PROPOSIZIONE

Se la genitrice X di un campione casuale è dotata del momento del secondo ordine finito, allora la media campionaria $\bar{X}$ è uno stimatore consistente per la media, $\mu = \mu_1' = \mathbb{E}(X)$, di X.

DIM

Dal momento che

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

si ha:

$\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X) = \frac{n}{n} \mathbb{E}(X) = \gamma,$$

ovvero che $\bar{X}_n$ è uno stimatore corretto per γ (e quindi, a maggior ragione, anche asintoticamente corretto).

D'altra parte, nella precedente lezione è stato dimostrato che

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{D}^2(\bar{X}_n) = \frac{\mathbb{D}^2(X)}{n},$$

da cui segue:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{D}^2(\bar{X}_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathbb{D}^2(X) = 0.$$

Ne discende, per la condizione sufficiente, che X_n è uno stimatore consistente per μ.

$\square$

OSSERVAZIONE

Il risultato ottenuto nella Proposizione precedente è noto, anche, come "Legge debole dei grandi numeri":

se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di v.a. indipendenti e somiglianti ad una v.a. X dotata del momento del secondo ordine finito allora la media aritmetica delle prime n di essa tende in probabilità alla media in comune:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(X)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}(X).$$

$\square$

PROPOSIZIONE

Se la genitrice X di un campione casuale è dotata del momento del quarto ordine finito, allora il momento empirico del secondo ordine $\overline{X}^{(2)}$ è uno stimatore consistente per il momento teorico del secondo ordine, $\mu'_2 = \mathbb{E}(X^2)$, di X.

DIM

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \overline{X}^{(2)}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

per cui

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left(\bar{X}_n^{(2)}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{n}{n} \mathbb{E}\left(X^2\right) = \mu_2' ,$$

ovvero $\bar{X}_n^{(2)}$ è uno stimatore corretto per μ_2', per ogni n (e quindi, a maggior ragione, anche asintoticamente corretto).

D'altra parte, risulta

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{D}^2\left(\bar{X}_n^{(2)}\right) = \frac{\mu_4' - (\mu_2')^2}{n} ,$$

per cui

$$\lim \mathbb{D}^2\left(\bar{X}_n^{(2)}\right) \quad \lim \frac{\mu_4' - (\mu_2')^2}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{D}(\overline{X}_n^{(2)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ldots}{n} = 0;$$

ovvero la varianza di $\overline{X}_n^{(2)}$ è infinitesima.
La tesi segue dalla condizione sufficiente.

PROPOSIZIONE

Sia $k \in \mathbb{N}$. Se la genitrice X di un campione casuale è dotata del momento di ordine $2k$ finito, $\mu'_{2k} = \mathbb{E}(X^{2k})$, allora il momento empirico di ordine k, $\overline{X}^{(k)}$, è uno stimatore consistente per il momento teorico di ordine k, $\mu'_k = \mathbb{E}(X^k)$.

DIM

Rispetto alla dimostrazione delle due precedenti Proposizioni, tutto resta inalterato considerando che è possibile dimostare che

$$n \in \mathbb{N}, \qquad D^2\left(\overline{X}_n^{(k)}\right) = \frac{\gamma'_{2k} - (\gamma'_k)^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Siano S e T due stimatori per $\psi(\theta)$.

1) S è "preferibile" a T, e si può scrivere,

$$S \precsim T$$

se e solo se

$$\theta \in \Theta, \qquad R_S(\theta) \leq R_T(\theta).$$

2) S è "strettamente preferibile" a T e si scrive

$$S \prec T$$

se $S \preceq T$ e se esiste $\theta_0 \in \Theta$ per il quale:

$$R_S(\theta_0) < R_T(\theta_0).$$

3) Uno stimatore si dice "ammissibile" se non esiste un altro stimatore a lui strettamente preferibile.

DOMANDA

Ci possono essere due o più stimatori ammissibili per $\psi(\theta)$?

La risposta è affermativa. $\preceq$ è una relazione d'ordine che è diversa dalla relazione d'ordine $\leq$ tra due numeri reali che è totale: invece se S e T sono due stimatori per $\psi(\theta)$ non è detto che si può affermare:

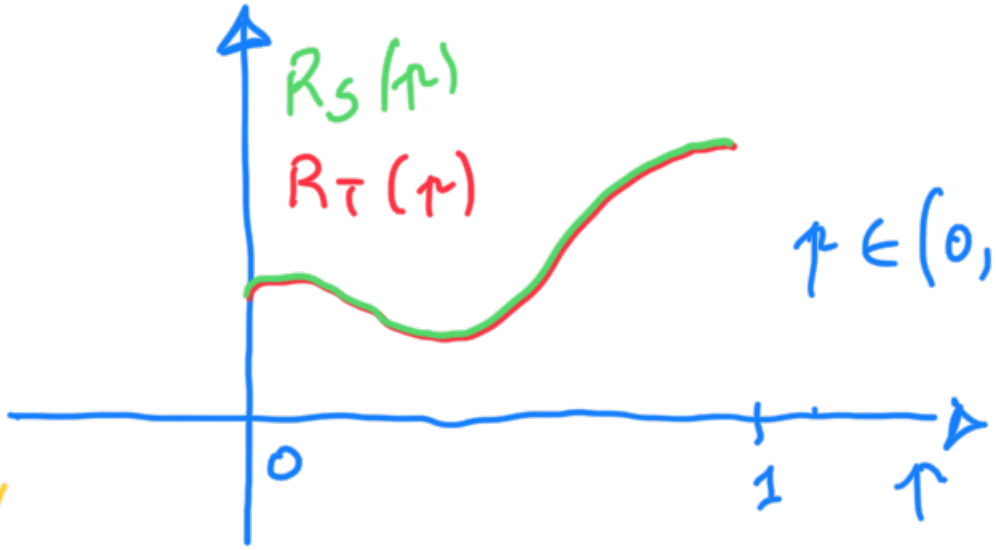
$$S \preceq T \quad \text{oppure} \quad T \preceq S.$$

