TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$n \downarrow$ \ $k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
⋮							
n							
⋮							

i numeri triangolari

$t_1 = 1$

$n \geq 1, \ t_n = t_{n-1} + n$

SOMMA

$1 = 2^0$
$2 = 2^1$
$4 = 2^2$
$8 = 2^3$
$16 = 2^4$
$32 = 2^5$
⋮
2^n
⋮

SOMMA A SEGNI ALTERNI

0
0
0
0
0
0
⋮
0
⋮

INTERPRETAZIONE INSIEMISTICA

Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ conta il numero dei sottoinsiemi di cardinalità k costituiti dagli elementi di un insieme …

di cardinalità n, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ in c'è corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi e combinazioni semplici.

ESEMPI

$e_1 \, e_2 \longrightarrow \{e_1, e_2\}$

$\cancel{e_2 \, e_1}$

$e_1 \, e_2 \, e_4 \longleftarrow \{e_1, e_2, e_4\}$

$e_3 \longleftrightarrow \{e_3\}$

ALCUNI RISULTATI

- $\binom{n}{0} = 1$

Infatti, c'è un solo sottoinsieme di cardinalità 0: l'insieme vuoto.

- $\binom{n}{n} = 1$

Infatti, c'è un ~~solo~~ solo sottoinsieme di cardinalità n: l'insieme stesso.

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Infatti, ad ogni sottoinsieme di cardinalità k corrisponde biunivocamente il sottoinsieme complementare.

Esempi

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$k=2$

$$\{e_1, e_2\} \longleftrightarrow \{e_3, e_4, e_5\}$$

$$\{e_1, e_3\} \longleftrightarrow \{e_2, e_4, e_5\}$$

$$\{e_3, e_5\} \longleftrightarrow \{e_1, e_2, e_4\}$$

- $n \geq 1$, $\quad 1 \leq k < n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$\cancel{e_n}$ $\qquad e_n$

Infatti, i sottoinsiemi di cardinalità k si possono ottenere con i primi $n-1$ elementi dell'insieme di cardinalità n.

In più ci sono i sottoinsiemi di cardinalità k che contengono l'ultimo elemento.

Esempi $\qquad \{e_1, e_2, --, e_{n-1}, e_n\}$

$k=3 \qquad \{e_1, e_2, e_3\}, \quad \{e_2, e_3, e_{n-2}\}$

$\{e_{n-3}, e_{n-2}, e_{n-1}\}$

$$\ldots\ldots$$

$$\{e_1, e_2, e_n\}, \quad \{e_4, e_5, e_n\}$$

$$\{e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\}$$

- Un sottoinsieme di cardinalità n ammette 2^n sottoinsiemi.

DIM

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \quad \{A, P\}$$

	e_1	e_2	e_3	---	e_{n-1}	e_n
$\{e_1, e_3\} \to$	P	A	P	A ---	A	A
$\{e_1, e_2, e_3\} \to$	P	P	P	A ---	A	A
$\{e_n\} \to$	A	A	A	A --	A	P

$\{e_n\}$ A A

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ P P P P ... P P

A A A A ... A A

$\emptyset$

Da questa trasformazione biunivoca si ottiene che i sottoinsiemi di $\{e_1, \dots, e_n\}$ sono tanti quante sono le disposizioni con ripetizione di lunghezza n tratte da $\{A, P\}$: $D^{(r)}_{2,n} = 2^n$.

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Infatti, $\binom{n}{k}$ è il numero dei sottoinsiemi di cardinalità k costituiti dagli elementi di $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

e la loro somma rappresenta il numero complessivo dei sottoinsiemi di $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ovvero 2^n.

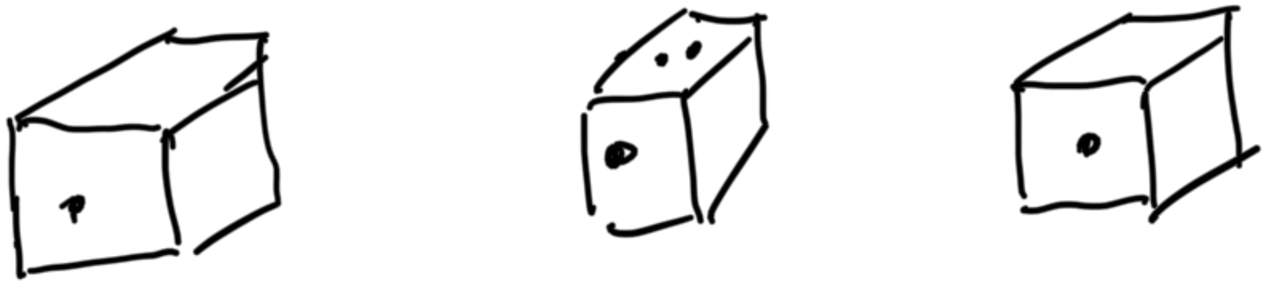
- $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

DIM

La base è fornita da $n = 1$.

Ipotesi : ...

