

# **ESERCIZI DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

## **PARTE II**

Riccardo Borgoni, Elena Colicino, Piero Quatto, Sara Sala

### **INDICE**

|  |    |
|--|----|
| 1. Variabili casuali continue e trasformazioni di variabili casuali. ....              | 3  |
| 2. La variabile casuale normale .....  | 14 |
| 3. Funzione generatrice dei momenti per variabili casuale continue e discrete. ....    | 21 |
| 4. Variabili casuali bivariate e convergenze di successioni di variabili casuali ..... | 34 |

## ELENCO DELLE ABBREVIAZIONI E DELLE NOTAZIONI

$n!$  : fattoriale di  $n$

$\binom{n}{k}$ : coefficiente binomiale

$D_{n,k}$ : disposizioni semplici di  $n$  elementi a  $k$  a  $k$

$C_{n,k}$ : combinazioni semplici di  $n$  elementi a  $k$  a  $k$

$D_{n,k}^r$  : disposizioni con ripetizione di  $n$  elementi a  $k$  a  $k$

$P(A)$ : probabilità dell'evento  $A$

$\overline{A}$  : evento complementare di  $A$

v.c: variabile casuale

fd: funzione di densità

FR: funzione di ripartizione

fgm: funzione generatrice dei momenti

$G_X(t)$ : fgm di  $X$

i.i.d.: indipendenti e identicamente distribuite

$X \sim \varphi(x)$ : la v.c.  $X$  ha distribuzione  $\varphi(x)$

$E(X)$ : valore atteso di  $X$

$\text{Var}(X)$ : varianza di  $X$

## 1. Variabili casuali continue e trasformazioni di variabili casuali.

Una variabile casuale  $X$  è detta **assolutamente continua** se lo è la sua FR  $F(x)$ , ovvero se esiste una funzione  $f(x)$  tale che  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ .

La funzione  $f(x)$  è detta funzione di densità (fd). La fd di una v.c. continua definita sul supporto  $S$  è una funzione  $f(x)$  tale che:

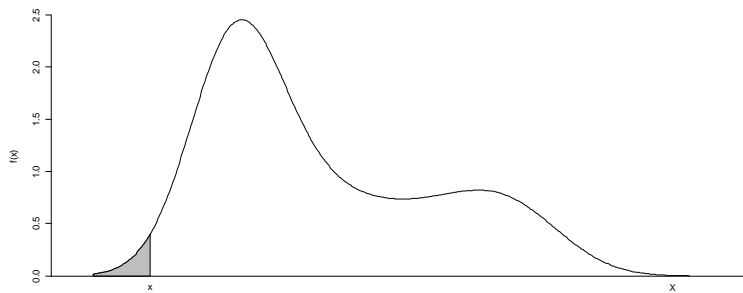
1.  $f(x) > 0 \quad \forall x \in S$
2.  $\int_S f(x)dx = 1$

### Osservazioni

– Tra la fd e la FR vale la relazione:  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

e quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:  $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$  (a meno di un insieme al più numerabile di punti).

Il significato geometrico di tale relazione è esemplificato dalla figura seguente:



– la fd permette di calcolare la probabilità di eventi del tipo  $A = \{x: a \leq x \leq b\}$  essendo

$$P(X \in A) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

– essendo  $P(X=x)=0$  e quindi  $P(a \leq x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a < x < b)$

Il **valore atteso** di una v.c.  $X$  con fd  $f(x)$  è definito come

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \text{ posto che } \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$$

Il **momento di ordine r rispetto all'origine** di una v.c.  $X$  con fd.  $f(x)$  è definito come

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx \text{ posto che } \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)dx < \infty$$

La **varianza** di una v.c.  $X$  con fd  $f(x)$  è definita come

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx \text{ posto che l'integrale esista finito}$$

$\sqrt{Var(X)}$  è denominata **deviazione standard**.

Vale inoltre la seguente proprietà:  $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

In generale il **valore atteso di una trasformazione**  $g(x)$  di una v.c.  $X$  con fd  $f(x)$ :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Il **quantile di ordine  $p$**  di una v. c. continua con FR  $F(x)$  è il valore  $x_p$  tale che  $F(x_p)=p$ .

### **Alcune proprietà**

- Il valore atteso è un operatore lineare  
 $E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$  con  $a, b$  costanti qualsiasi non nulle (posto che  $E(X)$  e  $E(Y)$  esistano)
- $\text{Var}(aX)=a^2\text{Var}(X)$  se  $\text{Var}(X)$  esiste finita
- **Disuguaglianza di Tchebichev** Sia  $X$  una v.c. qualunque con  $E(X) = \mu$  e  $\text{Var}(X) = \sigma^2 > 0$ , allora si ha che  $P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - (\sigma/\varepsilon)^2$  o equivalentemente
  - $P(|X - \mu| \geq \varepsilon) < (\sigma/\varepsilon)^2$
  - $P(|X - \mu| \geq k\sigma) < k^{-2}$  (posto  $k\sigma = \varepsilon$ )

**Esercizio 1. (funzioni di densità, valore atteso e varianza)** Per ciascuna delle seguenti funzioni si decida se si tratta di funzioni di densità e in caso di risposta affermativa si calcoli valore atteso e varianza della corrispondente v.c.

1  $f(x)=1/x^4 \quad x \geq (1/3)^{1/3}$

2  $f(x)=|1+x| \quad -2 < x < 0$

3  $f(x)=e^{-x} \quad x > 0$

4  $f(x)=6x(1-x) \quad 0 < x < 1$

**Soluzione**

1  $\int_{1/3^{1/3}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = 1$

$E(X) = (9)^{1/3}/2$

$V(X) = (3)^{1/3} - (9)^{1/3}/2$

2  $\int_{(-2,0)} |1+x| dx = 1$

$E(X) = \int_{(-2,0)} |1+x| x dx = 1/3$

$V(X) = 41/6 - 1/9$

3  $\int_{(0, +\infty)} e^{-x} dx = 1$

$E(X) = (-e^{-x} (x+1))_{(0, +\infty)} = 1$  integrando per parti

$V(X) = (-e^{-x} (x^2 + 2x + 2))_{(0, +\infty)} - 1 = 1$  integrando per parti due volte

4  $\int_{(0, 1)} 6x(1-x) dx = 1$

$E(X) = 1/2$

$V(X) = 1/20$

**Esercizio 2. (funzione di densità e funzione di ripartizione)**

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} (x/2) - 1 & 2 \leq x < k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1 Si determini il valore di k che assicura che f(x) rappresenta una funzione di densità.

2 Si individui la corrispondente funzione di ripartizione F(x) e, tramite questa, la mediana della v.c. descritta dalla densità f(x).

**Soluzione**

1 Deve valere  $\int_{[2,k)} (x/2) - 1 dx = 1$ . Risolvendo l'integrale si ottengono due valori di k,  $k_1=0$  e  $k_2=4$ .  $k_1 < 2$  quindi non va bene, mentre  $k_2 > 2$  è il valore che stavamo cercando.

2 Siccome vale  $f(x) = F'(x)$  allora si avrà che

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \int_2^x \frac{t}{2} - 1 dt & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

La mediana si ottiene imponendo  $F(x)=1/2$  quindi  $(x^2/4)-x+1=1/2$ . L'equazione possiede due radici  $x_1=2+(2)^{1/2}$  e  $x_2=2-(2)^{1/2}$ , l'unica radice valida come valore mediano è  $x_1$  in quanto compreso tra 2 e 4.

**Esercizio 3. (funzione di densità, funzione di ripartizione, trasformazione).** Sia  $X$  una variabile aleatoria tale che

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Determinare il valore di  $k$ .
2. Se  $Y = 2X - 5$ , determinare il valore di  $P(|Y| < 4)$

**Soluzione**

1. Deve valere  $\int_{-1}^1 kx^2 dx = 1$ . Risolvendo l'integrale si ottiene  $k=3/2$
2.  $P(|Y| < 4) = P(0.5 < X < 4.5) = 3/2 \int_{0.5}^{4.5} x^2 dx = 0.4375$

**Esercizio 4. (funzione di densità, funzione di ripartizione, trasformazione).** Sia  $X$  una variabile aleatoria tale che

$$f(x) = \begin{cases} (3/4)e^x & 0 \leq x < k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Si determini il valore di  $k$  tale che  $f(x)$  sia una funzione di densità di probabilità.
2. Si scriva l'espressione analitica della funzione di ripartizione di  $X$  e se ne tracci il grafico.
3. Calcolare  $P(0.1 < X < 0.7)$ .

**Soluzione**

1. Deve valere  $\int_{[0,k)} (3/4)e^x dx = 1$ . Risolvendo l'integrale si ottiene  $e^k = 7/3$  quindi  $k = \log(7/3)$
2. Per definizione,  $F(x) = P(X \leq x)$  quindi si ottiene:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (3/4) \int_0^x e^t dt = (3/4)(e^x - 1) & 0 \leq x < \log(7/3) \\ 1 & x \geq \log(7/3) \end{cases}$$

3. Si osservi che  $0.7 < \log(7/3)$ . Pertanto:

$$P(0.1 < X < 0.7) = F_X(0.7) - F_X(0.1) = (3/4)(e^{0.7} - 1) - (3/4)(e^{0.1} - 1) = 0.681$$

### Esercizio 5. (funzione di densità, funzione di ripartizione, trasformazione)

1. Si trovi il valore della costante  $k$  per cui la funzione  $f(x) = ke^{-x}$  ( $0 < x < 1$ ) rappresenta la funzione di densità di una v.c. unidimensionale  $X$  e se ne determini la funzione di ripartizione.
2. Si determinino media e mediana della v.c.  $X$ .
3. Si determini la funzione di ripartizione della v.c.  $Y = 2X + 1$  e si calcoli valore atteso di  $Y$ .

#### Soluzione

1. Dalle condizioni seguenti si riesce a individuare il valore di  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} k e^{-x} &\geq 0 \\ \int_0^1 k e^{-x} dx &= 1 \end{aligned} \right\} \quad k = \frac{e}{e-1} = 1,582$$

$$F_X(x) = \int_0^x 1,582 \cdot e^{-t} dt = 1,582(1 - e^{-x}) \quad 0 < x < 1$$

$$2. \quad \text{Quindi la media è } E[X] = \int_0^1 x \cdot 1,582 \cdot e^{-x} dx = 0,418$$

Mediana si ottiene risolvendo rispetto ad  $x$ :  $F(x) = 0,5 \rightarrow x = 0,3798$

$$3. \quad \Psi_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X + 1 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{y-1}{2}\right) = 1,582 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y-1}{2}}\right) \quad 1 < y < 3$$

$$E[Y] = E[2X + 1] = 1,836$$

### Esercizio 6. (funzione di densità, funzione di ripartizione)

1. Si trovi il valore della costante  $k$  per cui la funzione  $\varphi(x) = kx^{-1/2}$  ( $0 < x < 1$ ) rappresenta la funzione di densità di una v.c. unidimensionale  $X$  e se ne determini la funzione di ripartizione.
2. Si determini la funzione di densità della v.c.  $Y = X^{1/2}$  e si calcoli la varianza di  $Y$ .
3. Si calcoli  $\text{Cov}(X, Y)$ .

#### Soluzione

Sia  $\varphi(x) = k x^{-1/2}$  ( $0 < x < 1$ ).

$$1. \int \varphi(x) dx = 1 \Rightarrow k = 1/2;$$

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = x^{1/2} \text{ per } 0 < x < 1, \Phi(x) = 0 \text{ per } x \leq 0 \text{ e } \Phi(x) = 1 \text{ per } x \geq 1.$$

$$2. \text{ La v.c. } Y = X^{1/2} \text{ ha f.d. data da } \psi(y) = 1 \text{ (} 0 < y < 1 \text{) e varianza pari a } 1/12.$$

$$3. \text{ Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1/12 \text{ essendo } E(XY) = E(Y^3) = \int y^3 \psi(y) dy = 1/4, E(X) = E(Y^2) = \int y^2 \psi(y) dy = 1/3 \text{ e } E(Y) = \int y \psi(y) dy = 1/2.$$

**Esercizio 7. (v.c. uniforme continua).** Sia  $X$  una v.c. uniforme  $X \sim U(0,3)$ .

$$1. \text{ Si calcoli la funzione di ripartizione } F_X(x).$$

$$2. \text{ Si calcolino media e varianza.}$$

$$3. \text{ Si calcoli } P(X > 0,5).$$

**Soluzione**

$$1. \text{ In questo caso } F_X(x) = \int_{[0,x]} f_T(t) dt = \int_{[0,x]} (1/3) dt = (1/3)x. \text{ Quindi:}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3}x & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$2. E(X) = (b+a)/2 = 1,5$$

$$V(X) = (b-a)^2/12 = 9/12$$

$$3. P(X > 0,5) = \int_{[0,5,3]} (1/3)x dx = 5/6$$

$$\text{oppure } F(3) - F(0,5) = 1 - (1/6) = 5/6$$

**Esercizio 8. (v.c. uniforme e trasformazione).** Sia  $X$  una v.c. Uniforme sull'intervallo  $(0,1)$  e si definisca  $Y = \log(X)$ .

$$1. \text{ Si determinino la funzione di ripartizione e la funzione di densità della v.c. } Y.$$

$$2. \text{ Si calcolino la mediana e la media di } Y.$$

**Soluzione**

$$X \sim U(0,1) \text{ e } Y = \log(X).$$

$$1. \Psi_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\log(X) \leq y) = P(X \leq e^y) = \Phi_X(e^y) \text{ essendo } \Phi_X(x) = x$$

$$\Psi_Y(y) = \begin{cases} e^y & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

$$\psi_Y(y) = \frac{d\Psi_Y(y)}{dy} = e^y \quad y < 0$$



2. La mediana di  $Y$  si ottiene risolvendo l'equazione  $\Psi_Y(y) = 0,5$   $y = -\log 2 = -0.69$  il valore

$$\text{atteso: } E[Y] = \int_{-\infty}^0 y \cdot \psi_Y(y) dy = -1$$

**Esercizio 9. (v.c. esponenziale).** Il tempo di durata dei prestiti concessi ad una società segue la legge esponenziale. Il tempo medio di un prestito è di due anni e mezzo.

1. Si scriva la funzione di densità della v.c. che descrive la durata dei prestiti e si fornisca la varianza.
2. Si calcoli la probabilità che un prestito abbia durata compresa tra due e tre anni.

**Soluzione**

$$X \sim \exp(\theta) \Rightarrow E(X) = 1/\theta = 2,5 \Rightarrow \theta = 0,4$$

1. Quindi  $f_X(x) = 0,4e^{-0,4x}$  con  $x > 0$ .

$$V(X) = 1/\theta^2 = 6,25$$

2.  $P(2 < X < 3) = \int_{[2,3]} f_X(x) dx = 0,148$

**Esercizio 10. (v.c. poisson-v.c. esponenziale).** Il numero di automobili che attraversano un particolare incrocio stradale in un'ora è mediamente pari a 30. Utilizzando un'opportuna legge di probabilità:

1. Determinare la probabilità che in un intervallo di tempo di cinque minuti nessuna automobile attraversi l'incrocio in questione.
2. Qual è la probabilità che in dieci minuti almeno due automobili passino lungo quel tratto di strada?
3. Qual è la probabilità che tra il passaggio di un'auto e di quella successiva trascorra più di un minuto?

**Soluzione**

1. Sia  $Y$  = "numero di autoveicoli che passano lungo l'incrocio in cinque minuti".

Dalle informazioni fornite dall'esercizio si deduce che il numero medio di automobili che attraversano l'incrocio in cinque minuti è pari a  $30/12 = 2.5$ . Quindi  $E[Y] = 2.5$  e

$$Y \sim \text{Poisson}(2.5).$$

$$P[Y = 0] = (e^{-2.5} (2.5)^0)/0! = 0.082.$$

2. Se  $X$  = "numero di autoveicoli che passano lungo l'incrocio in dieci minuti", allora  $X = 2Y$  e  $X \sim \text{Poisson}(5)$ . Di conseguenza:

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - \{P[X = 0] + P[X = 1]\} = 0.9595.$$

3. Sia  $T$  = “tempo (in minuti) trascorso tra il passaggio di un’auto e di quella successiva”. Dal momento che il numero di auto che circolano nell’incrocio è mediamente pari a  $30/60 = 0.5$ , si ha che  $T \sim \text{expneg}(0.5)$ , ovvero  $T$  ha funzione di densità:

$$f_T(t) = 0.5 e^{-0.5t} \quad t \geq 0$$

$$f_T(t) = 0 \quad \text{altrimenti}$$

$$P[T > 1] = \int_{[1, \infty)} f_T(t) dt = 0.6065.$$

**Esercizio 11. (v.c. esponenziale e trasformazione).** Indicata con  $X$  la v.c. esponenziale con media  $1/\theta$ .

1. Si determini la funzione di ripartizione della v.c.  $Y = (X)^{1/2}$ .
2. Si determini la funzione di densità di  $Y$  e si calcoli il relativo momento secondo.

