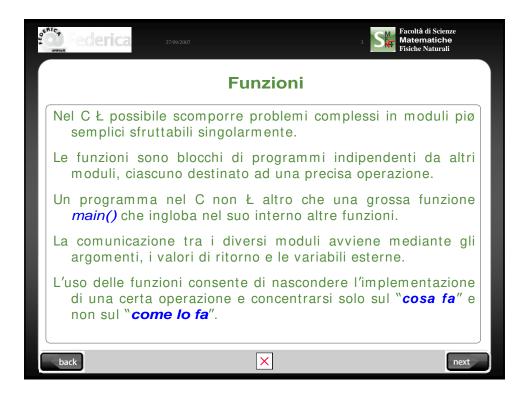
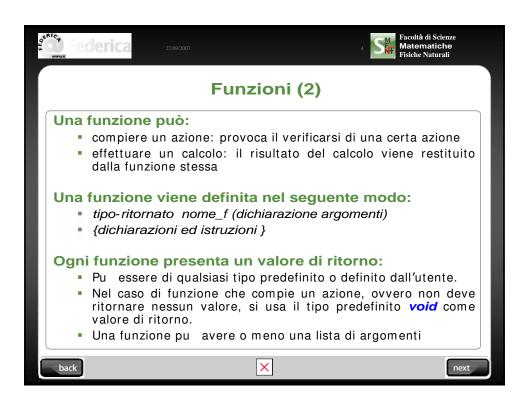


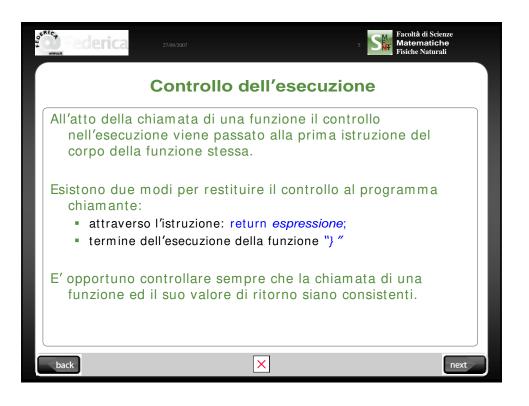
This document was created with Win2PDF available at <a href="http://www.win2pdf.com">http://www.win2pdf.com</a>. The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only. This page will not be added after purchasing Win2PDF.

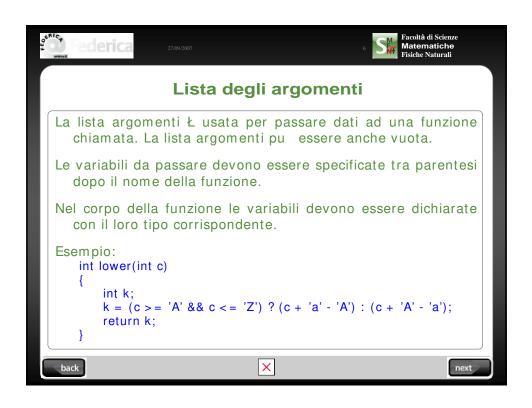


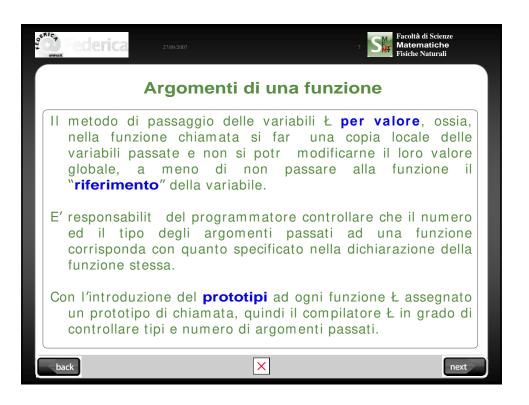


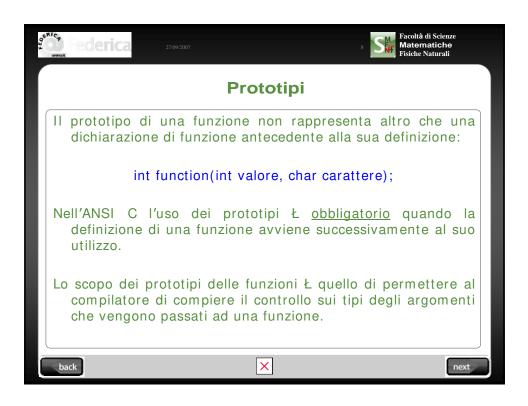


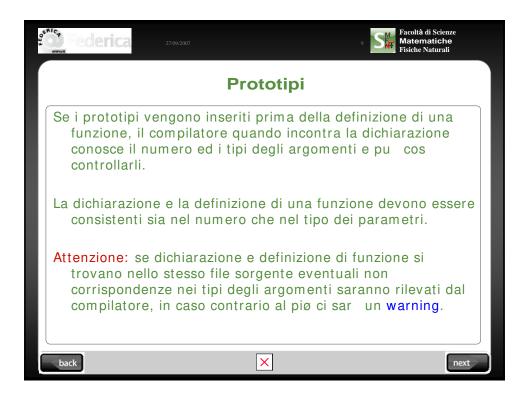


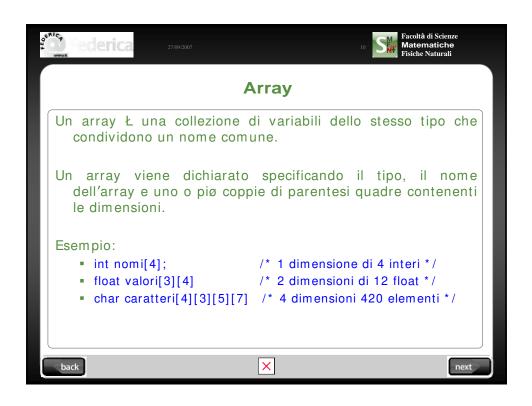


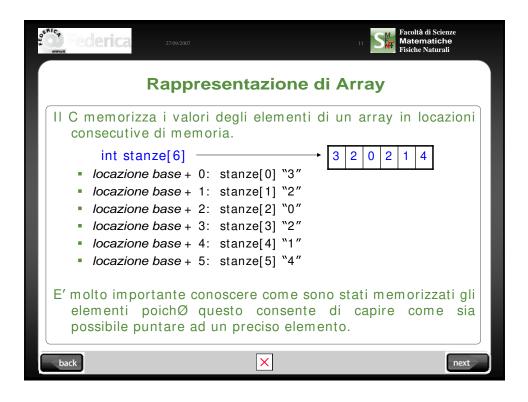


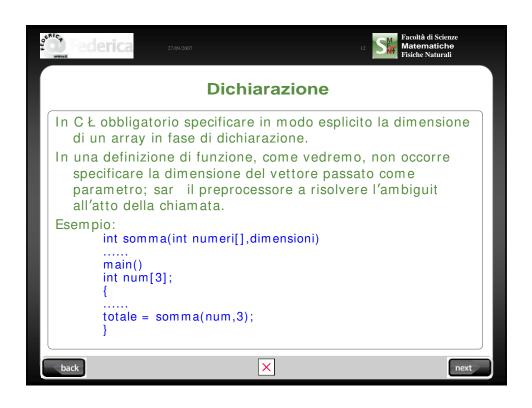


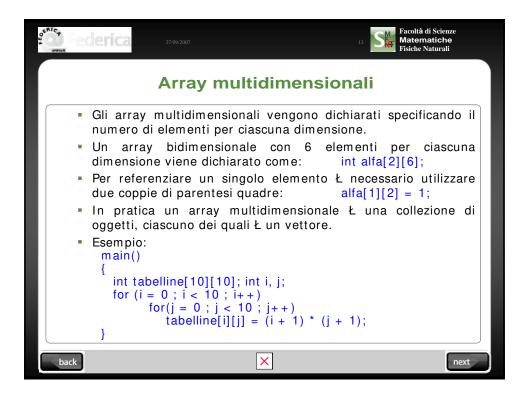


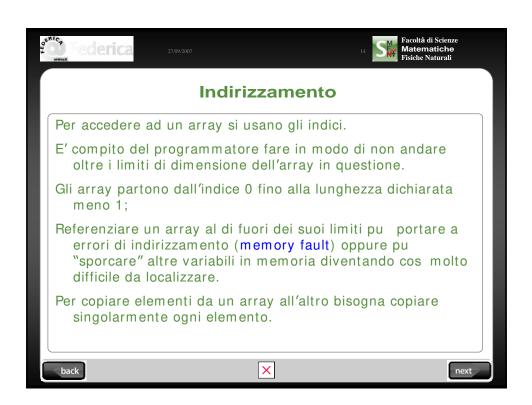


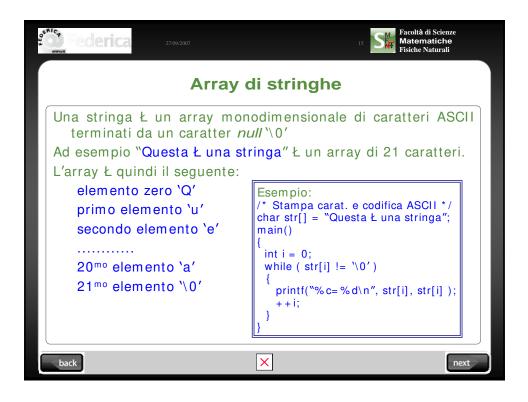












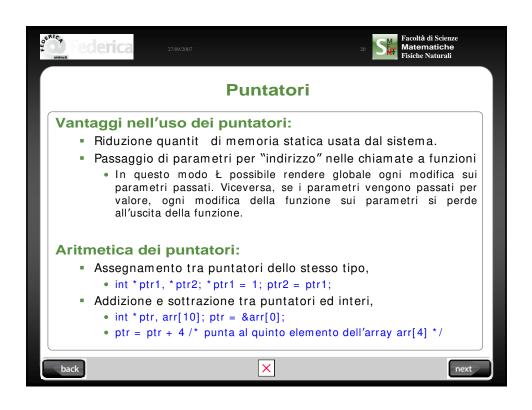


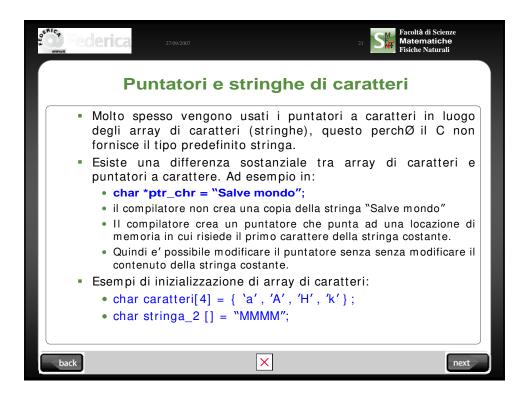


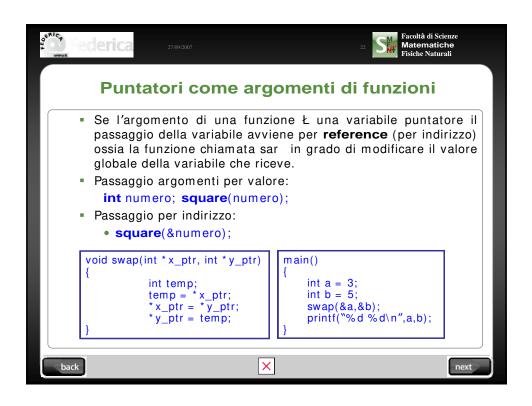


```
Esempi

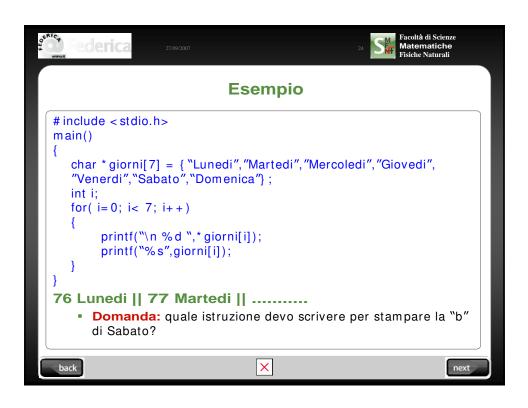
/* Dichiarazioni */
int v1, v2, *v_ptr;
/* moltiplica v2 per il valore puntato da v_ptr */
v1 = v2* (*v_ptr);
/* somma v1,v2 e il contenuto di v_ptr */
v1 = v1+v2 +*v_ptr;
/* assegna a v2 il valore che si trova tre interi dopo v_ptr
*/
v2 = *(v_ptr + 3);
/* incrementa di uno l'oggetto puntato da v_ptr */
*v_ptr += 1;
```

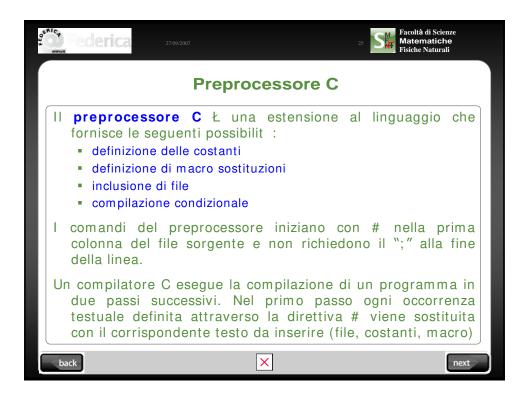






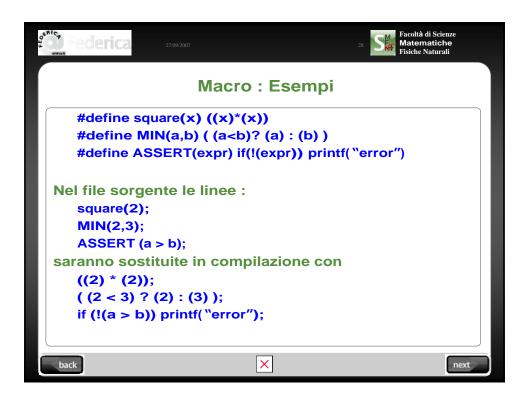








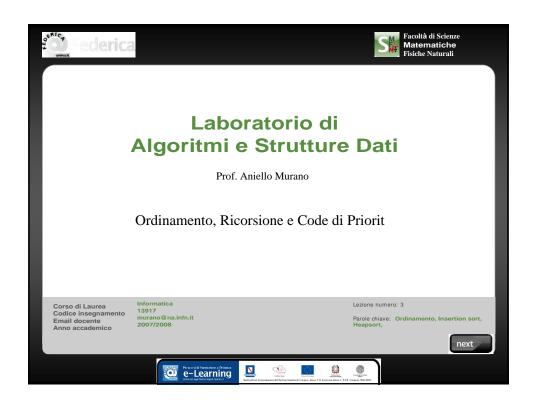




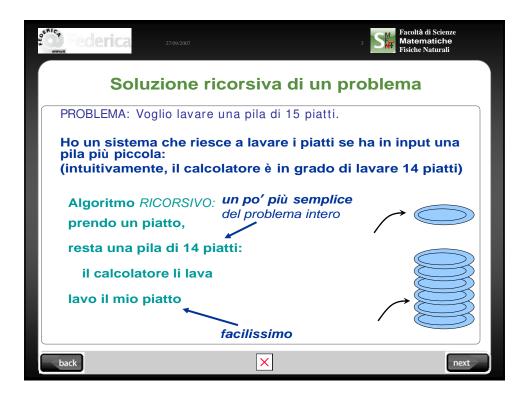


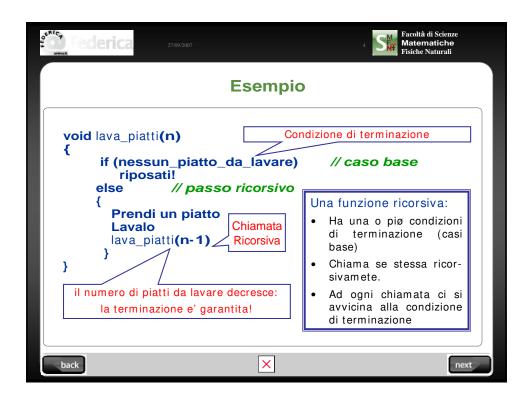


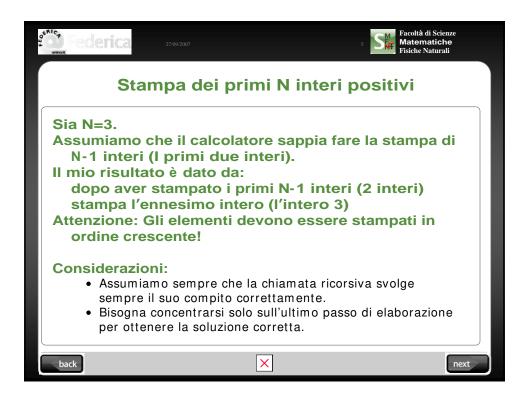
This document was created with Win2PDF available at <a href="http://www.win2pdf.com">http://www.win2pdf.com</a>. The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only. This page will not be added after purchasing Win2PDF.

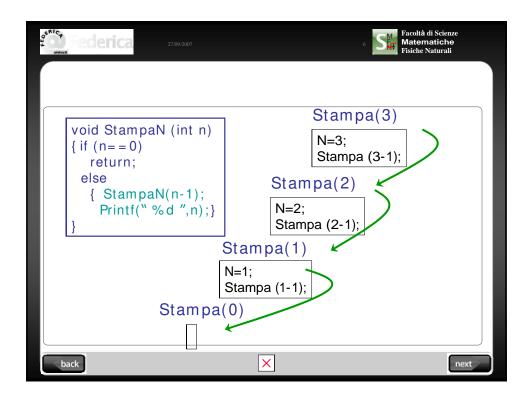




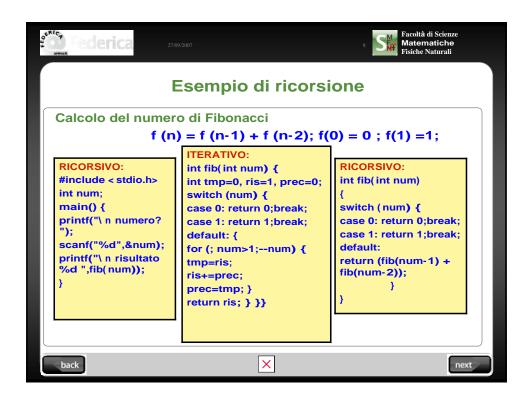


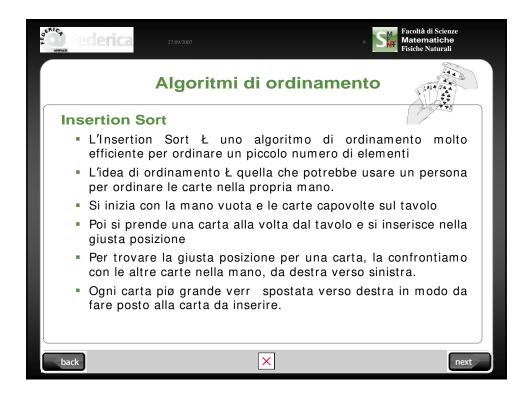


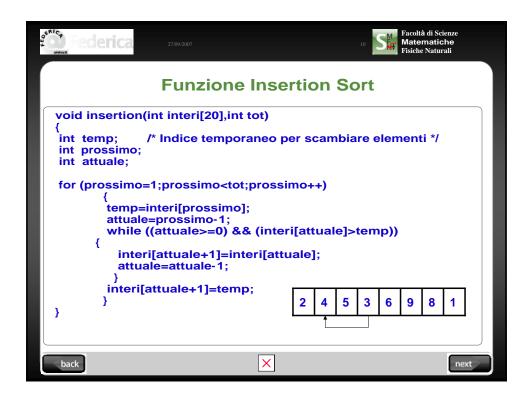




```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
                  Esempio di ricorsione
Calcolo del fattoriale di un numero:
n! = n*(n-1)*(n-2)*...*(n-(n-1))
                                  int fact(int num)
    int fact(int num)
    int product=1;
                                  if ( num <= 1)
    for(; num>1; --num)
                                  return 1;
    product*=num;
                                  else
                                  return (num* fact(num -
    return product;
                                  1));
                                X
back
                                                              next
```







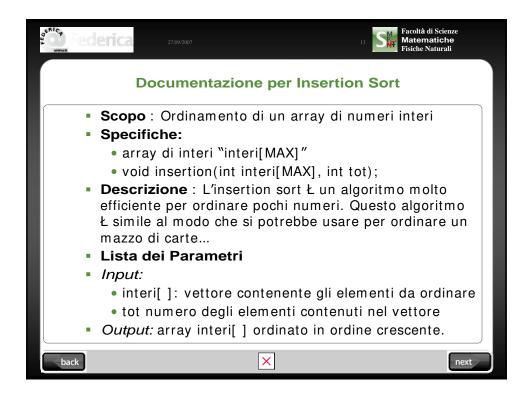
```
# include <stdio.h>
# define MAX 20
int i,j; /* Indici di scorrimento dell'array */
void insertion(int interi[MAX],int tot);
main()

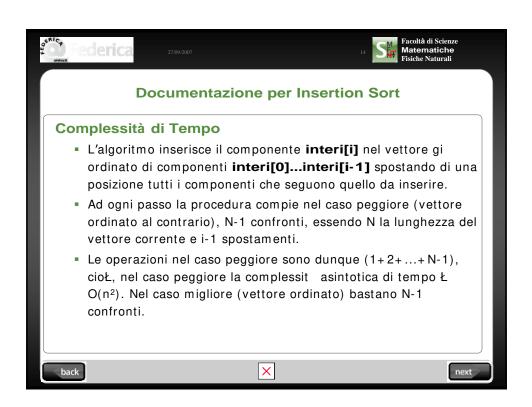
{
int interi[MAX] /* Array che contiene i valori da ordinare */
int tot; /* Numero totale di elementi nell'array */
printf("\nQuanti elementi deve contenere l'array: ");
scanf("%d",&tot);
while (tot>20)
{printf("\n max 20 elementi: ");
scanf("%d",&tot);
for (i=0;i<tot;i++)
{ printf("\nInserire il %d° elemento: ",i+1);
scanf("%d",&interi[i]);}
insertion(interi,tot);
printf("\n Array Ordinato:");
for (i=0;i<tot;i++)
printf(" %d",interi[i]);

back

| Programma per Insertion Sort
| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Fisiche Naturali
| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Fisi
```

