PROBLEMA DELLE CONCORDANZE (CONTINUAZIONE)

È stato già ottenuto che

$$\mathbb{P}(E_{0,n}) = \mathbb{P}(M_n = 0)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

ridotta della serie esponenziale di punto iniziale 0 e argomento -1

si aggiunge $(1-1)$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

Da tale risultato è possibile ottenere

Da tale [illegible] è [illegible]
il numero delle mischiate che presentano 0 concordanze in n chiamate.

Infatti,

$n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{0,n}) = \frac{\#\text{ mischiate con 0 concordanze nelle } n\text{ - chiamate}}{n!} \Rightarrow$$

$$\#\text{ mischiate con 0 concordanze nelle } n\text{- chiamate} = n!\,\mathbb{P}(E_{0,n}).$$

Ora bisogna calcolare:

$k = (0, 1, \dots, n)$, $\mathbb{P}(E_{k,n}) = \mathbb{P}(M_n = k)$.

In primo luogo consideriamo l'evento

$A_{k,n}$:

$$\{M_{n-k} = 0\} = E_{0,n-k}$$

per il quale le k- concordanze si verificano nelle prime k- chiamate.

Risulta:

$$\mathbb{P}(A_{k,n}) = \frac{\#\text{ mischiate con 0 concordanze in } n-k \text{ chiamate}}{n!}$$

$$= \frac{(n-k)!\ \mathbb{P}(E_{0,n-k})}{n!}.$$

D'altra parte, ci sono $\binom{n}{k}$ permutazioni con ripetizione di k lettere uguali a C e $n-k$ lettere uguali a D.

In definitiva:

$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(E_{k,n}) = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!\,\mathbb{P}(E_{0,n-k})}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} \, \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}} \, \mathbb{P}(E_{0,n-k})$$

$$= \frac{1}{k!} \mathbb{P}(E_{0,n-k}) = \frac{1}{k!} \mathbb{P}(M_{n-k} = 0)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

In particolare, risulta:

$$\mathbb{P}(M_n = n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-n} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{n!}.$$

In conclusione M_n è un numero aleatorio:

$$S_{M_n} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

e

$$k \in S_{M_n}, \quad \mathbb{P}(M_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!} .$$

$\square$

Si ricordi che

W_k è il numero delle prove per osservare il k-mo successo per la prima volta in uno schema di Bernoulli.

$$S_{W_k} = \{k, k+1, \dots\},$$

e

$$n \in S_{W_k}, \quad \mathbb{P}(W_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

PROBLEMA DELLA RIPARTIZIONE DELLA POSTA

Partite interrotte nel 5 - 3.

Il giocatore in svantaggio, nel caso che la partita possa essere continuata, vince se raggiunge i 6 punti entro i prossimi tre lanci, ovvero se si presenta l'evento

$$\{W_3 = 3\} \quad \text{con} \quad p = 1/2.$$

Infatti, a lui occorrono ulteriori 3 pun-

ti è nessun punto per l'avversario.
Allora, bisogna calcolare:

$$\mathbb{P}\left(X_{\underset{\substack{\uparrow \\ k}}{3}} = \underset{\substack{\uparrow \\ n}}{3}\right) = \binom{2}{2} p^3 (1-p)^0 = p^3 = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}.$$

Partita è interrotta sul 4 a 2.

Il giocatore in svantaggio, nel caso la partita possa essere continuata, vince se raggiunge i 6 punti entro i prossimi quattro lanci o entro i prossimi cinque lanci, ovvero prima che il suo avversario ottenga altri due punti. Quindi, si deve verificare almeno uno tra i seguenti eventi:

eventi.

$$
\begin{array}{ccccc}
C & C & C & C & \\
\end{array}
\iff \{W_4 = 4\},
$$

$$
\left.\begin{array}{ccccc}
C & C & C & T & C \\
C & T & C & C & C \\
T & C & C & C & C \\
C & C & T & C & C
\end{array}\right\}
\iff \{W_4 = 5\}.
$$

Quindi, egli vince la partita con probabilità: (per la finita additività)

$$
\mathbb{P}(W_4 = 4) + \mathbb{P}(W_4 = 5)
$$

$$
= \binom{3}{3} p^4 (1-p)^0 + \binom{4}{3} p^4 (1-p)^1
$$

$$
= p^4 + 4\, p^4 (1-p)
$$

$$
= \frac{1}{16} + \cancelto{2}{4}\, \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\cancelto{1}{2}} = \frac{3}{16}. \qquad \square
$$