**Soluzione**

$$X \sim \text{exp}(\theta) \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\theta} \quad \text{quindi } \varphi_X(x) = \theta e^{-\theta x} \quad x > 0 \text{ e } Y = \sqrt{X}.$$

$$1. \quad \Psi_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = \Phi_X(y^2) \quad \text{con } y > 0$$

$$\text{Essendo } \Phi_X(x) = \int_0^x \varphi(x) dx = 1 - e^{-\theta x}$$

$$\Psi_Y(y) = \Phi_X(y^2) = 1 - e^{-\theta y^2} \quad y > 0$$

$$2. \quad \Psi_Y(y) = \Psi_Y'(y) = 2\theta y \cdot e^{-\theta y^2} \quad y > 0 \quad \text{e} \quad E(Y^2) = E(X) = 1/\theta.$$

**Esercizio 12. (v.c. uniforme continua, v.c. chiquadro).** Sia  $X$  una v.c. rettangolare caratterizzata dalla f.d.  $\varphi(x) = 1$  ( $0 < x < 1$ ) e sia  $Y = -2\log X$ .

1. Si determini la distribuzione della v.c.  $Y$ .
2. Per quale valore di  $g$  la v.c.  $Y$  ha distribuzione Chi-Quadro con  $g$  gradi di libertà
3. Si calcolino la media, la varianza e la mediana di  $Y$

**Soluzione**

1. La distribuzione di  $Y = -2\log(X)$  è un’esponenziale negativa con f.r. e f.d. date, rispettivamente, da  $\Psi(y) = P[Y \leq y] = P[X \geq \exp(-y/2)] = 1 - \Phi[\exp(-y/2)] = 1 - \exp(-y/2)$  e  $\psi(y) = \varphi[\exp(-y/2)] \exp(-y/2) / 2 = \exp(-y/2) / 2 \quad (y > 0)$ .
2.  $Y \sim \text{Gamma}(1, 1/2) = \chi^2_2$ .
3.  $E(Y) = 2$ ,  
 $\text{Var}(Y) = 4$

Mediana(Y) =  $2\log 2$ , soluzione dell'equazione  $\Psi(y) = 1/2$ .

**Esercizio 13.** Si trovi il valore della costante  $k$  per cui la funzione

$$f(x) = 2kx + 3(kx)^2 \quad (0 < x < 1)$$

rappresenta la funzione di densità di una v.c. unidimensionale  $X$  assumendo  $k > 0$ .

1) Si determini la funzione di ripartizione della v.c.  $X$ .

2) Si calcoli il valore atteso  $E(X)$ .

**Soluzione**

1) La funzione  $f(x) = 2kx + 3(kx)^2 \quad (0 < x < 1)$  rappresenta la funzione di densità di una v.c. unidimensionale  $X$  per  $k = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0.618$ .

Infatti dalla condizione (si veda libro di test pag 127)

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ discende } kx^2 + k^2 x^3 \Big|_0^1 = 1 \text{ da cui}$$

$$k = (\sqrt{5} - 1) / 2 \quad \text{e} \quad k' = -(\sqrt{5} + 1) / 2.$$

L'unica soluzione accettabile è quindi  $k = (\sqrt{5} - 1) / 2$ .

2) La funzione di ripartizione della v.c.  $X$  è data da:

$$F(x) = 0 \quad \text{per } x \leq 0,$$

$$F(x) = \int_0^x f(u) du = ku^2 + k^2 u^3 \Big|_0^x = kx^2 + k^2 x^3 \quad \text{per } 0 < x < 1$$

$$F(x) = 1 \quad \text{per } x \geq 1.$$

$$3) E(X) = \int_0^1 x(2kx + 3k^2 x^2) dx = 0.6985.$$

**Esercizio 14.** Il tempo di vita,  $T$ , espresso in anni di un'apparecchiatura elettronica si distribuisce come una gamma di parametri  $\theta=1$  e  $\alpha=2$ . Si calcoli il tempo di vita medio dell'apparecchiatura.

1) Qual è il tempo di vita medio se  $\theta=\alpha=1/2$  (distribuzione chi-quadro con 1 gradi di libertà)?

2) Si definisce funzione di sopravvivenza la funzione  $S(t) = P(T > t)$ . Si calcoli la sopravvivenza di una generica apparecchiatura prodotta nel caso di una gamma di parametri  $\theta$  e  $\alpha=1$ .

3) Si definisce funzione di rischio la funzione  $\lambda(t) = \frac{\varphi(t)}{S(t)}$  dove  $\varphi(t)$  è la f.d.d. di  $T$ . Si dimostri che

la funzione di rischio è costante nel caso di una variabile aleatoria di tipo gamma con parametri  $\theta$  e  $\alpha=1$  (v.a. esponenziale negativa).

4) Si dimostri che la funzione di rischio determina univocamente una variabile aleatoria assolutamente continua.

### Soluzione

La funzione di densità di una v.a. gamma è data da

$$\varphi(t, \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\theta t} \quad t > 0 \quad \alpha, \theta > 0$$

1) Per  $\theta=1$  e  $\alpha=2$  si ha  $\varphi(t, 2, 1) = \frac{1^2}{\Gamma(2)} t^{2-1} e^{-t} = \frac{1}{1} t e^{-t} = t e^{-t}$

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty t \varphi(t, \alpha, \theta) dt = \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \left[ -t^2 e^{-t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -2t e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty t e^{-t} dt = 2 \left( \left[ -t e^{-t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-t} dt \right) \\ &= 2 \left( \left[ -t e^{-t} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt \right) = 2 \left( \left[ -e^{-t} \right]_0^\infty \right) = -2(0 - 1) = 2 \end{aligned}$$

2) ricordando che nel caso di una distribuzione gamma si ha  $E(T) = \frac{\alpha}{\theta}$  per  $\theta=\alpha=1/2$  si ottiene

$$E(T) = \frac{\alpha}{\theta} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

Si noti che per  $\theta=\alpha=1/2$  si ha  $\varphi(t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t}$

3) per  $\alpha=1$  si ha  $\varphi(t, \theta) = \theta e^{-\theta t}$   $t > 0 \quad \theta > 0$

$$\Phi(t) = P(T \leq t) = \int_0^t \theta e^{-\theta u} du = \left[ -e^{-\theta u} \right]_0^t = 1 - e^{-\theta t}$$

$$S(t) = e^{-\theta t}$$

4)  $\lambda(t) = \frac{\varphi(t)}{S(t)} = \frac{\theta e^{-\theta t}}{e^{-\theta t}} = \theta$

5)  $\lambda(t) = \frac{\varphi(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}$  integrando entrambi i membri si ha

$$\int \lambda(t) dt = \int -\frac{S'(t)}{S(t)} dt = -\log S(t)$$

da cui  $S(t) = e^{-\int \lambda(t) dt}$  e quindi  $\Phi(t) = 1 - e^{-\int \lambda(t) dt}$

**Esercizio 15.** È noto da studi condotti su una particolare famiglia di coralli che il numero aleatorio  $N$  di gruppi di coralli presenti su un transetto di lunghezza  $r$  individuato su un fondale caraibico è una v.a. di Poisson di parametro  $\lambda r$  con  $\lambda > 0$ .

Supponendo che si sia incontrato sul transetto un gruppo coralli, qual è la distribuzione della v.a.  $T$  che rappresenta la lunghezza della porzione di transetto fino al prossimo avvistamento?

**Soluzione**

L'evento  $\{T > t\}$  si verifica solo se nessun gruppo di coralli è presente sul segmento di lunghezza  $t$ , ovvero:

$$P\{T > t\} = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \quad \text{valore della Poisson calcolato in 0.}$$

Da cui

$$\varphi(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - P\{T > t\})}{dt} = \frac{d(1 - e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

La distribuzione della distanza dall'avvistamento successivo è quindi un'esponenziale negativa

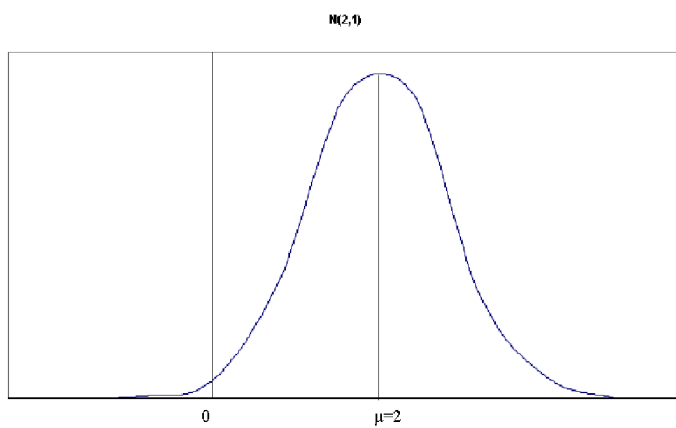
## 2. La variabile casuale normale

**Esercizio 1.** Sia  $X$  una v.c. Normale con  $\mu=2$  e  $\sigma=1$ .

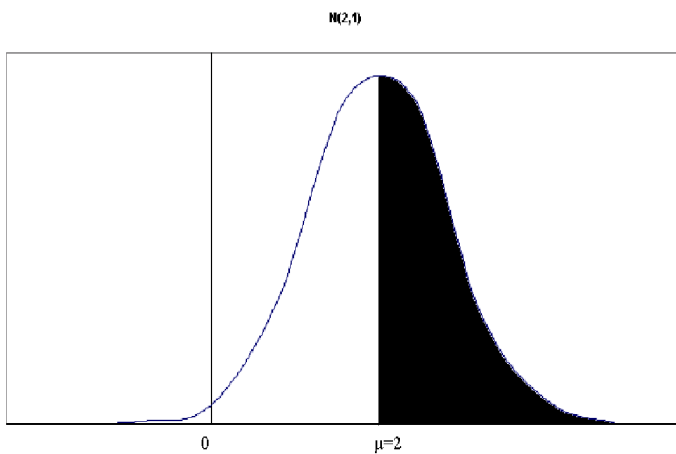
1. Disegnare la funzione di densità di  $X$ .
2. Evidenziare sul grafico la seguente probabilità  $P(X > \mu)$
3. Evidenziare sul grafico la seguente probabilità  $P(-1 \leq X \leq 1)$

**Soluzione**

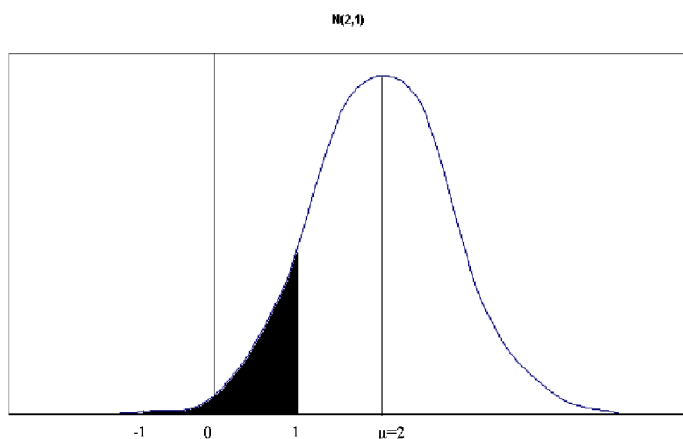
1.  $X \sim N(2, 1)$



2.  $P(X > \mu)$



3.  $P(-1 \leq X \leq 1)$



**Esercizio 2.** Sia  $X$  una v.c. Normale con media pari a 5 e varianza pari a 3. Calcolare :

1.  $P(X > 6)$
2.  $P(4 < X < 7)$
3. Il valore di  $c$  per cui  $P(X > c) = 0,3$
4.  $E(2X - 5)$
5.  $V(2X - 5)$

**Soluzione**

$X \sim N(5, 3)$

1.  $P(X > 6) = P(Z > 0,58) = 1 - P(Z \leq 0,58) = 1 - \Phi(0,58) = 0,281$  dove  $Z$  è la normale standard.
2. Standardizzando come fatto sopra:  $P(4 < X < 7) = 0,5939$
3.  $P(X > c) = 0,3 \Rightarrow P(Z > ((c-5)/(3)^{1/2})) = 0,3 \Rightarrow \Phi((c-5)/(3)^{1/2}) = 0,7$   
 $z = (c-5)/(3)^{1/2} = 0,52 \Rightarrow c = 5,9$
4.  $E(2X - 5) = 2E(X) - 5 = 5$
5.  $V(2X - 5) = 4V(X) = 12$

**Esercizio 3.** Un impianto inserisce automaticamente zucchero nelle bustine, se il peso dello zucchero nelle bustine può considerarsi una normale con  $\sigma = 1,3$  e il 5% delle bustine pesa di più di 10,132g quale è il peso medio delle bustina?

**Soluzione**

$X =$  peso bustine in g.  $X \sim N(\mu, 1,3^2)$

$P(X > 10,132) = 0,05$  standardizzando si ottiene  $P(Z > (\mu - 10,132)/1,3) = 0,05$  da cui si ricava il valore di  $\mu = 8$

**Esercizio 4.** Si consideri una variabile casuale normale con media 100 e varianza 25. Calcolare:

1. la probabilità che X sia maggiore di 110;
2. la probabilità che X sia minore di 95;
3. la probabilità che X sia compresa tra 95 e 110;
4. la probabilità che X sia compresa tra 105 e 110;
5. la probabilità che X sia compresa tra 85 e 95;

**Soluzione**

$X \sim N(100, 25)$

1.  $P(X > 110) = P(Z > (110 - 100)/25^{1/2}) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,97725$
2.  $P(X < 95) = P(Z < (95 - 100)/25^{1/2}) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,84134$
3.  $P(95 < X < 110) = P((95 - 100)/25^{1/2} < Z < (110 - 100)/25^{1/2}) = P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0,97725 - [1 - P(Z \leq 1)] = 0,97725 - [1 - 0,84134]$
4.  $P(105 < X < 110) = P((105 - 100)/25^{1/2} < Z < (110 - 100)/25^{1/2}) = P(1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1) = 0,97725 - 0,84134$
5.  $P(85 < X < 95) = P((85 - 100)/25^{1/2} < Z < (95 - 100)/25^{1/2}) = P(-3 < Z < -1) = P(1 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < 1) = 0,99865 - 0,84134$

**Esercizio 5.** Supposto che la durata del volo Roma Fiumicino – Parigi Orly segua una distribuzione normale con media pari a 120 minuti e varianza pari a 49 minuti, calcolare:

1. La probabilità che il volo in partenza domani durerà meno di 115 minuti;
2. La probabilità che il volo in partenza domani durerà tra 107 e 118 minuti;

**Soluzione**

$X \sim N(120, 49)$

1.  $P(X < 115) = P(Z < (115 - 120)/49^{1/2}) = P(Z < -0,71) = 1 - P(Z \leq 0,71) = 1 - 0,76115$
2.  $P(107 < X < 118) = P((107 - 120)/49^{1/2} < Z < (118 - 120)/49^{1/2}) = P(-1,86 < Z < -0,28) = P(0,28 < Z < 1,86) = P(Z < 1,86) - P(Z < 0,28) = 0,96856 - 0,61026$

**Esercizio 6.** Per le rane allo stato naturale, la lunghezza della vita è distribuita normalmente con media di 10 anni e deviazione standard di 3 anni.

1. Quale percentuale di rane vive oltre i 14 anni?
2. Calcolare il valore del quinto percentile

**Soluzione**

$X \sim N(10, 9)$



1.  $Z=(14-10)/3=1,33$        $P(\text{vita}>14)=P(z>1,33)=0,0918$
2.  $P(z<?)=0,05$   
 $z=-1,64$   
 $-1,64=(x-10)/3$        $x=10-3\times 1,64=5,08$

**Esercizio 7.** Si assuma che tra i non diabetici il livello di glucosio nel sangue a digiuno sia distribuito in maniera approssimativamente normale con una media di 105mg/100ml ed una deviazione standard di 9mg/100ml.

1. Quale percentuale di diabetici hanno livelli compresi tra 90 e 125mg/100ml?
2. Quale livello lascia il 10% dei non diabetici nella coda sinistra?
3. Quali livelli comprendono il 95% dei non diabetici?

**Soluzione**

$X \sim N(105,81)$

1.  $Z=(x-\mu)/\sigma$        $z=(90-105)/9=-1,67$        $z=(125-105)/9=2,22$   
 $P(x>90)=P(z>-1,67)=0,952$   
 $P(x>125)=P(z>2,22)=0,0131$   
 $P(90>x>125)=0,952-0,0131=0,939$
2.  $P(x\leq?)=0,10=P(z\leq-1,28)$        $z=(x-105)/9=-1,28$        $x=93,5$
3.  $P(? \leq x \leq ?)=0,95=P(-1,96 \leq x \leq 1,96)$   
 $z=(x-105)/9=-1,96$        $x_1=87,4$   
 $z=(x-105)/9=1,96$        $x_2=122,6$

**Esercizio 8.** Un'azienda produce componenti elettronici di due tipi: i componenti di tipo A rappresentano il 45% della produzione, mentre il resto della produzione è costituito da componenti di tipo B. Il tempo di vita T (in anni) dei componenti prodotti ha distribuzione esponenziale negativa con media 0,92 per il tipo A, mentre per il tipo B ha distribuzione Normale con la stessa media e la stessa varianza della suddetta esponenziale. Estratto a caso un componente dalla produzione, si consideri l'evento "la durata del componente non supera un anno", indicato con D.