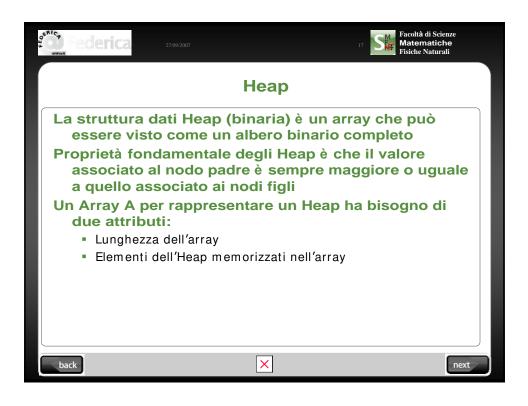


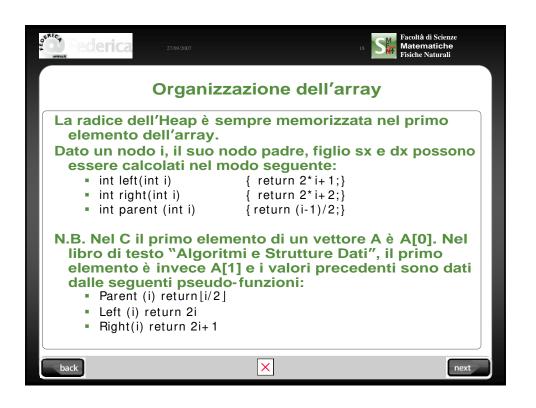


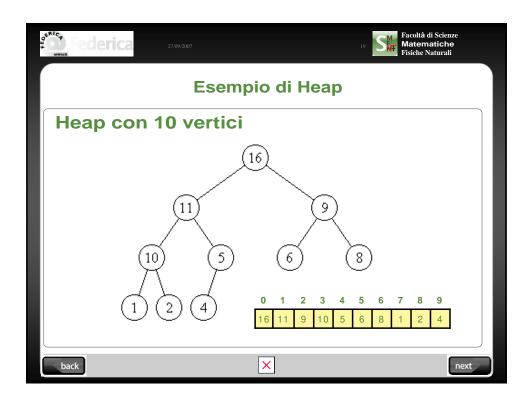










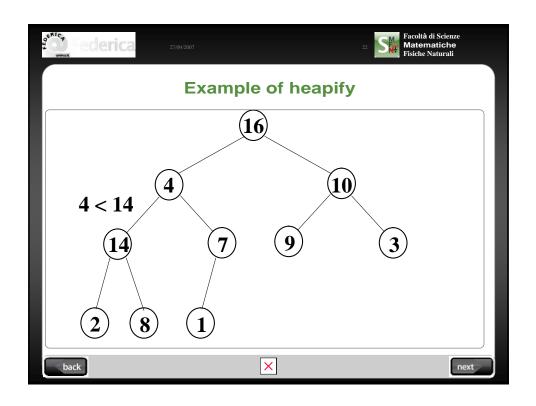


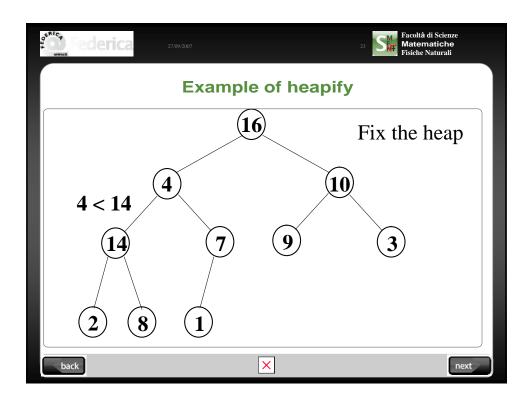


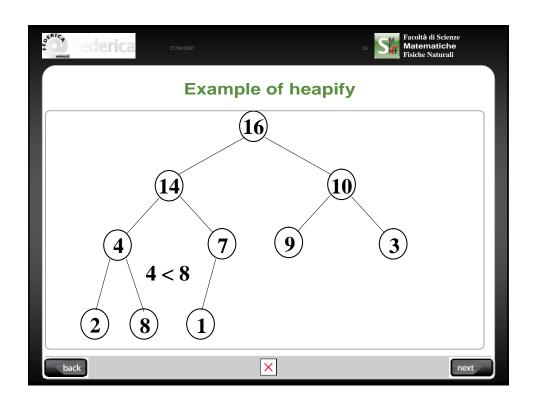
```
Implementazione di Heapify

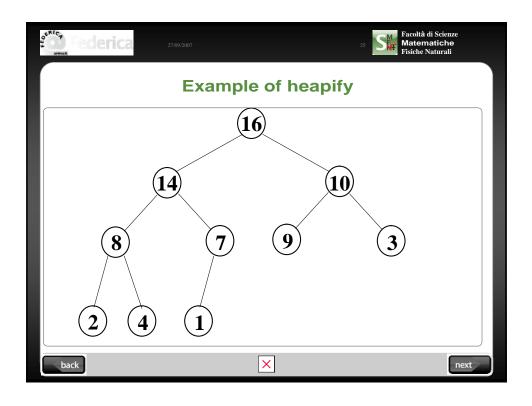
void Heapify(int A[MAX], int i)
{
    int l,r,largest;
    l = left(i);
    r = right(i);
    if (I < HeapSize && A[I] > A[i])
        largest = I;
    else largest = i;
    if (r < HeapSize && A[r] > A[largest])
        largest = r;

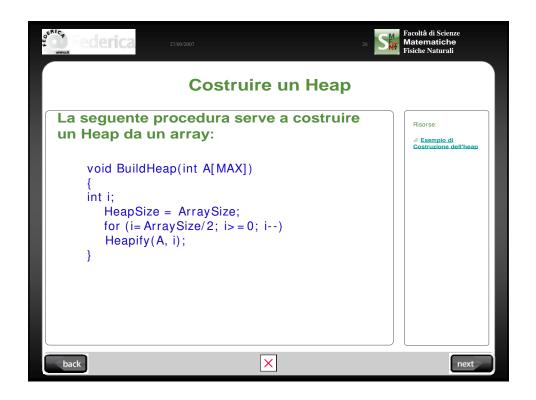
    if (largest != i) {
        swap(A, i, largest);
        Heapify(A, largest);
    }
}
```









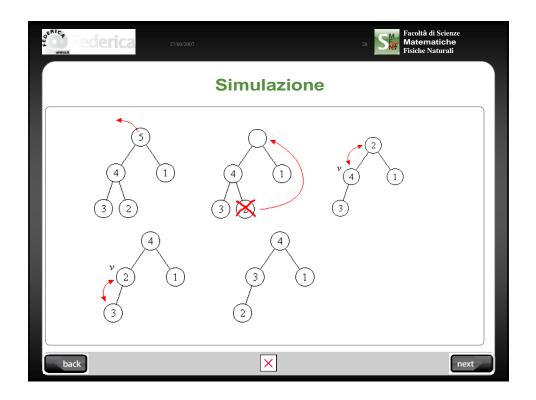


```
Funzione HeapSort

Funzione HeapSort

Fische Naturali

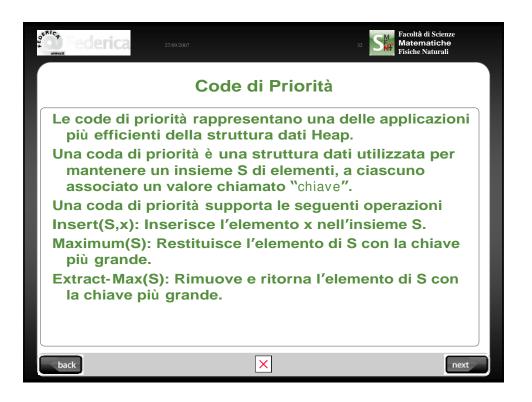
Fi
```

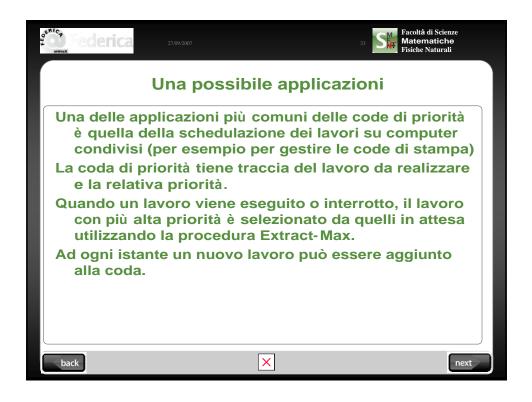


```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
                  Algoritmo di HeapSort
#include <stdlib.h>
#define MAX 20
int ArraySize, HeapSize, tot;
int left(int i) { return 2*i+1;}
int right(int i) { return 2*i+2;}
int p(int i)
               {return (i-1)/2;}
void swap(int A[MAX], int i, int j)
        \{int\ tmp = A[i];
        A[i] = A[j];
        A[j] = tmp;
void Heapify(int A[MAX], int i);
void BuildHeap(int A[MAX]);
void HeapSort(int A[MAX]);
                                 X
back
                                                                next
```

```
Main di HeapSort
main(){
int A[MAX], k;
printf("\ nQuanti elementi deve contenere l'array: ");
scanf("%d",&tot);
while (tot>MAX)
  { printf("\ n max 20 elementi: "); scanf("%d",&tot);}
 for (k=0;k<tot;k++) {
        printf("\ nInserire il %d° elemento: ",k+1);
        scanf("%d",&A[k]); }
 HeapSize=ArraySize=tot;
 HeapSort(A);
 printf("\ nArray Ordinato:");
  for (k=0;k<tot;k++)
    printf(" %d",A[k]);
                                X
back
```





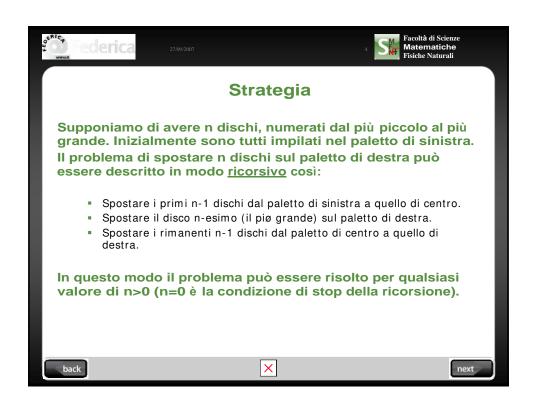


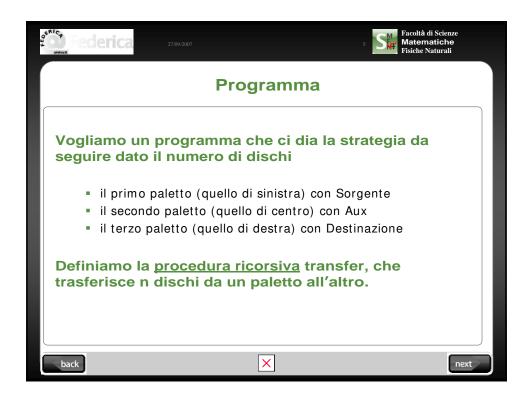
This document was created with Win2PDF available at <a href="http://www.win2pdf.com">http://www.win2pdf.com</a>. The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only. This page will not be added after purchasing Win2PDF.

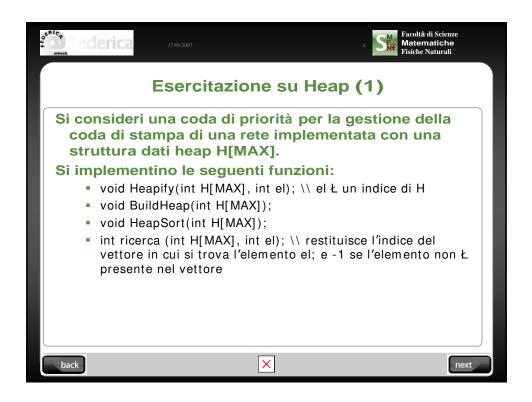


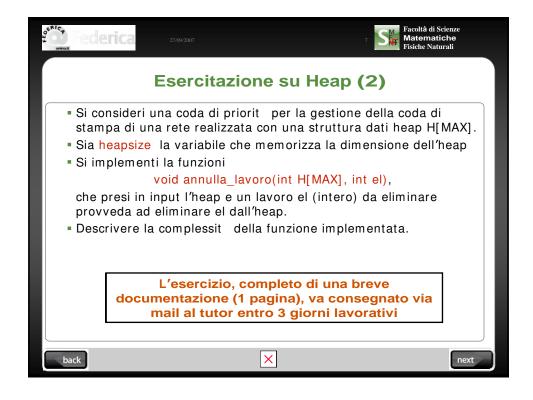




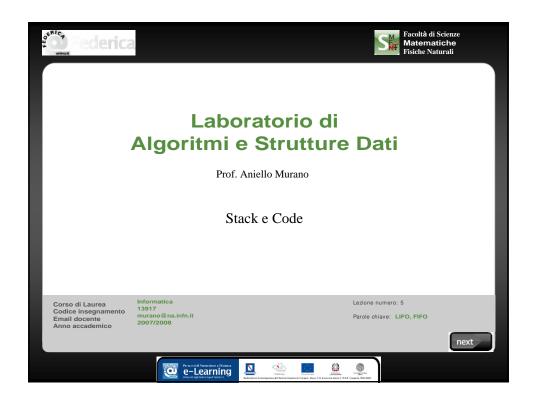


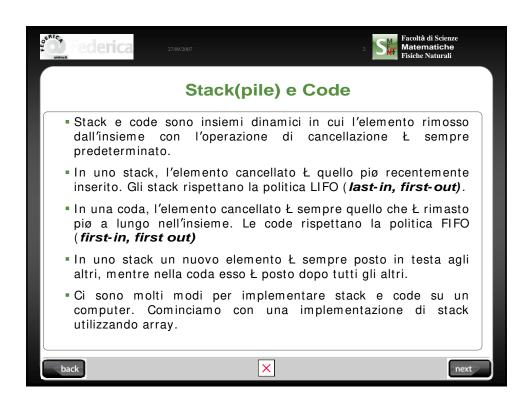




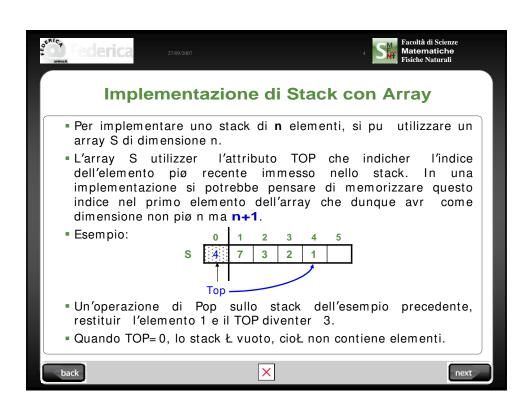


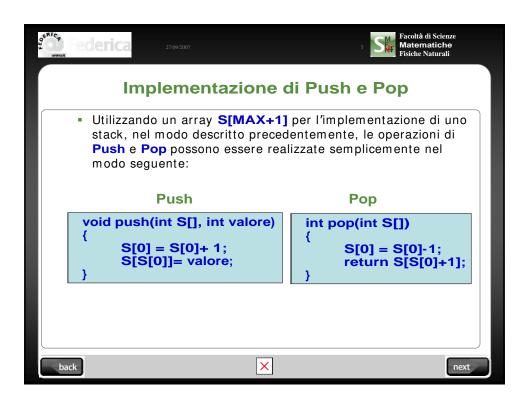
This document was created with Win2PDF available at <a href="http://www.win2pdf.com">http://www.win2pdf.com</a>. The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only. This page will not be added after purchasing Win2PDF.

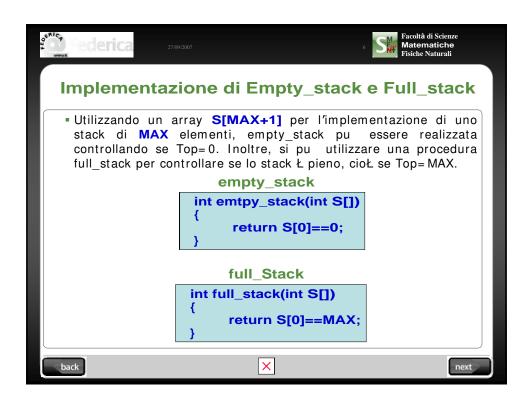


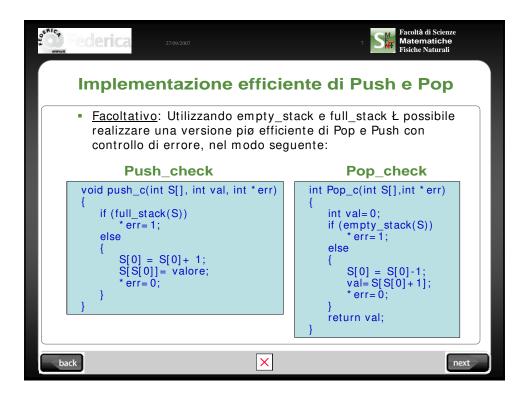


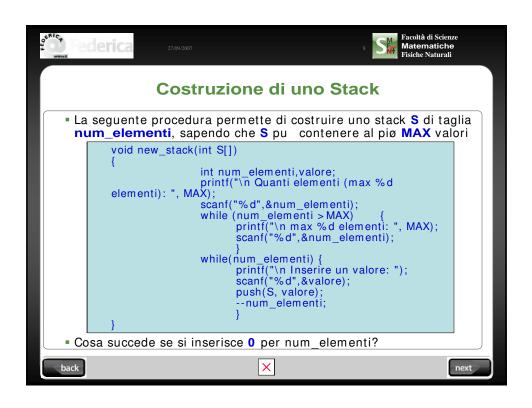


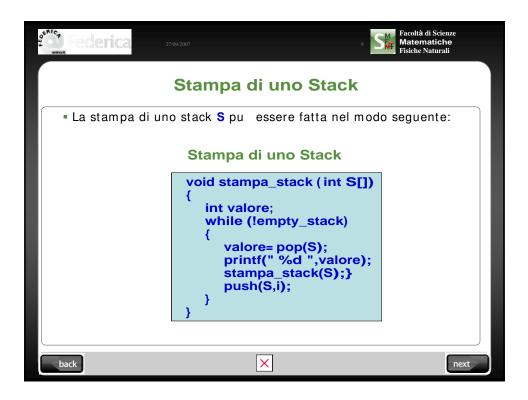








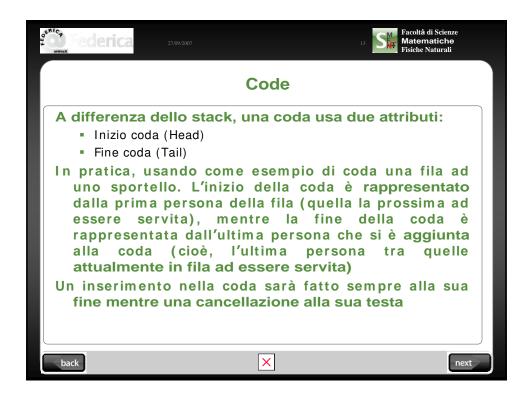


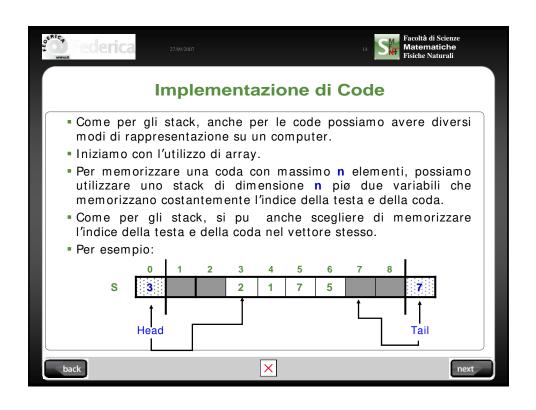


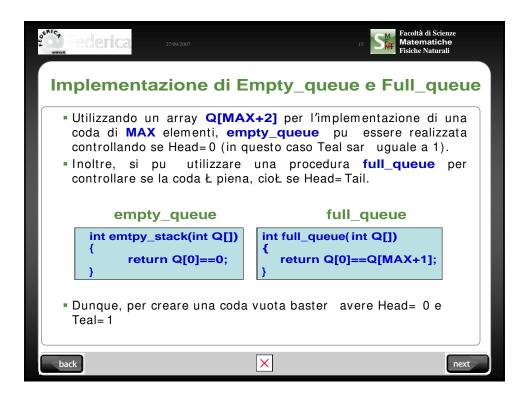


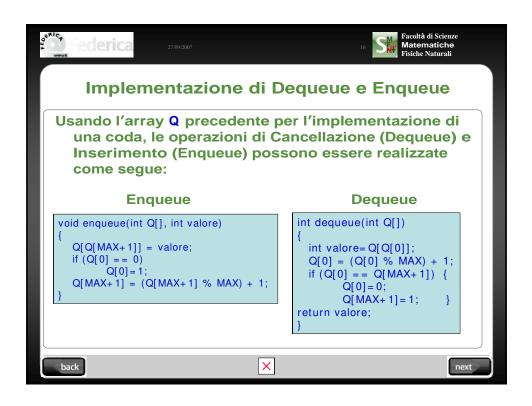
```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
 Gestione di uno Stack (2): Implement. Switch
switch (scelta)
          case 0:
                    new_stack(S);
                                        break;
          case 1:
                    stampa(S);
                                        break;
         case 2:
                    if (!empty_stack(S))
                              printf("\n Top dello Stack %d", pop(S));
                    else
                              printf("\n spiacente, stack vuoto");
                    break;
          case 3:
                   if (!full_stack(S))) {
    printf("\n valore da inserire nello stack: ");
    scanf("%d",&valore);
                    else
                              printf("\n spiacente, stack pieno");
   } /* fine switch */
 back
                                           X
                                                                                   next
```