NEL GIOCO DELLA ZARA:

1) 

esperimento aleatorio $\mathcal{E}$

2) $$\Omega = \{(1,1,1), \dots, (1,1,6), (1,2,1), (1,2,2), \dots (1,2,6), \dots, (6,6,5), (6,6,5)\}$$

$$|\Omega| = 216 = \boxed{6^3}$$

l'insieme dei possibili esiti di $\mathcal{E}$

$\omega \in \Omega$

3) $$S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(i,j,k) \longrightarrow S = i+j+k$$

4) effetto di S su Ω :

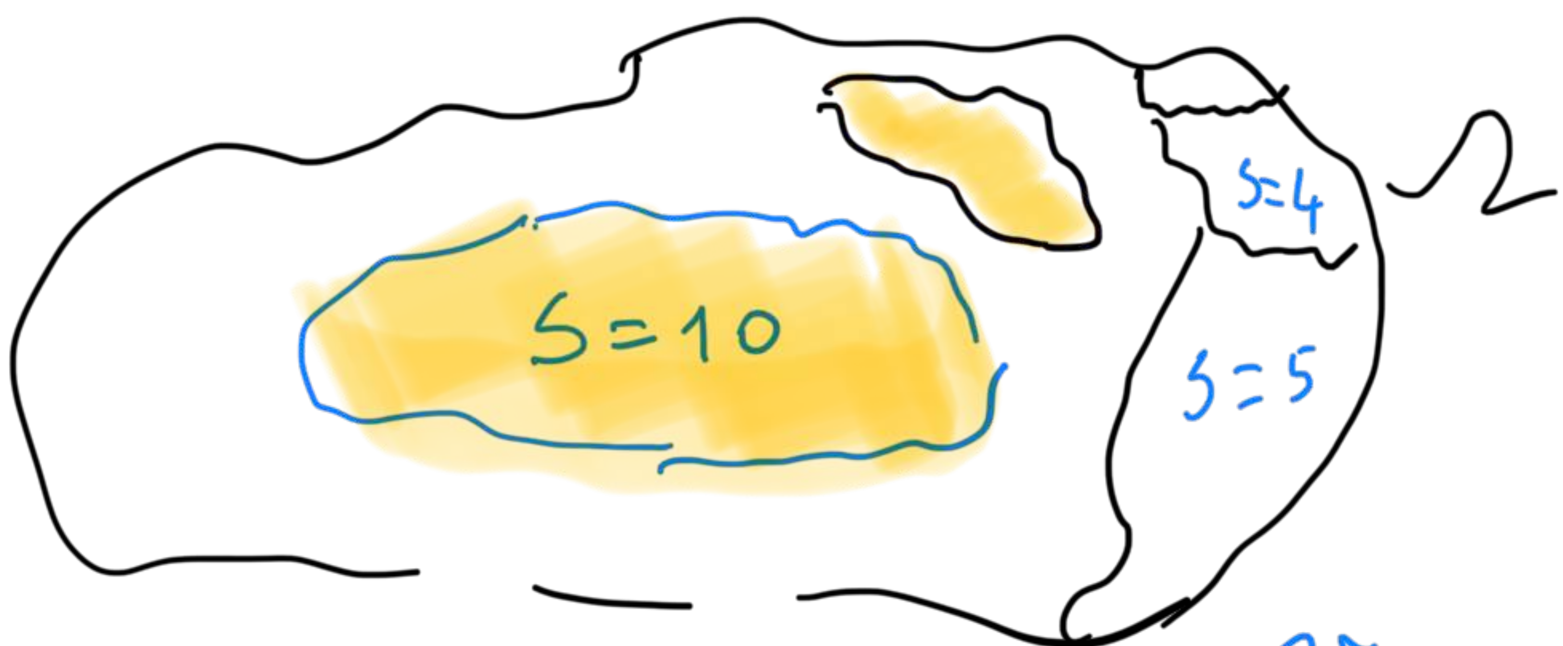
$S = 3$ $\quad \{3\}$ $\quad \{(1,1,1)\} \subseteq \Omega$

$S = 4$ $\quad \{4\}$ $\quad \{(1,1,2), (2,1,1), (1,2,1)\} \subseteq \Omega$

$S = 5$ $\quad \{(1,1,3), (3,1,1), (1,3,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\} \subseteq \Omega$

$\{10\}$ $\qquad \mathbb{P}(S=5) = \frac{6}{216}$

$S = 10$ $\quad \{ \quad \dots \quad \}$



$$\mathbb{P}(S=10) = \frac{}{216}$$

$$\{S=10\} \cup \{S=15\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (2,2,6),\ (2,3,5),\ \ldots \\ (5,5,5),\ (6,4,5),\ \ldots \end{array} \right\}$$

In sostanza S partiziona Ω in eventi.

$$S^{-1}(\{3,18\}) \subseteq \Omega$$

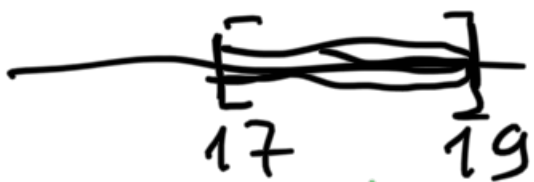
<u>è un evento</u> $= \{(1,1,1),(6,6,6)\}$

$$S^{-1}(\{19\}) = \emptyset$$ è un evento

$$S^{-1}(\{5\}) = \{ (1,1,3), \dots, (2,2,1), \dots \}$$

è un evento

$$S^{-1}([\![17,19]\!]) = S^{-1}(\{17\}) \cup S^{-1}(\{18\})$$



$$= \{ (6,6,6), (5,6,6), (6,5,6), (6,6,5) \}$$

è un evento

$\mathbb{R}$, per alcuni sottoinsiemi B di $\mathbb{R}$

$B \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad S^{-1}(B) \subseteq \Omega$

è un evento

Borel

$$\mathcal{E} \longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Ω: L'insieme degli enti di $\mathcal{E}$

$\mathcal{F}$: La famiglia degli eventi

$\mathbb{P}$: La misura della probabilità degli eventi