1. Si calcoli la probabilità che il componente estratto sia di tipo B.
2. Si calcoli la probabilità dell'evento D dato che il componente è di tipo A.
3. Si calcoli la probabilità dell'evento D dato che il componente è di tipo B.
4. Si calcoli la probabilità dell'evento D.
5. Si calcoli la probabilità che il componente sia di tipo B dato che la sua durata non supera l'anno.

### Soluzione

1.  $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0.45 = 0.55$ .
2. La probabilità va calcolata con la legge esponenziale  $P(D|A) = 1 - \text{Exp}(-1.087) = 0.6628$ .
3. La probabilità si calcola impiegando la densità di una v.c. Normale con media e varianza pari a 0,92 e  $0,92^2$  quindi  $P(D|B) = \Phi(0.087) = 0.5359$ .
4.  $P(D) = P(D|A) P(A) + P(D|B) P(B) = 0.2983 + 0.2947 = 0.593$ .
5.  $P(B|D) = P(D|B) P(B) / P(D) = 0.2947 / 0.593 = 0.497$ .

**Esercizio 9.** Sia  $X$  una variabile casuale con funzione di densità  $\phi(x)$ . Si definisce entropia di  $X$  la seguente quantità:  $H = E(-\log(\phi(X)))$ . Si calcoli l'entropia nel caso in cui  $X$  abbia distribuzione normale di media 0 e varianza  $\sigma^2$ . Si commenti il risultato ottenuto discutendo, in particolare, l'interpretazione di  $H$ .

### Soluzione

$$\begin{aligned} H = E(-\log(\phi(X))) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\phi(x) \log(\phi(x)) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \left( \log \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\phi(x) \left( \log \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2} \right) dx = \log \sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \phi(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{essendo } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) dx = 1 \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \phi(x) dx = E(X^2) = \sigma^2 \text{ poiché } E(X)=0$$

(in alternativa l'integrale può essere risolto per parti assumendo  $xdx$  come fattore differenziale e

ricordando che  $xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm \infty$ )

si ottiene

$$H = \log \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \log \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} = \log \sigma\sqrt{2\pi} + \frac{\log e}{2} = \log \sigma\sqrt{2\pi} + \log \sqrt{e} = \log \sigma\sqrt{2\pi e}.$$

$$\text{Inoltre } H = \frac{1}{2} \log \sigma^2 + \frac{1}{2} \log 2\pi e$$

L'entropia è quindi una trasformazione monotona della varianza e quindi essa stessa può essere interpretata come una misura della variabilità della variabile aleatoria  $X$ .

Tuttavia  $H > 0$  se  $\sigma^2 > \frac{1}{2\pi e} \approx 0.06$ : poiché una misura di variabilità di una variabile casuale deve

essere positiva, tale funzione non è completamente soddisfacente da questo punto di vista.

**Esercizio 10.** La durata in giorni di una gravidanza è distribuita come una normale di media 270 giorni e deviazione standard 10 giorni. Una signora un po' distratta cerca di capire chi sia il padre di suo figlio. Un suo partner è stato all'estero dal 290 al 240-esimo giorno antecedente la nascita del bambino. Se quest'uomo è veramente il padre del bambino qual è la probabilità che la signora abbia avuto una gravidanza così corta o così lunga?

**Soluzione**

Sia  $X$  = durata delle gravidanza e  $A = (X > 290) \cup (X < 240)$

$$\begin{aligned} P(A) &= P((X > 290) \cup (X < 240)) = P(X > 290) + P(X < 240) = \\ &= P\left(\frac{X - 270}{10} > \frac{290 - 270}{10}\right) + P\left(\frac{X - 270}{10} < \frac{240 - 270}{10}\right) = P\left(\frac{X - 270}{10} > 2\right) + P\left(\frac{X - 270}{10} < -3\right) = \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 270}{10} \leq 2\right) + P\left(\frac{X - 270}{10} < -3\right) = 1 - \Phi(2) + \Phi(-3) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(3) \approx 0.0241 \end{aligned}$$

che rappresenta la probabilità ricercata.

**Esercizio 11.** Sia  $Z$  una variabile casuale normale di media  $\mu = 0$  e varianza  $\sigma^2 = 1$ .

1. Si determini la funzione di densità della variabile casuale  $Y = Z^2$  e se ne calcoli la media (distribuzione chi-quadrato con 1 grado di libertà)
2. Si calcoli il quantile di ordine 0.05 e 0.95 di  $Y$

**Soluzione**

1. Siano  $\Phi(z)$  e  $\phi(z)$  rispettivamente la funzione di ripartizione e di densità di una v.a. normale standard.  $Y = Z^2$  implica  $Y > 0$  (supporto di  $Y$ )

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(Z^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{d(2\Phi(\sqrt{y}) - 1)}{dy} = 2\phi(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

Calcolo della media

$$E(Y) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \phi(z) dz = 1 \quad (\text{momento secondo della normale standard})$$

2. Ricorrendo alle tavole si ottiene

$$\chi_{1,0.05}^2 = 0.10$$

$$\chi_{1,0.95}^2 = 5.99$$

**Esercizio 12.** Sia  $Z$  una variabile casuale normale di media 0 e varianza 1. Si determini la funzione di densità della variabile casuale  $X = e^{Z\sigma+\mu}$  e se ne calcoli la media, la varianza e la mediana (distribuzione log-normale).

**Soluzione**

$X = e^{Z\sigma+\mu}$  implica  $X > 0$  (supporto di  $X$ )

$$F(x) = P(X \leq x) = P(e^{Z\sigma+\mu} \leq x) = P\left(Z \leq \frac{\log x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)}{dx} = \phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad x > 0.$$

Calcolo della media

$$\begin{aligned} E(X) &= E(e^{Z\sigma+\mu}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\sigma+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2 + z\sigma} dz = e^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2z\sigma)} dz = \\ &= e^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2z\sigma + \sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2} dz = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2} dz = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Calcolo della varianza

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left((e^{Z\sigma+\mu})^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{Z\sigma+\mu})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2Z\sigma+2\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = e^{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 4z\sigma)} dz = \\ &= e^{2\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 4z\sigma + 4\sigma^2) + 2\sigma^2} dz = e^{2\mu+2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\sigma)^2} dz = e^{2(\mu+\sigma^2)}. \end{aligned}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e^{2(\mu+\sigma^2)} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2(\mu+\sigma^2)}(1 - e^{-\sigma^2}).$$

$$\text{Si noti anche che } \text{Var}(X) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) = (E(X))^2(e^{\sigma^2} - 1).$$

Calcolo della mediana:

$$0.5 = P(0 < X < x_{0.5}) = P(0 < e^{Z\sigma+\mu} < x_{0.5}) = P(-\infty < Z\sigma + \mu < \log x_{0.5}) = P\left(-\infty < Z < \frac{\log x_{0.5} - \mu}{\sigma}\right).$$

$$\text{Quindi } \frac{\log x_{0.5} - \mu}{\sigma} = 0 \quad \text{e} \quad \log x_{0.5} = \mu \quad x_{0.5} = e^{\mu}$$

Si noti che  $x_{0.5} < E(X)$ .

### 3. Funzione generatrice dei momenti per variabili casuale continue e discrete.

Data la v.a.  $X$  con FR  $F(x)$  si definisce *funzione generatrice dei momenti* (fgm) di  $X$  la funzione

$$G_X(t) = E(e^{tX}) \quad (1)$$

ogni qual volta tale valore atteso esiste finito in un intorno di  $t = 0$  (ovvero per ogni  $t$  tale che  $-h < t < h$  per un opportuno  $h > 0$ ).

Se  $X$  è una v.c. discreta con funzione di probabilità  $\phi(x)$  si ottiene:  $G_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \phi(x)$ .

Se  $X$  è una v.a. continua con funzione di densità  $\phi(x)$  si ottiene  $G_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \phi(x) dx$ .

La fgm è nota anche con il nome di *trasformata di Laplace*.

**Relazione fra la fgm e i momenti di una v.a.** Dallo sviluppo in serie McLaurin della funzione esponenziale si ottiene:

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \quad (2)$$

Sostituendo in (1) ad  $e^{tX}$  la (2) ponendo  $y=tX$  si ha

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \frac{t^3 X^3}{3!} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \mu'_n}{n!} \text{ con } \mu'_n = E(X^n) \quad (3)$$

dove si è ipotizzato che esistano finiti tutti i momenti rispetto all'origine di  $X$ .

Il momento di ordine  $n$  di  $X$  è allora il coefficiente del termine  $t^n/n!$  della serie precedente. Ne discende che

$$\frac{d^r G_X(t)}{dt^r} = \frac{r(r-1)(r-2) \dots 1 \mu'_r}{r!} + \frac{(r+1)r(r-1) \dots 2 t \mu'_{r+1}}{(r+1)!} + \frac{(r+2)(r+1)r \dots 3 t^2 \mu'_{r+2}}{(r+2)!} + \dots$$

essendo nulli i primi  $r$  termini della serie in (3) per effetto delle  $r$  derivazioni successive. Da cui

$$\left. \frac{d^r G_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} = \mu'_r \quad (4)$$

Si osservi che nel ricavare la (3) si è assunta la scambiabilità dell'operatore valore atteso (quindi della serie o dell'integrale che lo definisce nel caso rispettivamente di v.c. discrete o continue) con la serie, scambiabilità garantita da opportune proprietà delle serie di potenze. La (4) poi discende dal fatto che una serie di potenze può essere derivata termine a termine.

Si noti che la fgm può non esistere. Essendo la funzione integranda o i termini della serie che la definiscono positivi, può accadere, infatti, che l'integrale o la serie siano divergenti.

Se essa esiste finita, però, esistono finiti tutti i momenti della v.a., la fgm è derivabile con continuità nell'origine ed è possibile calcolare i momenti della v.a. in base alla (4).

Si noti infine che, per poter essere utilizzabile per il calcolo dei momenti, si richiede solo l'esistenza della fgm in un intorno dell'origine e non su tutto l'asse reale.

In particolare si avrà:  $G'_X(0) = E(X)$ ,  $G''_X(0) = E(X^2)$ , da cui  $\text{Var}(X) = G''_X(0) - (G'_X(0))^2$ .

Valgono infine le seguenti proprietà.

**Proprietà 1** Se  $X$  ha fgm  $G_X(t)$ , allora posto  $Y = a + bX$  si ha  $G_Y(t) = e^{at} G_X(bt)$ .

**Proprietà 2** Se le v.a.  $X_1, \dots, X_m$  sono indipendenti e hanno fgm anche la v.c.  $S = X_1 + \dots + X_m$  ammette funzione generatrice dei momenti e si ha  $G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_m}(t)$ .

L'esistenza delle fgm  $G_{X_i}(t)$   $i=1, \dots, m$  implica che ciascuna fgm è finita in un intorno dell'origine e, quindi, è finito il loro prodotto nell'intersezione di tali intorni.

### Uso della fgm.

La fgm, come suggerisce il suo nome e quanto sopra esposto, (ogni qual volta essa esista) è utilizzata per calcolare i momenti di una v.a.

Un secondo importante aspetto è legato al seguente teorema.

**Teorema** Siano  $X$  e  $Y$  due v.a. con FR rispettivamente  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$ . Siano  $G_X(t)$  e  $G_Y(t)$  le corrispondenti fgm tali che  $G_X(t) = G_Y(t)$  per ogni  $t$  in un'intorno dell'origine. Allora  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

Il precedente teorema afferma che ad una FR corrisponde una e una sola fgm (se questa esiste). La fgm allora identifica in modo univoco la v.c. al pari della FR. Questo teorema si rivela particolarmente utile nell'individuare la distribuzione di una variabile aleatoria definita a partire da una trasformazione di un'altra variabile aleatoria con distribuzione nota. In altri termini sia  $X$  una v.c. con distribuzione  $F_X(x)$  nota e  $Y=g(X)$ , dove  $g(x)$  è una trasformazione nota di  $X$ . Se risulta possibile identificare la fgm,  $G_Y(t)$ , di  $Y$  come quella associata ad una v.a. con FR nota, diciamo  $F_Y(y)$ , allora se ne potrà concludere che la trasformazione  $Y=g(X)$  definisce una v.c. con quella distribuzione.

**Esercizio 1.** Sia  $X$  una variabile aleatoria con funzione di probabilità

|        |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|
| $X$    | -1  | 0   | 1   |
| $P(x)$ | 2/9 | 5/9 | 2/9 |

1. Si determini la funzione generatrice dei momenti e si calcoli tramite essa  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$ .
2. Si determini l'espressione dei momenti di ordine pari e dei momenti di ordine dispari di  $X$

**Soluzione**

$$1. G_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{2}{9}e^{-t} + \frac{5}{9}e^{t0} + \frac{2}{9}e^t = \frac{1}{9}(2e^t + 2e^{-t} + 5).$$

$$G'_X(t) = \frac{2}{9}(e^t - e^{-t}) \quad \text{da cui} \quad E(X) = G'_X(0) = \frac{2}{9}(e^0 - e^{-0}) = 0$$

$$G''_X(t) = \frac{2}{9}(e^t + e^{-t}) \quad \text{da cui} \quad E(X^2) = G''_X(0) = \frac{2}{9}(e^0 + e^{-0}) = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Si ottiene quindi } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4}{9}$$

2. Momenti di ordine pari

$$G_X^{(2n)}(t) = \frac{2}{9}(e^t + e^{-t}) \text{ derivata di ordine } 2n \text{ della fgm per } n = 1, 2, 3, \dots \text{ da cui}$$

$$E(X^{2n}) = G_X^{(2n)}(0) = \frac{2}{9}(e^0 + e^{-0}) = \frac{4}{9} \text{ momento di ordine } 2n \text{ (pari) di } X \text{ per } n=1, 2, 3, \dots$$

Momenti di ordine dispari

$$G_X^{(2n+1)}(t) = \frac{2}{9}(e^t - e^{-t}) \text{ derivata di ordine } 2n+1 \text{ (dispari) della fgm per } n=0,1,2,3,\dots \text{ da cui}$$

$$E(X^{2n+1}) = G_X^{(2n+1)}(0) = \frac{2}{9}(e^0 - e^{-0}) = 0 \text{ momento di ordine } 2n+1 \text{ (dispari) per } n=1,2,3,\dots$$

**Esercizio 2.** Sia  $X$  una v.a. uniforme discreta di parametro  $k$ . Si determini la funzione generatrice dei momenti e si calcoli tramite essa  $E(X)$  e  $\text{Var}(X)$ .

**Soluzione**

Funzione generatrice dei momenti

$$G_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^k \frac{1}{k} e^{tx} = \frac{1}{k}(e^t + e^{2t} + \dots + e^{kt}).$$

Valore atteso di  $X$

$$G'_X(t) = \frac{1}{k}(e^t + 2e^{2t} + \dots + ke^{kt})$$

$$E(X) = G'_X(0) = \frac{1}{k} (e^0 + 2e^{20} + \dots + ke^{k0}) = \frac{\sum_{i=1}^k i}{k} = \frac{k(k+1)}{2k} = \frac{k+1}{2}$$

si ricordi che  $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$ .

Varianza di X

$$G''_X(t) = \frac{1}{k} (e^t + 4e^{2t} + \dots + k^2 e^{kt})$$

$$E(X^2) = G''_X(0) = \frac{1}{k} (e^0 + 4e^{20} + \dots + k^2 e^{k0}) = \frac{1}{k} (1 + 4 + \dots + k^2) =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^k i^2}{k} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k} = \frac{(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Si ricordi che  $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ .

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)}{2} \left[ \frac{(2k+1)}{3} - \frac{(k+1)}{2} \right] = \frac{(k+1)}{2} \frac{(4k+2-3k-3)}{6} = \frac{k^2-1}{12} \end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Sia X una v.a. di Bernoulli di parametro  $\theta$ .

1. Si determini la funzione generatrice dei momenti e si verifichi tramite essa che  $E(X) = \theta$  e  $\text{var}(X) = \theta(1-\theta)$ .
2. Si determini tramite la funzione generatrice dei momenti  $E(Y)$  con  $Y = 1 + X/2$ .