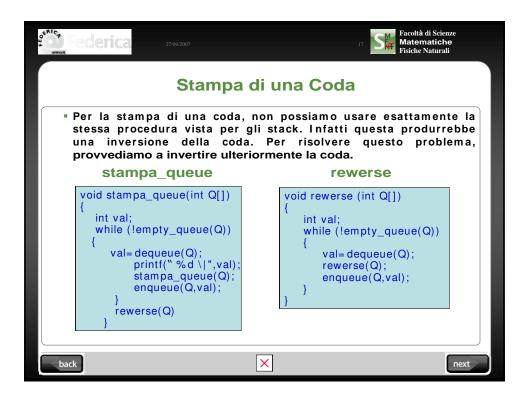


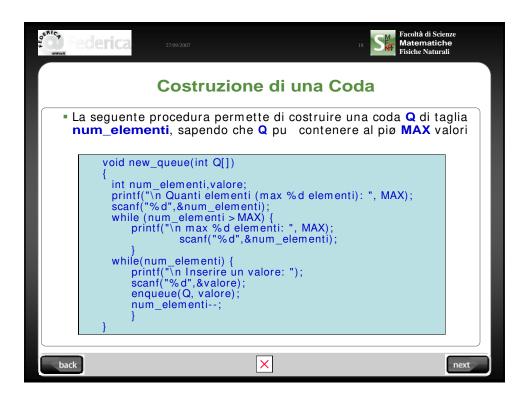












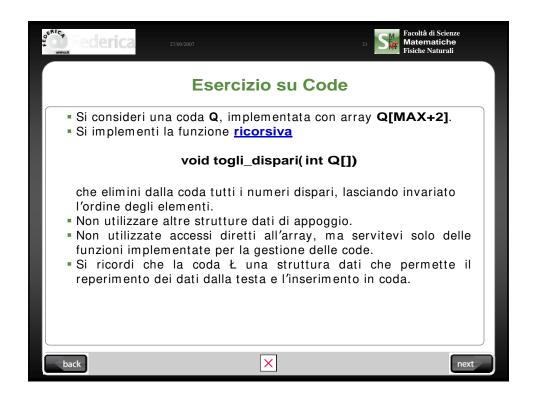
```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
                Gestione di una Coda (1)
Il seguente programma gestisce una coda Q di MAX valori. Si noti come i
  controlli siano indipendenti da MAX. Questo Ł utile per le stesse
  motivazioni date per gli stack
# define MAX 20
 main()
    int Q[MAX+1],scelta,valore;
    do
       switch (scelta)
                       { .......... } /* vedi prossima diapositiva */
    while(scelta = = 0||scelta = = 1 ||scelta = = 2||scelta = = 3);
    /* fine main() *
                                 X
back
                                                                next
```

```
Gestione di una Coda(2): Implement. switch

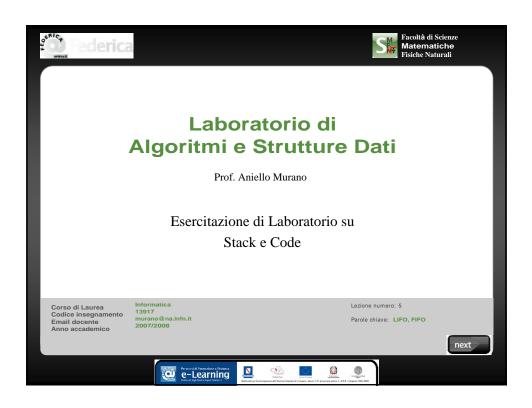
switch (scelta)

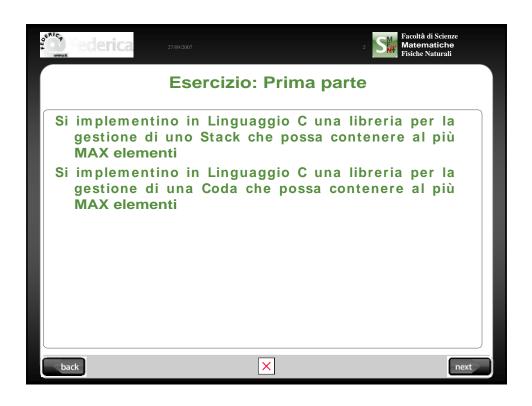
{
    case 0:
        new_queue(Q); break;
    case 1:
        stampa_queue(Q); break;
    case 2:
        if (!empty_queue(Q))
            printf("\n Head della coda %d", dequeue(S));
        else
            printf("\n spiacente, coda vuoto");
        break;
    case 3:
        if (!full_queue(Q)))
            printf("\n Valore da inserire nello stack: ");
            scanf("%d", &valore);
            enqueue(Q,valore);
            else
                 printf("\n spiacente, coda piena");
        } /* fine switch */

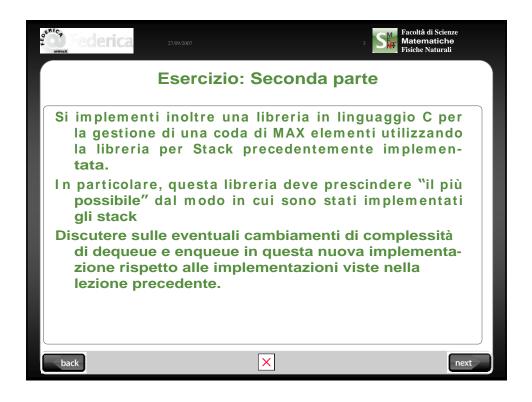
back
```

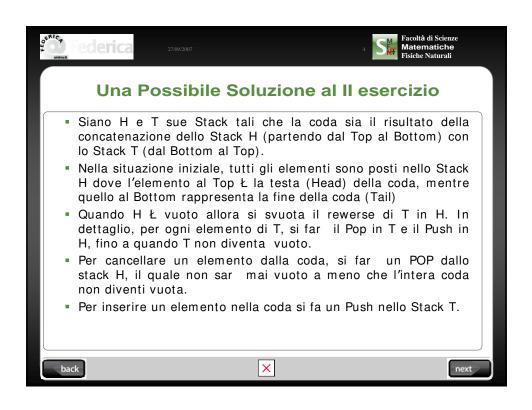


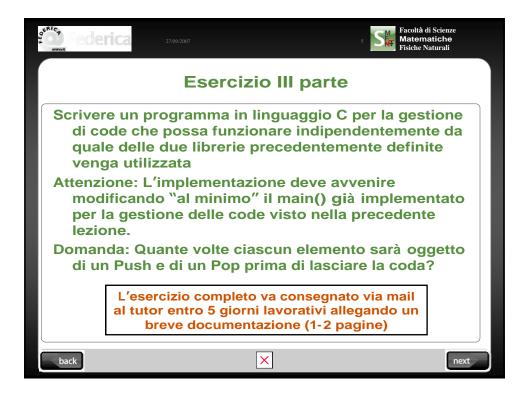
This document was created with Win2PDF available at <a href="http://www.win2pdf.com">http://www.win2pdf.com</a>. The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only. This page will not be added after purchasing Win2PDF.



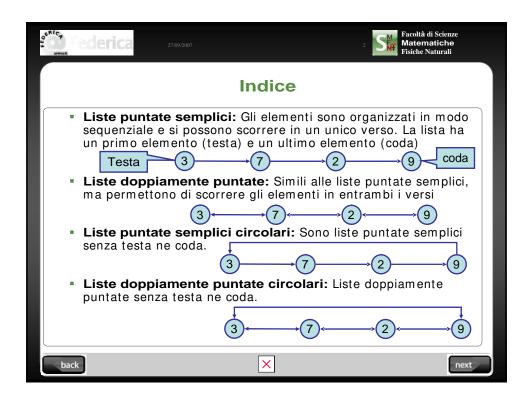


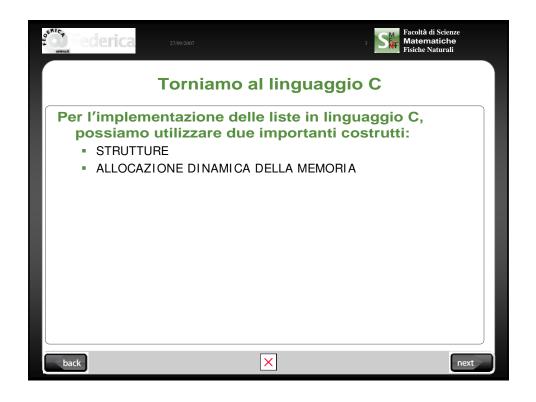


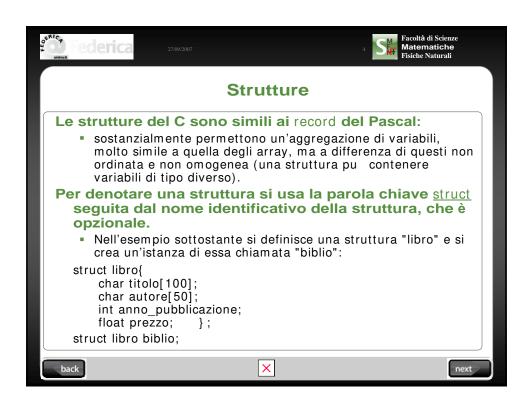


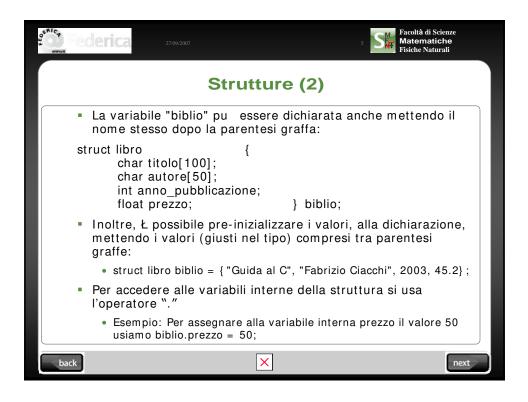


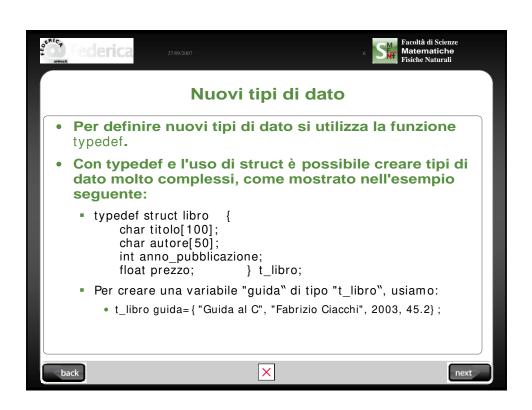


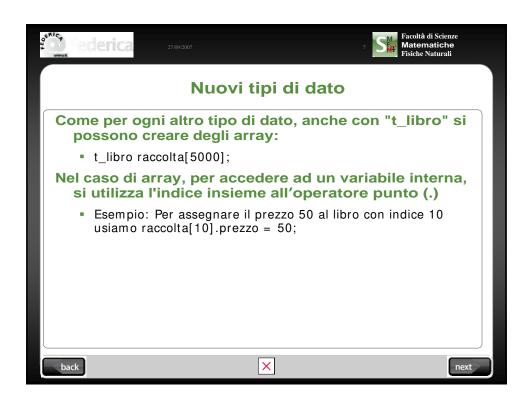


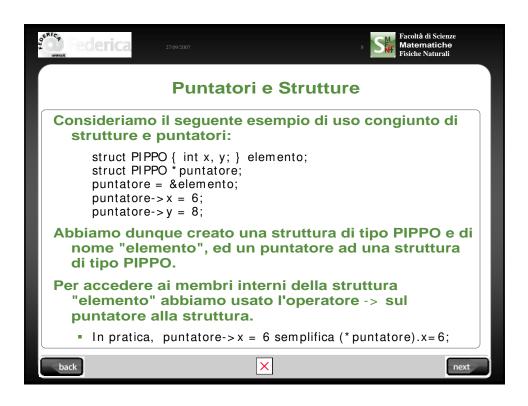


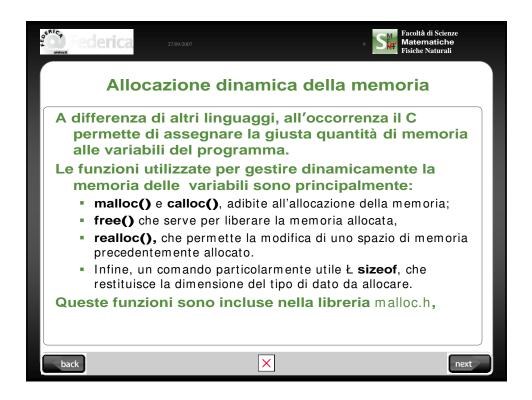


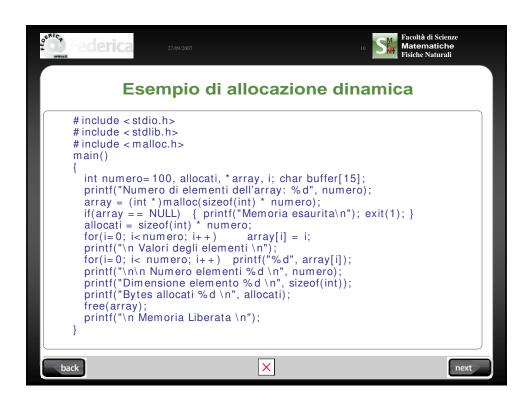


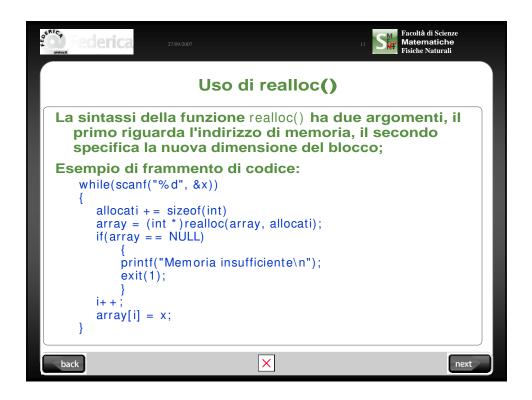


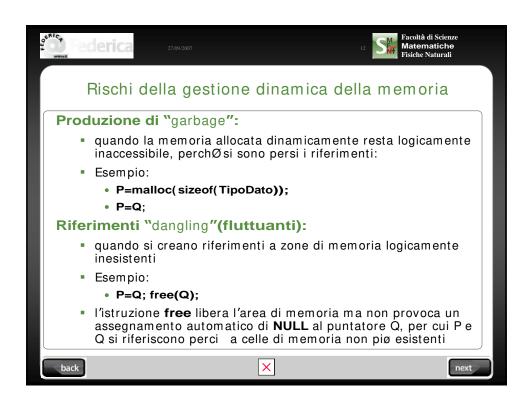


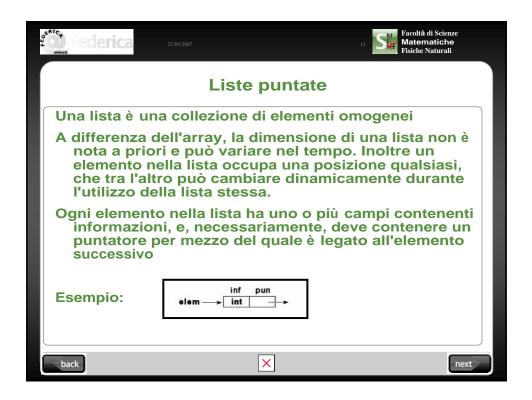


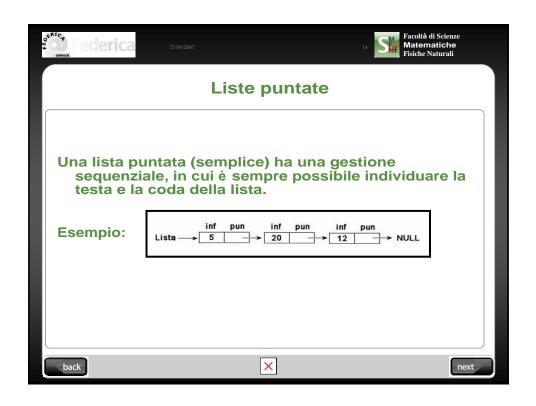


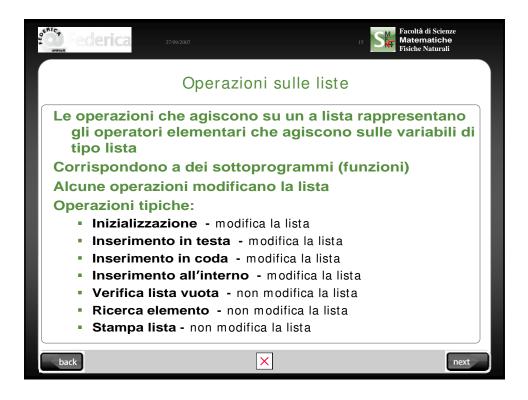


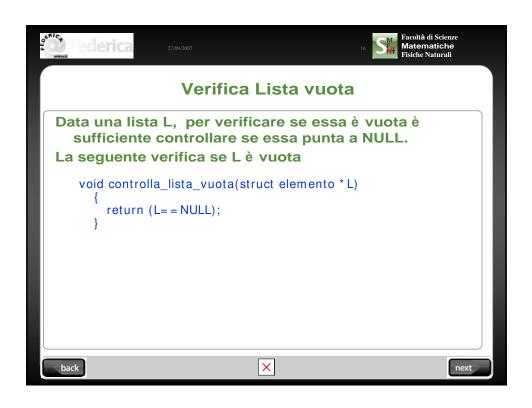


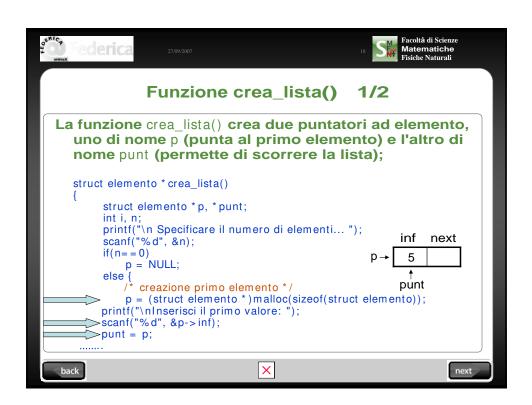




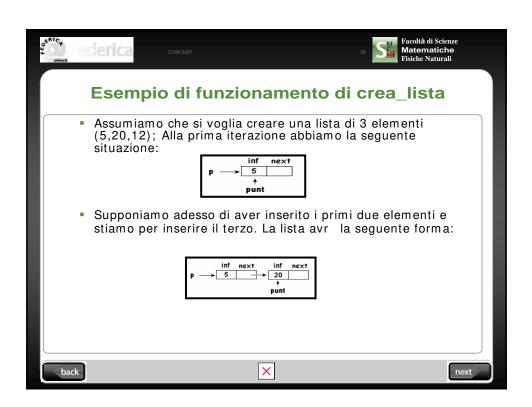


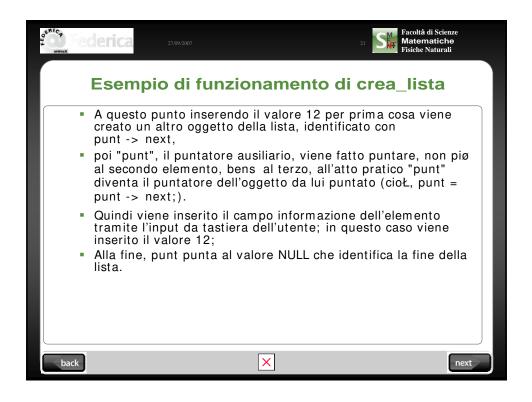


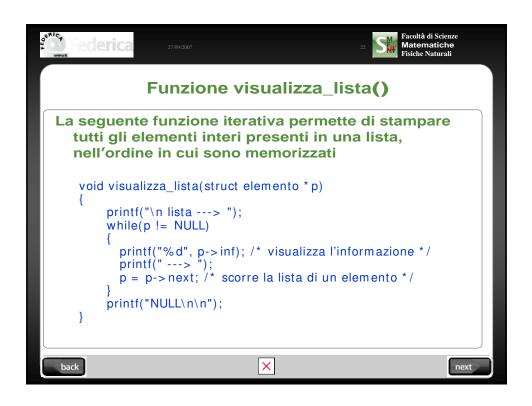


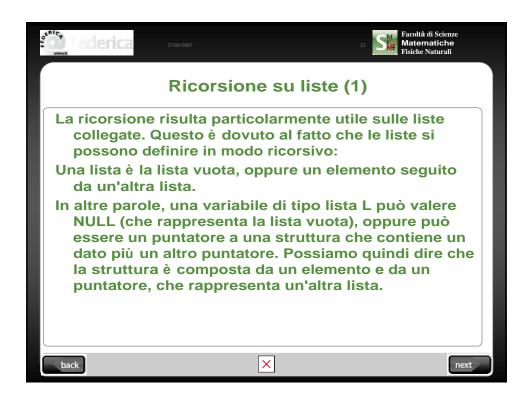


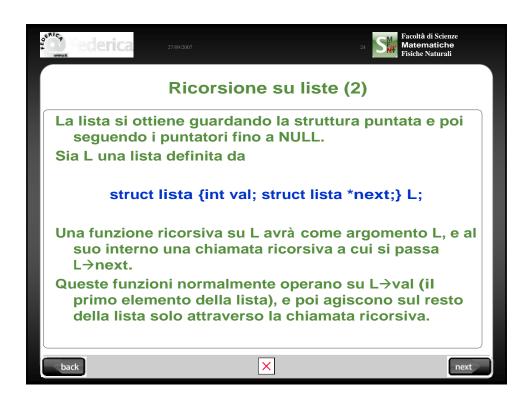
```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
                   Funzione crea_lista()
    for(i=2; i < = n; i++)
           punt-> next = (struct elemento *)malloc(sizeof(struct elemento));
           punt = punt-> next;
printf("\nInserisci il %d elemento: ", i);
                                                                       Questo tipo di
        scanf("%d", &punt->inf);
} /* chiudo il for */
                                                                        inserimento
                                                                       viene chiamata
                                                                        "inserimento
        punt-> next = NULL; /* marcatore fine lista */
                                                                          in coda"
      } /* chiudo l'if-else */
    return(p);
} /* chiudo la funzione */
                                            X
 back
                                                                                     next
```











```
Funzione visualizza_lista() ricorsiva

Funzione visualizza_lista() ricorsiva

void visualizza_lista(struct elemento * p)

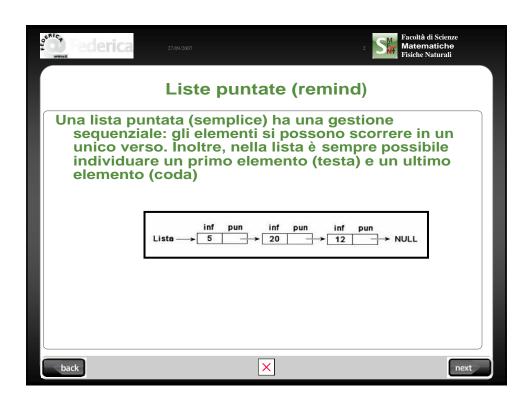
{
    if(p==NULL) return;
    printf("%d ", p->inf);
    visualizza_lista(p->next);
}

Se p rappresenta la lista vuota, non si stampa niente; si esce semplicemente dalla funzione senza fare nulla.

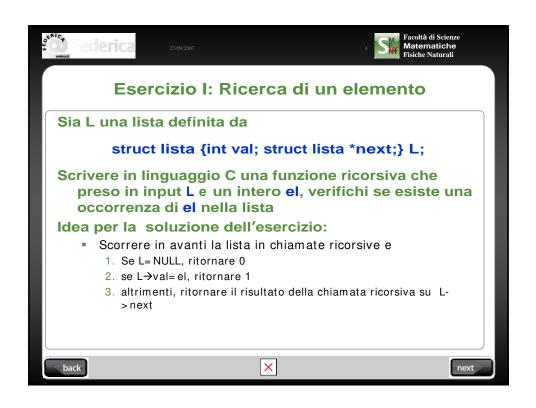
Al passo i-esimo, si stampa la testa della lista e si richiama la funzione visualizza_lista sulla lista meno la testa.
```

