Differenza tra un numero deterministico, ad esempio $\sqrt{2}$, e un numero aleatorio, ad esempio S_{10}:

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots,$$

invece, per

$$S_{10} \sim B(10, p), \quad p \in (0,1)$$

bisogna indicare

$$\left[\begin{array}{ll} \text{insieme dei valori che esso può assumere con probabilità non nulla} & \overset{\text{spettro}}{\{0, 1, 2, \ldots, 9, 10\}} \\ k \in \{0, 1, \ldots, 10\}, & \mathbb{P}(S_{10} = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} > 0 \end{array}\right]$$

la legge di probabilità di S_{10}

$\square$

Riepilogo dei numeri aleatori nello schema delle prove ripetute di Bernoulli

$B(1,p)$ $\qquad$ $B(n,p)$ $\qquad$ $G(p)$

X_5 $\qquad$ S_n $\qquad$ T_1

$$\left[\begin{array}{l} S_{X_5} = \{0,1\} \\ \mathbb{P}(X_5 = 0) = 1-p \\ \mathbb{P}(X_5 = 1) = p \end{array}\right] \text{legge}$$

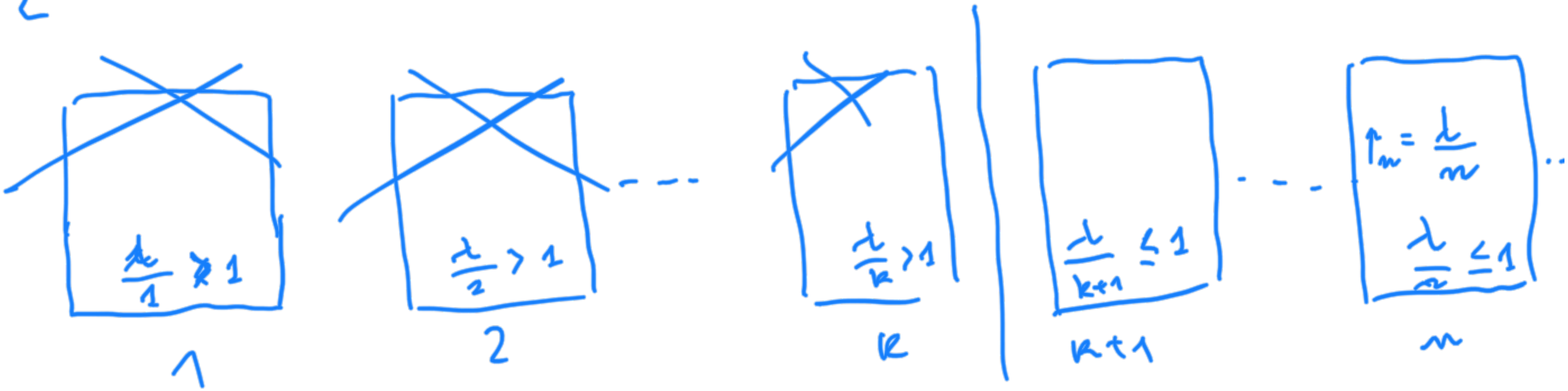
$$\left[\begin{array}{l} S_{T_1} = \{1,2,\dots\} \\ n \in S_{T_1} \\ \mathbb{P}(T_1 = n) = p\,(1-p)^{n-1} \end{array}\right] \text{legge}$$

$Pascal(k,p)$

W_k

$$\left[\begin{array}{l} S_{W_k} = \{k, k+1, \dots\} \end{array}\right. \qquad \text{legge}$$

$$\left[\begin{array}{l} n \in S_{W_k} \\ \mathbb{P}(W_k = n) = p \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \end{array}\right] \quad \text{JO}$$



$\lambda > 0$

$$X \sim \Pi(\lambda)$$

$$\left[\begin{array}{l} S_X = \{0, 1, 2, \dots\} \\ n \in S_X, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} \end{array}\right] \quad \text{legge di Poisson}$$

Nella formula che fornisce la probabilità del singoletto $\{n\}$ in base alla legge di Poisson il denominatore cresce molto velocemente al crescere di n e questo porta a dire che per m "grande" la probabilità $\mathbb{P}(X \geq m)$ è molto "vicina" a zero.