**Soluzione**

1. funzione generatrice dei momenti

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = (1-\theta)e^{t0} + \theta e^t = (1-\theta) + \theta e^t = 1 - \theta(1-e^t).$$

Valore atteso

$$G'_X(t) = \theta e^t \quad \text{da cui } E(X) = G'_X(0) = \theta e^0 = \theta$$

Varianza

$$G''_X(t) = \theta e^t \quad \text{da cui } E(X^2) = G''_X(0) = \theta e^0 = \theta$$

Si ottiene quindi

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \theta - \theta^2 = \theta(1-\theta).$$

Si noti in particolare che  $G_X^{(n)}(t) = \theta e^t$  da cui  $E(X^n) = G_X^{(n)}(0) = \theta e^0 = \theta \quad \forall n = 1, 2, \dots$



$$2. \quad G_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(1+X/2)}) = e^t E\left(e^{\frac{Xt}{2}}\right) = e^t G_X\left(\frac{t}{2}\right) = e^t - e^{\frac{t}{2}}\theta(1 - e^{\frac{t}{2}}) = e^t - e^{\frac{t}{2}}\theta + e^t\theta.$$

$$G'_Y(t) = e^t - \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\theta + e^t\theta$$

$$E(Y) = G'_Y(0) = 1 - \frac{1}{2}\theta + \theta = \frac{2+\theta}{2}$$

**Esercizio 4.** Sia  $Y$  una v.a. Binomiale di parametri  $n$  e  $1 > \theta > 0$ . Si determini la funzione generatrice dei momenti e si verifichi tramite essa che  $E(X) = n\theta$  e  $\text{var}(X) = n\theta(1-\theta)$ .

### Soluzione

Funzione generatrice dei momenti

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^n e^{tx} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=1}^n \binom{n}{x} (\theta e^t)^x (1-\theta)^{n-x} = (\theta e^t + 1 - \theta)^n$$

dove l'ultimo passaggio segue dal teorema binomiale.

Si noti inoltre che, se  $n=1$ , allora  $G_X(t) = \theta e^t + 1 - \theta$  ovvero la fgm di una Bernoulli di parametro  $\theta$  che, quindi, rappresenta una specificazione particolare della Binomiale.

Valore atteso

$$G'_X(t) = n\theta e^t (\theta e^t + 1 - \theta)^{n-1} \quad \text{da cui} \quad E(X) = G'_X(0) = n\theta(\theta + 1 - \theta)^{n-1} = n\theta$$

Varianza

$$\begin{aligned} G''_X(t) &= n\theta^2 e^{2t} (n-1) (\theta e^t + 1 - \theta)^{n-2} + n\theta e^t (\theta e^t + 1 - \theta)^{n-1} \\ &= n\theta e^t (\theta e^t + 1 - \theta)^{n-2} [(\theta e^t (n-1)) + (\theta e^t + 1 - \theta)]. \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} E(X^2) &= G''_X(0) = \\ &= n\theta(\theta + 1 - \theta)^{n-2} [(\theta(n-1)) + (\theta + 1 - \theta)] = n\theta(\theta(n-1) + 1) = n\theta(\theta n - \theta + 1) \\ &= (n\theta)^2 - n\theta^2 + \theta n \end{aligned}$$

$$\text{Si ottiene quindi } \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (n\theta)^2 - n\theta^2 + \theta n - (n\theta)^2 = n\theta(1 - \theta).$$

**Esercizio 5.** Sia  $X$  una v.a. di Poisson di parametro  $\lambda > 0$ . Si determini la funzione generatrice dei momenti e si verifichi tramite essa che  $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ .

### Soluzione

Funzione generatrice dei momenti:

$$G_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (e^t \lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!}.$$

Valore atteso:

$$\text{posto } e^t \lambda = \xi \text{ si ha: } G_X(t) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\xi^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\xi} = e^{-\lambda + \xi} = e^{\lambda e^t - \lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$G'_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \lambda e^t \text{ da cui } E(X) = \lambda.$$

Varianza:

$$G''_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t - 1)} \lambda e^t = e^{\lambda(e^t - 1)} \lambda e^t (1 + \lambda e^t) \quad \text{da cui } E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

**Esercizio 6.** Si verifichi la seguente proprietà: se X ha fgm  $G_X(t)$ , allora posto  $Y = a + bX$  si ha

$$G_Y(t) = e^{at} G_X(bt) \text{ (proprietà 1)}$$

**Soluzione**

$$G_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{(a+bX)t}) = e^{at} E(e^{bXt}) = e^{at} G_X(bt)$$

essendo  $G_X(bt) < \infty$  in un intorno dell'origine avendo assunto l'esistenza di  $G_X(t)$  ne discende che

$$E(e^{tY}) = e^{at} G_X(bt) < \infty \text{ per } t \text{ in un intorno di } 0.$$

**Esercizio 7. (f.g.m. e momenti della v.c. geometrica)**

1. Si determini la funzione generatrice dei momenti della v.c. Geometrica
2. Si determinino la media e la varianza della v.c. Geometrica sfruttando la fgm.

**Soluzione**

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1} \quad x=1,2,3,\dots \quad 0 < p < 1$$

$$1. \quad G_X(v) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{vx} p(1-p)^{x-1} = (p/(1-p)) \sum_{x=1}^{\infty} [(1-p)e^v]^x \quad \text{N.B.: } \sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q} - q^0$$

$$= \frac{p}{(1-p)} \frac{[(1-p)e^v]}{1 - [(1-p)e^v]} = \frac{pe^v}{1 - [(1-p)e^v]} \quad \text{con } -\infty < v < -\log(1-p) > 0$$

$$2. \quad G'_X(v) = \frac{pe^v}{[1 - (1-p)e^v]^2} \quad E(X) = G'_X(0) = \frac{1}{p}$$

$$G''_X(v) = \frac{pe^v [1 + (1-p)e^v]}{[1 - (1-p)e^v]^3} \quad E(X^2) = G''_X(0) = \frac{2-p}{p}$$

$$V(X) = \frac{2-p}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2.$$

**Esercizio 8.** Sia  $X$  una v.a con la seguente funzione di densità di probabilità:  $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1-x^2)}$ .

Mostrare che  $X$  non possiede fgm.

**Soluzione**

•  $v > 0$

$$\begin{aligned} G_X(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{vx} \frac{1}{\pi(1-x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{vx}}{(1-x^2)} dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+vx}{(1-x^2)} dx \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)} dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{vx}{(1-x^2)} dx \geq 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{vx}{(1-x^2)} dx = +\infty \end{aligned}$$

•  $v \leq 0$

$$G_X(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{vx} \frac{1}{\pi(1-x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{vx}}{(1-x^2)} dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+vx}{(1-x^2)} dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)} dx = 1$$

L'insieme dei  $v$  per cui l'integrale esiste finito contiene un intorno completo dell'origine quindi non esiste la f.g.m.

**Esercizio 9.** Determinare la f.g.m. dei momenti di una v.a.  $X$  avente la seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

**Soluzione**

$$\begin{aligned} G_X(v) &= \int_0^1 e^{vx} 6x(1-x) dx = 6 \left( \int_0^1 e^{vx} x dx - \int_0^1 e^{vx} x^2 dx \right) \\ &= 6 \left( \left[ \frac{e^{vx}}{v} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{vx}}{v} dx - \left( \left[ \frac{e^{vx}}{v} x^2 \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{e^{vx}}{v} x dx \right) \right) = 6 \frac{1+e^v}{v^2} + 12 \frac{1+e^v}{v^3} \quad \text{con } v \neq 0. \end{aligned}$$

**Esercizio 10.** Sia  $X$  una v.c. Rettangolare sull'intervallo  $(0,1)$  e si definisca  $Y = \log(X)$ .

1. Si determinino la funzione di ripartizione e la funzione di densità della v.c.  $Y$ .
2. Si calcolino la mediana, la media e il 95-esimo percentile di  $Y$ .

3. Si determini la funzione generatrice dei momenti delle variabili X e si calcoli tramite essa il valore atteso di X
4. Si calcoli la funzione generatrice dei momenti di Y e si determini  $\text{var}(Y)$ .

### Soluzione

Sia X una v.c. Rettangolare sull'intervallo (0,1) con f.r. F(x) e f.d. f(x).

Sia inoltre  $Y = \log(X)$ .

Si noti che se  $0 < X < 1$  allora  $-\infty < Y < 0$ , supporto della variabile aleatoria Y.

1.  $H(y) = P(Y \leq y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq \exp y) = F(\exp y) = \exp(y)$  per  $y < 0$

e

$$H(y) = 1 \text{ per } y \geq 0.$$

La f.d. della v.c. Y risulta

$$h(y) = H'(y) = \exp(y) \quad (y < 0).$$

2. La mediana di Y si ottiene risolvendo l'equazione

$$H(y) = \exp(y) = \frac{1}{2} \text{ che ha come soluzione } y = -\log 2 = -0.69.$$

Il 95-esimo quantile di Y si ottiene risolvendo l'equazione

$$H(y) = \exp(y) = 0.95 \text{ che ha come soluzione } y = \log 0.95 = -0.051.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^0 y h(y) dy = -1. \quad (\text{integrazione per parti})$$

3.  $G_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^1 e^{tx} dx = \left[ \frac{e^{tx}}{t} \right]_0^1 = \frac{e^t - 1}{t} \text{ per } t \neq 0$

$$G'_X(t) = \frac{te^t - (e^t - 1)}{t^2} \text{ per } t \neq 0.$$

$G'_X(t)$  come del resto  $G_X(t)$  non sono definite per  $t=0$ .

Estendiamo allora tali funzioni per continuità sullo 0 ovvero poniamo

$$G_X(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 \quad \text{applicando la regola dell'Hopital e}$$

$$G'_X(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t - (e^t - 1)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^t + e^t - e^t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2} \text{ applicando la regola dell'Hopital.}$$

Da cui si ricava  $E(X) = 0.5$ .

4.  $G_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_0^1 e^{t \log x} dx = \int_0^1 x^t dx = \left[ \frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_0^1 = \frac{1}{t+1} \quad t \neq -1$

Alternativamente

$$G_Y(t) = E(e^{ty}) = \int_{-\infty}^0 e^{ty} e^y dy = \int_{-\infty}^0 e^{(t+1)y} dy = \left[ \frac{e^{(t+1)y}}{t+1} \right]_{-\infty}^0 = \frac{e^0 - e^{-\infty}}{t+1} = \frac{1}{t+1} \quad t \neq -1$$

$$G'_Y(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \quad \text{da cui } E(X) = G'_Y(0) = -1$$

$$G''_Y(t) = \frac{2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2}{(t+1)^3} \quad \text{da cui } E(X^2) = G''_Y(0) = 2$$

$$\text{Var}(X) = 2 - 1 = 1$$

**Esercizio 11.** Sia  $X$  una v.a. con distribuzione gamma di parametri  $\theta$  e  $\alpha$ . Si determini

1. la funzione generatrice dei momenti di  $X$
2. la funzione generatrice dei momenti per  $\alpha=1$  e si determini il valore atteso della v.a. corrispondente (esponenziale negativa)
3. la funzione generatrice dei momenti, il valore atteso e la varianza nel caso  $\theta=1/2$  e  $\alpha=g/2$  (chi quadrato con  $k$  gradi di libertà)

**Soluzione**

La funzione di densità di una v.a. gamma è data da

$$\varphi(x, \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} \quad x > 0 \quad \alpha, \theta > 0$$

$$1. G_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} dx = \int_0^\infty \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\theta-t)x} dx = \frac{\theta^\alpha}{(t-\theta)^\alpha} \int_0^\infty \frac{(t-\theta)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-(\theta-t)x} dx$$

$$G_X(t) = \left( \frac{\theta}{\theta-t} \right)^\alpha \quad \text{per } t < \theta$$

(l'integrale precedente è quello di una densità gamma di parametri  $\theta-t$  e  $\alpha$ )

$$2. \text{ Per } \alpha=1 \text{ si ottiene } G_X(t) = \frac{\theta}{(\theta-t)} \quad \text{per } t < \theta.$$

(Verificare il risultato calcolando la funzione generatrice dei momenti a partire direttamente dall'espressione della densità esponenziale negativa)

$$G'_X(t) = \frac{\theta}{(\theta-t)^2} \quad \text{da cui} \quad E(X) = G'_X(0) = \frac{1}{\theta}$$

3. Per  $\alpha=g/2$  e  $\theta=1/2$  si ottiene

$$G_X(t) = \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{g/2} \quad \text{per } t < 1/2$$

Calcolo della media

$$G'_X(t) = \frac{g}{2} \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{g/2-1} \left( -\frac{-2}{(1-2t)^2} \right) = \frac{g}{(1-2t)^{g/2+1}} \quad \text{da cui}$$

$$E(X) = G'_X(0) = g \left( \frac{1}{1-0} \right)^{g/2+1} = g$$

Calcolo della varianza

$$\begin{aligned} G''_X(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{g}{(1-2t)^{g/2+1}} \right) = -g \frac{1}{(1-2t)^{g/2+2}} \left( \left( \frac{g}{2} + 1 \right) (1-2t)^{g/2} (-2) \right) = \frac{g}{(1-2t)^{g/2+2}} \left( (g+2)(1-2t)^{g/2} \right) \\ &= \frac{g(g+2)}{(1-2t)^{g/2+2}} = \frac{g(g+2)}{(1-2t)^{g/2+2}} \end{aligned}$$

$$E(X^2) = G''_X(0) = g(g+2)$$

$$\text{Var}(X) = g^2 + 2g - g^2 = 2g$$

**Esercizio 12.** Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.c indipendenti e identicamente distribuite con legge gaussiana standardizzata. Mostrare che la v.c.  $Z = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$  ha legge chiquadro con  $n$  gradi di libertà.

**Soluzione**

$$G_{X_i^2}(s) = E(e^{sX_i^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx_i^2} (2\pi)^{-1/2} e^{-(1/2)x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{(s-1/2)x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{(s-1/2)x^2} dx < \infty \quad \text{solo se}$$

$s < (1/2)$ .

Se si effettua il cambio di variabile  $y = x^2$  si ottiene che:

$$G_Y(s) = 2 (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{(s-1/2)y} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{(s-1/2)y} dy$$

$\int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{(s-1/2)y} dy$  è il nucleo della Gamma((1/2)-s; 1/2). Si ottiene quindi:

$$G_Y(s) = (2\pi)^{-1/2} \frac{\Gamma(1/2)}{((1/2)-s)^{1/2}} = (2\pi)^{-1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{(1/2)^{1/2} (1-2s)^{1/2}} = \left( \frac{1}{1-2s} \right)^{1/2}$$

Quindi

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{1-2s} \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{1-2s} \right)^{n/2} \quad \text{che è la fgm di una chiquadro con } n \text{ gdl.}$$

**Esercizio 13.** Sia  $Z$  la una v.a. con distribuzione normale standard. Si determini:

1. la funzione generatrice dei momenti di  $Z$
2. la funzione generatrice dei momenti di  $X = \sigma Z + \mu$   $\sigma > 0$   $\mu \in \mathbb{R}$

**Soluzione**

$$1. G_Z(t) = E(e^{tZ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz + t^2)} dz =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(essendo l'integrale precedente quello di una densità normale di media  $t$ )

$$2. G_X(t) = e^{\mu t} G_Z(\sigma t) = e^{\mu t} e^{\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

**Esercizio 14.** Si determini la distribuzione della variabile casuale  $S = \sum_{i=1}^m X_i$ , dove  $X_1, \dots, X_m$  sono

v.a. indipendenti, nel caso in cui:

1.  $X_1, \dots, X_m$  sono  $m$  v.a. di Bernoulli con parametro  $\theta$ .
2.  $X_1, \dots, X_m$  sono  $m$  v.a. con distribuzione Binomiale con parametri  $\theta$  e  $n_i$   $i=1, \dots, m$ .
3.  $X_1, \dots, X_m$  sono  $m$  v.a. con distribuzione di Poisson di parametro rispettivamente  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .
4.  $X_1, \dots, X_m$  sono  $m$  v.a. con distribuzione Gamma di parametri  $\alpha_i$  e  $\theta$   $i=1, \dots, m$
5. Si verifichi che se  $X_1, \dots, X_m$  sono  $m$  v.a. indipendenti con distribuzione normale standard allora

$\sum_{i=1}^m X_i^2$  ha distribuzione chi-quadrato con  $m$  gradi di libertà

6. Si determini la distribuzione della variabile  $S = \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i$  nel caso in cui  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$   $i=1, \dots, m$

fra loro indipendenti

**Soluzione**

$$3. G_S(t) = E(e^{tS}) = E\left(e^{t \sum_{i=1}^m X_i}\right) = \prod_{i=1}^m E(e^{tX_i}) \quad \text{per l'indipendenza di } X_1, \dots, X_m$$

$$= \prod_{i=1}^m (1 - \theta + \theta e^t)$$

$$= (1 - \theta + \theta e^t)^n$$

Si nota come la fgm della somma di n Bernoulli indipendenti ed ugualmente distribuite sia uguale alla fgm della Binomiale. Questo dimostra, per altra via, la relazione esistente fra la Binomiale e la Bernoulli.