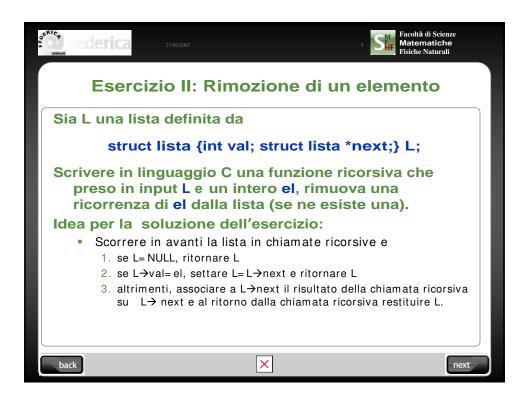


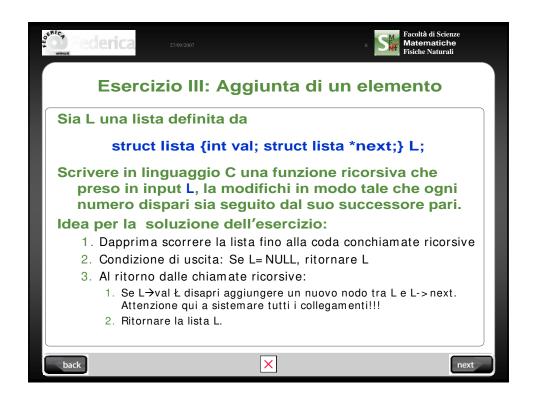


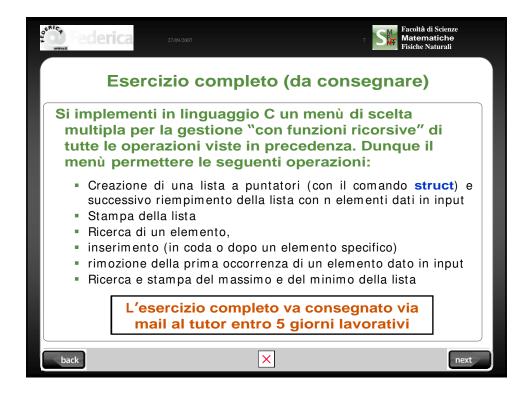




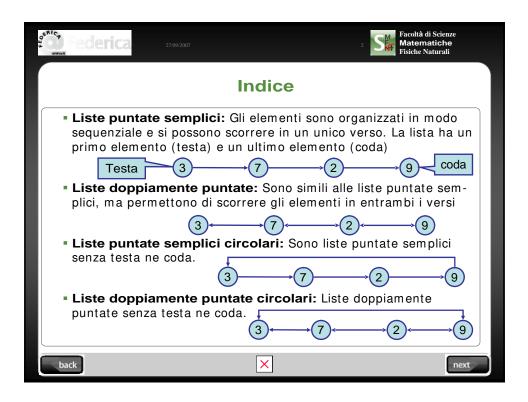




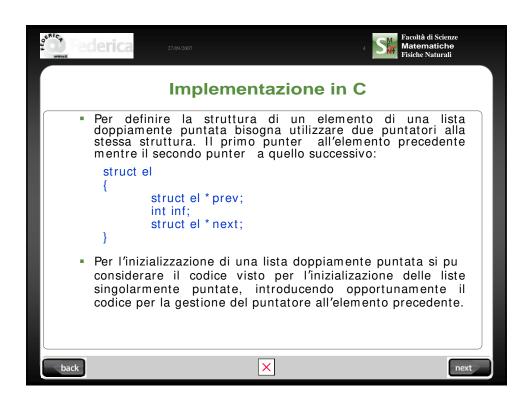


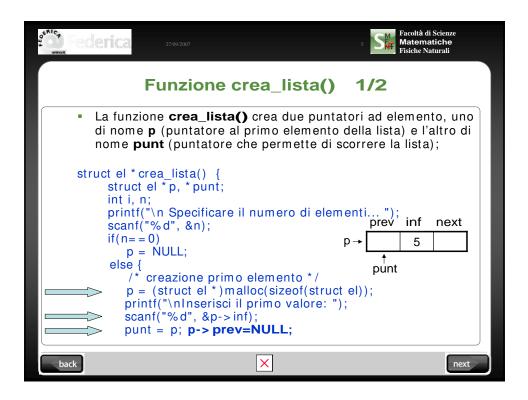












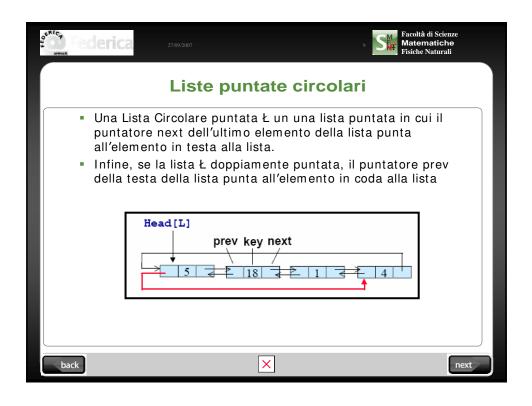


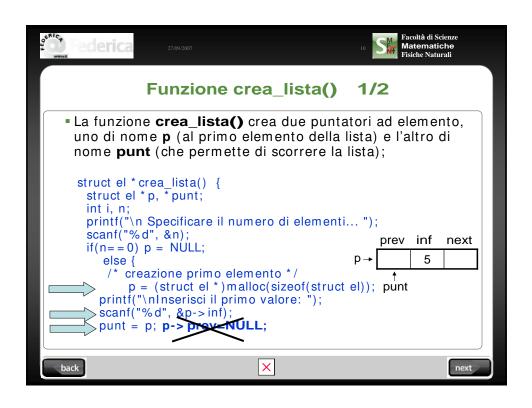
```
# include < stdio.h>
# include < mailoc.h>
struct el { struct el * prev; int inf; struct el * next;};
int inserisci_in_coda(struct el*,int);
int main() {
    struct el * lista;
    int valore;
    lista= crealista();
    printf("\n!nserisci elemento da inserire: ");
    scanf("%d", &valore);
    inserisci_in_coda(lista,valore);
}

back

| Facoltà di Scienze
| Matematiche
| Fisiche Naturali
|
| Matematiche
| Fisiche Naturali
| Matematiche
|
```

```
Inserimento in coda: funzione
struct el * inserisci(struct el * p, int valore)
  struct el * nuovo= NULL,
struct el * testa;
if (p== NULL) {
        p=(struct el *)malloc(sizeof(struct el));
        p->inf=valore; p->prev=NULL; testa=p; }
        testa=p;
        while (p-> next!= NULL)
                p=p->next;
        nuovo=(struct el *)malloc(sizeof(struct el));
        nuovo-> prev= p;
        nuovo-> inf= valore;
        nuovo->next = NULL; }
   p-> next= nuovo;
   return testa;
                                    X
back
```

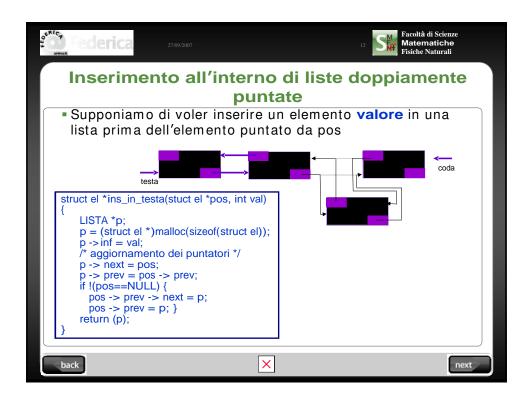


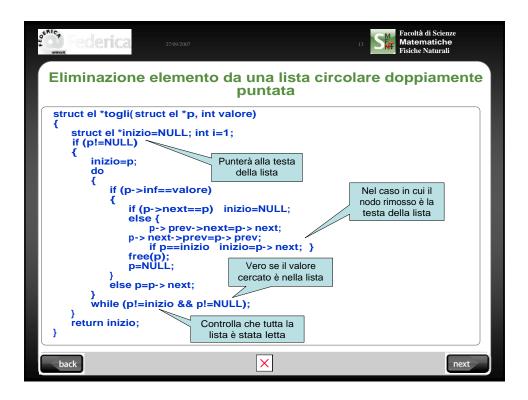


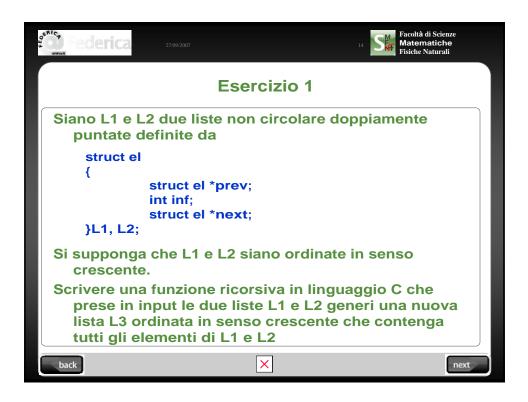
```
Funzione crea_lista() 2/2

for(i=2; i<=n; i++)
{
    punt-> next = (struct el *)malloc(sizeof(struct el));
    punt = punt-> next;
    printf("\nlnserisci il % d elemento: ", i);
    scanf("%d", &punt-> inf);
} // chiudo il for

punt-> next = p; p-> prev = punt; // circolarit della lista
} // chiudo l'if-else
return(p);
} // chiudo la funzione
```

