$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dati quantitativi

$$\bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \geq 0$$

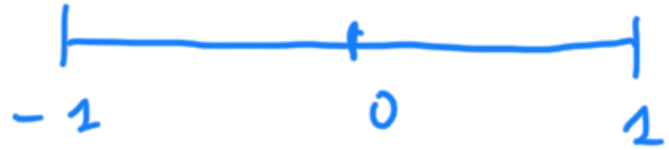
$\bar{y} \pm \sqrt{s^2}$ $\sqrt{s^2}$ è una misura della variabilità dei dati

Ad esempio, se i dati sono tutti uguali la variabilità è nulla e, infatti, risulta

$$\bar{y} = x_1 \quad e \quad \sqrt{s^2} = 0.$$

In più, si considerino i seguenti casi

- $n = 2$

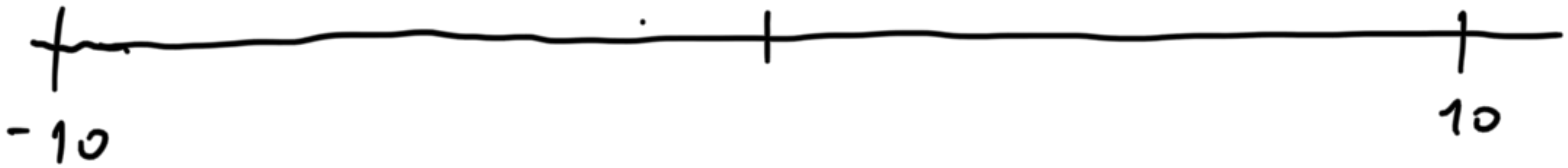


$\bar{y} = 0$

$$s^2 = \frac{1}{2-1}\left[(-1-0)^2 + (1-0)^2\right] = 2$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2}$$

- $n = 2$



$\bar{y} = 0$

$$s^2 = \frac{1}{2-1}\left[(-10-0)^2 + (10-0)^2\right] = 200$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \gg \sqrt{2}$$

MOMENTI DI UNA VARIABILE ALEATORIA

se esiste $\mu'_m := \mathbb{E}(X^m)$ (ossia se è numero reale) allora esso si dice momento di ordine m. Nel caso $m=1$, $\mu'_1 = \mathbb{E}(X)$ è la media della variabile aleatoria. Nel caso $m=2$, $\mu'_2 = \mathbb{E}(X^2)$ è la media del secondo ordine. L'operazione per ottenere μ'_m nel caso delle variabili discrete è la seguente:

$$\mu'_m = \sum_{x_i \in S_X} x_i^m \, \mathbb{P}(X = x_i).$$

ESEMPI

$X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$ $\qquad S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$k \in S_X, \quad \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mu_1' = \mathbb{E}(X) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}_{} = \sum_{k=1}^{\infty} k \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \overset{m=k-1}{\underset{k=m+1}{=}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+1}}{m!}$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}}_{=1} = \lambda .$$

Inoltre,

$$\mu_2' = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \, k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \overset{m=k-1}{\underset{k=m+1}{=}} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+1}}{m!}$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=\lambda} + \lambda \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=1}$$

$$= \lambda^2 + \lambda . \qquad \square$$

DEFINIZIONE

Se X è una variabile aleatoria per la quale $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, si definisce la "varianza" di X la quantità

$$\mathbb{D}^2(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mu_X)^2 \right]$$

dove $\mu_X \equiv \mu_1' = \mathbb{E}(X)$. In più, la radice quadrata della varianza

$$\mathbb{D}(X) := \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}$$

si chiama "deviazione standard".