$$4. \quad G_S(t) = E(e^{tS}) = E\left(e^{t \sum_{i=1}^m X_i}\right) = \prod_{i=1}^m E(e^{tX_i}) \quad \text{per l'indipendenza di } X_1, \dots, X_m$$

$$= \prod_{i=1}^m (1 - \theta(1 - e^t))^{n_i} = (1 - \theta(1 - e^t))^N \quad \text{con } N = \sum_{i=1}^m n_i$$

Si nota come quest'ultima sia la fgm di una v.a. Binomiale di parametri  $\theta$  e  $N$ . Ciò dimostra la proprietà riproduttiva della v.a. Binomiale rispetto al parametro rappresentante il "numero delle prove".

$$5. \quad G_S(t) = E(e^{tS}) = \prod_{i=1}^m G_{X_i}(t) \quad \text{per l'indipendenza di } X_1, \dots, X_m$$

$$= \prod_{i=1}^m e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\sum_{i=1}^m \lambda_i(e^t - 1)} = e^{(e^t - 1)\Lambda} \quad \text{dove } \Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

Si nota che quest'ultima è la fgm di una Poisson di parametro  $\Lambda$  dimostrando così la proprietà riproduttiva della variabile casuale rispetto a questo parametro.

$$6. \quad G_S(t) = E(e^{tS}) = \prod_{i=1}^m G_{X_i}(t) \quad \text{per l'indipendenza di } X_1, \dots, X_m$$

$$= \prod_{i=1}^m \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{\alpha_i} = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^{\sum_{i=1}^m \alpha_i} = \left(\frac{\theta}{\theta - t}\right)^A \quad \text{dove } A = \sum_{i=1}^m \alpha_i$$

Quest'ultima è la fgm di una Gamma( $\theta, A$ ) quindi  $S \sim \text{Gamma}(\theta, A)$

La distribuzione gamma è quindi riproduttiva rispetto al parametro  $\alpha$ .

$$7. \quad X_i^2 \sim \chi_1^2 = \text{Gamma}(1/2, 1/2) \quad i=1, \dots, m \quad (\text{chi quadro con un grado di libertà})$$

$$\sum_{i=1}^m X_i^2 \sim \text{Gamma}(m/2, 1/2) = (\text{per la riproduttività della gamma})$$

$$= \chi_m^2 \quad (\text{per def. di chi-quadro con } m \text{ gradi di libertà})$$

$$8. \quad G_S(t) = E(e^{tS}) = E\left(e^{t \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i}\right) = \prod_{i=1}^m E(e^{t\alpha_i X_i}) = \prod_{i=1}^m G_{X_i}(t\alpha_i) = \prod_{i=1}^m e^{t\alpha_i \mu_i + \frac{(t\alpha_i \sigma_i)^2}{2}} = e^{t \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \sigma_i^2}$$

$$= e^{t\mu + \frac{(t\sigma)^2}{2}}$$



Quest'ultima è la fgm di una normale di parametri  $\mu = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i$  e  $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \sigma_i^2$  che quindi risulta riproduttiva (per  $\alpha_i=1$ ,  $i=1,\dots,m$ ) rispetto ad entrambi i parametri ma anche una famiglia di distribuzioni “chiusa” rispetto alle combinazioni lineari

**Esercizio 15.** Si verifichi la proprietà 2: se le v.a.  $X_1, \dots, X_m$  sono indipendenti e hanno fgm anche la v.a.  $S=X_1 + \dots + X_m$  ammette funzione generatrice dei momenti e si ha  $G_S(t) = G_{X_1}(t) \cdots G_{X_m}(t)$ .

**Soluzione**  $G_S(t) = E(e^{tS}) = E\left(e^{t \sum_{i=1}^m X_i}\right) = \prod_{i=1}^m E(e^{tX_i})$  per l'indipendenza di  $X_1, \dots, X_m$

$$= \prod_{i=1}^m G_{X_i}(t)$$

#### 4. Variabili casuali bivariate e convergenze di successioni di variabili casuali

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione di probabilità di una v.c. bidimensionale discreta (X,Y) definita dalla seguente tabella.

|       | Y = 0 | Y = 1 |
|-------|-------|-------|
| X = 0 | 0.1   | 0.3   |
| X = 1 | 0.2   | K     |

1. Si determini il valore di K che rende la precedente una funzione di probabilità biviata.
2. Si determinino le funzioni di probabilità delle v.c. marginali e se ne calcolino le varianze.
3. Si determinino le funzioni di ripartizioni delle v.c. marginali e le si rappresenti graficamente.
4. Si calcolino  $P(Y=1|X=1)$  e  $\text{cov}(X,Y)$
5. Si stabilisca se X e Y sono indipendenti, motivandone la risposta.
6. Si calcoli la  $P(X+Y < 1,5)$

#### Soluzione

1.  $K=0,4$  perché deve valere  $\sum_x \sum_y \varphi(x,y) = 1$

|       | Y = 0 | Y = 1 |
|-------|-------|-------|
| X = 0 | 0.1   | 0.3   |
| X = 1 | 0.2   | K=0,4 |

2. Marginale di X:

| X | P(X=x)                       |
|---|------------------------------|
| 0 | 0,4= $P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=0)$ |
| 1 | 0,6= $P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=0)$ |

$$\text{Var}(X) = \theta(1 - \theta) = 0,24$$

- Marginale di Y:

| Y | P(Y=y)                       |
|---|------------------------------|
| 0 | 0,3= $P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)$ |
| 1 | 0,7= $P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=1)$ |

$$\text{Var}(Y) = \theta(1 - \theta) = 0,21$$

3. Sapendo che vale  $\sum_x \phi(x)=1$  e  $\sum_y \phi(y)=1$  si riesce a calcolarle e rappresentarle graficamente.

$$4. P(Y=1|X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Cov}(XY) = E[XY] - E[Y]E[X] = 0,4 - 0,6 * 0,7 = -0,02$$

5. X ed Y non sono indipendenti in quanto se fossero indipendenti  $\text{COV}(XY)$  dovrebbe essere 0.

6. Per calcolare la  $P(X+Y>1.5)$  si costruisce una nuova variabile somma di X ed Y

| X+Y | P(X=x)                          |
|-----|---------------------------------|
| 0   | 0,1 = P(X=0, Y=0)               |
| 1   | 0,5 = P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0) |
| 2   | 0,4 = P(X=1, Y=1)               |

$$\text{Quindi } P(X + Y > 1.5) = P(X + Y = 2) = 0,4$$

**Esercizio 2.** La seguente tabella mostra la distribuzione di probabilità congiunta di due variabili casuali discrete X e Y.

| Y\X | 1    | 2    | 3    |
|-----|------|------|------|
| 0   | 0,10 | 0,12 | 0,06 |
| 1   | 0,05 | 0,1  | 0,11 |
| 2   | 0,02 | 0,16 | c    |

1. Determinare il valore di c.
2. Calcolare la marginale, il valore atteso e la varianza di X
3. Calcolare la marginale, il valore atteso e la varianza di Y
4. Si calcoli la  $\text{Cov}(X, Y)$

**Soluzione**

1. Deve valere  $\sum_x \sum_y \phi(x, y) = 1$  quindi  $c=0,28$ .

| Y\X | 1    | 2    | 3    |
|-----|------|------|------|
| 0   | 0,10 | 0,12 | 0,06 |
| 1   | 0,05 | 0,1  | 0,11 |
| 2   | 0,02 | 0,16 | 0,28 |

2. Distribuzione marginale

| X | P(X=x) |
|---|--------|
| 1 | 0.170  |
| 2 | 0.380  |
| 3 | 0.450  |

$$E(X)=2,28, V(X)=0,54$$

3. Distribuzione marginale

| Y | P(Y=y) |
|---|--------|
| 0 | 0.28   |
| 1 | 0.26   |
| 2 | 0.18   |

$$E(Y)=1,18, V(Y)=0,70$$

4.  $Cov(X,Y)=E(XY) - E(X)E(Y)=0,76$

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione di probabilità di una v.c. bidimensionale discreta (X,Y) definita dalla tabella seguente.

|       | Y = 0 | Y = 1 |
|-------|-------|-------|
| X = 1 | 0.05  | 0.15  |
| X = 2 | 0.15  | 0.25  |
| X = 3 | 0.35  | 0.05  |

1. Si calcolino la media e la varianza di X.
2. Si determini la funzione di ripartizione di Y e la si rappresenti graficamente.
3. Si calcolino  $P(Y = 0 | X = 1)$  e  $P(X + Y < 2.3)$ .
4. Si calcolino  $E(XY)$  e  $Cov(X,Y)$ .

**Soluzione**

Le funzioni di probabilità delle v.c. marginali X e Y sono date, rispettivamente, da:  $p(1) = 0.2$ ,  $p(2) = 0.4$  e  $p(3) = 0.4$ ;  $q(0) = 0.55$  e  $q(1) = 0.45$ .

1.  $E(X) = 2.2$  e  $Var(X) = 0.56$ ;  $E(Y) = 0.45$  e  $Var(Y) = 0.2475$ .

2.  $F_Y(y)=0$  se  $y<0$

$$F_Y(y)=0.55 \text{ se } 0 \leq y < 1$$

$$F_Y(y)=1 \text{ se } y \geq 1$$

3.  $P(Y=0 | X=1) = 0.25$  e  $P(X+Y < 2.3) = 0.35$ .
4.  $E(XY) = 0.8$  e  $\text{Cov}(X,Y) = -0.19$ .

#### Esercizio 4.

1. Si trovi il valore della costante  $k$  tale per cui  $\varphi(x,y)=(x^2+y)/k$  ( $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ ) rappresenta la funzione di densità di una v.c. bidimensionale  $(X,Y)$ .
2. Si determinino le funzioni di densità delle v.c. marginali.
3. Si stabilisca se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti

#### Soluzione

Sia  $\varphi(x,y)=(x^2+y)/k$  ( $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ )

1.  $\int_0^1 \int_0^1 \varphi(x,y) dx dy = 1 \Rightarrow k = 5/6$ .
2. La v.c. marginale  $X$  ha f.d.  $\varphi_X(x) = \int_0^1 \varphi(x,y) dy = \frac{6x^2 + 3}{5}$  ( $0 < x < 1$ ),  
mentre la v.c.  $Y$  ha f.d.  $\varphi_Y(y) = \int_0^1 \varphi(x,y) dx = \frac{6y + 2}{5}$  ( $0 < y < 1$ ),
3. Le v.c. marginali non sono indipendenti perchè  $\varphi(x,y) \neq \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$

#### Esercizio 5.

1. Si trovi il valore della costante  $k$  tale per cui la funzione  $\varphi(x,y)=k$  ( $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 2$ ) rappresenta la funzione di densità di una v.c. bidimensionale  $(X,Y)$ .
2. Si determinino le funzioni di densità delle v.c. marginali e si stabilisca se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti.
3. Si calcoli la probabilità che entrambe le v.c. marginali superino 0.5.

#### Soluzione

Sia  $\varphi(x,y)=k$  ( $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 2$ ).

1.  $\int_0^1 \int_0^2 \varphi(x,y) dx dy = 1 \Rightarrow k = 1/2$ .
2. La v.c. marginale  $X$  ha f.d.  $\varphi_X(x) = \int_0^2 \varphi(x,y) dy = 1$  ( $0 < x < 1$ ),  
mentre la v.c.  $Y$  ha f.d.  $\varphi_Y(y) = \int_0^1 \varphi(x,y) dx = \frac{1}{2}$  ( $0 < y < 2$ ),

Le v.c. marginali sono indipendenti infatti  $\varphi(x, y) = \varphi_X(x) \cdot \varphi_Y(y)$

$$3. P(X > 0.5, Y > 0.5) = P(X > 0.5)P(Y > 0.5) = (1/2)(3/4) = 3/8 = 0.375.$$

### Esercizio 6.

1. Si verifichi che

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y)} \quad (x \text{ reale}, y > 0)$$

rappresenta la funzione di densità di una v.c. bidimensionale  $(X, Y)$ .

2. Si determinino le funzioni di densità delle v.c. marginali.

3. Si stabilisca se le v.c.  $X$  e  $Y$  sono indipendenti e/o identicamente distribuite, motivando le risposte.

4. Si determinino  $E(XY)$  e  $\text{Var}(X + Y)$ , motivando le risposte.

5. Si calcolino  $P(X > 1 \mid Y < 1)$  e  $P(Y < 1 \mid X > 1)$ , motivando le risposte.

### Soluzione

$$1. \varphi(x, y) \geq 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(x, y) dx dy = 1.$$

2. Le funzioni di densità delle v.c. marginali sono date da:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (x \text{ reale}) \text{ e}$$

$$\psi(y) = \int_0^{+\infty} \varphi(x, y) dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y} \quad (y > 0).$$

3.  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, ma non identicamente distribuite.

4.  $E(XY) = E(X) E(Y) = 0$  e  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 1 + 4 = 5$ , per l'indipendenza tra  $X$  e  $Y$ .

5.  $P(X > 1 \mid Y < 1) = P(X > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$  e

$P(Y < 1 \mid X > 1) = P(Y < 1) = 1 - e^{-0.5} = 1 - 0.6065 = 0.3935$ , per l'indipendenza tra  $X$  e  $Y$ .

**Esercizio 7.** Si consideri la funzione di probabilità di una v.c. bidimensionale discreta  $(X, Y)$  definita dalla tabella seguente.

|       | Y = 0 | Y = 1 |
|-------|-------|-------|
| X = 1 | 0.05  | 0.15  |
| X = 2 | 0.15  | 0.25  |

|         |      |      |
|---------|------|------|
| $X = 3$ | 0.35 | 0.05 |
|---------|------|------|

Siano  $Y_1, Y_2$  e  $Y_3$  v.c. indipendenti e distribuite come  $Y$ .

Si determini la distribuzione della v.c. somma  $T_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ , motivando la risposta.

### Soluzione

$Y$  si distribuisce come una Bernoulli ( $p=0,45$ ). La fgm di  $Y$  è quindi:  $M_Y(t)=(1-p+pe^t)$ .

$T_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3$ , è quindi somma di 3 Bernoulli (0,45) indipendenti. La fgm di  $T_3$  è quindi:

$$G_{T_3}(t) = G_{Y_1}(t) G_{Y_2}(t) G_{Y_3}(t) = \prod^3 G_{Y_i}(t) = \prod^3 (1-p+pe^t) = (1-p+pe^t)(1-p+pe^t)(1-p+pe^t) = (1-p+pe^t)^3$$

Che è proprio la fgm della Binomiale ( $N=3, p=0,45$ ).

**Esercizio 8.** Siano  $X_1, X_2, \dots$  variabili aleatorie i.i.d. che si distribuiscono secondo una Poisson(4) e sia  $S = X_1 + \dots + X_{100}$ .

1. Qual è la densità di  $S$ ?
2. Quanto vale approssimativamente  $P(S \leq 390)$ ?
3. Quante variabili aleatorie indipendenti e con densità di Poisson di parametro 4 dobbiamo sommare (almeno) affinché  $P(X_1 + \dots + X_n > 390) > 0.5$ ?

### Soluzione

1. La somma di v.a. di Poisson i.i.d.  $S$  è ancora una Poisson con parametro la somma dei parametri, cioè,  $S$  si distribuisce come una Poisson( $100 \cdot 4$ ) =  $P(400)$ . Infatti la f.g.m. di una qualsiasi  $X_i \sim \text{Poisson}(4)$  è  $\exp(4(\exp(t) - 1))$  di conseguenza  $S$  avrà una f.g.m. data da:  $G_S(t) =$

$$G_{X_1}(t) G_{X_2}(t) \dots G_{X_{100}}(t) = \prod_{i=1}^{100} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{100} e^{4(e^t - 1)} = \exp\left(\sum_{i=1}^{100} 4(\exp(t) - 1)\right) = e^{400(\exp(t) - 1)} \text{ che}$$

corrisponde a una f.g.m. di una Poisson ( $\sum_{i=1}^{100} 4$ ) cioè a una Poisson (400).

2. Per il teorema centrale del limite,  $P(S \leq 390)$  vale approssimativamente  $P(S \leq 390) = P(S \leq 390) = \Phi((390 - 400)/(400)^{1/2}) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$
3.  $0.5 < P(X_1 + \dots + X_n > 390) = 1 - P(X_1 + \dots + X_n \leq 390) = 1 - \Phi((390 - 4n)/(4n)^{1/2})$   
sse  $\Phi((390 - 4n)/(4n)^{1/2}) < 0.5$  cioè  
sse  $((390 - 4n)/(4n)^{1/2}) < \Phi_{0.5}$  sse  $390 - 4n < 0$  sse  $n > 97.5$  cioè  $n \geq 98$ .

**Esercizio 9.** Il primo di settembre di ogni anno un cartolaio prepara un ordine di biro gialle con cui far fronte alle vendite dell'intero anno (=365 giorni). Si sa che il cartolaio vende  $X$  biro gialle al

giorno, dove  $X$  è una variabile aleatoria di Poisson di parametro  $\lambda = 2,5$  e che il numero di biro gialle vendute in giorni diversi sono indipendenti.