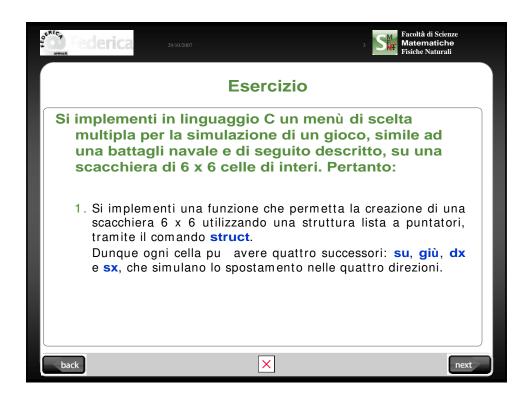


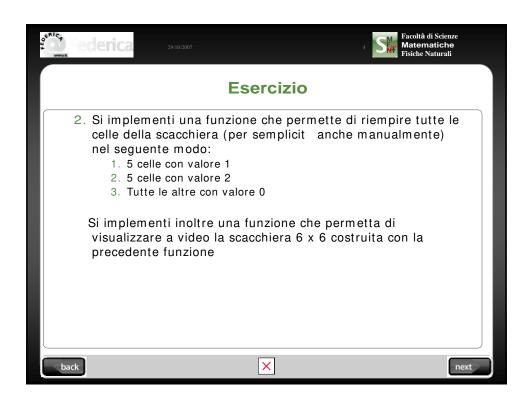


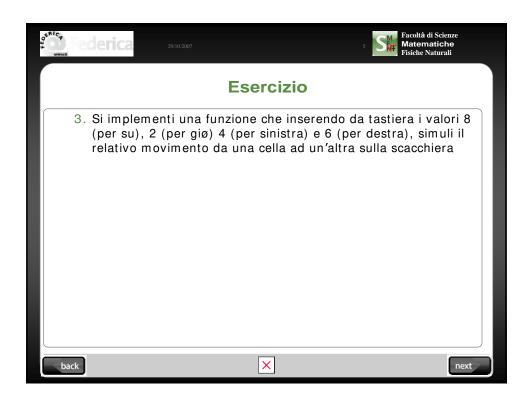


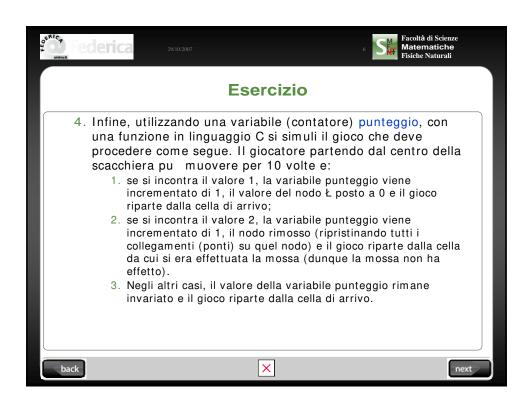


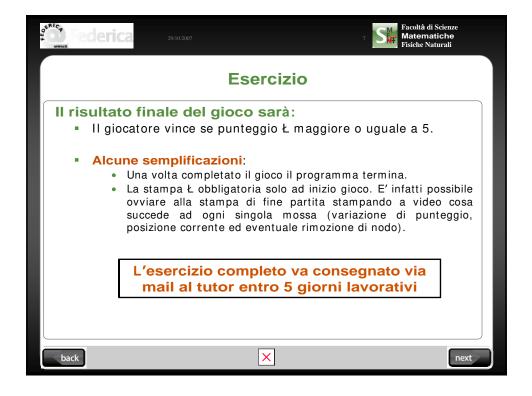




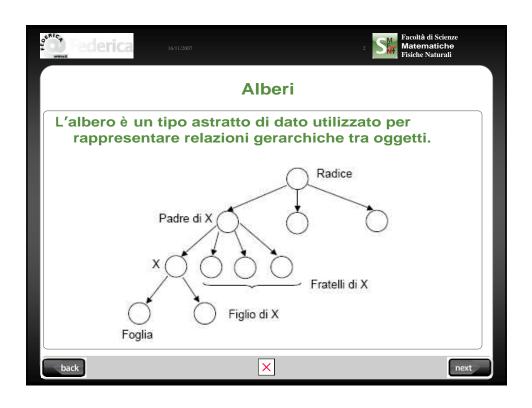


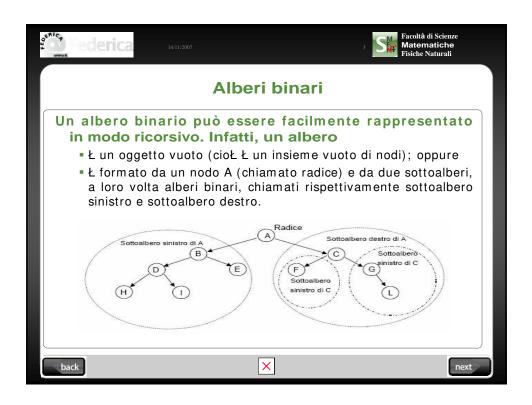


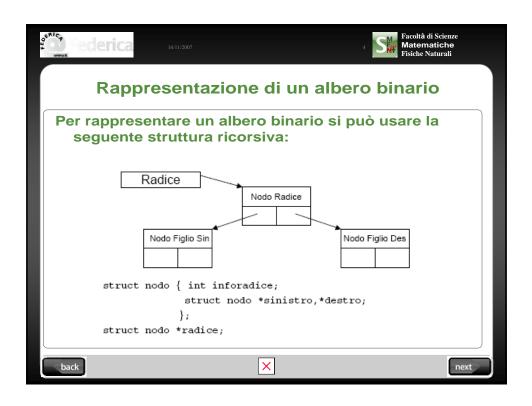


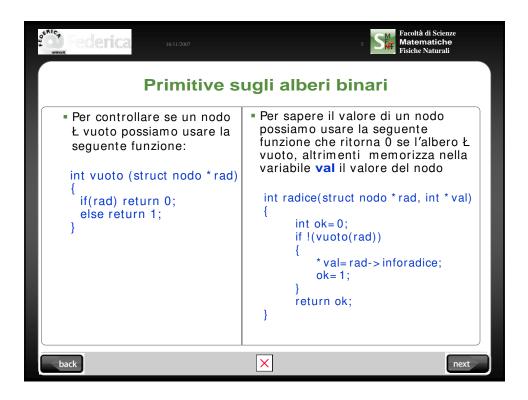


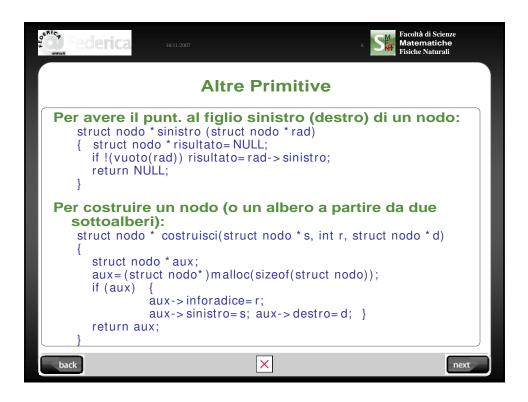


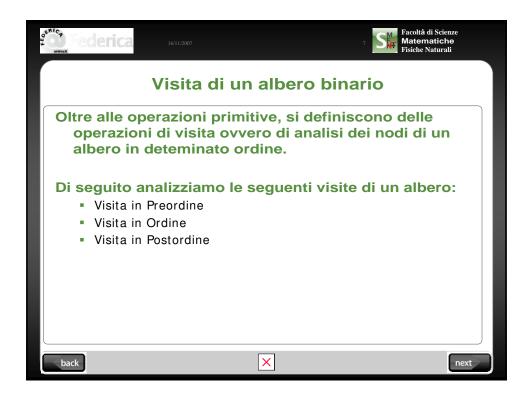


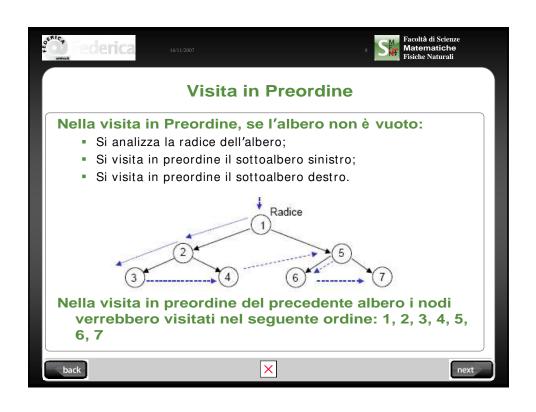


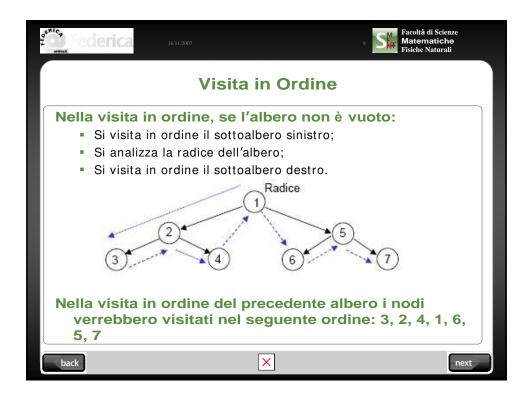


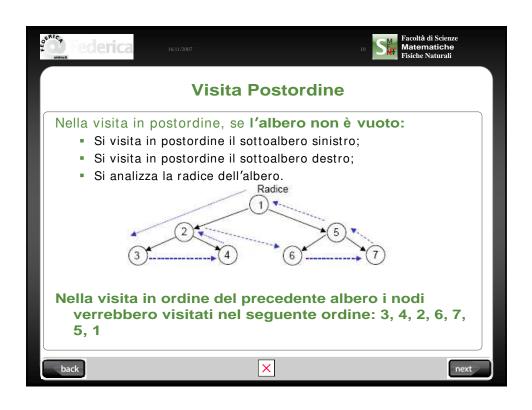


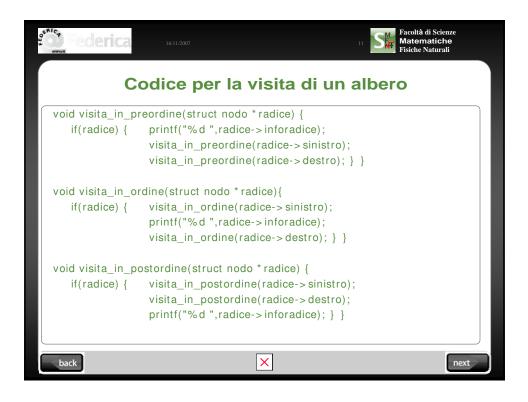


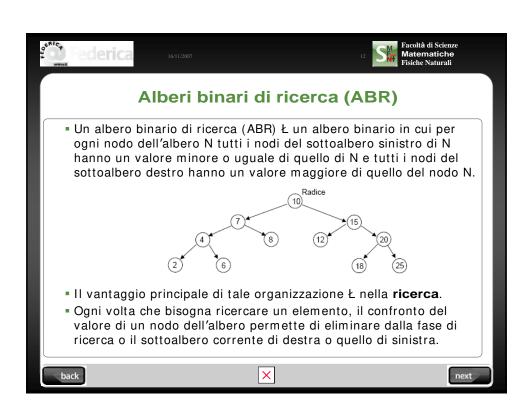




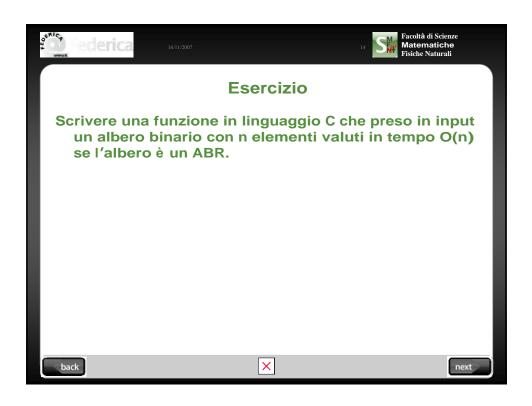


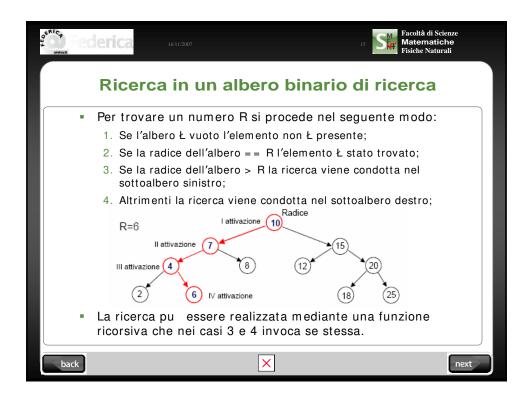


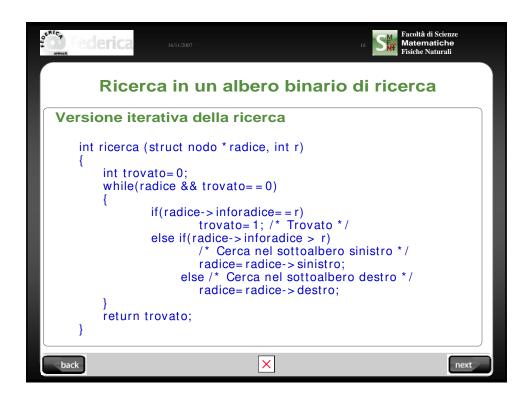












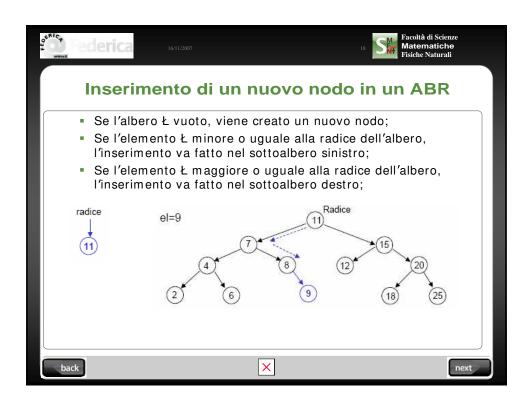
```
Ricerca in un albero binario di ricerca

Versione ricorsiva della ricerca

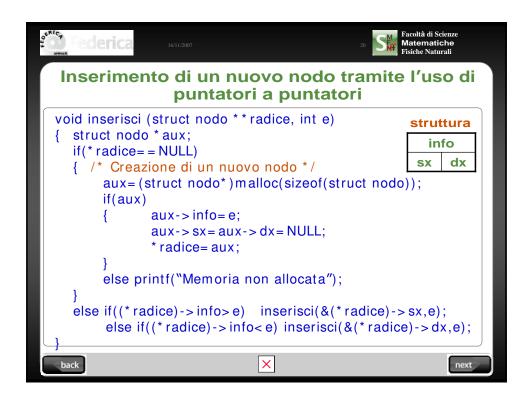
int ricerca (struct nodo *radice, int r)
{
  int trovato= 0;
  if !(vuoto (radice)) /* else non trovato poichØABR vuoto */
  {
   if(radice-> inforadice==r) return 1; /* Trovato */
   else if(radice-> inforadice> r) /* Cerca nel sottoalbero sx */
        trovato= ricerca(radice-> sinistro,r);
   else /* Cerca nel sottoalbero destro */
        trovato= ricerca(radice-> destro,r);
   }
  return trovato;
}

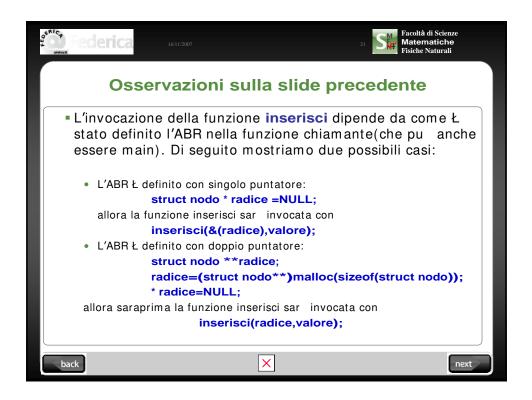
back

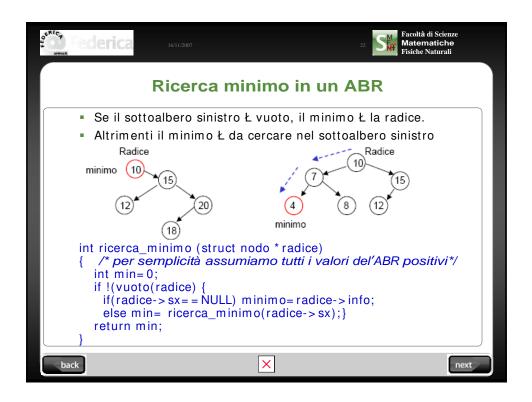
| Matematiche Prisida di Scienze Matem
```



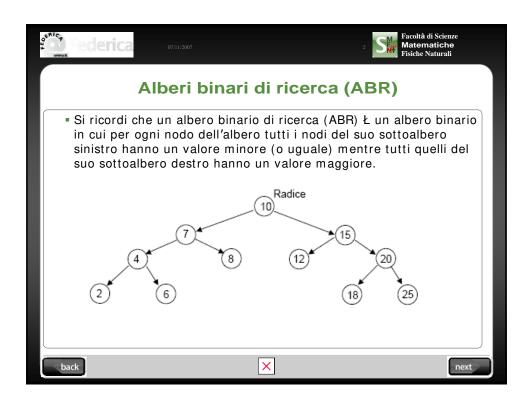
```
Facoltà di Scienze
Matematiche
     Inserimento di un nuovo nodo in un ABR
struct nodo * inserisci (struct nodo * radice, int e)
                                                             struttura
   { struct nodo * aux;
                                                               info
   if (vuoto(radice)) /* Creazione di un nuovo nodo */
                                                                   dx
        aux=(struct nodo*)malloc(sizeof(struct nodo));
        if(aux)
                aux -> info = e;
                aux -> sx = aux -> dx = NULL;
                radice= aux;
        else printf("Memoria non allocata");
   else if(e<radice->info) radice->sx = inserisci(radice->sx, e);
       else if(e>radice->info) radice-> dx = inserisci(radice-> dx, e);
             /* altrimenti il valore Ł gi nell'ABR e non si fa niente */
   return radice;
back
                                   X
                                                                   next
```

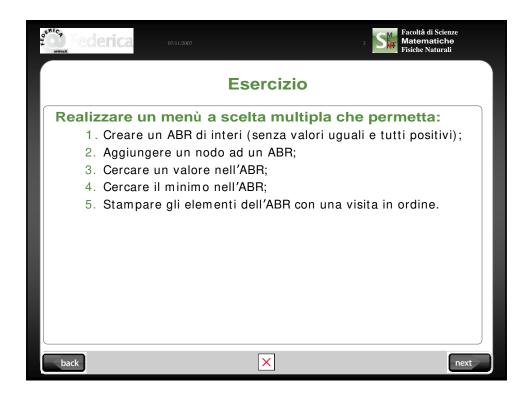


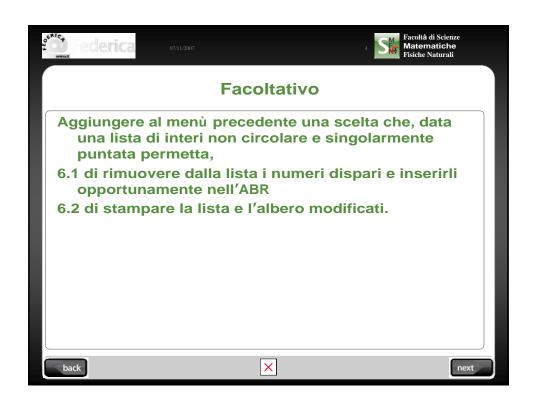


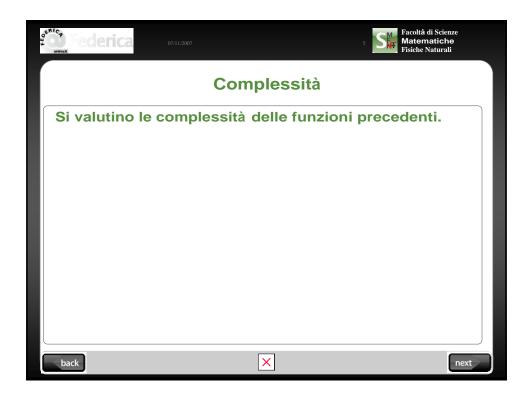


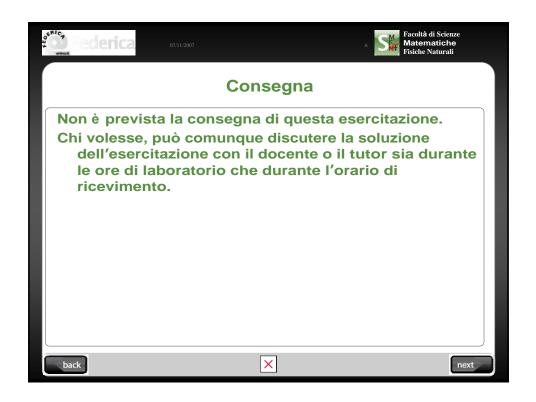




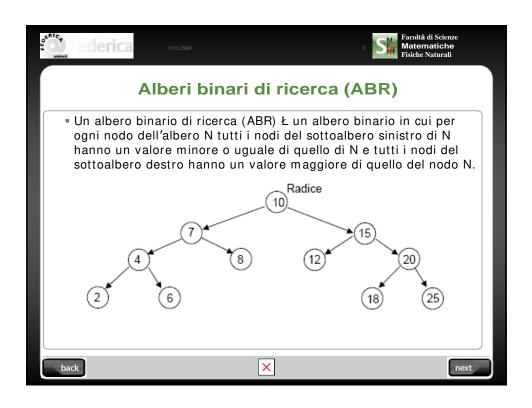


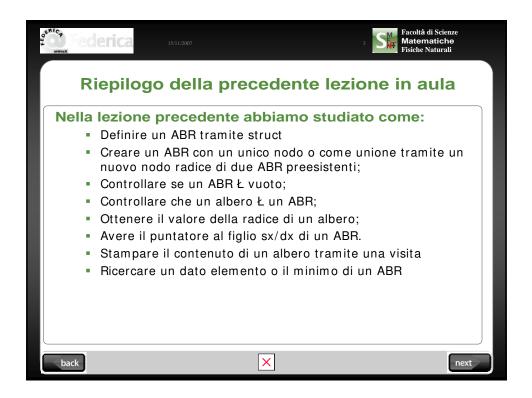


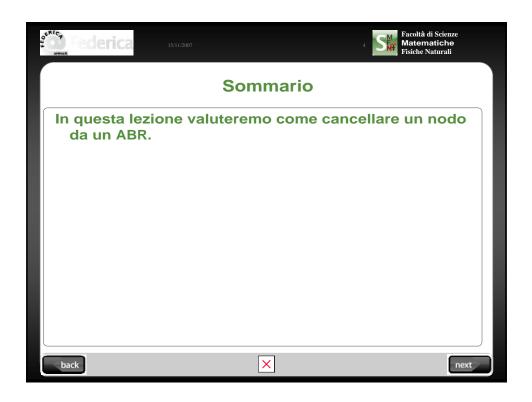




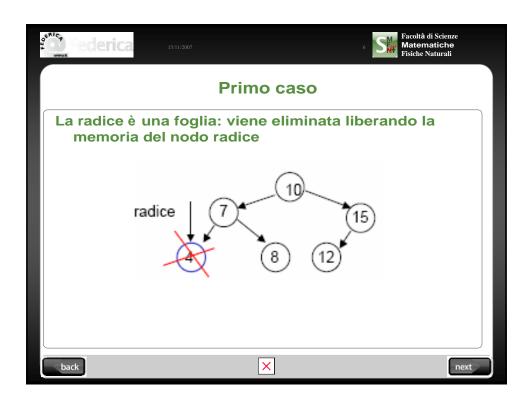


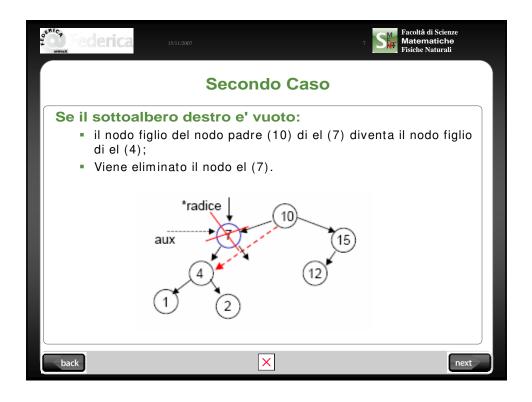


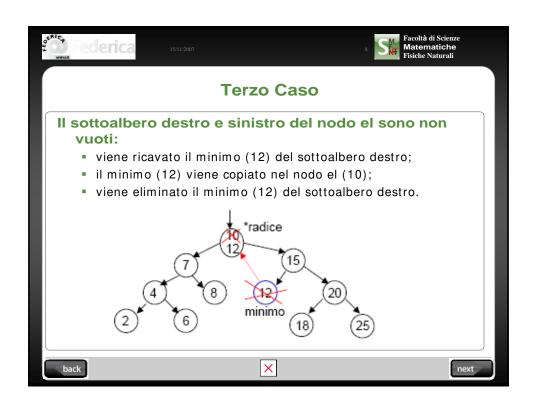




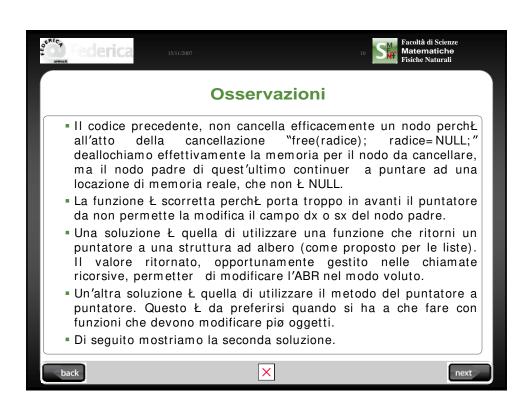


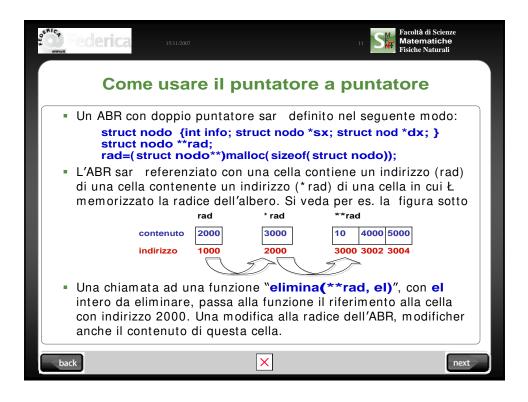


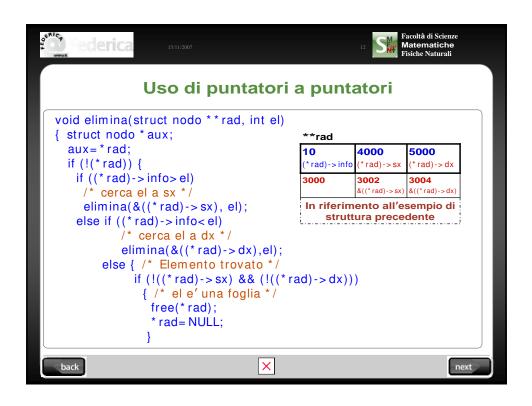




```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
              Codice per la cancellazione (NO)
void * elimina (struct nodo * radice, int el)
    struct nodo * aux;
    if(vuoto(radice)) { printf("elemento non trovato"); return; }
    if(radice->inforadice > el) /* el va cercato nel sottoalbero sinistro */
elimina(radice->sinistro,el);
else if(radice->inforadice< el) /* el va cercato nel sottoalb. destro */
          elimina(radice-> destro,el);
    else /* Trovato l'e'elemento da cancellare */
          { if(radice-> sinistro && radice-> destro) /* II nodo ha due figli*/
                               aux=ricerca_minimo(radice-> destro);
                               radice-> inforadice= aux-> inforadice;
                                elimina(radice-> destro, aux-> inforadice); }
              else { /* Il nodo ha 0 oppure un figlio*/
                     aux=radice;
                     if (radice-> sinistro = NULL) radice= radice-> destro;
                     else if (radice-> destro = NULL) radice=radice-> sinistro;
                     free(aux); }
     return:
 back
                                             X
                                                                                       next
```

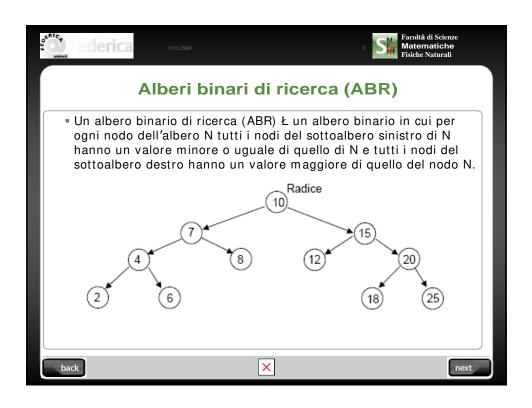


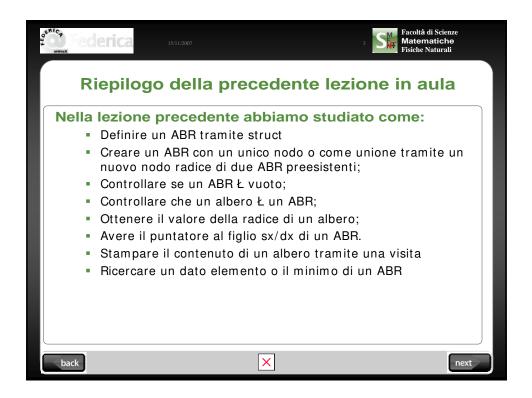


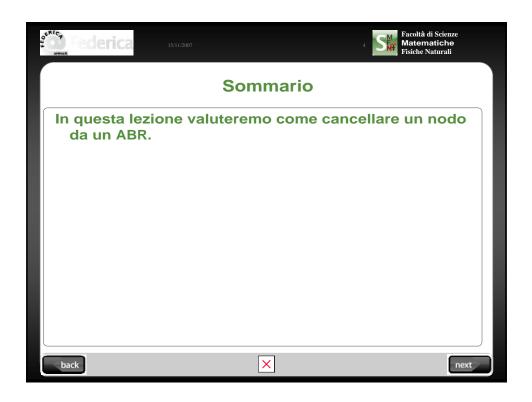


```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
               Uso di puntatori a puntatori
      /* continua else "Elemento trovato" */
         if (((*rad)->sx) && (!((*rad)->dx))) /* Se dx Ł vuoto*/
                 * rad= aux-> sx;
         if (((*rad)->sx) \&& (!((*rad)->dx))) /* Se sx \ \ \ vuoto*/
                 * rad= aux-> dx;
         if ((aux->destro==NULL) || (aux->sinistro==NULL)) {    /* Se un sottoabr Ł vuoto */
           free(aux);
           return;
      if (((*rad)->sx) \& ((*rad)->dx)) /* Se sx e dx non vuoti*/
                 (*rad)->info=ricerca_minimo((*rad)->dx);
                elimina(&(*rad)->destro, (*rad)->info);
      }
                                     X
back
                                                                       next
```

