MISURA DI PROBABILITÀ SOGGETTIVA

Non sussiste simmetria perfetta tra gli esiti dell'esperimento e non si possono un numero indefinito di prova.

$(2a)_s$: principio equità: è basato sulla scommessa equa che permette lo scambio tra il banco e il giocatore.

$(2b)_s$: principio della coerenza: non è possibile individuare un sistema di eventi che possa assicurare un vantaggio (oppure uno svantaggio) all'individuo che assegna le probabilità.

DEFINIZIONE

$A \in \mathcal{J}$, la probabilità di A il prezzo che un individuo coerente ritiene equo pagare per ricevere 1 nel caso che l'evento si verifichi.

Anche in questa visione della probabilità di un evento sussistono le proprietà:

$$\begin{cases} \mathbb{P}_s(\Omega) = 1 \\ \mathbb{P}_s(A) \geq 0 \\ A, B : A \cap B = \emptyset, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{cases}$$

Secondo Kolmogorov, la misura della probabilità degli eventi (elementi di una σ-algebra) è una funzione

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow \mathbb{P}(A)$$

con queste proprietà:

4) $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$

5) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

6) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$: $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(numerabile additività)

Dopo di ciò, è possibile completare la descrizione matematica di un esperimento aleatorio

$\mathcal{E}$ esperimento aleatorio

$$(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P})$$

$\mathcal{G}$ famiglia degli eventi generatori

TEOREMA 5

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

DIM

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \underbrace{\cdots \cup \emptyset}_{} \cup \cdots \xRightarrow[\text{additività}]{\text{numerabile}}$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset). \qquad (*)$$

Per assurdo, sia $0 < \varepsilon = \mathbb{P}(\emptyset)$. La serie a secondo membro diverge. Assurdo, per cui l'unica possibilità per far valere la $*$ è porre $\varepsilon = 0$, ossia

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0. \qquad \square$$

<u>TEOREMA 6</u> (finita additività)

$n \in \mathbb{N}$, $(A_1, A_2, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{F} : A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$

$$\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

DIM

$i = (1, 2, \ldots, n)$, $\quad B_i = A_i$

$\underline{i > n}$, $\quad B_i = \emptyset$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} \emptyset\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \emptyset\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

$\square$

TEOREMA 7

$$A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) \leq 1$$

DIM

$$1 = \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \,\dot{\cup}\, A^c) \Rightarrow$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \leq 1$$

in quanto $\mathbb{P}(A^c) \geq 0$ per l'assioma 4.

$\square$

TEOREMA 8

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

DIM

$$B = A \,\dot{\cup}\, (B \cap A^c) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\ldots$$

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$$

in quanto $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0$ per l'assioma 4.

$\square$

- Nel gioco della zara si prende un elemento (una tripla) dello spazio campione e poi si esegue la somma delle sue componenti.

$$(\Omega, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$$

$\mathbb{P}$ è la misura di probabilità classica

$$S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \longmapsto S(\underline{\omega}) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

$\hookrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_S)$

misura di probabilità indotta dalla funzione S a partire dalla misura di probabilità assegnata $\mathbb{P}$

$$\mathbb{P}_S(B) = \mathbb{P}(\underbrace{S \in B}_{\text{deve essere un evento ovvero un elemento di } \mathcal{F}}) = \mathbb{P}[S^{-1}(B)]$$

$\square$

– Esperimento di tipo Bernoulli

$$\Omega = \{ \underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_n \in \{T, C\} \}$$

$$(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \mathcal{F} = \sigma\big((T_n)_{n \in \mathbb{N}}\big)$$

se la moneta non è equa, allora

$n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathbb{P}(T_n) = p \quad$ con $\quad p \in (0,1)$

"il trucco"

$$\mathbb{P}(C_n) = 1 - p$$

In questo contesto, ha senso considerare

$$n \in \mathbb{N}, \quad X_n : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \underline{\omega} & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{se } \omega_n = T \\ 0, & \text{se } \omega_n = C \end{cases} \end{array}$$

Ovvero, se si verifica T_n la funzione X_n vale 1 altrimenti essa vale 0.

