z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$

3. (i) Cosa è un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ di uno spazio euclideo $\mathcal{E}$ di dimensione n e cosa sono le coordinate in $\mathcal{R}$ di un punto P di $\mathcal{E}$? (ii) Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ in un piano euclideo, rappresentare la retta r per i punti $P(2,-1)$ e $Q(1,3)$ e la retta s ortogonale a r per l'origine del riferimento.

$r : 4x + y - 7 = 0,\ s : x - 4y = 0$

4. Fissato un riferimento cartesiano monometrico ortogonale dello spazio della geometria elementare, si considerino le rette $r : \begin{cases} x - y & = & 1 \\ x + y + z & = & -1 \end{cases}$ e $r' : (x, y, z) = (1, 0, 1) + (1, -1, 0)t'$.

(a) Cosa sono due rette sghembe? Stabilire se r e r' sono sghembe.
(b) Determinare il piano π contenente r e parallelo a r' e la distanza tra r' e π.

r e r' sono sghembe
$\pi : x + y + z = -1$
$d(r', \pi) = d(P(1, 0, 1), \pi) = |1 + 0 + 1 + 1|/\sqrt{1 + 1 + 1} = 3/\sqrt{3}$