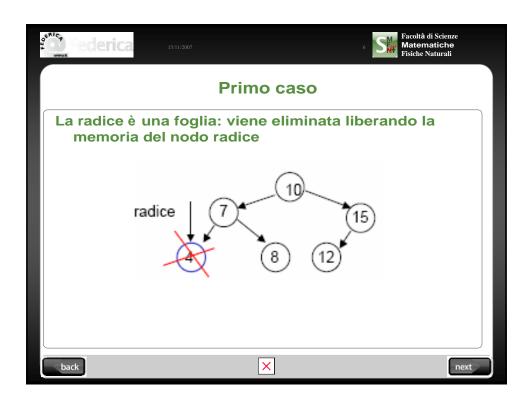


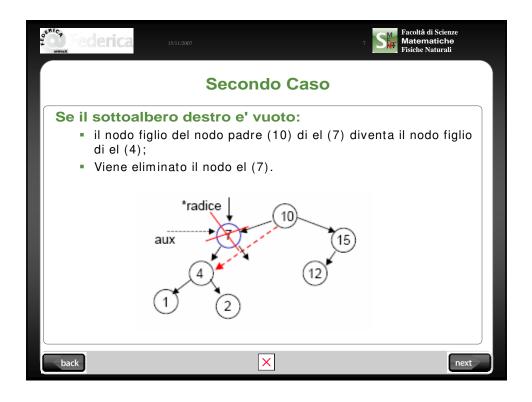


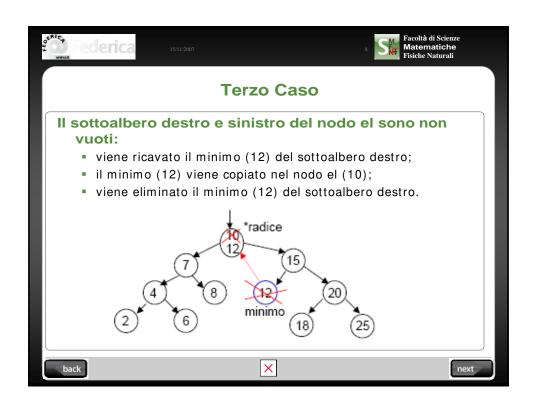




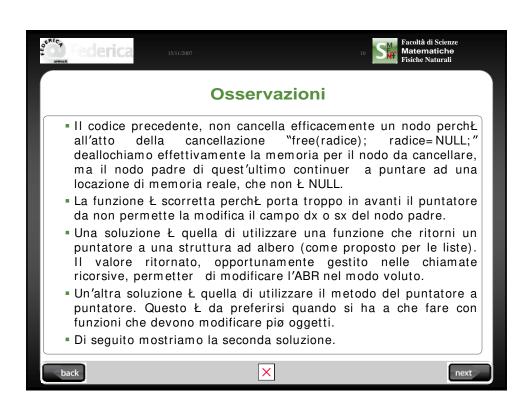


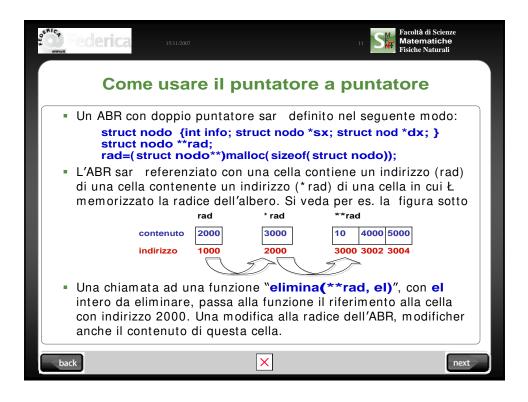


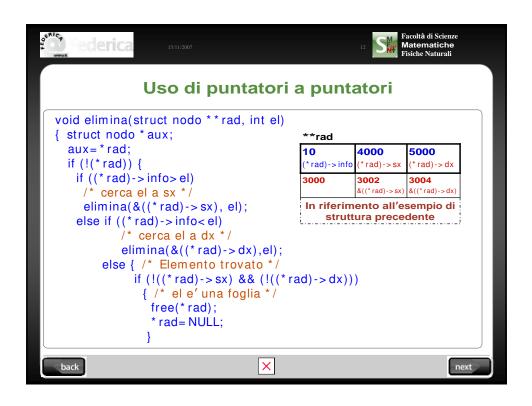




```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
              Codice per la cancellazione (NO)
void * elimina (struct nodo * radice, int el)
    struct nodo * aux;
    if(vuoto(radice)) { printf("elemento non trovato"); return; }
    if(radice->inforadice > el) /* el va cercato nel sottoalbero sinistro */
elimina(radice->sinistro,el);
else if(radice->inforadice< el) /* el va cercato nel sottoalb. destro */
          elimina(radice-> destro,el);
    else /* Trovato l'e'elemento da cancellare */
          { if(radice-> sinistro && radice-> destro) /* II nodo ha due figli*/
                               aux=ricerca_minimo(radice-> destro);
                               radice-> inforadice= aux-> inforadice;
                                elimina(radice-> destro, aux-> inforadice); }
              else { /* Il nodo ha 0 oppure un figlio*/
                     aux=radice;
                     if (radice-> sinistro = NULL) radice= radice-> destro;
                     else if (radice-> destro = NULL) radice=radice-> sinistro;
                     free(aux); }
     return:
 back
                                             X
                                                                                       next
```

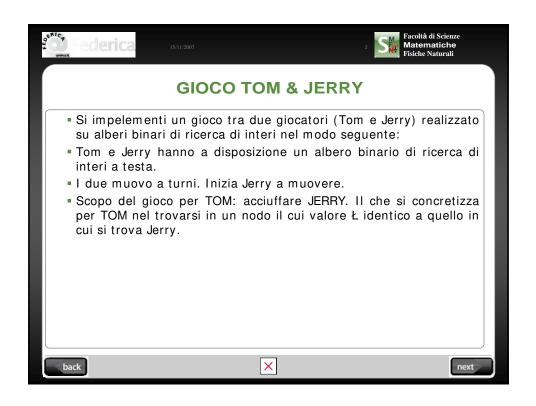


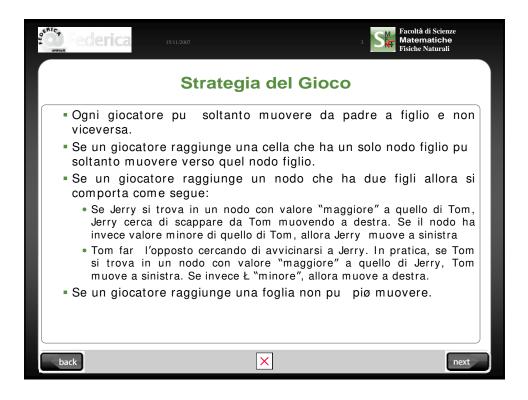


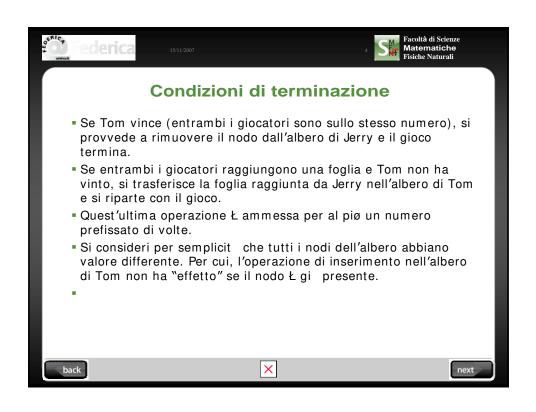


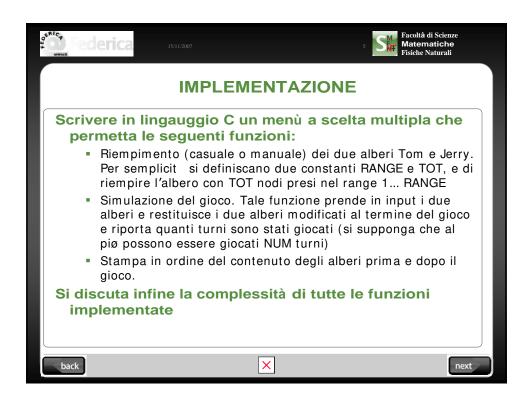
```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
               Uso di puntatori a puntatori
      /* continua else "Elemento trovato" */
         if (((*rad)->sx) && (!((*rad)->dx))) /* Se dx Ł vuoto*/
                 * rad= aux-> sx;
         if (((*rad)->sx) \&& (!((*rad)->dx))) /* Se sx \ \ \ vuoto*/
                 * rad= aux-> dx;
         if ((aux->destro==NULL) || (aux->sinistro==NULL)) {    /* Se un sottoabr Ł vuoto */
           free(aux);
           return;
      if (((*rad)->sx) \& ((*rad)->dx)) /* Se sx e dx non vuoti*/
                 (*rad)->info=ricerca_minimo((*rad)->dx);
                elimina(&(*rad)->destro, (*rad)->info);
      }
                                     X
back
                                                                       next
```