dipende da λ

Problema delle concordanze – n cartoncini

M_n : numero non è deterministico

$$S_{M_n} = \{0, 1, 2, \dots, n\} \setminus \{n-1\}$$

$$k \in S \quad \mathbb{P}(M_n = k) = \frac{1}{\dots} \sum^{n-k} (-1)^i \frac{1}{\dots}$$

L
E
G
G

… M_n … $\frac{\ldots}{K!} \sum_{i=0} \ldots \frac{\ldots}{i!}$) È

legge di probabilità

Si osservi che

$$\sum_{i=0}^{n-K} (-1)^i \frac{1}{i!} = \underbrace{(-1)^0 \frac{1}{0!} + (-1)^1 \frac{1}{1!}}_{(1-1)=0} + \ldots$$

$$= \sum_{i=2}^{n-k} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

$\square$

EVENTI QUASI IMPOSSIBILI

e

EVENTI QUASI CERTI

… ripetute di

Nello schema delle prove ripetute di Bernoulli con $p = 1/2$ consideriamo l'evento

$$A : \text{"TT prima di CC"}$$

e gli eventi a due a due disgiunti

$$A_1 = T_1 T_2$$

$$A_2 = C_1 T_2 T_3 \qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$A_3 = T_1 C_2 T_3 T_4 \qquad A_2 \cap A_3 = \emptyset = A_1 \cap A_3$$

$$\vdots$$

$$A_n = \begin{cases} n \text{ pari} & C_1 T_2 C_3 \cdots C_{n-1} T_n T_{n+1} \\ n \text{ dispari} & T_1 C_2 T_3 \cdots C_{n-1} T_n T_{n+1} \end{cases}$$

$$\vdots$$

Risulta

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots ,$$

e per l'assioma della numerabile addititività, si ha:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots$$

$$= \mathbb{P}(T_1 T_2) + \mathbb{P}(C_1 T_2 T_3) + \mathbb{P}(T_1 C_2 T_3 T_4) + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{1/2} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Per l'equità della moneta, anche per

l'evento

$$B: \text{"CC prima di TT"}$$

risulta

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Allora, per la finita additività applicata agli eventi disgiunti A e B, si trova che

$$\mathbb{P}(A \,\dot\cup\, B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

quantunque

$$A \,\dot\cup\, B \neq \{T, C\}^{\mathbb{N}} = \Omega.$$

Si dice allora che

$$A \,\dot\cup\, B$$

è un evento quasi certo.

Per completare Ω mancano solo due punti campione: l'alternanza di T e C che inizia con C e l'alternanza di T e C che inizia con T:

$$D = \{(C\ T\ C\ T\ C\ T\ C\ T\ \cdots)\}$$

e

$$E = \{(T\ C\ T\ C\ T\ C\ T\ C\ \cdots)\}.$$

Si osservi ora che

$$D \cap E = \emptyset \quad e \quad D \cup E = (A \cup B)^c$$

da cui

$$\mathbb{P}\left[(A \dot\cup B)^c\right] = 1 - \mathbb{P}(A \dot\cup B)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

ovvero

$$\mathbb{P}(D \dot\cup E) = 0.$$

Si dice allora che

$$D \dot\cup E$$

è un evento "quasi impossibile".

D'altra parte, dal momento che sia D che E sono contenuti in $D \dot\cup E$, deve risultare

$$\mathbb{P}(D) = 0 = \mathbb{P}(E),$$

[illegible] che D e E sono eventi

ovvero che anche D e E sono eventi quasi impossibili.

Più in generale, tutti i singoletti di $\{T, C\}^{\mathbb{N}}$, ovvero tutti i sottoinsiemi dello spazio campione contenenti una sola successione di T e C, sono eventi quasi impossibili. $\square$

Una maniera alternativa per verificare che D e E sono quasi impossibili è la seguente:

$$0 = \mathbb{P}(E \dot{\cup} D) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(D) \Longrightarrow$$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(D) = 0.$$