1. Se  $Y$  indica il numero totale di biro gialle vendute in un anno, qual è la densità di  $Y$ ?
2. Quanto vale approssimativamente la probabilità che in un anno si vendano al più 960 biro?
3. Quante biro gialle dovrà approssimativamente ordinare il cartolaio affinché la probabilità di rimanerne sprovvisto durante l'anno sia inferiore al 5%?

### Soluzione

1. La somma di v.a. di Poisson i.i.d.  $Y$  è ancora una Poisson con parametro la somma dei parametri, cioè,  $Y \sim \text{Poisson}(365 \cdot 2,5 = 912,5)$ . Infatti la f.g.m. di una qualsiasi  $X_i \sim \text{Poisson}(2,5)$  è  $\exp(2,5(\exp(t)-1))$  di conseguenza  $Y$  avrà una f.g.m. data da:  $G_Y(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)\dots G_{X_{365}}(t) =$

$$\prod_{i=1}^{365} G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{365} e^{2,5(e^t-1)} = \exp\left(\sum_{i=1}^{365} 2,5(\exp(t)-1)\right) = e^{912,5(e^t-1)} \text{ che corrisponde a una f.g.m. di una}$$

Poisson  $\left(\sum_{i=1}^{365} 2,5\right)$  cioè a una Poisson (912,5).

2. Dobbiamo calcolare approssimativamente  $P(Y \leq 960)$  usando il teorema centrale del limite:  
 $P(Y \leq 960) = \Phi(1,57) = 0,9418$

3. Sia  $k$  il numero di biro che deve ordinare il cartolaio per far fronte alle vendite di un anno. Dobbiamo determinare  $k$  tale che  $P(Y > k) < 0,05$ .

Utilizzando l'approssimazione gaussiana della f.d.r della Poisson, dobbiamo determinare  $k$  tale che:  $1 - \Phi((k-912,5)/(912,5)^{1/2}) < 0,05$ , o equivalentemente  $\Phi((k-912,5)/(912,5)^{1/2}) > 0,95$ .

Ciò vale sse  $((k-912,5)/(912,5)^{1/2}) > q_{0,95}$ , dove  $q_{0,95}$  è il quantile di ordine 0,95 di  $\Phi$ .

Dalle tavole:  $q_{0,95} = 1,645$  e  $k > 1,645 \times (912,5)^{1/2} + 912,5 = 962,1915$ . Quindi il cartolaio deve ordinare almeno 963 penne gialle.

### Esercizio 10. Sia $X$ una v.a. $U(0,2)$ .

1. Si determini media e varianza di  $X$ .
2. Siano  $X_1, \dots, X_{147}$  147 v.a. i.i.d. con distribuzione  $U(0,2)$  e  $S = X_1 + \dots + X_{147}$ . Calcolare approssimativamente  $P(S < 161)$

### Soluzione

Posto  $U \sim U(0,1)$

1.  $E(X) = E(2U) = 2E(U) = 2/2 = 1$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(2U) = 4\text{Var}(U) = 4/12 = 1/3$$



2.  $S = X_1 + \dots + X_{147}$ . In quanto somma di v.a. i.i.d. assolutamente continue, anche  $S$  è assolutamente continua da cui  $P(S < 161) = P(S \leq 161)$

Inoltre  $E(S) = 147$  e  $\text{Var}(S) = 147 \times (1/3) = 49$

Per il Teorema Centrale del Limite, la f.d.r. di  $(S - E(S))/(\text{Var}(S))^{1/2}$  converge alla f.d.r.  $N(0,1)$ .

Quindi  $P(S < 161) = \Phi((161 - 147)/7) = \Phi(2) = 0.9772$ .

**Esercizio 11.** Sia  $X$  una v.a. binomiale di parametro  $(n, p)$  Mostrare che la successione di variabili aleatorie  $\{X/n\}_{n \geq 1}$  converge in probabilità a  $p$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**Soluzione**

$X$  è una v.a. binomiale  $(n, p)$  quindi  $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ , dove le  $Y_i$  sono binomiali  $(1, p) = \text{bernoulliane}(p)$

indipendenti.  $(X/n) = (\sum_{i=1}^n Y_i / n)$  converge quasi certamente a  $E(Y_i) = p$  per  $n \rightarrow \infty$  per la legge dei grandi numeri.

Inoltre la convergenza quasi certa implica la convergenza in probabilità per cui  $(X/n) = (\sum_{i=1}^n Y_i / n)$  converge in probabilità a  $E(Y_i) = p$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**Esercizio 12.**

1. Si determini la costante di proporzionalità che rende la seguente funzione una funzione di

$$\text{densità bivariata } \varphi(x, y) = \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1 + |x|)^\alpha} \quad (x \text{ reale, } y \geq 0) \quad \alpha > 1$$

2. Si determini la funzione di densità marginale di  $X$  e si calcoli  $E(X)$ . Si discuta l'eventuale necessità d'imporre ulteriori restrizioni sullo spazio dei parametri.
3. Si determini  $E(Y)$  discutendo il risultato ottenuto. (Suggerimento si lasci la funzione di densità marginale di  $Y$  in termini di integrale).
4. Per  $\alpha = 3$  si determini la funzione di ripartizione,  $F(x)$ , di  $X$  e se ne disegni il grafico.
5. Definita  $Z = F(X)$  si calcoli la media e la varianza di  $W = \log Z$ .

6. Siano  $Z_1, \dots, Z_n$   $n$  variabili aleatorie indipendenti e distribuite come  $Z$ . Sia  $M_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n Z_i}$  la loro media geometrica. Si determini un'approssimazione valida per  $n$  grande della distribuzione di  $M_n$ , motivando la risposta fornita.. Si calcoli la convergenza in probabilità della successione delle medie geometriche motivando la risposta.

## Soluzione

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} k \varphi(x, y) dx dy = 1 \quad \text{da cui} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^\alpha} dy dx = \frac{1}{k}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^\alpha} dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{(1+|x|)^\alpha} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-yx^2} dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x|)^\alpha} \left( -e^{-yx^2} \right)_0^{+\infty} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x|)^\alpha} (1-0) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx = \left( \frac{-(1+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)_{-\infty}^0 + \left( \frac{(1+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)_0^{+\infty} = -\frac{2}{1-\alpha}$$

$$\text{Da cui } k = -\frac{1-\alpha}{2}$$

$$2. \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x, y) dy$$

$$\varphi(x) = -\frac{1-\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^\alpha} dy = \frac{\alpha-1}{2(1+|x|)^\alpha} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-yx^2} dy = \frac{\alpha-1}{2(1+|x|)^\alpha} \left( -e^{-yx^2} \right)_0^{+\infty} = \frac{\alpha-1}{2(1+|x|)^\alpha} \quad X \in \mathbb{R}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\alpha-1)}{2(1+|x|)^\alpha} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x(\alpha-1)}{2(1+x)^\alpha} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x(\alpha-1)}{2(1+x)^\alpha} dx =$$

Si consideri il primo integrale (risoluzione per parti)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x(\alpha-1)}{2(1+x)^\alpha} dx = \frac{(\alpha-1)}{2} \int_{-\infty}^0 x(1-x)^{-\alpha} dx = \frac{(\alpha-1)}{2} \left( \left[ x \frac{(1-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{(1-x)^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)} dx \right) =$$

$$= \frac{(\alpha-1)}{2(1-\alpha)} \left( \left[ x(1-x)^{-\alpha+1} \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 (1-x)^{-\alpha+1} dx \right) =$$

assumendo  $\alpha > 2$  (la forma indeterminata relativa alla soluzione del primo integrale può essere risolta tramite la regola di de l'Hôpital)

$$= \frac{(\alpha-1)}{2(1-\alpha)} \left( 0 + \int_{-\infty}^0 (1-x)^{-\alpha+1} dx \right) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (1-x)^{-\alpha+1} dx = \left( \frac{(1-x)^{-\alpha+2}}{2-\alpha} \right)_{-\infty}^0 = \frac{1}{2-\alpha}.$$

Si consideri il secondo integrale. Analogamente al caso precedente si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{x(\alpha-1)}{2(1+x)^\alpha} dx = \frac{(\alpha-1)}{2} \int_0^{+\infty} x(1+x)^{-\alpha} dx = \frac{(\alpha-1)}{2} \left( \left[ x \frac{(1+x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{-\alpha+1}}{(1-\alpha)} dx \right) =$$

assumendo  $\alpha > 2$

$$= \frac{(\alpha-1)}{2(1-\alpha)} \left( 0 - \int_0^{+\infty} (1+x)^{-\alpha+1} dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1+x)^{-\alpha+1} dx = \left( \frac{(1+x)^{-\alpha+2}}{2-\alpha} \right)_0^{+\infty} = -\frac{1}{2-\alpha}$$

Da cui  $E(X) = 0$

Per garantire l'esistenza del momento primo occorre assumere  $\alpha > 2$ . Per  $\alpha \leq 2$  il momento primo diverge.

$$3. \quad \varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) dx$$

$$\varphi(y) = -\frac{1-\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^\alpha} dx \quad Y \in R^+$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{+\infty} y \varphi(y) dy = -\frac{1-\alpha}{2} \int_0^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^\alpha} dx dy = -\frac{1-\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y \frac{x^2 e^{-yx^2}}{(1+|x|)^\alpha} dy dx = \\ &= -\frac{1-\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|x|)^\alpha} \int_0^{+\infty} y x^2 e^{-yx^2} dy dx = \end{aligned}$$

Il secondo integrale è il valore atteso di un'esponenziale negativa di parametro  $x^2$ .

$$= \frac{\alpha-1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 (1+x)^\alpha} dx = +\infty$$

L'integrale diverge: la funzione integranda positiva su supporto d'integrazione illimitato.

$$4. \quad \text{Posto } \alpha = 3 \quad \varphi(x) = \frac{1}{(1+|x|)^3} \quad X \in R$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1-|t|)^3} dt$$

$$\text{Per } X < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1-t)^3} dt = \left( \frac{1}{2(1-t)^2} \right)_{-\infty}^x = \frac{1}{2(1-x)^2}$$

Per  $X \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1-|t|)^3} dt = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^3} dt = \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{2(1+t)^2} \right)_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+x)^2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2(1+x)^2}$$

5. La variabile Z ha distribuzione uniforme nell'intervallo (0,1).

La funzione generatrice dei momenti di  $W = \log Z$  è data

$$G_w(t) = E(e^{tW}) = \int_0^1 e^{t \log Z} dx = \int_0^1 Z^t dx = \left[ \frac{Z^{t+1}}{t+1} \right]_0^1 = \frac{1}{t+1}$$

Da cui

$$G'_w(t) = -\frac{1}{(t+1)^2} \quad \text{da cui } E(W) = G'_w(0) = -1$$

$$G''_w(t) = \frac{2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2}{(t+1)^3} \quad \text{da cui } E(W^2) = G'_w(0) = 2$$

$$\text{Var}(W) = 2 - 1 = 1$$

I risultati precedenti possono essere ricavati equivalentemente dalle definizioni di media e varianza osservando che:

- la funzione di ripartizione di  $W=\log Z$  è data da  $F_w(w) = P(W \leq w) = P(Z \leq e^w) = e^w$
- la funzione di densità di  $W=\log Z$  è data da  $\phi_w(w) = e^w$ .

6. Essendo  $M_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n Z_i}$  si ha  $\log M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Z_i$ .

Le variabili aleatorie  $\log Z_1, \dots, \log Z_n$  sono indipendenti essendo tali  $Z_1, \dots, Z_n$  e ammettono media e varianza finita (punto precedente).

Per il teorema centrale del limite allora

$$\frac{\log M_n + 1}{1/\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i + 1}{1/\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \log X_i + n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\log M_n \approx N\left(-1, \frac{1}{n}\right)$$

Quindi  $M_n$  è approssimativamente distribuita come una log-normale di parametri -1 e  $1/\sqrt{n}$ .

**Esercizio 13.** Si consideri la funzione di probabilità di una v.c. bidimensionale discreta (X,Y) definita dalla tabella seguente.

|        | Y = -2 | Y = 1 | Y = 3 |
|--------|--------|-------|-------|
| X = -2 | 0.1    | 2k    | k     |
| X = 4  | 4k     | 0.5   | k     |

1. Si determini il valore di k che rende la precedente una funzione di probabilità bivariata e si determinino le funzioni di probabilità delle v.c. marginali.
2. Si rappresentino graficamente la funzione di ripartizione marginale di X.
3. Si calcolino  $P(Y = 1 | X = 4)$  e  $P(X = 4 | Y = 1)$ .
4. Si stabilisca se X e Y sono indipendenti, motivando la risposta.
5. Si calcoli  $\text{Cov}(X,Y)$ .

**Soluzione**

1. Affinché la tabella definisca una funzione di probabilità occorre che

i)  $p(x,y) > 0$  da cui  $k > 0$

ii)  $\sum_y \sum_x p(xy) = 1$  da cui  $0.1 + 2k + k + 4k + 0.5 + k = 1$

$8k = 0.4$  e quindi  $k = 0.05$ .

Sostituendo si ottiene

|        | Y = -2 | Y = 1 | Y = 3 |
|--------|--------|-------|-------|
| X = -2 | 0.1    | 0.1   | 0.05  |
| X = 4  | 0.2    | 0.5   | 0.05  |

Le funzioni di probabilità delle v.a. marginali X e Y sono date, rispettivamente, da:

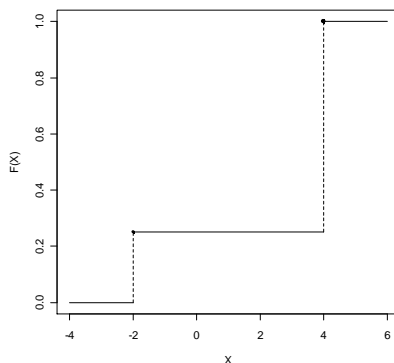
Posto  $P(X = x) = p(x)$  si ha

$p(-2) = 0.1 + 0.1 + 0.05 = \frac{1}{4}$  e

$p(4) = 0.2 + 0.5 + 0.05 = \frac{3}{4}$ ;

Posto  $P(Y=y) = q(y)$  si ha  $q(-2) = 0.3$ ,  $q(1) = 0.6$  e  $q(3) = 0.1$ .

2. Indicando con  $F(x) = P(X \leq x)$   $x = -2, 4$  si ha



3.  $P(Y = 1 | X = 4) = P(Y = 1, X = 4) / P(X = 4) = 0.5 / 0.75 = 2/3 = 0.667$  e

$P(X = 4 | Y = 1) = P(Y = 1, X = 4) / P(Y = 1) = 0.5 / 0.6 = 5/6 = 0.833$ .

4. X e Y non sono indipendenti. Se lo fossero infatti si avrebbe  $q(y | x) = q(y)$  per ogni x e y, ma nel caso in esame si ha  $P(Y = 1 | X = 4) = 2/3 = 0.667 \neq P(Y=1) = q(1) = 0.6$ .

5. Essendo:  $E(X) = -2 p(-2) + 4 p(4) = -2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 2.5$ ,  $E(Y) = 0.3$   $E(XY) = 0.9$ ,  
si ottiene  $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.15$ .

**Esercizio 14.** Un test a risposta multipla consiste di 100 quesiti. Ogni domanda ha 3 possibili risposte di cui solo una corretta. Uno studente risponde completamente a caso ad ogni quesito.

1. Dire qual è la distribuzione del numero di risposte corrette.
2. Calcolare la media e varianza del numero delle risposte corrette.
3. Specificare la distribuzione di  $(Y_1, Y_2, Y_3)$  dove  $Y_i$  è il numero di volte che lo studente fornisce la risposta  $i$ -esima  $i=1,2,3$ .
4. Calcolare  $E(Y_i)$ ,  $Var(Y_i)$ ,  $cov(Y_i, Y_j)$  e  $corr(Y_i, Y_j)$   $i=1,2,3$  e  $j \neq i$ .

**Soluzione**

1. Sia  $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{la risposta al quesito } i\text{-esimo è corretta} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

v.a. bernoulliana di parametro  $\theta_i$  con  $\theta_i = P(Z_i=1)=1/3=0.33$

Avendo 3 esiti possibili ed equiprobabili di cui solo uno vero, l'esperimento può essere visto come una prova a due esiti di cui un successo, (risposta corretta) ed un insuccesso (risposta errata) che si verifica con probabilità doppia rispetto al successo.

Posto  $X = \sum_{i=1}^{100} Z_i$ : numero di risposte corrette nei 100 quesiti,  $X$  è distribuita come una  $\text{Bin}(100, 0.33)$

2.  $E(X)=33$  e  $Var(X)=33 \times 0.66=21.8$
3.  $(Y_1, Y_2)$  è distribuito come una trinomiale di parametri  $(100, 0.33, 0.33)$

La situazione descritta nell'esercizio è infatti interpretabile come un esperimento che consiste di 100 prove indipendenti con tre possibili esiti (le tre risposte ai tre quesiti) rappresentanti altrettanti eventi incompatibili aventi probabilità 0.33.

