Teorema di Rouche-Capelli

In questa nota, enunciamo e dimostriamo il teorema di Rouché-Capelli, che caratterizza la compatibilità di un sistema di equazioni lineari. La dimostrazione proposta fa uso del metodo di riduzione di Gauss di una matrice a matrice a gradini.

Definizione. Sia $\Sigma : AX = \underline{b}$ un sistema di m equazioni lineari in n incognite su un campo K e sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle sue soluzioni. Si dice che Σ è *compatibile* se $\mathcal{S} \neq \emptyset$, ossia se Σ ammette almeno una soluzione.

Denotiamo con C la matrice completa $(A\ \underline{b})$ del sistema Σ.

Teorema di Rouché-Capelli. Σ *compatibile* $\Longleftrightarrow$ *rango*$(A) =$*rango*(C)

Dim. Siccome le colonne della matrice C sono $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$, ossia sono le colonne della matrice A con in aggiunta la colonna $\underline{b}$ dei termini noti, si può verificare solo uno dei seguenti due casi:

[1] rango$(A) =$rango(C),
[2] rango$(A) =$rango$(C) - 1$.

Sia C' una matrice a gradini ottenuta a partire da C. Allora le prime n colonne di C' costituiscono le colonne di una matrice a gradini A' ottenuta a partire da A. Quindi, il caso [1] si verifica se e solo se i pivot della matrice C' coincidono con quelli di A'. Questo equivale a dire che il sistema lineare Σ' che ha C' come matrice associata è compatibile, in quanto possiamo applicare la sostituzione a ritroso e in questo modo ricavare le soluzioni. Siccome Σ' e Σ sono equivalenti, anche Σ è compatibile. La dimostrazione risulta così conclusa. $\square$

Ecco come possiamo rappresentare i due possibili casi considerati nella dimostrazione. Con p_i denotiamo l'i-esimo pivot e con h denotiamo il rango di C', che è uguale a quello di C:

$$[1] : \left(\begin{array}{cccccc|c} p_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{h-1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & p_h & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \quad [2] : \left(\begin{array}{cccccc|c} p_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{h-1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & p_h \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$