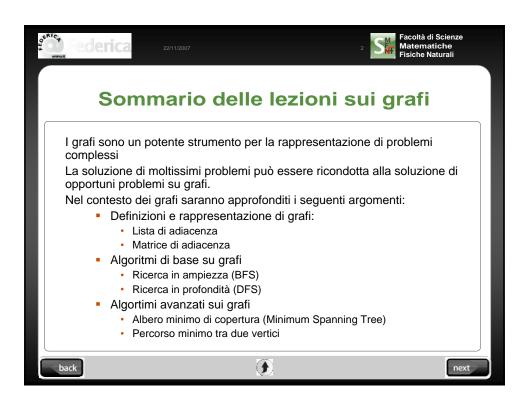


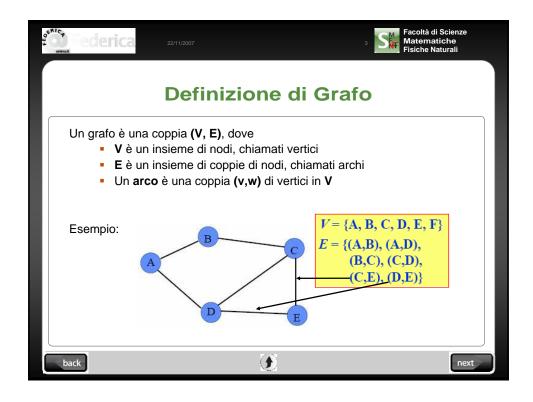


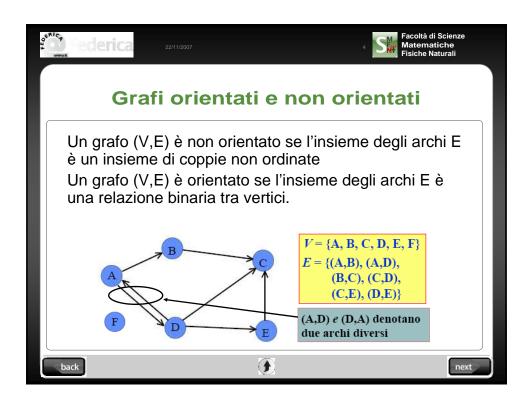


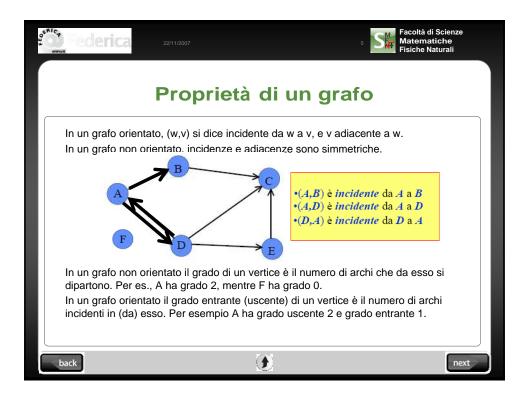


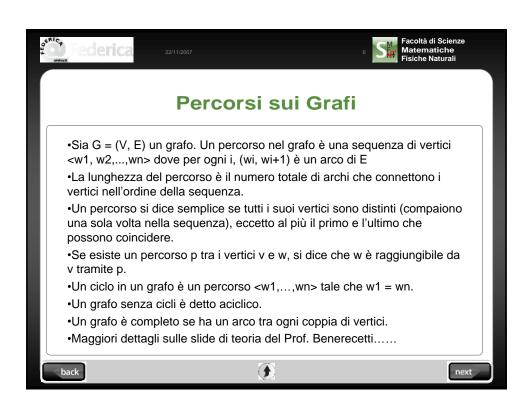


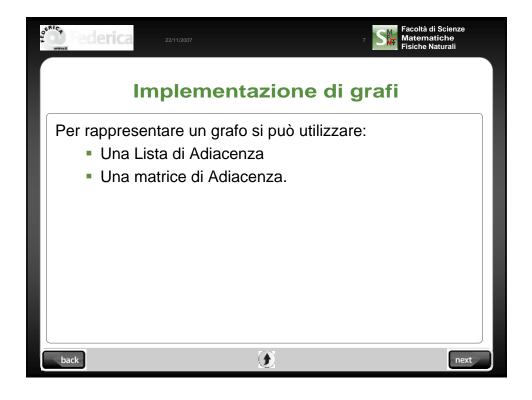


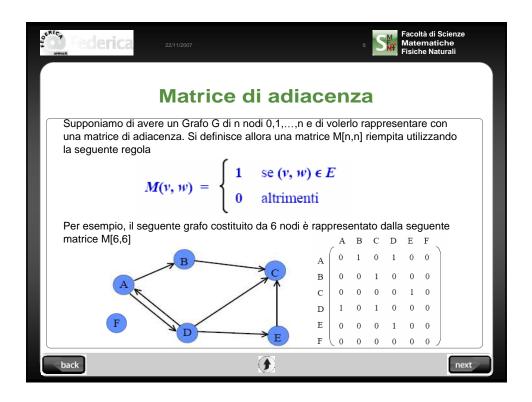


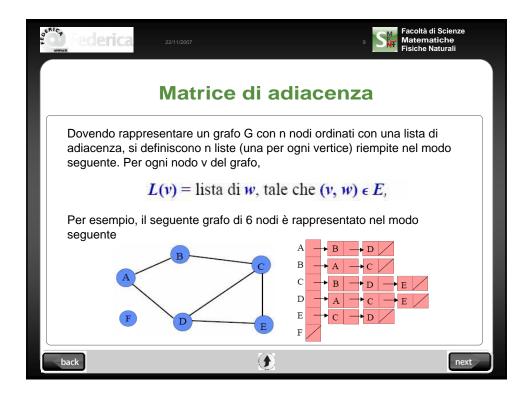


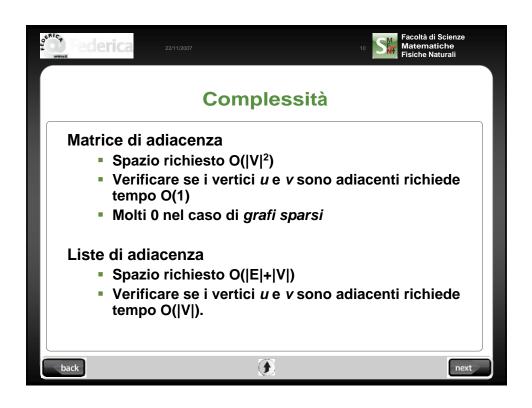


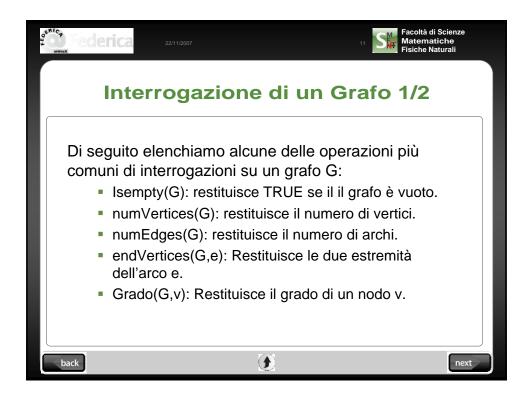


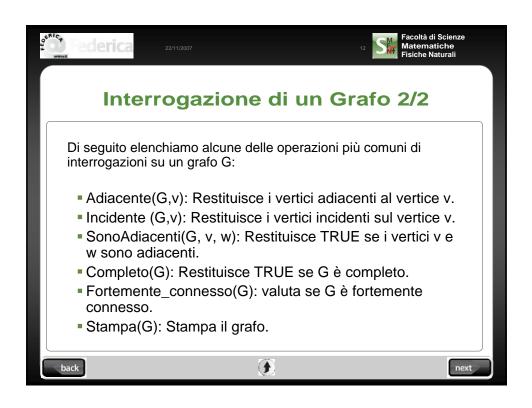


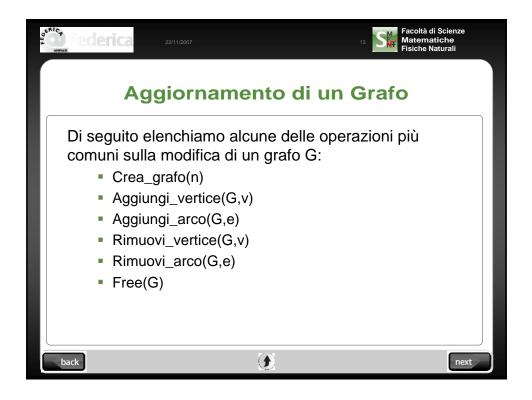


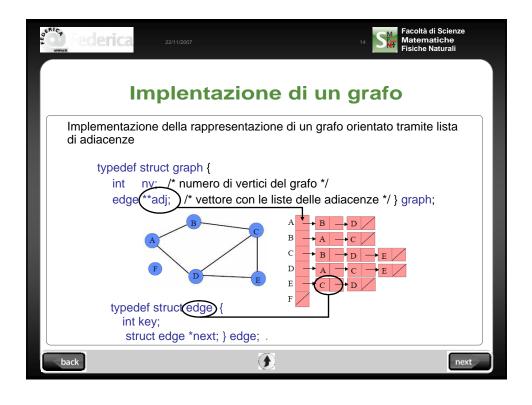


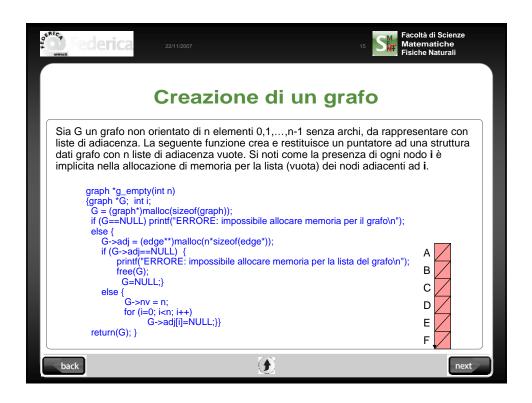




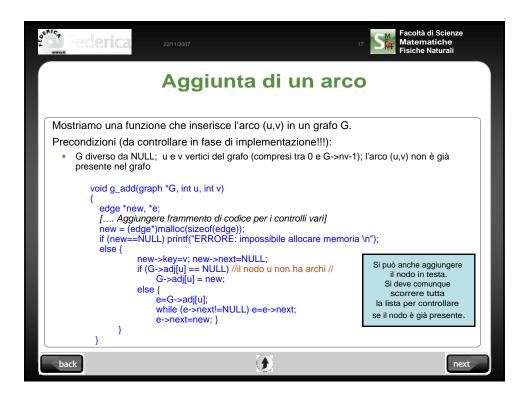


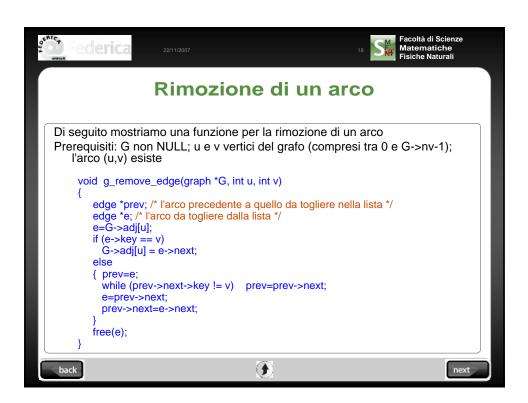


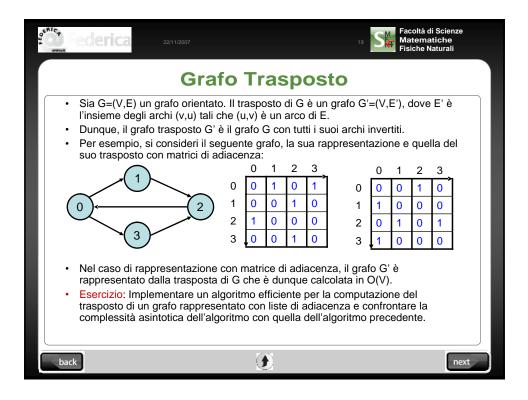


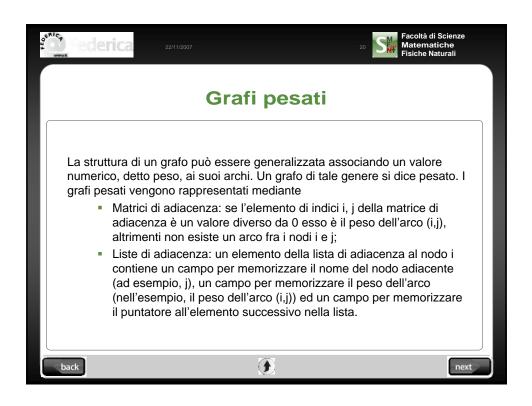


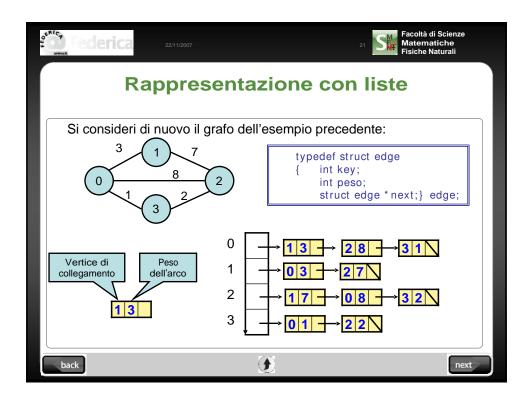


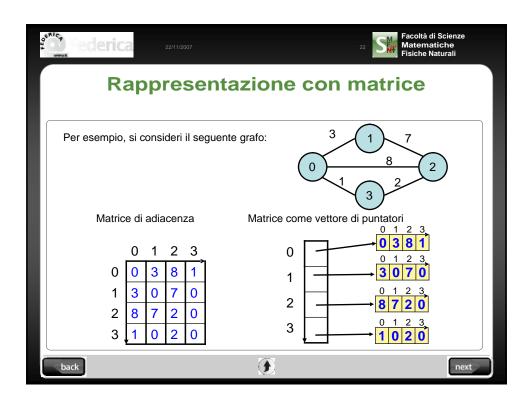




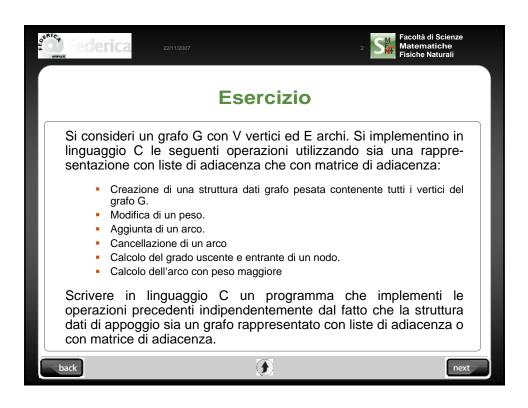




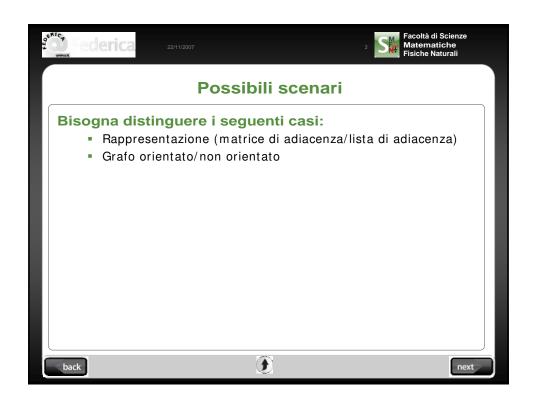


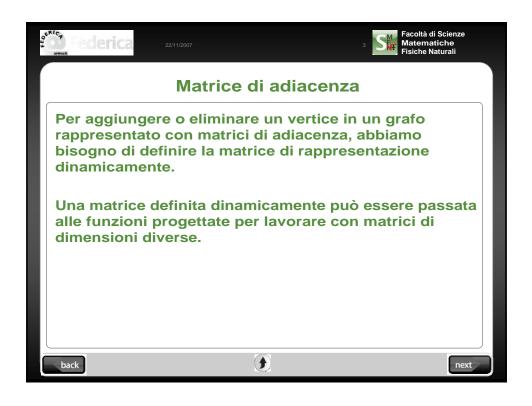


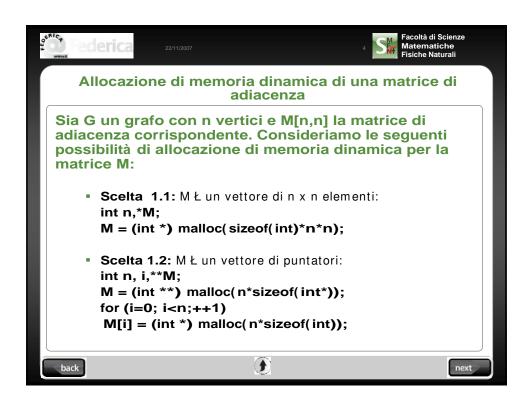


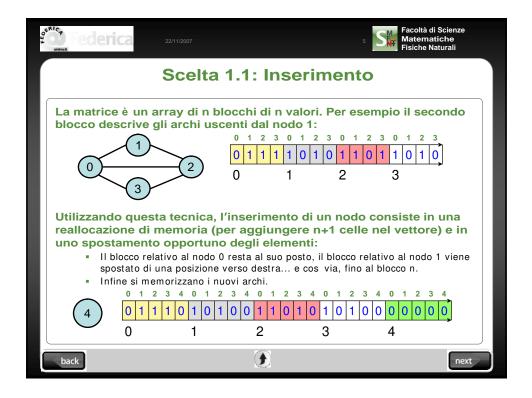


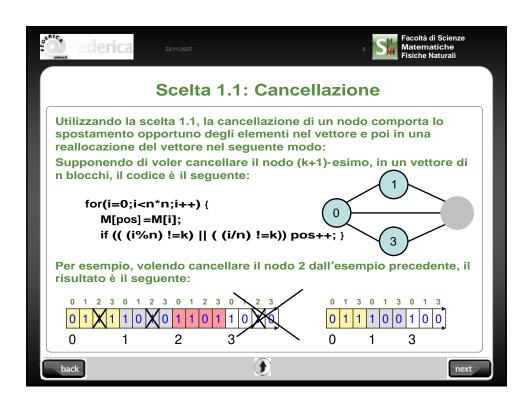


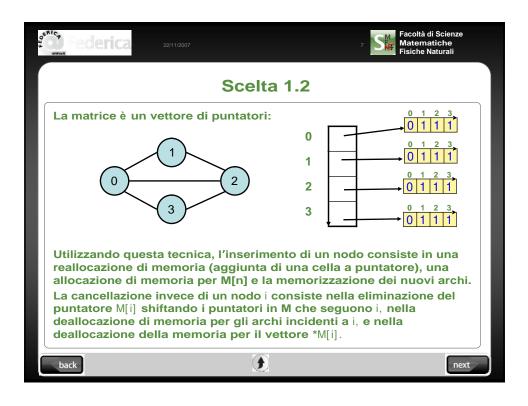


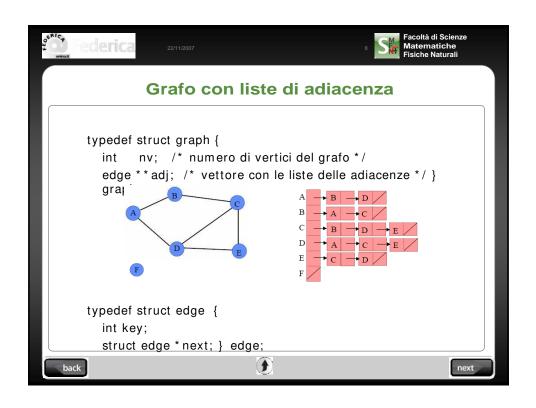


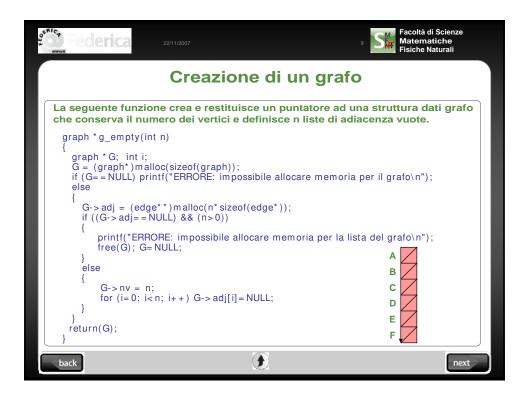


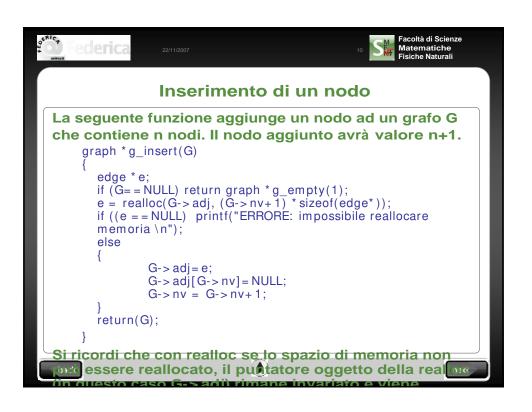


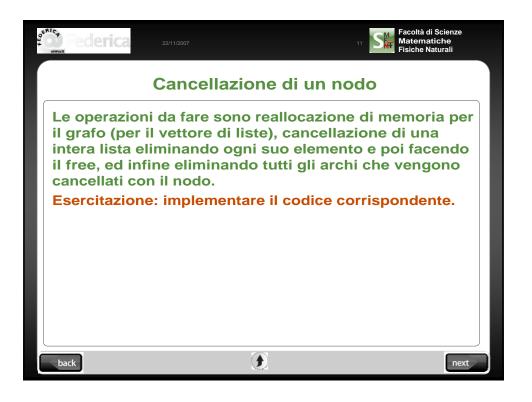


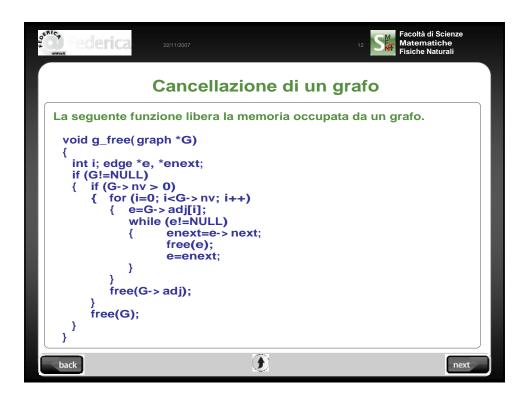


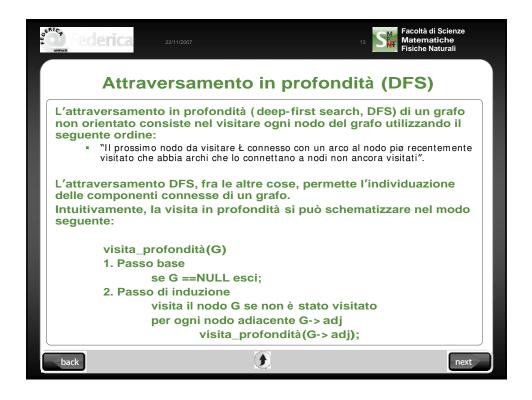


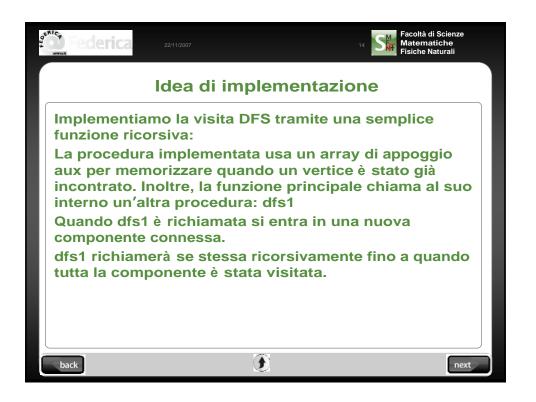


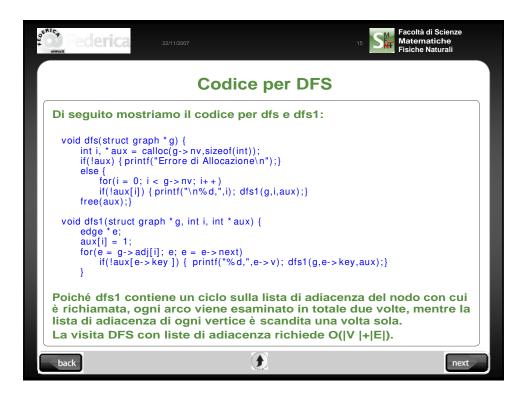


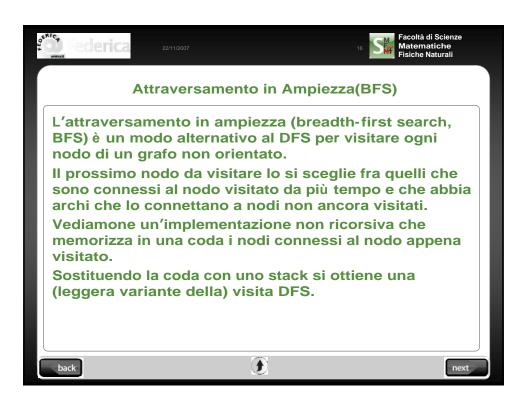








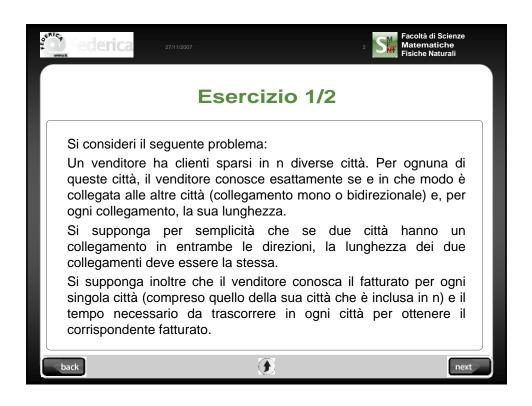


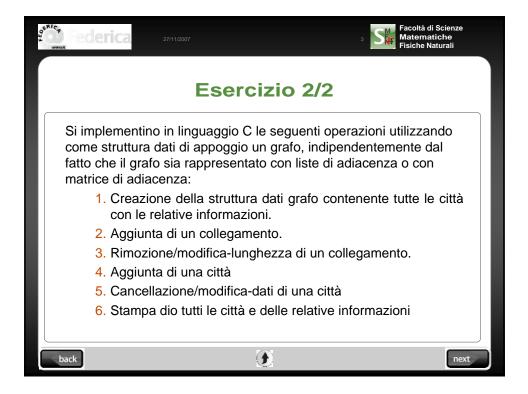


```
Facoltà di Scienze
Matematiche
Fisiche Naturali
                                   Il codice per BFS
void bfs(struct graph * g) {
    int i, *aux = calloc(g-> V,sizeof(int));
if(!aux) { printf("Errore di Allocazione\n"); }
    else {
         for(i = 0; i < g->nv; i++)
  if(!aux[i]) { printf("\n%d,",i+1); bfs1(g,i,aux); }
         free(aux); }
void bfs1(struct graph *g, int i, int *aux) {
   edge *e;
    intqueue * q = createqueue();
    enqueue(q,i);
    while(!emptyq(q)) {
         i = dequeue(q);
aux[i] = 1;
for(e = g->adj[i]; e; e = e->next)
         if(!aux[e->key]) {
               enqueue(q,e->key); printf("%d,",e->key); aux[e->key] = 1; }}
    destroyqueue(q);}
                                                   •
  back
                                                                                                 next
```

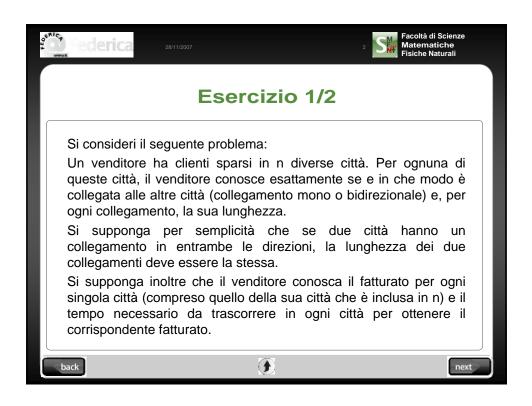


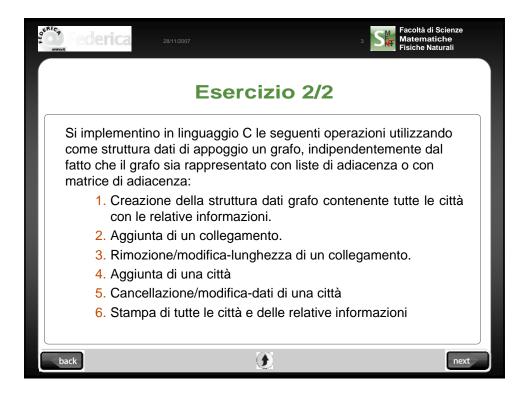


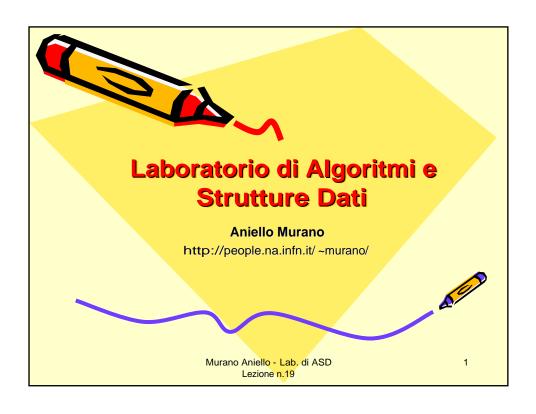


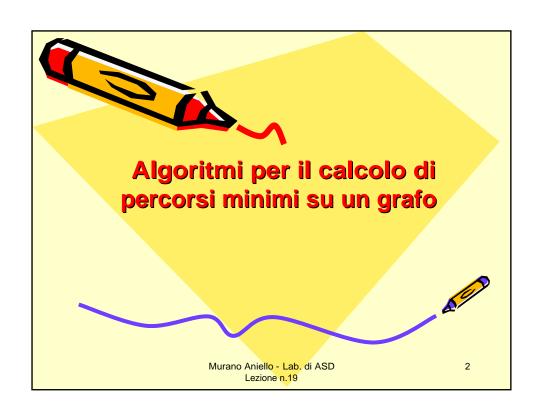














Problema: Supponiamo che un motociclista voglia raggiungere Genova partendo da Napoli. Avendo a disposizione una mappa dell'Italia in cui per ogni collegamento diretto tra città è segnata la sua lunghezza, come può il motociclista trovare il percorso minimo?



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

3

### Soluzione del problema

- Una soluzione è quella di numerare tutti i possibili cammini da Napoli a Genova, per ognuno calcolare la lunghezza complessiva e poi selezionare il più breve
- Quest a soluzione non è la più efficient e per ché ci sono milioni di cammini da analizzare.
- In questa lezione vediamo come risolvere questo problema in modo efficiente.
- In pratica, modellando la cartina dell'Italia come un grafo orientato pesato G=(V, E), dove ciascun vertice rappresenta una città, ogni arco (u,v) rappresenta una strada diretta da u a v ed ogni peso w(u,v) corrispondente ad un arco (u,v) rappresenta la distanza tra u e v, il problema da risolvere è quello di trovare il cammino minimo che collega il vertice corrispondente a Napoli con quello corrispondente a Genova.

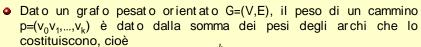


Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

4



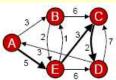
## Definizione di Shortest path (SP)



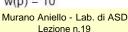
$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

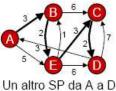
- Uno shortest path (cammino minimo) dal nodo u al nodo v di V è un cammino p = (u,v<sub>1</sub>,v<sub>2</sub>,...,v) tale che w(p) è minimo
- Il costo del cammino minimo da u a v è denotato con  $\delta(u, v)$ .
- Se non esiste un cammino da u a v allora  $\delta(u, v) = \infty$





Uno SP da A a D w(p) = 10



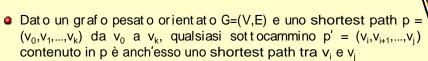


Un altro SP da A a I w(p) = 10

5









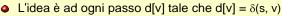
Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

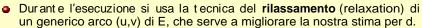
6



## Algoritmi per il calcolo dello SP

- Dat o un graf o pesat o connesso orient at o G=(V,E) e un nodo sorgent e s di V, esist ono diversi algorit mi per trovare uno SP da s verso ogni altro nodo di V (single-source shortest path problem)
- Dall'esecuzione di tali algoritmi si ottiene, per ogni nodo destinazione v di V, uno SP p (da s a v) e si calcola
  - d[v] = distanza del nodo v dal nodo sorgente s lungo lo SP p
  - π[v] = predecessore del nodo v lungo lo SP p
- Inizializzazione: per ogni nodo v di V
  - b d[v] = ∞ se v ≠ s, altrimenti d[s] = 0
  - π[v] = Ø





- Gli algoritmi si differenziano sulla modalità di eseguire il rilassamento
  - Algoritmo di Dijkstra O(E + V log V)
  - > Algoritmo di Bellman- Ford O(E V)



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

4

d[v]=30

٧

### Rilassamento di un arco

- Il rilassamento di un arco (u,v) di E, consiste nel valutare se, utilizzando u come predecessore di v, si può migliorare il valore corrente della distanza d[v] e, in tal caso, si aggiornano d[v] e π[v]
- Procedura relax(u,v):

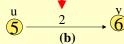
se d[v] > d[u] + w(u,v); allora

 $d[v] = d[u] + w(u,v); e \pi[v] = u;$ 









- In (a), d[v] > d[u] + w(u,v). Quindi il valore di d[v] decresce
- In (b), d[v] ≤ d[u] + w(u,v). Quindi d[v] non viene modificato



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

8

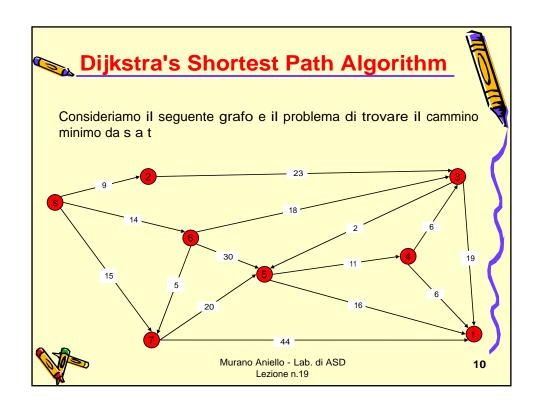
# Algoritmo di Dijkstra

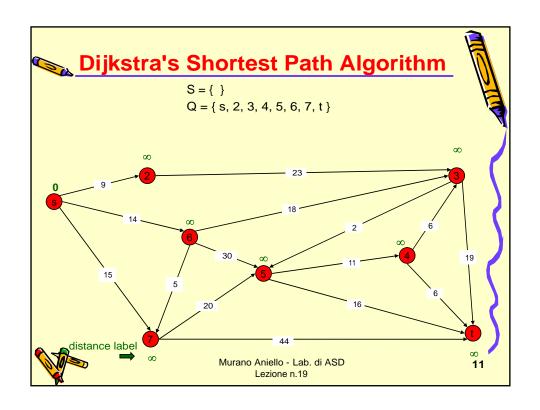
- L'algorit mo di Dijkstra risolve il problema di cammini minimi con sor gent e singola su un graf o orient at o e pesat o G = (V, E) nel caso in cui tutti i pesi degli archi siano non negativi.
- Assumeremo quindi che il peso  $w(u, v) \ge 0$  per ogni arco (u, v) di E.
- L'algorit mo di Dijkstra mantiene un insieme S che contiene i vertici il cui peso di cammino minimo dalla sorgente s è già stato determinato.
- Inizialmente S viene inizializzato vuoto (inizializzazione).
- L'algorit mo poi seleziona ripet ut ament e un vertice u di S'=V S con la minima stima di cammino minimo, inserisce u in S e rilassa tutti gli archi uscenti da u.
- Viene usata una coda con priorità Q che contiene tutti i vertici in S'
- L'algoritmo termina quando S=V

