PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ di $\mathbb{P}$

DEFINIZIONE

Una successione di eventi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ si dice crescente se risulta

$$n \geq 1, \qquad C_n \subseteq C_{n+1}. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE

$$C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \cdots \subseteq C_n \subseteq \cdots. \qquad \square$$

DEFINIZIONE

Assegnata una successione crescente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, si pone:

$$C \equiv \lim_{n\to\infty} C_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Ovviamente,

$$n \in \mathbb{N}, \quad C \supseteq C_n. \qquad \square$$

<u>Esempio</u>

$C_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$C_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

$C_3 = \{\text{interi pari fino a } 30\}$

$\vdots$

$C_n = \{\text{interi pari fino a } 10 \cdot n\}$

$\vdots$

$$P = \{\text{insieme dei pari}\}$$

$$\lim_n C_n = P.$$

Si può anche scrivere $C_n \uparrow P$.

$\square$

DEFINIZIONE

Una successione di eventi $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ si dice decrescente se risulta

$$n \geq 1, \qquad D_n \supseteq D_{n+1}. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \cdots \supseteq D_n \supseteq \cdots. \qquad \square$$

DEFINIZIONE

Assegnata una successione decrescente $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, si pone:

$$D \equiv \lim D_n := \bigcap^{\infty} D_n .$$

$n \to \infty$ $\qquad$ $n=1$

Ovviamente,

$$n \in \mathbb{N}, \quad D \subseteq D_n .$$

$\square$

ESEMPIO

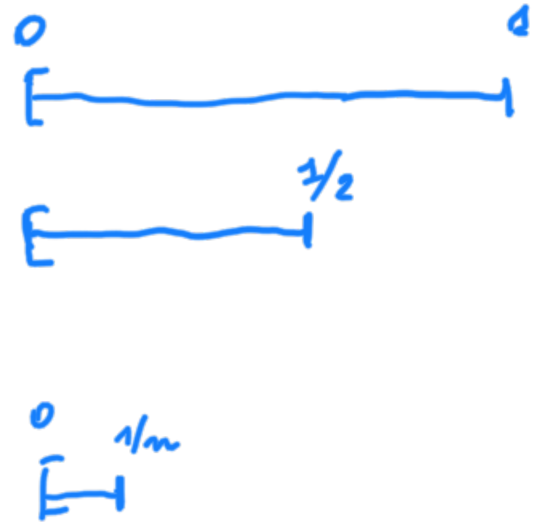
$$D_1 = [0, 1)$$

$$D_2 = [0, 1/2)$$

$\vdots$

$$D_n = [0, 1/n)$$

$\vdots$



$$D = \lim_{n \to \infty} D_n = \{0\}.$$

Si può anche scrivere $D_n \downarrow \{0\}$.

$\square$

TEOREMA 1

Assegnata una successione crescente $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di eventi, si ha:

$$\lim_n \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\lim_n C_n\right) = \mathbb{P}(C).$$

DIM

$$F_1 = C_1; \quad F_2 = C_1^c C_2; \quad F_3 = C_1^c C_2^c C_3 \; \dots$$

$$\dots \; F_n = C_1^c C_2^c \dots C_{n-1}^c C_n; \; \dots$$

Ovviamente

a) $n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = C_n = \bigcup_{i=1}^{n} C_i \implies$

b) $\lim_n \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \lim_n \bigcup_{i=1}^{n} C_i \iff \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i.$

Allora,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \overset{b)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \overset{\substack{\text{assioma} \\ \text{numerabile}}}{\underset{\text{additività}}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i)}^{} \underset{\text{additività}}{\overset{\text{teorema finita}}{=}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)$$

$$\overset{a)}{=} \lim_n \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \lim_n \mathbb{P}(C_n).$$

In altri termini,

$$\lim_n \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_n C_n\right).$$

$\square$

TEOREMA 2

Assegnata una successione decrescente $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di eventi, si ha:

$$\lim_n \mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}\left(\lim_n D_n\right) = \mathbb{P}(D).$$

$\square$

<u>DIM</u>

$$D_n \downarrow D \Rightarrow D_n^c \uparrow D^c \qquad \Rightarrow$$

TEOREMA 1

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c\right) = \mathbb{P}\left(\lim_n D_n^c\right) \overset{\downarrow}{=} \lim_n \mathbb{P}(D_n^c)$$

$\Leftrightarrow$

(De Morgan) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right)^c$

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right)^c\right] = \lim_n \mathbb{P}(D_n^c)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \lim_n \left[1 - \mathbb{P}(D_n)\right] = 1 - \lim_n \mathbb{P}(D_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(D_n).$$

In altri termini,

$$\lim_n \mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \mathbb{P}\left(\lim_n D_n\right).$$

n $\square$

CASO PARTICOLARE

$$D_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \lim_n \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad D_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(D_n) \downarrow 0.$$

$\square$

ESEMPIO

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, T_n : "esce T al lancio n"

$A_1 = T_1 \, \Omega \, \Omega \, \Omega \dots$ $\qquad \mathbb{P}(A_1) = 1/2$, p

$A_2 = T_1 \, T_2 \, \Omega \, \Omega \dots$ $\qquad \mathbb{P}(A_2) = 1/4$, p^2

$A_3 = T_1 \, T_2 \, T_3 \, \Omega \dots$

$\vdots$

$A_n = T_1 \, T_2 \, T_3 \dots T_n \, \Omega \dots$ $\qquad \mathbb{P}(A_n) = 1/2^n$, p^n

$\vdots$

$$A_n \downarrow (T_1 T_2 \dots T_n \dots)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 = \mathbb{P}(\lim_n A_n)$$

$$= \mathbb{P}(T_1 T_2 \dots T_n \dots).$$

TEOREMA DI CONTINUITÀ

Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ crescente oppure decrescente allora:

$$\lim_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_n A_n). \qquad \square$$

Il teorema di continuità è molto im

Il teorema di continuità è molto importante in quanto, almeno per le successioni crescenti o decrescenti, consente lo scambio tra il segno di limite e il simbolo della misura di probabilità.*

Ciò, facilita in molti casi il calcolo delle probabilità di un evento e, in più consente di ottenere le proprietà della funzione di distribuzione.

* Il teorema di continuità continua a valere anche nel caso delle successioni non monotone (crescenti o decrescenti) ma dotate di limite:

$$A_n \to A \Rightarrow \lim \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim A_n)$$

$$A_n \longrightarrow A \implies \lim_{n} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n} A_n\right)$$

$$= \mathbb{P}(A). \qquad \square$$