LA LEGGE DI POISSON

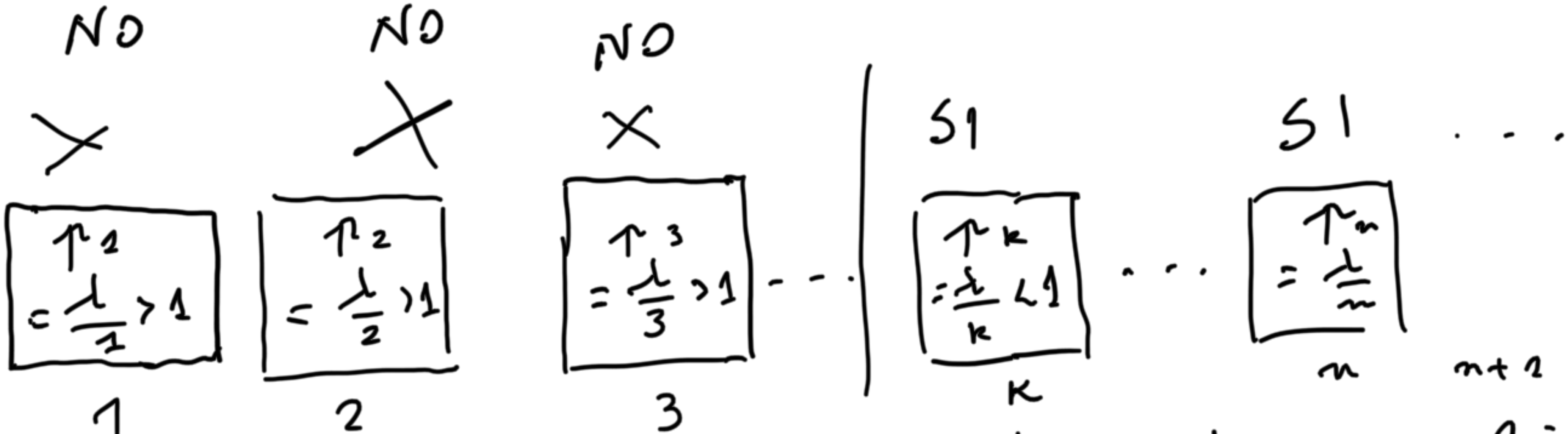
Abbiamo già visto che lo schema di Bernoulli può essere generalizzato considerando una composizione di un numero finito di schemi di Bernoulli indipendenti e con lo stesso parametro:

$$W_k = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \cdots + T_1^{(k)}$$

si riposiziona il contatore delle prove

Adesso, consideriamo una successione di schemi di Bernoulli indipendenti ciascuno dotato di un proprio para-

e ciascuno ...
metro p_n.



- una successione di schemi binomiali
- un numero reale λ positivo

Si vuole calcolare il seguente limite:

$k = (0, 1, 2, \dots, n)$,

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda}} \underbrace{\mathbb{P}(S_n = k)} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda}} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} n p = \lambda .$$

Si può semplificare, considerando

$$n \in \mathbb{N}, \quad n\, p_n = \lambda \iff p_n = \frac{\lambda}{n} .$$

Allora,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n = k) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \, \frac{\lambda^k}{n^k} \, \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \right]$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{(n-0)(n-1)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{\quad} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\quad}$$

$$= \frac{\ldots}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{\ldots}{n^k} \cdot \frac{\ldots}{\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\ldots}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(n-0)\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n \cdots n}}_{=1} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}_{1}}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \qquad (a^b)^c = a^{bc}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \qquad \left(-\frac{n}{\lambda}\right)^{-\lambda} = -\frac{n}{\lambda}(-\lambda) = n$$

$$e := \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow} = \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{\lambda} = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^{\lambda}$$

= una successione crescente e limitata < 3

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (*)$$

$$k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Un numero aleatorio X che ha spettro $\mathbb{N}_0$ e relative probabilità come nella $(*)$ si dice avere legge di Poisson con parametro λ e si scrive:

$$X \sim \Pi(\lambda), \quad \boxed{\lambda > 0}$$

$$S_X = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

e

$$k \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \lambda^k$$

$k \in \mathbb{N}_0$, "$P(X=k) = \dots \frac{\;}{k!}$."

La legge di Poisson è detta "dei piccoli numeri" o "degli eventi rari". Ciò è dovuto alla rapida decrescita verso 0 di $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ al crescere di k.

Ciò, ovviamente, è dovuto al fattoriale di k che compare nel denominatore.