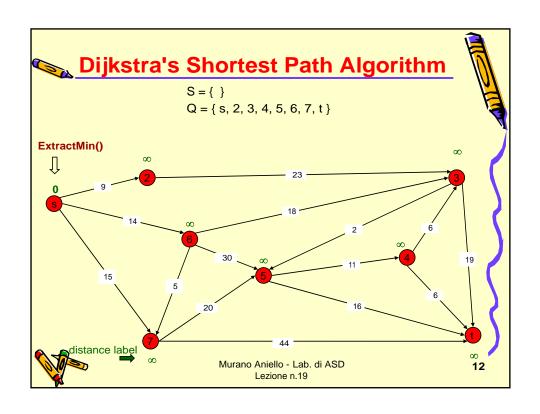


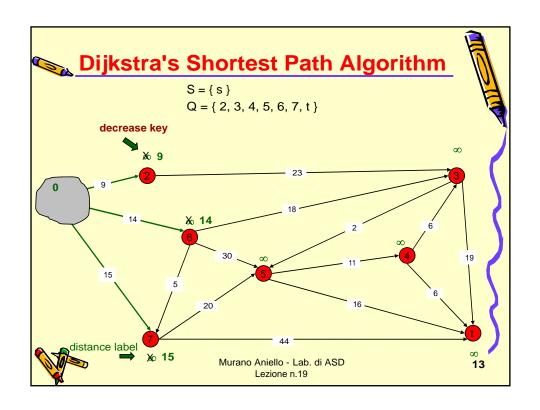
Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

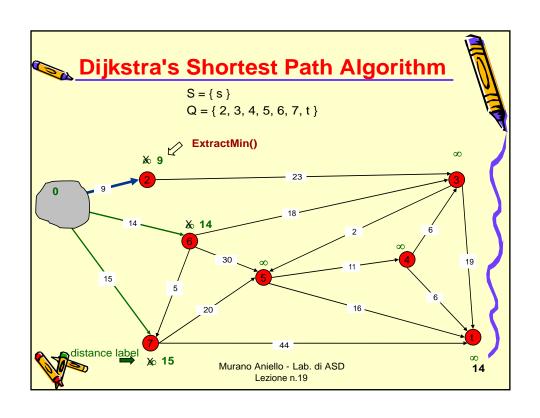
ç

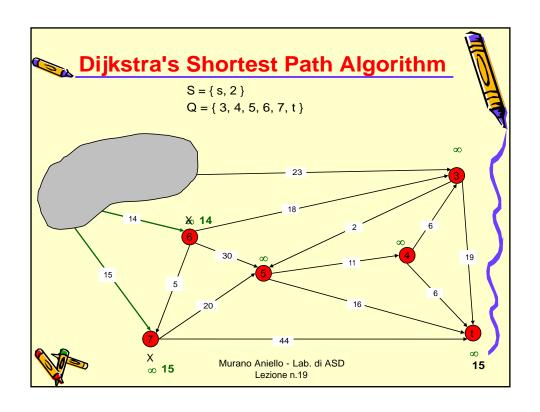


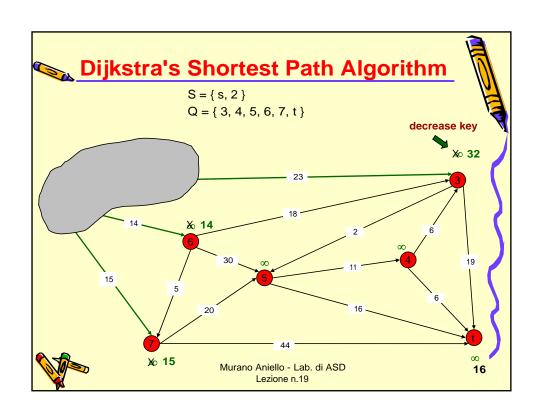


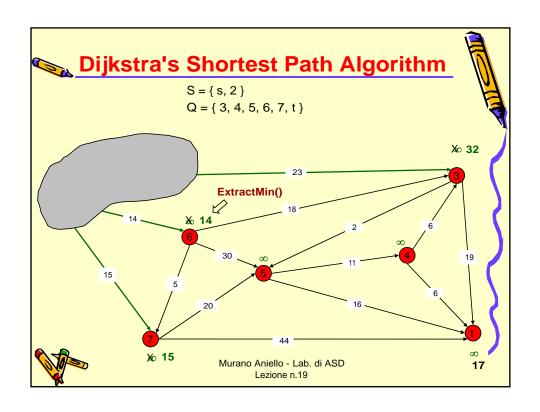


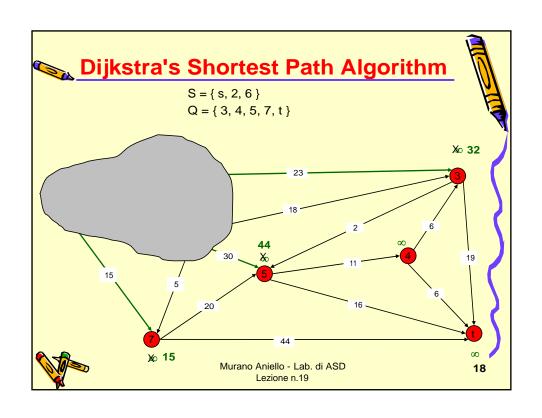


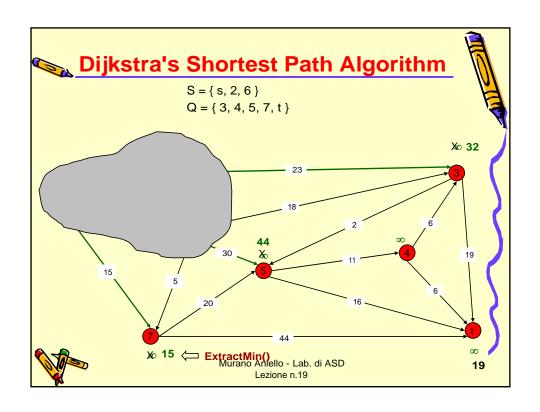


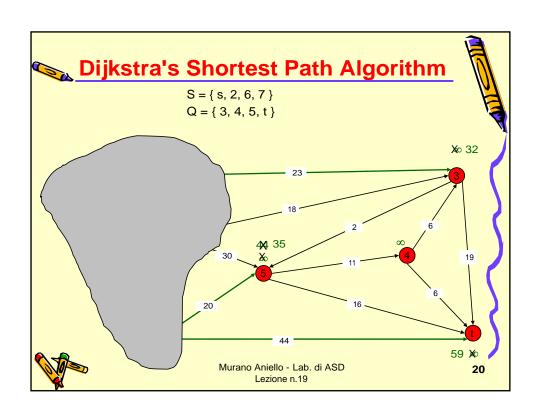


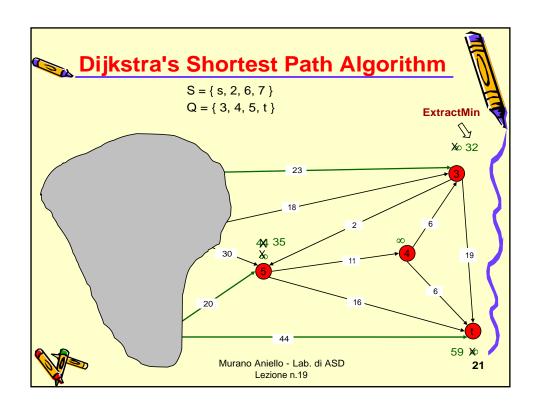


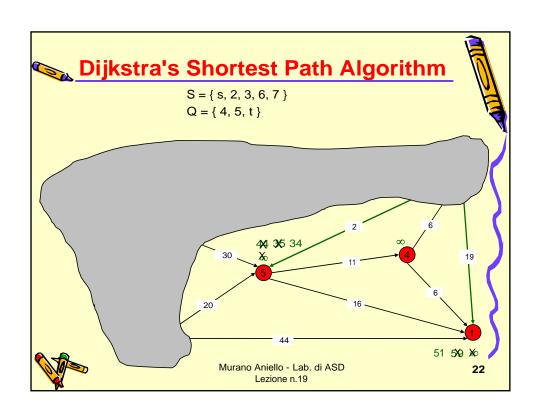


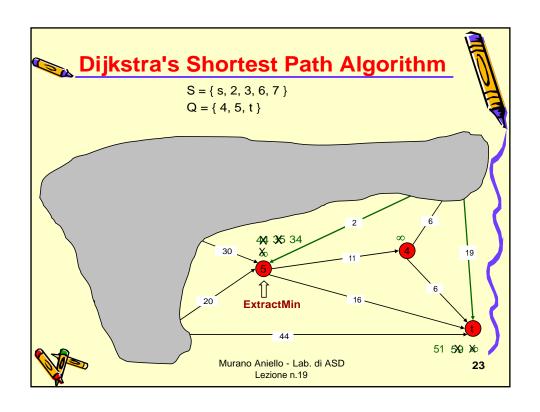


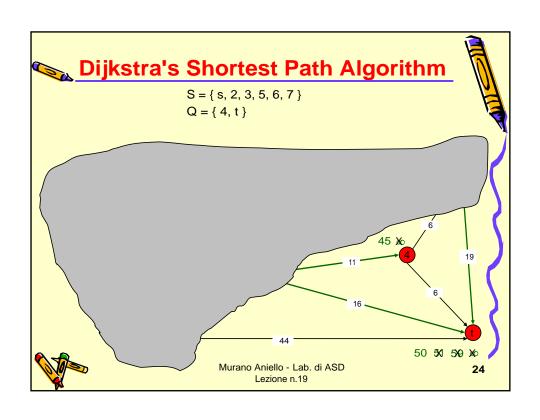


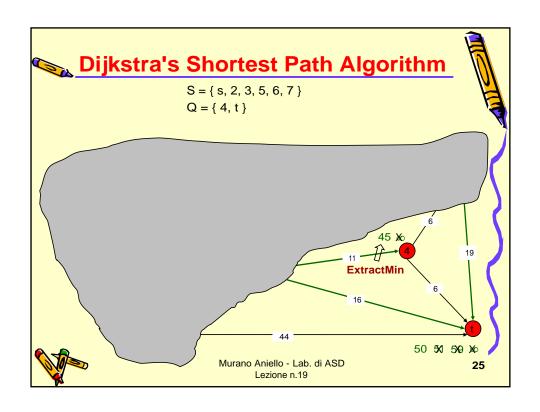


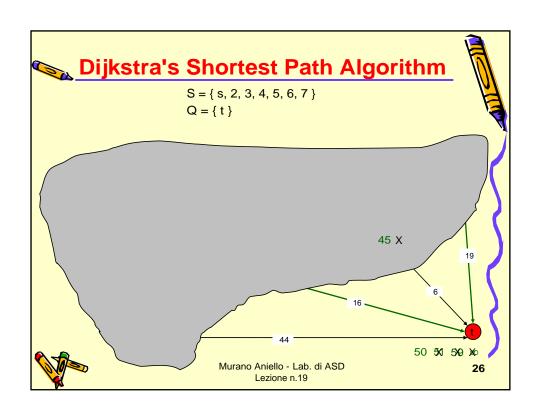


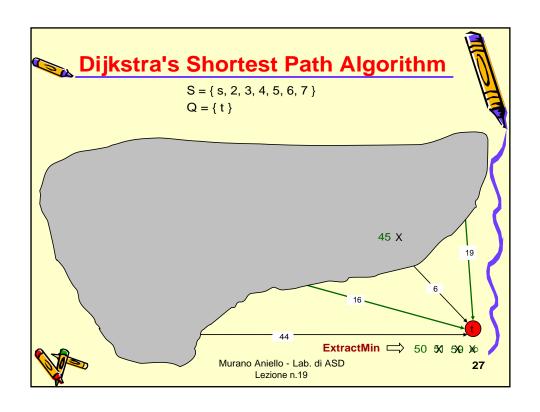


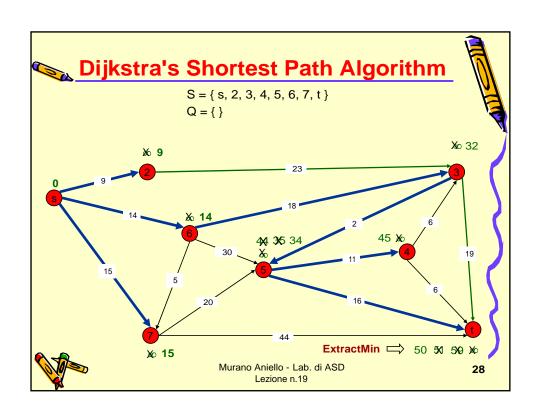


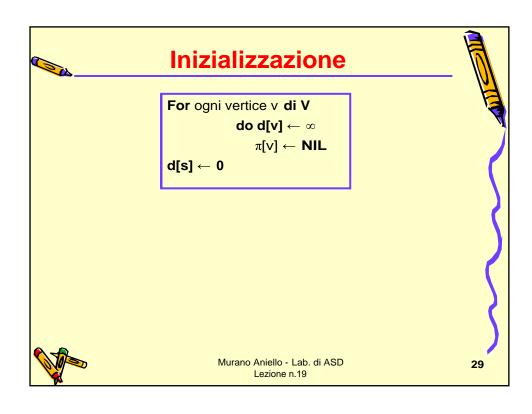




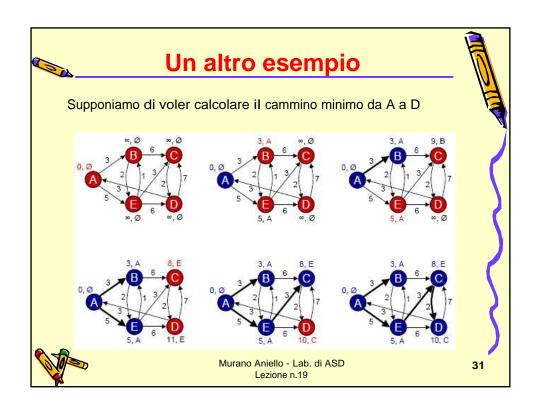


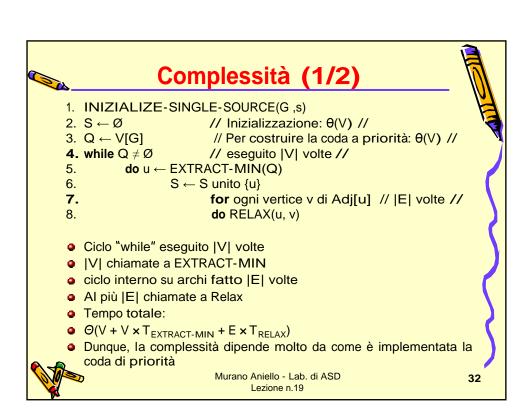






#### DIJKSTRA(G,s) INIZIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s) $\begin{array}{l} S \leftarrow \emptyset \\ Q \leftarrow V[G] \end{array}$ 2. Tratto da: 3. Introduzione agli algoritmi 4. while $Q \neq \emptyset$ Di H.Cormen do $u \leftarrow EXTRACT-MIN(Q)$ 5. 6. $S \leftarrow S \text{ unito } \{u\}$ 7. for ogni vertice v di Adj[u] do RELAX(u, v) La linea 1 esegue l'inizializzazione, • la linea 2 inizializza l'insieme S con l'insieme vuoto. La linea 3 inizializza la coda con priorità Q con tutti i vertici in V-S. • Ad ogni esecuzione del ciclo while un vertice u viene estratto da Q e viene inserito in S (la prima volta u = s). I nf ine le linee 7-8 rilassano ogni arco (u, v) che esce da u, aggiornando la stima d[v] ed il predecessore $\pi[v]$ se il cammino minimo per v può essere migliorato passando per u. Si osservi che ogni vertice viene estratto da Q ed inserito in S una sola volta: Quindi il ciclo while viene ripetuto |V| volte. Murano Aniello - Lab. di ASD 30 Lezione n.19







# Complessità (2/2)

- Usando un array non ordinato per implementare la coda:
- EXTRACT-MIN in tempo  $\Theta(n)$ , Relax in  $\Theta(1)$
- Tempo totale:  $\Theta(V + V V + E) = \Theta(V^2)$
- In un grafo non fortemtente conesso conviene usare un heap binario invece di una coda di priorità
- Usando un heap, la complessità diventa: θ((V+E) logV)
  - Per costruire un heap: θ (V)
  - ExtractMin prende tempo θ(lgV) (se si pensa ad un heap con minimo nella radice) e questa operazione viene eseguita IVI volte
  - Il costo di relax è O(lgV) e questo viene effettuato |E| volte.



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

33



#### Algoritmo Bellman - Ford

- L'algorit mo di Bellman-Ford risolve il problema di cammini minimi con sorgent e singola nel caso più generale in cui i pesi degli archi possono essere negativi.
- Dato un grafo orientato e pesato G = (V, E) con sorgente s, l'algoritmo di Bellman-Ford restituisce un valore booleano che indica se esiste oppure no un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente. In caso affermativo, l'algoritmo indica che non esiste alcuna soluzione; se invece tale ciclo non esiste, allora l'algoritmo produce i cammini minimi ed i loro pesi.
- Anche questo algoritmo usa la tecnica del rilassamento, diminuendo progressivamente una stima d[v] del peso di un cammino minimo dalla sorgente s ad ogni vertice v di V fino a raggiungere il reale peso di cammino minimo  $\delta(s, v)$ .
- L'algorit mo restituisce TRUE solo se il graf o non contiene un ciclo di peso negativo raggiungibile dalla sorgente



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19



4.

6.

## Bellman- Ford (G,s)

- 1. INIZIALIZE-SINGLE-SOURCE (G, s)
- 2. **For** i ←1 to |V[G]| 1
- 3. **do for** ogni vertice (u, v) di E[G]
  - do Relax (u, v, w)
- 5. For ogni arco (u, v) di E[G]
  - **do if** d[v] > d[u] + w(u, v)
- 7. then return FALSE
- 8. Return TRUE

Dopo aver effettuato l'inizializzazione, l'algoritmo fa |V| - 1 passate sugli archi del grafo:ogni passata è una iterazione del ciclo for delle linee 2-4 e consiste nel rilassare ogni arco del grafo una volta.

infine le linee 5-8 controllano l'esistenza di un ciclo di peso negativo e restituiscono il valore booleano appropriato.



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19 35

Tratto da:

Di H.Cormen

Introduzione agli algoritmi



#### **Analisi Bellman- Ford**

 L'algorit mo di Bellman - Ford richiede tempo O(VE), poiché l'inizializzazione in linea 1 richiede tempo Θ(V) ment re i cicli for richiedono tempo O(E)



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19



### Algoritmi:complessità

In definitiva l'algoritmo di Dijkstra è più conveniente rispetto a quello di Bellman-Ford,mentre l'ultimo algoritmo citato ha una duttilità maggiore perché é in grado di trovare il cammino minimo anche su grafi con archi di peso negativo.



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19

37



# Cammini minimi tra tutte le coppie di vertici di un grafo

- Oltre ad algoritmi che risolvono il problema del cammino minimo su grafi con sorgente singola, ve ne sono alcuni che considerano il problema di trovare i cammini minimi tra tutte le coppie di vertici in un grafo.
- Qui riportiamo l'algoritmo di Floyd-Warshall.



Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19



### Algoritmo di Floyd-Warshall (1/2)

Si considerano tutti i cammini da i a j in cui vertici intermedi sono nell'insieme {1,...,k} e sia p un cammino minimo tra di essi.

E' possibile definire una relazione tra  ${\bf p}$  e  $\,$  i cammini minimi tra i vertici  ${\bf i}$  e  ${\bf j}$  i cui vertici intermedi sono nell'insieme

Se  ${\bf k}$  non e' un vertice intermedio di  ${\bf p}$ , allora tutti i vertici intermedi di  ${\bf p}$  sono nell'insieme

Questo significa che il peso di un cammino minimo da i a j in cui tutti i vertici intermedi sono in  $\{1,...,k\}$  è dato dal peso di un cammino minimo da i a j in cui tutti i vertci intermedi sono in  $\{1,...,k-1\}$ .

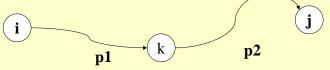


Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19 39



#### Algoritmo di Floyd-Warshall (2/2)

Se k è un vertice intermedio di p allora possiamo spezzare p così:



- **p1** e' un *cammino minimo* da **i** a **k** in cui tutti i vertici intermedi sono nell'insieme {1,...,k-1}.
- **p2** e' un *cammino minimo* da **i** a **k** in cui tutti i vertici intermedi sono nell'insieme {1,...,k-1}.

Questo significa che il peso di un cammino minimo da i a j in cui tutti i vertici intermedi sono in  $\{1,...,k\}$  è dato dal peso di un cammino minimo da i a k in cui tutti i vertici intermedi sono in  $\{1,...,k-1\}$  + il peso di un cammino minimo da k a j in cui tutti i vertici intermedi sono in  $\{1,...,k-1\}$ .

Murano Aniello - Lab. di ASD Lezione n.19