<u>PROPOSIZIONE</u>

Se $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, allora

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma_X^2 = \mu_2' - \mu_X^2 .$$

<u>DIM</u>

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mu_X)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\right)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(-2\mu_X X) + \mathbb{E}(\mu_X^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu_X \, \mathbb{E}(X) + \mu_X^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu_X \cdot \mathbb{E}(X) + \mu_X^2$$

$$= \mu_2' - 2\mu_X^2 + \mu_X^2$$

$$= \mu_2' - \mu_X^2 . \qquad \square$$

ESEMPIO (continuazione $X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$)

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

$\square$

<u>ESEMPIO</u>

$X \sim B(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, $q = (1-p) \in (0,1)$

$S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$k \in S_X$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=0} k\, P(X=k) = \sum_{k=1} \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)} p^k q^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p\, p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$$

$$\underset{k=m+1}{\overset{m=k-1}{=}} np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^{m} q^{n-(m+1)}$$

$$= np \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^{m} q^{(n-1)-m}}_{=1}.$$

è la somma delle probabilità della legge binomiale con parametri

$$= np.$$

$(n-1, p)$

Inoltre,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n\,(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!\; k}{(k-1)!\,(n-k)!}\, p\, p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$$

$$\overset{m=k-1}{\underset{k=m+1}{=}} np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m q^{n-(m+1)} \cdot (m+1)$$

$$= np \sum_{m=0}^{n-1} m \binom{n-1}{m} p^m q^{(n-1)-m}$$

$$+ \, np \underbrace{\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m q^{(n-1)}}_{=1}$$

$$= np(n-1)p + np$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np = n^2p^2 + np(1-p)$$

$$= n^2p^2 + npq.$$

In definitive, $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathbb{E}(X^2) = n^2p^2 + npq$.

Quindi

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

$$= n^2p^2 + npq - (np)^2$$

$$= n^2 p^2 + npq - n^2 p^2$$

$$= npq = np(1-p).$$

$\square$

ESEMPIO

$X \sim G(p)$, $p \in (0,1)$, $q = 1-p$ $\quad S_X = \mathbb{N}$

$k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = p\,q^{k-1}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p\, q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$$

$$= p\left(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots\right)$$

$$= p\left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots\right.$$

$$+ q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

$$+ q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$

$$+ q^3 + q^4 + \cdots$$

$$+ q^4 + \cdots$$

$$\vdots$$

$$)$$

$$= r\left[\sum_{k=0}^{\infty} q^k + q\sum_{k=0}^{\infty} q^k + q^2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k + q^3 \sum_{k=0}^{\infty} q^k + \cdots\right)$$

$$= r \sum_{k=0}^{\infty} q^k \underbrace{\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\right)}$$

$$= r \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = r\left(\frac{1}{1-q}\right)^2$$

$$= r\,\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}.$$

$$\square$$

	Media	Varianza	Parametri
Poisson	λ	λ	$\lambda > 0$
Binomiale	np	$np(1-p)$	$n \in \mathbb{N},\ p \in (0,1)$
Geometrica	$1/p$	?	$p \in (0,1)$

ESEMPIO 7.a

X è il numero degli errori tipografici in una pagina di un assegnato volume. Si suppone che $X \sim \Pi(1/2)$.
Vogliamo determinare:

$$\mathbb{P}(X \geq 1).$$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-1/2} \frac{(1/2)^k}{k!}$$

Svolgimento

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\{X \geq 1\}^c)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X=0)$$
$$= 1 - e^{-1/2} = 0,393. \qquad \square$$

ESEMPIO 7.b

E' stato prodotto un lotto di 10 pezzi elettronici. Si indichi con X il numero dei pezzi difettosi tra i 10. Sapendo che la probabilità che un pezzo risulti difettoso valga 0,1, determinare $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

Svolgimento

$$X \sim B(10; 0,1) \qquad n = 10, \quad p = 0,1$$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{10}{k} (0,1)^k (0,9)^{10-k}$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\})$$
$$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1)$$

$$= q^{10} + 10\, p\, q^{9}$$

$$= q^{9}(q + 10p)$$

$$= 0{,}9^{9} \cdot (1{,}9) = 0{,}7361.$$

Inoltre

$$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot 0{,}1 = 1.$$

Consideriamo $Y \sim \Pi(1)$ e determiniamo

$$\mathbb{P}(Y \leq 1) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) \qquad \mathbb{P}(Y=k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} = 2e^{-1} = 0{,}7358.$$

$\square$