Alcuni esempi:

$$\mathbb{P}_{X_n}(\{0\}) = \mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(C_n) = 1 - p \,;$$

$$\mathbb{P}_{X_n}(\{2\}) = \mathbb{P}(X_n = 2) = 0 \,;$$

$$\mathbb{P}_{X_n}\left( ]1/2, 2[\right) = \mathbb{P}_{X_n}(\{1\}) = \mathbb{P}(X_n = 1)$$

$$= \mathbb{P}(T_n) = p \; ;$$

$$\mathbb{P}_{X_n}\left( ]-\infty, -3] \right) = \mathbb{P}\left(X_n \in]-\infty, -3] \right)$$

$$= \mathbb{P}(X_n \leq -3)$$

$$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \; ;$$

$$\mathbb{P}_{X_n}\left( ]-\infty, 2] \right) = \mathbb{P}\left(X_n \in]-\infty, 2] \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(X_n \in \{0, 1\} \right)$$

$$= \mathbb{P}\left[\{X_n = 0\} \,\dot\cup\, \{X_n = 1\} \right]$$

$$\mathbb{P}\left(C_n \,\dot\cup\, T_n \right)$$

$$= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)$$
$$= \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}(T_n)$$
$$= 1 - p + p$$
$$= 1.$$

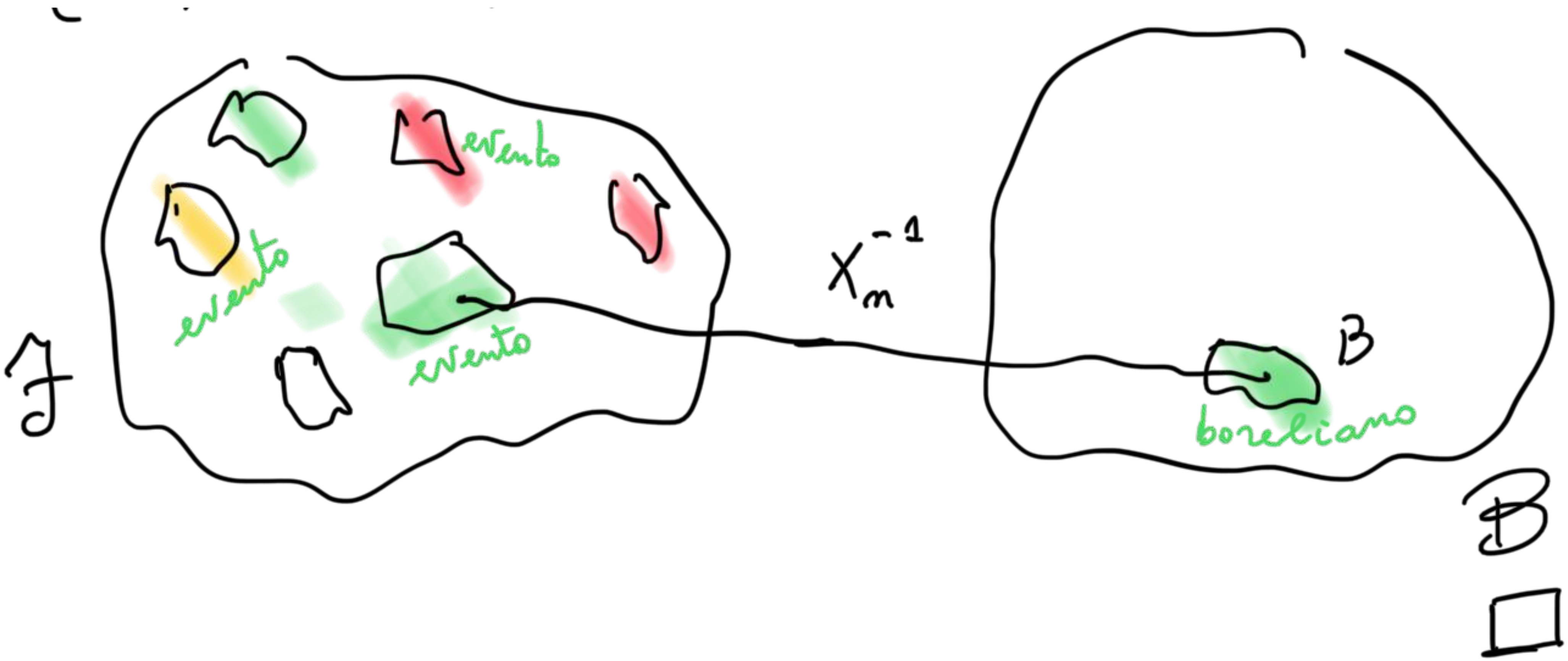
In definitiva,

$B \in \mathcal{B}$, $\quad \mathbb{P}_{X_n}(B) = \mathbb{P}(X_n \in B)$

a patto che sia stato verificato che

$$\{X_n \in B\} \in \mathcal{F}.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\qquad\qquad$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_{X_n})$



In generale, la funzione

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

deve avere questa proprietà:

$$B \in \mathcal{B}, \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

e si dice che X è misurabile.