4.  $Y_i$  è distribuito come  $\text{Bin}(n, \theta_i)$ , quindi  $Y_i$  è una v.a.  $\text{Bin}(100, 0.33)$   $i=1,2,3$  da cui  $E(Y_i) = 33$ ,  $Var(Y_i) = 21.8$ .

Si ha inoltre  $Cov(Y_i, Y_j) = -n \theta_i \theta_j = -100 \times 0.33 \times 0.33 = -11$  e  $corr(Y_i, Y_j) = -11/(21.8) = -0.5$

**Esercizio 15.** Siano  $Y_1, Y_2, Y_3$  v.a. indipendenti, con  $Y_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$ . Si determini la distribuzione condizionata di  $Y_1, Y_2$  dato  $Y_1+Y_2+Y_3 = n$  con  $n$  fissato.

**Soluzione**

$$P(Y_1=y_1, Y_2=y_2 \mid Y_1+Y_2+Y_3 = n) = P(Y_1=y_1, Y_2=y_2, Y_1+Y_2+Y_3 = n) / P(Y_1+Y_2+Y_3 = n).$$

$$Y_1+Y_2+Y_3 \sim \text{Poisson}(\theta) \text{ con } \theta = \sum_{j=1}^3 \theta_j \text{ per la riproduttività della Poisson;}$$

$$P(Y_1=y_1, Y_2=y_2, Y_3=n-y_1-y_2) = \frac{e^{-\theta_3} \theta_3^{n-y_1-y_2}}{(n-y_1-y_2)!} \prod_{i=1}^2 \frac{e^{-\theta_i} \theta_i^{y_i}}{y_i!} \text{ per l'indipendenza delle } Y_i \text{ } i=1,2,3.$$

Da cui, essendo  $n=y_1+y_2+y_3$ , si ha:

$$\begin{aligned} P(Y_1=y_1, Y_2=y_2 | Y_1+Y_2+Y_3=n) &= \\ &= \frac{n!}{y_1! y_2! (n-y_1-y_2)!} \theta_1^{y_1} \theta_2^{y_2} \theta_3^{n-y_1-y_2} \theta^{-(y_1+y_2+y_3)} e^{\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3} = \\ &= \frac{n!}{y_1! y_2! (n-y_1-y_2)!} \left(\frac{\theta_1}{\theta}\right)^{y_1} \left(\frac{\theta_2}{\theta}\right)^{y_2} \left(\frac{\theta_3}{\theta}\right)^{n-y_1-y_2}. \end{aligned}$$

Posto  $\pi_i = \theta_i / \theta$  si ottiene:

$$P(Y_1=y_1, Y_2=y_2 | Y_1+Y_2+Y_3=n) = \frac{n!}{y_1! y_2! (n-y_1-y_2)!} \pi_1^{y_1} \pi_2^{y_2} (1-\pi_1-\pi_2)^{(n-y_1-y_2)}$$

Ovvero una distribuzione trinomiale di parametri  $n, \pi_1, \pi_2$ .

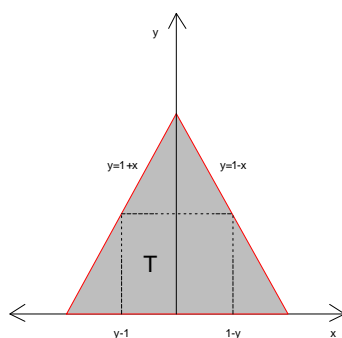
**Esercizio 16.** Si consideri una variabile casuale doppia  $(X,Y)$  avente distribuzione uniforme definita sul supporto individuato dai punti interni e dai lati del triangolo isoscele i cui vertici hanno coordinate  $(-1,0), (0,1), (1,0)$ .

1. Si scriva la funzione di densità della v.a.
2. Si determinino le distribuzioni marginali.
3. Si calcoli il valore atteso delle distribuzioni marginali.
4. Si calcoli la covarianza fra  $X$  e  $Y$ .
5. Si dica se  $X$  e  $Y$  sono fra loro indipendenti.

**Soluzione**

$$1. \varphi(x,y) = \begin{cases} k & -1 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1-|x| \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si indichi con  $T$  il supporto della v.a.  $(X,Y)$  (rappresentato in figura)



La fdd soddisfa  $\int_T \varphi(x, y) dx dy = 1$

$$\begin{aligned} \iint_T \varphi(x, y) dx dy &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} k dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} k dy dx = k \int_{-1}^0 (1+x) dx + k \int_0^1 (1-x) dx \\ &= k \left[ x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + k \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = k \left( -\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right) = k \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

Da cui  $k=1$ .

A questo si poteva giungere anche con un semplice ragionamento geometrico essendo l'area del triangolo pari a 1.

## 2. Distribuzione marginale di X:

$$\varphi_X(x) = \int_{T_y} \varphi(x, y) dy = \int_0^{1-|x|} dy = 1 - |x| \quad -1 \leq x \leq 1$$

Per controllo si può osservare che la funzione ottenuta è effettivamente una fdd in quanto

- positiva; infatti: per  $1 > x > 0$   $\varphi_X(x) = (1 - x) > 0$

per  $0 > x > -1$   $\varphi_X(x) = (1 + x) > 0$

- integra 1 sul supporto; infatti:

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left( 1 - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_{-1}^0 (1+x) dx = \left[ x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\left( -1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{da cui } \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_{-1}^0 (1+x) dx = 1.$$

$$\text{Distribuzione marginale di Y: } \varphi_Y(y) = \int_{y-1}^{1-y} dx = [x]_{y-1}^{1-y} = 1 - y - y + 1 = 2(1 - y) \quad 0 \leq y \leq 1$$

Per controllo si può osservare che la funzione ottenuta è effettivamente una fdd in quanto

- positiva; infatti  $\varphi(y) = 2(1 - y) > 0$  per ogni  $y$  t.c.  $0 < y < 1$

- integra 1 sul supporto; infatti:  $\int_0^1 \varphi_Y(y) dy = \int_0^1 2(1 - y) dy = [2y - y^2]_0^1 = 2 - 1 = 1.$

## 3. I valori attesi marginali sono

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^1 x \varphi_X(x) dx = \int_{-1}^1 x(1 - |x|) dx = \int_0^1 x(1 - x) dx + \int_{-1}^0 x(1 + x) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_{-1}^0 x dx + \int_{-1}^0 x^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$



$$E(Y) = \int_0^1 y \varphi_Y(y) dy = \int_0^1 2y(1-y) dy = \left[ y^2 - \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$4. \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \iint_T xy \varphi(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^{1-|x|} xy dy dx = \int_{-1}^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-|x|} dx = \int_{-1}^1 x \frac{(1-|x|)^2}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(1-2|x|+x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 2x|x| dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 - \int_0^1 x^2 dx - \int_{-1}^0 -x^2 dx + \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{da cui } \text{Cov}(X, Y) = 0 - 0 \frac{1}{3} = 0.$$

5. la densità congiunta di X e Y, se esse fossero indipendenti, è data da

$$\varphi_X(x) \varphi_Y(y) = 2(1-y)(1-|x|) \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1$$

essendo, per un generico punto (x,y),

$$\varphi_X(x) \varphi_Y(y) = 2(1-y)(1-|x|) \neq 1 = \varphi(x, y)$$

X e Y **non** sono stocasticamente indipendenti (pur essendo fra loro incorrelate)

### Esercizio 17.

1. Si trovi il valore della costante k per cui

$$f(x, y) = (x + y) / k \quad (0 < x < 2, 0 < y < 1)$$

rappresenta la funzione di densità di una v.c. bidimensionale (X, Y).

2. Si determinino le funzioni di densità delle v.c. marginali.

3. Si stabilisca se X e Y sono indipendenti, motivando la risposta.

4. Si calcoli  $P(Y < 0.5 \mid X < 1)$ .

5. Si calcoli  $P(X < 1 \mid Y < 1.5)$  e si commenti il risultato.

### Soluzione

1.  $k = 3$ . Infatti si ha dalla definizione di funzione di densità

-)  $k > 0$  (dovendo essere  $f(x, y) > 0$  sul supporto)

$$\text{-) } \int_0^1 \int_0^2 \frac{x+y}{k} dx dy = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \frac{x+y}{k} dx dy = \frac{1}{k} \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^2 dx = \frac{1}{k} \int_0^1 2 + 2y dy = \frac{2}{k} \int_0^1 1 + y dy = \frac{2}{k} \left[ y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{k} = 1$$

2. Le f.d. marginali sono date, rispettivamente, da

$$f(x) = \int_0^1 \frac{x+y}{3} dy = \frac{1}{3} \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = (2x+1)/6 \quad (0 < x < 2) \text{ e}$$

$$g(y) = \int_0^2 \frac{x+y}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^2 = 2(y+1)/3 \quad (0 < y < 1).$$

3. X e Y non sono indipendenti infatti  $f(x,y) \neq f(x)f(y)$  per un generico  $(x,y)$  nel supporto

4.  $P(Y < 0.5 \mid X < 1) = P(X < 1, Y < 0.5) / P(X < 1) = (1/8) / (1/3) = 3/8 = 0.375$ .

$$\text{dove } P(X < 1) = \int_0^1 \frac{2x+1}{6} dx = \frac{1}{6} [x^2 + x]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{e } P(X < 1, Y < 0.5) = \int_0^{0.5} \int_0^1 \frac{x+y}{3} dy dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{0.5} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 x + \frac{1}{4} dx = \frac{1}{8}$$

5.  $P(X < 1 \mid Y < 1.5) = P(X < 1, Y < 1.5) / P(Y < 1.5) = P(X < 1) = 1/3$ .

Essendo  $P(Y < 1.5) = 1$  e  $P(X < 1, Y < 1.5) = P(X < 1)$

**Esercizio 18.** Sia  $(X,Y)$  una variabile casuale normale bivariata di parametri  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  e  $\rho$ . Si determini:

1. le distribuzioni marginali di X e Y;
2. la fdd condizionata  $\phi(x|y)$  e  $\phi(y|x)$ ;
3. la media e la varianza della v.a. media aritmetica  $Z=(X+Y)/2$  nel caso di  $\rho=0$ ;
4. la media e la varianza della v.a.  $W=(X+Y)/2$  nel caso di  $\rho \neq 0$ .
5. Qual è la distribuzione della variabile Z?

### Soluzione

La funzione di densità di una normale bivariata è data da:

$$\phi(x, y, \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \left( \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right) + \left( \frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right)}$$

1. Distribuzione marginale di X

$$\varphi(x, \mu_x, \sigma_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)} dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right)} dy$$

posto  $t = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$  da cui  $y = \mu_y + \sigma_y t$  e  $dy = \sigma_y dt$  si ha

$$\begin{aligned}\varphi(x, \mu_x, \sigma_x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(-\rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(t - \rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \sigma_y dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(t - \rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(t - \rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} dt\end{aligned}$$

da cui

$$\varphi(x, \mu_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} = \phi(x, \mu_x, \sigma_x)$$

$$\text{essendo: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(t - \rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(t, \mu_y + \rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}, 1-\rho^2\right) dt = 1.$$

In modo analogo, ripetendo la stessa procedura invertendo il ruolo di X e Y, si ha:

$$\varphi(y, \mu_y, \sigma_y) = \phi(y, \mu_y, \sigma_y)$$

2. la funzione di densità condizionata  $Y|X$  è data da

$$\varphi(y | x, \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho) = \frac{\phi(x, y, \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)}{\phi(x, \mu_x, \sigma_x)}$$

per definizione di distribuzione condizionata.

$$\begin{aligned} \varphi(y | x, \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho) &= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)} \\ \varphi(y | x, \mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - \rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\right)} \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_Y^2}\left(y-\mu_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)\right)^2} \\ \varphi(y | x, \mu_{Y|X}, \sigma_{Y|X}) &= \phi\left(y, \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), (1-\rho^2)\sigma_Y^2\right) \end{aligned}$$

Si noti:

- la media condizionata è una funzione lineare della variabile condizionante. La pendenza della retta non dipende solo dalla correlazione esistente fra X e Y ma anche dalla loro variabilità;
- la media condizionata non dipende dalla variabile condizionante se  $\rho=0$  (condizione quest'ultima che implica l'indipendenza nel caso della normale bivariata), caso in cui si ha  $\mu_{Y|X} = \mu_Y$  (il valore atteso condizionato coincide con quello marginale);
- la varianza condizionata non dipende dai valori di X;
- la varianza condizionata è non superiore a quella marginale essendo  $1-\rho^2 \leq 1$ . Esse coincidono se  $\rho=0$ .

In modo analogo, ripetendo la stessa procedura invertendo il ruolo di X e Y, si ha:

$$\varphi(x | y, \mu_{X|Y}, \sigma_{X|Y}) = \phi\left(x, \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y), (1-\rho^2)\sigma_X^2\right)$$

$$3. E(Z) = E\left(\frac{X + Y}{2}\right) = \frac{E(X) + E(Y)}{2} = \frac{\mu_X + \mu_Y}{2}$$

Si noti che se  $E(X)=E(Y)=\mu$ , allora il valore atteso della la media aritmetica delle due v.a. è pari a  $\mu$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X + Y}{2}\right) = \frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}{4} = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{4}$$

Si noti che se  $X \stackrel{d}{=} Y$  con varianza  $\sigma^2$  allora  $\text{Var}(Z) = \frac{\sigma^2}{2}$ .

$$4. E(W) = \frac{\mu_X + \mu_Y}{2} \quad (=E(Z))$$

$$\text{Var}(W) = \text{Var}\left(\frac{X + Y}{2}\right) = \frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)}{4} = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\rho\sigma_X\sigma_Y}{4}.$$

Si noti che la varianza della v.a. “media aritmetica” nel caso di correlazione tra le variabili è maggiore (minore) della varianza della v.a. ”media aritmetica” nel caso di assenza di correlazione, se la correlazione è positiva (negativa).

5. Nel caso di indipendenza fra X e Y,  $U=X+Y$  ha distribuzione normale con media  $\mu_X + \mu_Y$  e varianza  $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$  per la proprietà riproduttiva della normale rispetto al valore atteso e alla varianza.

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(U/2 \leq z) = P(U \leq 2z) = \Phi(2z, \mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{dF(z)}{dz} = 2\phi\left(2z, \mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2\right) = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2z - (\mu_X + \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}}\right)^2} \\ \phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)/4}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \left(\frac{\mu_X + \mu_Y}{2}\right)}{\sqrt{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)/4}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)/4}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \left(\frac{\mu_X + \mu_Y}{2}\right)}{\sqrt{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)/4}}\right)^2} = \phi\left(z, \frac{\mu_X + \mu_Y}{2}, \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{4}\right). \end{aligned}$$

**Esercizio 19** Si supponga che il livello X di colesterolo in una certa popolazione abbia distribuzione Normale con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$  (in mg per 100 ml).

Sapendo che  $\mu = 260$  e  $\sigma^2 = 3600$ ,

- 1) si calcoli la probabilità che il livello di colesterolo sia inferiore a 360;
- 2) si calcoli la probabilità che il livello di colesterolo sia superiore a 250;
- 3) si determini il livello di colesterolo superato dal 90% della popolazione.

Se inoltre si dispone di una seconda misura Y del livello di colesterolo, indipendente da X e caratterizzata da una distribuzione Normale con media 250 e varianza 3500,

- 4) si determini la distribuzione della media aritmetica di X e Y.

### Soluzione

X livello di colesterolo in una popolazione

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$  con  $\mu_X = 260$  e  $\sigma_X^2 = 3600$  quindi  $\sigma_X = 60$

1)  $P(X < 360) = P(Z < 5/3) = 0.9515$  dove  $Z \sim N(0,1)$ ;

2)  $P(X > 250) = 0.5675$ ;

3)  $x = 183.2$  è soluzione dell'equazione

$$P(X > x) = P\left(Z > \frac{x - 260}{60}\right) = 0.9 \text{ da cui } \frac{x - 260}{60} = -1.28$$

- 4) Si suppone di disporre di una seconda misura Y del livello di colesterolo, indipendente da X e caratterizzata da una distribuzione Normale con media  $\mu_Y = 250$  e varianza  $\sigma_Y^2 = 3500$ .

$W = (X + Y)/2$  ha distribuzione Normale con media 255 e varianza 1775.

