Matrici Associate alle Applicazioni Lineari

In questa nota, enunciamo e dimostriamo il teorema di caratterizzazione delle matrici associate a un'applicazione lineare tra spazi vettoriali finitamente generati su un campo K in basi ordinate fissate. Per le notazioni, facciamo riferimento a quelle usate a lezione.

Teorema. Sia $T : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W finitamente generati su un campo K. Sia $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ordinata di V e sia $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ una base ordinata di W. Allora, esiste un'unica matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tale che, per ogni vettore $u \in V$, posto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(u)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \Phi_{\mathcal{B}'}(T(u))$, si abbia

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dim. Prima dimostriamo l'esistenza. Consideriamo la matrice A le cui colonne sono costituite dalle componenti in $\mathcal{B}'$ dei vettori che sono le immagini dei vettori di $\mathcal{B}$ mediante T. Quindi, calcoliamo

$$\begin{aligned} &\Phi_{\mathcal{B}'}(T(e_1)) = (a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^m) \\ &\Phi_{\mathcal{B}'}(T(e_2)) = (a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^m) \\ &\vdots \\ &\Phi_{\mathcal{B}'}(T(e_n)) = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^m) \end{aligned}$$

e poniamo

$$A := \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n \end{pmatrix}.$$

Quindi, dimostrare che A soddisfa l'uguaglianza (**??**) equivale a dimostrare che il vettore delle componenti di $T(u)$ in $\mathcal{B}'$ è

$$(a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n, a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n, \ldots, a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n).$$

Allora, calcoliamo:

$$T(u) = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \cdots + x_n T(e_n) =$$
$$= x_1(a_1^1 e'_1 + a_1^2 e'_2 + \cdots + a_1^m e'_m) + x_2(a_2^1 e'_1 + a_2^2 e'_2 + \cdots + a_2^m e'_m) + \cdots + x_n(a_n^1 e'_1 + a_n^2 e'_2 + \cdots + a_n^m e'_m) =$$
$$= x_1 a_1^1 e'_1 + x_1 a_1^2 e'_2 + \cdots + x_1 a_1^m e'_m + x_2 a_2^1 e'_1 + x_2 a_2^2 e'_2 + \cdots + x_2 a_2^m e'_m + \cdots + x_n a_n^1 e'_1 + x_n a_n^2 e'_2 + \cdots + x_n a_n^m e'_m =$$
$$= (a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_n^1 x_n) e'_1 + (a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n) e'_2 + \cdots + (a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_n^m x_n) e'_m.$$

Adesso sappiamo che una matrice del tipo desiderato esiste perché A soddisfa la condizione (**??**). Dimostriamo l'unicità. Sia $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ una matrice che soddisfa la condizione (**??**). Vediamo che necessariamente deve essere $B = A$.

Se consideriamo $u = e_1$, allora $\Phi_{\mathcal{B}}(e_1) = (1, 0, \dots, 0)$ e sappiamo che $\Phi_{\mathcal{B}'}(T(e_1)) = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^m)$. Quindi deve essere

$$\underline{b}_1 = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix},$$

dove si ricordi che $\underline{b}_1$ è la prima colonna di B.

Se consideriamo $u = e_2$, allora $\Phi_{\mathcal{B}}(e_2) = (0, 1, \dots, 0)$ e sappiamo che $\Phi_{\mathcal{B}'}(T(e_2)) = (a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^m)$. Quindi deve essere

$$\underline{b}_2 = B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix},$$

dove si ricordi che $\underline{b}_2$ è la seconda colonna di B.

Procediamo in questo modo, fin quando consideriamo $u = e_n$. Allora $\Phi_{\mathcal{B}}(e_n) = (1, 0, \dots, 0)$ e sappiamo che $\Phi_{\mathcal{B}'}(T(e_n)) = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^m)$. Quindi deve essere

$$\underline{b}_n = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix},$$

dove si ricordi che $\underline{b}_n$ è la prima colonna di B.

Siccome tutte le colonne di B sono uguali a quelle di A, allora B coincide con A. $\square$

La matrice A considerata nel teorema si dice *matrice associata a T nelle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$* e si denota con $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$.

Questa matrice determina l'applicazione lineare $\tilde{T} : K^n \to K^n$ tale che

$$\tilde{T} = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1},$$

nel senso che $\tilde{T} = \tilde{T}_A$, dove

$$\tilde{T}_A : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n \to A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m.$$