Esempio (di stimatori non confrontabili)

Sia X una genitrice con legge $B(1,p)$. Allora $\Theta = (0,1)$. Siano S e T due stimodelli di ϑ con le seguenti funzioni rischio :

a)

"le due curve sovrapposte in $\Theta = (0,1)$"

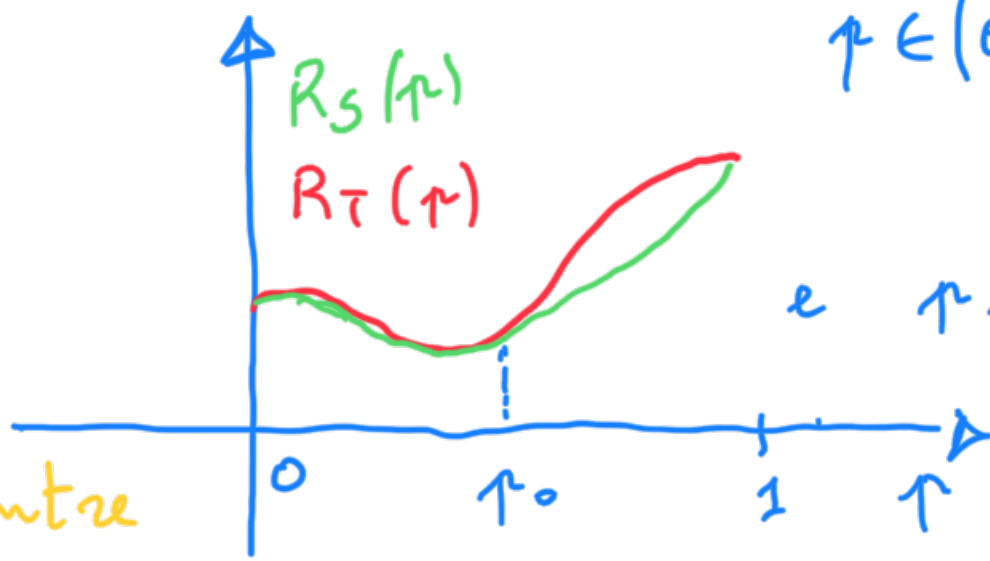


$\vartheta \in (0,1), \quad R_S(\vartheta) = R_T(\vartheta)$

allora : $S \preceq T$ e $T \preceq S$.

b)

"le due curve sovrapposte in $(0, \vartheta_0]$ mentre in $(\vartheta_0, 1)$ il rischio



$\vartheta \in (0,1), \; R_S(\vartheta) \leq R_T(\vartheta)$

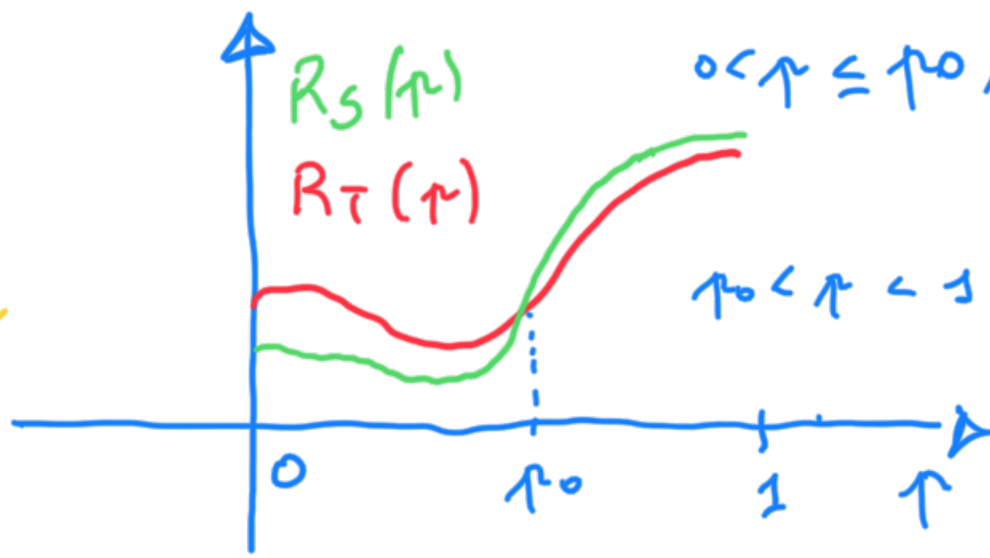
e $\vartheta > \vartheta_0, \; R_S(\vartheta) < R_T(\vartheta)$

allora : $S \prec T$.

di S è minore del rischio di T"

c)

"Il rischio di S è minore del rischio di T in $(0, \vartheta_0)$ ma è maggiore nell'intervallo $(\vartheta_0, 1)$"



$0<\vartheta\leq\vartheta_0$, $R_S(\vartheta)\leq R_T(\vartheta)$

$\vartheta_0<\vartheta<1$, $R_T(\vartheta)<R_S(\vartheta)$

allora: S e T non sono confrontabili

$\square$

In conclusione se S e T sono due stimatori non confrontabili rispetto alla relazione d'ordine $\preceq$ allora si può determinare uno stimatore ammissibile nella classe degli stimatori confrontabili con S e uno stimatore ammissibile nella classe degli stimatori confrontabili con T.