Infatti:

$$G_W(t) = E(e^{itW}) = E\left(e^{\frac{itX}{2}} e^{\frac{itY}{2}}\right) = E\left(e^{\frac{itX}{2}}\right) E\left(e^{\frac{itY}{2}}\right) = e^{\frac{t}{2}\mu_X + \left(\frac{t\sigma_X}{2}\right)^2} e^{\frac{t}{2}\mu_Y + \left(\frac{t\sigma_Y}{2}\right)^2} = e^{\frac{t}{2}(\mu_X + \mu_Y) + \frac{t^2(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}{4}} \text{ Que}$$

st'ultima è la fgm di una normale di media  $\frac{\mu_X + \mu_Y}{2} = 255$  e varianza  $\frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}{4} = 1775$

**Esercizio 20.** Si supponga che il livello  $X$  di una sostanza inquinante abbia distribuzione Normale con media  $\mu$  e deviazione standard  $\sigma$  (in microgrammi per metro cubo).

Sapendo che  $\mu = 260$  e  $\sigma^2 = 3600$ ,

1. si calcoli la probabilità che il livello dell'inquinante sia inferiore a 340;
2. si determini il livello dell'inquinante superato con probabilità 0.95.

Se inoltre si dispone di una seconda misura  $Y$  del livello dell'inquinante, indipendente da  $X$  e con la medesima distribuzione Normale,

3. si determini la distribuzione congiunta di  $X$  e  $Y$ , motivando la risposta;
4. si determini la distribuzione della differenza tra  $X$  e  $Y$ , motivando la risposta.
5. Il livello  $U$  di un altro inquinante ha distribuzione  $N(\mu, \sigma^2)$ . Sapendo che la probabilità che il livello dell'inquinante sia inferiore a 182.3 è pari a 0.1 e la probabilità che tale livello sia superiore a 359 è pari a 0.05, si determinino la media  $\mu$  e la deviazione standard  $\sigma$  della distribuzione di  $U$ .

### Soluzione

$X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\mu = 260$  e  $\sigma^2 = 3600$ .

1.  $P(X < 340) = P\left(\frac{X - 260}{60} < \frac{340 - 260}{60}\right) = P\left(Z < \frac{80}{60}\right) = P(Z < 1.33) = 0.908;$
2.  $x = 161.6$  è soluzione dell'equazione  $P(X > x) = P\left(z > \frac{x - 260}{60}\right) = 0.95.$

Infatti si ha  $\frac{x - 260}{60} = -1.64$  e quindi  $x = 260 - 1.64 \times 60 = 161.6$ .

3. La funzione di densità congiunta è data dal prodotto delle densità marginali per l'assunzione di indipendenza tra  $X$  e  $Y$ . Dato che  $X \stackrel{d}{=} Y$  si ha

$$\phi(x, y, \mu_X = \mu_Y = 260, \sigma_X = \sigma_Y = 60, \rho = 0) = \frac{1}{2\pi 3600} e^{-\frac{1}{2} \left( \left( \frac{x-260}{60} \right)^2 + \left( \frac{y-260}{60} \right)^2 \right)}$$

4.  $W = X - Y$  ha distribuzione Normale con media 0 e varianza 7200.

Infatti:  $G_W(t) = E(e^{tW}) = E(e^{tX} e^{-tY}) = E(e^{tX}) E(e^{-tY}) = G_X(t) G_Y(-t) = e^{t\mu + (t\sigma)^2} e^{-t\mu + (t\sigma)^2} = e^{2t^2\sigma^2}$

Quest'ultima è la fgm di una normale di media 0 e varianza  $2\sigma^2 = 7200$

5. Sapendo che la probabilità che il livello  $U$  sia inferiore a 182.3 è pari a 0.1 e la probabilità che tale livello sia superiore a 359 è pari a 0.05,  $U$  ha distribuzione Normale con media 259.8 e deviazione standard 60.5.

Al risultato si giunge risolvendo per  $\mu$  e  $\sigma$  il sistema

$$P(U > 359) = P(Z < (359 - \mu)/\sigma) = 0.05$$

$$P(U < 182.3) = P(Z < (182.3 - \mu)/\sigma) = 0.1$$

### Esercizio 21.

- 1) Si trovi il valore della costante  $k$  per cui

$$f(x, y) = k + e^{-x-y} \quad (x, y > 0)$$

rappresenta la funzione di densità di una v.c. bidimensionale  $(X, Y)$ .

- 2) Si determinino le funzioni di ripartizione delle v.c. marginali.  
 3) Si determinino le funzioni di densità delle v.c. marginali.  
 4) Si stabilisca se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti, motivando la risposta.  
 5) Si stabilisca se  $X$  e  $Y$  sono identicamente distribuite, motivando la risposta.

Siano  $X_1, \dots, X_n$  v.a. indipendenti e distribuite come  $X$  e si consideri la v.c. somma  $S = \sum X_i$ .

- 6) Si determini la distribuzione di  $S$ .  
 7) Si stabilisca se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema Centrale del Limite e si determini un'approssimazione Normale per  $S$  nel caso in cui  $n = 150$ .

### Soluzione

1.  $k = 0$ .

Infatti:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty k + e^{-x-y} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty k dx dy + \int_0^\infty e^{-x} dx \int_0^\infty e^{-y} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty k dx dy + [-e^{-x}]_0^\infty \times [-e^{-y}]_0^\infty = \int_0^\infty \int_0^\infty k dx dy + 1.$$

L'ultimo integrale è illimitato qualunque sia il valore di  $k \neq 0$ .

Per  $k=0$  la funzione integra 1 sul suo supporto ed è su esso positiva.

2. Le funzioni di ripartizione delle v.c. marginali risultano:

$$- \quad G(x) = \int_0^x \int_0^\infty e^{-t-y} dy dt = \int_0^x e^{-t} \int_0^\infty e^{-y} dy dt = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \quad (x > 0),$$

$$G(x) = 0 \quad (x \leq 0);$$

$$- \quad H(y) = \int_0^y \int_0^\infty e^{-x-t} dx dt = \int_0^y e^{-t} \int_0^\infty e^{-x} dx dt = \int_0^y e^{-t} dt = 1 - e^{-y} \quad (y > 0),$$



$$H(y) = 0 \quad (y \leq 0).$$

3. Le funzioni di densità delle v.c. marginali risultano:

$$- \quad g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = e^{-x} \quad (x > 0) \quad (\text{esponenziale negativa di parametro unitario});$$

$$- \quad h(y) = \frac{dH(y)}{dy} = e^{-y} \quad (y > 0) \quad (\text{esponenziale negativa di parametro unitario});$$

4. X e Y sono indipendenti essendo  $g(x)h(y)=f(x,y)$ .

5. X e Y sono identicamente distribuite (esponenziali negative con parametro unitario).

Siano  $X_1, \dots, X_n$  v.c. indipendenti e distribuite come X e sia  $S = \sum X_i$ .

6. S ha distribuzione  $\text{Gamma}(n,1)$ . Il risultato consegue dalla proprietà riproduttiva della gamma essendo l'esponenziale negativa una gamma di parametri  $(1, \theta)$ . In particolare nel presente esercizio  $\theta=1$ .

7. Le ipotesi del Teorema Centrale del Limite sono soddisfatte.

Infatti le n v.c. sono indipendenti e identicamente distribuite (essendo tutte distribuite come X e quindi v.c. esponenziali negative di parametro unitario) con media e varianza finite (pari a 1).

Al divergere di n, la successione di v.c.  $\{Z_n\}$  con  $Z_n = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}$  è tale che  $Z_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ .

Essendo n grande ( $n=150$ )  $Z_n$  è approssimativamente distribuita come una  $N(0,1)$  e quindi S è approssimabile con una Normale con media e varianza entrambe pari a 150 essendo:

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{150} X_i\right) = \sum_{i=1}^{150} E(X_i) = 150 \quad \text{e}$$

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{150} X_i\right) = \sum_{i=1}^{150} \text{Var}(X_i) = 150 \quad (\text{si ricordi che le } X_i \text{ sono indipendenti}).$$

Alternativamente si può osservare che, se S è una  $\text{gamma}(150,1)$ , allora  $E(S)=\text{Var}(S)=150$ .

## Esercizio 22.

1. Si trovi il valore della costante k per cui  $f(x,y) = \frac{e^{-x}y}{k}$ ,  $x>0$  e  $0<y<1$ , rappresenta la funzione di densità di una v.c. bidimensionale  $(X,Y)$ .
2. Si determinino le funzioni di densità delle v.c. marginali.
3. Si stabilisca se X e Y sono indipendenti e identicamente distribuite, motivando la risposta.

Siano  $X_1, \dots, X_n$  v.c. indipendenti e distribuite come X e si consideri la v.c. somma  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

4. Si determini la distribuzione di  $S_n$ .
5. Dopo aver verificato che le ipotesi del Teorema Centrale del Limite sono soddisfatte, si determini un'approssimazione Normale per  $S_n$  nel caso in cui  $n = 400$  e, sulla base di questa, si calcoli  $P(350 < S_n < 450)$ .
6. Si stabilisca il limite a cui converge in probabilità  $S_n/n$  motivando la risposta fornita.

### Soluzione

1.  $k = 1/2$ .

Infatti si ha

$$\int_0^1 \int_0^\infty \frac{e^{-x} y}{k} dx dy = \frac{1}{k} \int_0^1 \int_0^\infty e^{-x} y dx dy = \frac{1}{k} \int_0^1 y dy \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{k} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 [-e^{-x}]_0^\infty = \frac{1}{k} \frac{1}{2} [- (0 - 1)] = \frac{1}{k2} = 1$$

2. Le funzioni di densità delle v.c. marginali risultano:

$$g(x) = e^{-x} \quad (x > 0) \quad \text{essendo} \quad g(x) = \int_0^1 2e^{-x} y dy = e^{-x} [y^2]_0^1 = e^{-x}$$

$$h(y) = 2y \quad (0 < y < 1) \quad \text{essendo} \quad h(y) = \int_0^\infty 2e^{-x} y dx = 2y [-e^{-x}]_0^\infty = 2y.$$

3. X e Y sono indipendenti, ma non sono identicamente distribuite essendo per un generico x e y

$$g(x) = e^{-x} \neq 2y = h(y) \quad \text{e}$$

$$g(x) h(y) = e^{-x} 2y = f(x, y).$$

4.  $S_n$  ha distribuzione  $\text{Gamma}(n, 1)$ .

Il risultato discende dall'osservare che X ha distribuzione esponenziale di parametro 1 ovvero X è una v.a.  $\text{Gamma}(1, 1)$ .

$X_1, \dots, X_n$  sono quindi n v.c. gamma di parametro (1, 1)

Il risultato consegue dalla proprietà riproduttiva della gamma rispetto al parametro di forma  $\alpha$

con riferimento ad una parametrizzazione del tipo  $\phi(t, \alpha, \theta) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\theta t}$  nel caso particolare

in cui  $\theta=1$  (esponenziale negativa).

5. Le ipotesi del Teorema Centrale del Limite sono soddisfatte.

Infatti le n v.c. sono indipendenti e identicamente distribuite essendo tutte distribuite come X e quindi v.c. esponenziali negative di parametro unitario, con media e varianza pari a 1.

Dunque la successione di v.c.  $\{Z_n\}$  con  $Z_n = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}$  è tale che  $Z_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$ .

Essendo  $n$  grande ( $n=400$ )  $Z_n$  è approssimativamente distribuita come una  $N(0,1)$  e quindi  $S_n$  è approssimabile con una Normale con media e varianza entrambe pari a 400.

Per il calcolo della media e della varianza si osservi che  $E(X) = \text{Var}(X) = 1$  da cui:

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} E(X_i) = 400 \text{ e}$$

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{400} X_i\right) = \sum_{i=1}^{400} \text{Var}(X_i) = 400 \text{ (si ricordi che le } X_i \text{ sono indipendenti).}$$

Infine si ha

$$P(350 < S < 450) = P\left(\frac{350 - 400}{20} < Z < \frac{450 - 400}{20}\right) = P\left(-\frac{5}{2} < Z < \frac{5}{2}\right) = 0.9938 - 0.0062 = 0.9876.$$

**Esercizio 23.** Si definisce entropia (di Shannon) della variabile casuale discreta doppia  $X, Y$  con distribuzione congiunta  $p(x_i, y_j) = P(X=x_i, Y=y_j)$   $i=1, \dots, I$  e  $j=1, \dots, J$  e  $p(x_i, y_j) > 0$  il seguente valore atteso:

$$H(X, Y) = E(-\log p(X, Y)).$$

Si dimostri che nel caso in cui  $X$  e  $Y$  siano indipendenti si ottiene  $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$

dove  $H(X) = E(-\log p(X))$  ( $H(Y)$  è definita in modo analogo)

### Soluzione

Esplicitando i valori attesi si ottiene

$$H(X) = E(-\log p(X)) = -\sum_{i=1}^I p(x_i) \log p(x_i)$$

e

$$H(X, Y) = E(-\log p(X, Y)) = -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j).$$

In caso di indipendenza si ottiene

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p(x_i) p(y_j) \log[p(x_i) p(y_j)] = -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p(x_i) p(y_j) [\log p(x_i) + \log p(y_j)] \\ &= -\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p(x_i) p(y_j) \log p(x_i) - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p(x_i) p(y_j) \log p(y_j) = \end{aligned}$$

$$= - \left[ \sum_{i=1}^I p(x_i) \log p(x_i) \sum_{j=1}^J p(y_j) \right] - \left[ \sum_{i=1}^I p(x_i) p(x_i) \sum_{j=1}^J p(y_j) \log p(y_j) \right] =$$

$$= - \sum_{i=1}^I p(x_i) \log p(x_i) - \sum_{j=1}^J p(y_j) \log p(y_j) = H(X) + H(Y)$$

**Esercizio 24.** Sia  $X$  una v.c. di Bernoulli con parametro 0.5 e sia  $Y$  una v.c. tale che  $P(Y=1|X=0)=0.1$ ,  $P(Y=2|X=0)=0.4$ ,  $P(Y=3|X=0)=0.5$  e  $P(Y=1|X=1)=0.5$ ,  $P(Y=2|X=1)=0.4$ ,  $P(Y=3|X=1)=0.1$ .

1. si determinino le funzioni di probabilità di  $(X,Y)$  e di  $Y$ .
2. si calcolino la media e la varianza di  $Y$ .
3. si stabilisca se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti e/o identicamente distribuite, motivando le risposte.
4. si calcolino la covarianza e il coefficiente di correlazione lineare fra  $X$  e  $Y$ .

Si consideri la successione  $U_n$  costituita da v.c. indipendenti e distribuite come la v.c.  $U = X / Y$ .

1. si determinino la funzione di densità e di ripartizione di  $U$  e le si rappresentino graficamente
2. si determini il limite a cui converge in probabilità  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$ , motivando la risposta;

### Soluzione

1. La distribuzione congiunta è riportata nella tabella seguente

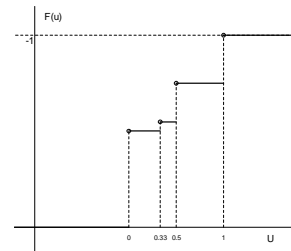
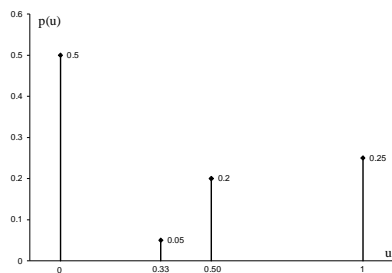
| $X \backslash Y$ | 1    | 2   | 3    |
|------------------|------|-----|------|
| 0                | 0.05 | 0.2 | 0.25 |
| 1                | 0.25 | 0.2 | 0.05 |

La f.p. della v.c.  $Y$  è data da:  $P(Y=1)=0.3$ ,  $P(Y=2)=0.4$ ,  $P(Y=3)=0.3$ .

2.  $E(Y)=2$  e  $\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 4.6 - 4 = 0.6$ .
3.  $X$  e  $Y$  non sono indipendenti. Per esempio  $P(Y=1)=0.3$  e  $P(X=1)=0.5$  da cui  $P(Y=1)P(X=1)=0.15 \neq P(X=1,Y=1)=0.25$ ;  
 $X$  e  $Y$  non sono identicamente distribuite avendo perfino supporto diverso.
4. Essendo  $E(XY) = 0.8$ , si ha  $\text{Cov}(X,Y) = -0.2$  e  $\rho(X,Y) = -0.5164$ .
5. La funzione di probabilità di  $U$ ,  $p(u)=P(U=u)$ , è  
 $P(U=0)=0.5$ ,  $P(U=0.33)=0.05$ ,  $P(U=0.50)=0.2$ ,  $P(U=1)=0.25$ .  
 La funzione di ripartizione è una funzione a gradini *cadlag* data da:

$$F(u) = \begin{cases} 1 & u \geq 1 \\ 0.75 & 0.5 \leq u < 1 \\ 0.55 & 0.33 \leq u < 0.5 \\ 0.5 & 0 \leq u < 0.33 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$$

Le due funzioni sono rappresentate di seguito



6. si ha  $E(U)=0.367$  e, per la legge dei grandi numeri,  $\sum U_i / n$  converge in probabilità a  $E(U)=0.367$ .