Teorema della comune perpendicolare

In questa nota, enunciamo e dimostriamo il teorema della comune perpendicolare di due rette sghembe. Per le notazioni, facciamo riferimento a quelle usate a lezione.

Theorem 0.1. *Si consideri uno spazio euclideo* $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ *di dimensione* 3 *e siano* r *ed* r' *due rette sghembe. Allora esiste un'unica retta* s *ortogonale e incidente sia a* r *sia a* r'*; inoltre, posto* $P = r \cap s$ *e* $P' = r' \cap s$*, si ha* $d(r, r') = d(P, P')$.

Proof. Sia $\mathcal{R} = (0, \mathcal{B})$ un riferimento cartesiano dello spazio euclideo $\mathcal{E}$. Si considerino due rappresentazioni parametriche di r ed r', rispettivamente:

$$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (l, m, n)t, \qquad r' : (x, y, z) = (x'_0, y'_0, z'_0) + (l', m', n')t'.$$

La retta s che stiamo cercando deve intersecare r in un certo punto $Q(x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$, per un opportuno valore del parametro reale t, e deve intersecare r' in un certo punto $Q'(x'_0 + l't', y'_0 + m't', z'_0 + n't')$, per un opportuno valore del parametro reale t'. I valori di t e di t' opportuni devono essere tali che la retta s sia ortogonale sia a r sia a r'.

Quindi il vettore $\overrightarrow{QQ'}$, che sappiamo genera la giacitura di s, deve essere ortogonale ai vettori direzionali di r e di r', rispettivamente, ossia a $u(l, m, n)$ e a $u'(l', m', n')$.

Allora, si deve avere $\langle \overrightarrow{QQ'}, u \rangle = 0$ e $\langle \overrightarrow{QQ'}, u' \rangle = 0$, che tradotto in termini di componenti diventa:

$$\begin{cases} (x'_0 + l't' - x_0 - lt, y'_0 + m't' - y_0 - mt, z'_0 + n't' - z_0 - nt)(l, m, n) & = & 0 \\ (x'_0 + l't' - x_0 - lt, y'_0 + m't' - y_0 - mt, z'_0 + n't' - z_0 - nt)(l', m', n') & = & 0 \end{cases}$$

Effettuando il calcolo del prodotto scalare naturale si trova

$$\begin{cases} (x'_0 + l't' - x_0 - lt)l + (y'_0 + m't' - y_0 - mt)m + (z'_0 + n't' - z_0 - nt)n & = & 0 \\ (x'_0 + l't' - x_0 - lt)l' + (y'_0 + m't' - y_0 - mt)m' + (z'_0 + n't' - z_0 - nt)n' & = & 0 \end{cases}$$

e quindi si ha il seguente sistema di due equazioni lineari nelle due incognite t e t':

$$\Sigma : \begin{cases} (l'l + m'm + n'n)t' - (l^2 + m^2 + n^2)t + (x'_0 - x_0)l + (y'_0 - y_0)m + (z'_0 - z_0)n & = & 0 \\ (l'^2 + m'^2 + n'^2)t' - (ll' + mm' + nn)t + (x'_0 - x_0)l' + (y'_0 - y_0)m' + (z'_0 - z_0)n' & = & 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è:

$$\begin{pmatrix} l'l + m'm + n'n & -(l^2 + m^2 + n^2) \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 & -(ll' + mm' + nn) \end{pmatrix}$$

ossia,

$$\begin{pmatrix} \langle u, u' \rangle & -\|u\|^2 \\ \|u'\|^2 & -\langle u, u' \rangle \end{pmatrix},$$

il cui determinante è uguale a $-\langle u, u' \rangle^2 + \|u\|^2 \|u'\|^2$. Come si evince dalla dimostrazione della disuguaglianza di Schwarz, questo determinante si annulla se e solo se $\{u, u'\}$ è linearmente dipendente. Sappiamo tuttavia che questo non è vero, perché le rette r e r' non sono parallele, in quanto sono sghembe.

Allora, il sistema Σ soddisfa le ipotesi del Teorema di Cramer, per cui Σ ammette un'unica soluzione $(k', k) \in \mathbb{R}^2$. Quindi, la retta che passa per i due punti $P'(x'_0 + l'k', y'_0 + m'k', z'_0 + n'k')$ e $P(x_0 + lk, y_0 + mk, z_0 + nk)$ è la retta s, comune perpendicolare, cercata.

Per l'ultima affermazione dell'enunciato basta applicare il Teorema di Pitagora. $\square$