Si consideri l'esperimento $\mathcal{E}$ del lancio di un dado. È noto che esso produce 6 possibili esiti

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$ spazio campione

$$\mathcal{E} : (\Omega, \mathcal{F}, \cdot)$$ algebra

$$|\Omega| = 6 \Rightarrow |\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6$$

$$D = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2\}$$

$\mathcal{F} = ?$ $\qquad B^c$

$\to \{2,4,6\}$, $\boxed{\{3,4\} \cup \{5,6\}} = \boxed{\{3,4,5,6\}}$

negato di D

complementare di D

negato di B

complementare di B

$$D \cap B = \{1,3,5\} \cap \{1,2\} = \{1\}$$

$$\{2,4,6\} \cap \{1,2\} = \{2\}$$

$$\{1,3,5\} \cap \{3,4,5,6\} = \{3,5\}$$

$$\{1,3,5\}$$

algebra

- Se c'è un evento allora anche il suo complementare è un evento
- L'unione (finita) di eventi è un evento
- Ω è un evento (evento certo)

$D = \{1, 3, 5\}$

$D^c = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2\}$

$B^c = \{3, 4, 5, 6\}$

$$D \cap B = \{1\}$$

$$D \cap B^c = \{3, 5\}$$

atomi

$$D^c \cap B = \{2\}$$

$$D^c \cap B^c = \{4, 6\}$$

$$\mathcal{F} = \{ \{1\}, \{2\}, \{3,5\}, \{4,6\}, \{1,3,5\}, \{1,2\}, \{1,4,6\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5,6\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,5\}, \{1,3,4,5,6\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \emptyset \}$$

$$|\mathcal{F}| = 16 = 2^4$$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ atomi

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^6$$

$D, \underset{\{1,2\}}{B}, \underset{\{3,4\}}{M}$ generatori

$D\,B\,M = \emptyset$

$D\,B\,M^c = \{1\}$

$D\,B^c\,M = \{3\}$

$D\,B^c\,M^c = \{5\}$ atomi

$D^c\,B\,M = \emptyset$

$D^c\,B\,M^c = \{2\}$

$D^c\,B^c\,M = \{4\}$

$D^c\,B^c\,M^c = \{6\}$

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}(\Omega)$$

Consideriamo l'esperimento del lancio di una moneta un numero indefinito di volte.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \quad : \omega_n = T \text{ oppure } \omega_n = C\}$$

generatori $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: T_n := esce testa nel lancio di ordine n

Consideriamo

A : " TT esce prima di CC "

$A_1 = TT$

$A_2 = CTT$

$A_3 = TCTT$

$A_3 = $

$A_4 = C\,T\,C\,T\,T$

$\vdots$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

σ-algebra

- unione numerabile di eventi appartiene a $\mathcal{F}$
- complemento di un evento è esso stesso un evento
- Ω è un evento

$$\mathcal{E} : (\Omega, \mathcal{F}, \cdot)$$

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ insieme degli interi positivi

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ numerabile

$|\{a, b, c, \dots, z\}| = 21$

$|\{a, e, i, o, u\}| = 5$

$\mathbb{N} \longrightarrow D$ $\qquad$ $D \subset \mathbb{N}$

$\boxed{n \longrightarrow 2n-1}$

$1 \longrightarrow 1$

$$2 \longrightarrow 3$$
$$3 \longrightarrow 5$$

$\mathbb{N}$ è un insieme infinito e

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$\mathbb{N}$ ha la cardinalità del numerabile

$\mathbb{N}$ è numerabile:

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0, \quad \subseteq \mathbb{Q}^+ \qquad \subseteq \mathbb{Q}$$

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$$

$\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo

$$|\mathbb{R}| = c > |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$$\big|\,]0,1[\,\big| = \big|\,]a,b[\,\big| = |\mathbb{R}| = c$$

$$\big|\,]a,+\infty[\,\big| = c$$

$$\big|\,]-\infty,a[\,\big| = c$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \ )$$

$$\{\,]-\infty, b]\,\}_{b\in\mathbb{R}}, \quad \boxed{\{\,]-\infty, b]\,\}_{b\in\mathbb{Q}}}$$