Insegnamento:	Geometria e Algebra (Cod. 05481)
Prof:	Francesco D'Andrea
Corsi di laurea:	N36 Ing. Biomedica N39 Ing. dell'Automazione N40 Ing. delle Telecomunicazioni N43 Ing. Elettronica N46 Ing. Informatica P39 Ing. Telecomunicazioni e Media Digitali
Plesso:	Fuorigrotta
Canale:	CIS-FER

Introduzione

Istruzioni:

- Tutte le informazioni su questo corso, incluse le slide delle lezioni e l'orario di ricevimento, sono (o saranno) reperibili sul sito:

  `www.docenti.unina.it/francesco.dandrea` ($\rightsquigarrow$ "links")

- Iscrivetevi al corso sul sito docenti (insegnamento: Geometria e Algebra, 05481).
- Le registrazioni delle lezioni saranno disponibili online su Microsoft Streams.
- MOOC con L.A. Lomonaco: www.federica.eu/c/geometria_e_algebra

Testi consigliati:

- C. Carrara, *Esercizi di algebra lineare*, on-line:

  `http://www.science.unitn.it/~carrara/ESERCIZIARIO/`

- M. Abate e C. De Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, McGraw-Hill Education, III ed. (2015).

Modalità d'esame

Appelli

sessione estiva	giugno	1 appello
	luglio	1 appello
sessione autunnale	settembre	1 appello
	ottobre	1 appello
sessione invernale	gennaio	1 appello
	febbraio	1 appello
	marzo	1 appello

Info

L'esame è diviso in due parti:

1. prova scritta (esercizi);
2. prova orale (teoria ed esercizi).

Prenotarsi (per la prova scritta) su:

`www.segrepass.unina.it`

Non sono accettate prenotazioni in nessun'altra forma. Le prenotazioni iniziano 30 giorni prima e chiudono 7 giorni prima di ciascuna prova scritta.

Prova scritta

Farò depositare gli zaini e qualunque altro oggetto personale (inclusi smartphone) vicino alla cattedra.

Lo studente deve essere munito solo di penna/e e carta d'identità. Fornirò io i fogli per svolgere l'esame.

Prova orale

E' ammesso all'orale chi supera lo scritto.

Gli orali possono durare più di un giorno.

Il voto finale viene registrato subito dopo il superamento dell'esame orale.

Un semplice problema di algebra

Immaginiamo di voler risolvere il seguente problema. In questa classe:

☞ Gli studenti della provincia di Salerno sono la metà degli studenti di Napoli.

☞ Se fossero 10 di più, gli studenti di Salerno sarebbero tanti quanti quelli di Napoli.

Quanti sono gli studenti di Salerno e quanti quelli di Napoli?

Se indichiamo con x il numero di studenti di Salerno e y il numero di studenti di Napoli, allora deve essere:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ x + 10 = y \end{cases}$$

Soluzione: $x = 10$ e $y = 20$.

Quello qui sopra è un primo esempio di sistema di equazioni lineari.
Una parte consistente del corso sarà dedicata allo studio di tali equazioni.

- Possiamo rappresentare la soluzione

  $$x = 10, \; y = 20$$

  in un sistema di riferimento cartesiano, come nella figura a fianco.

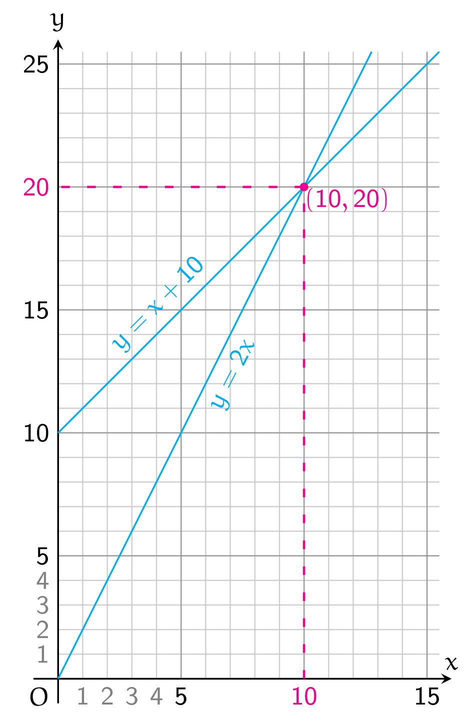
- E' ben noto (dai corsi di Analisi o dagli studi pre-universitari) che l'equazione

  $$x = \tfrac{1}{2}y \qquad \text{o} \qquad \boxed{y = 2x}$$

  rappresenta una retta del piano cartesiano (passante per l'origine e di coefficiente angolare 2). L'equazione

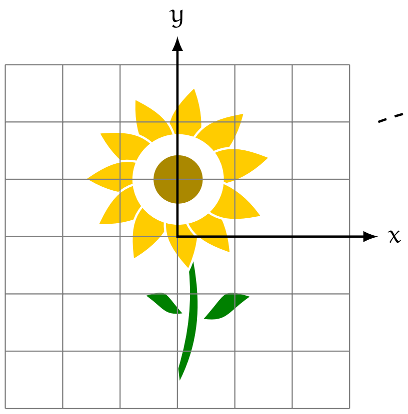
  $$\boxed{x + 10 = y}$$

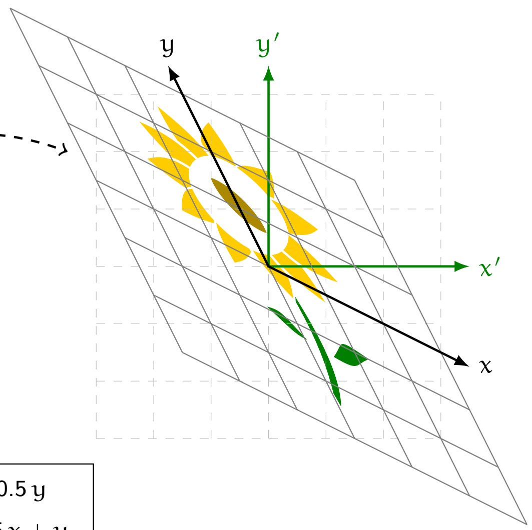
  rappresenta un'altra retta (di coefficiente angolare 1 e intercetta 10), intersecante la prima nel punto $x = 10, y = 20$.



Trasformazioni (“Applicazioni”)

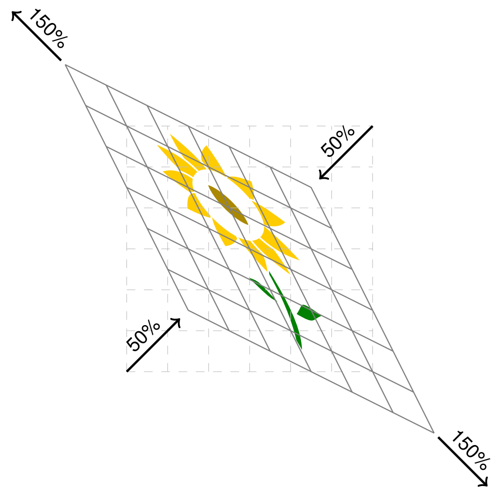
Ha interesse studiare particolari tipi di trasformazioni del piano che non muovono l’origine e mandano rette in rette, dette applicazioni lineari.





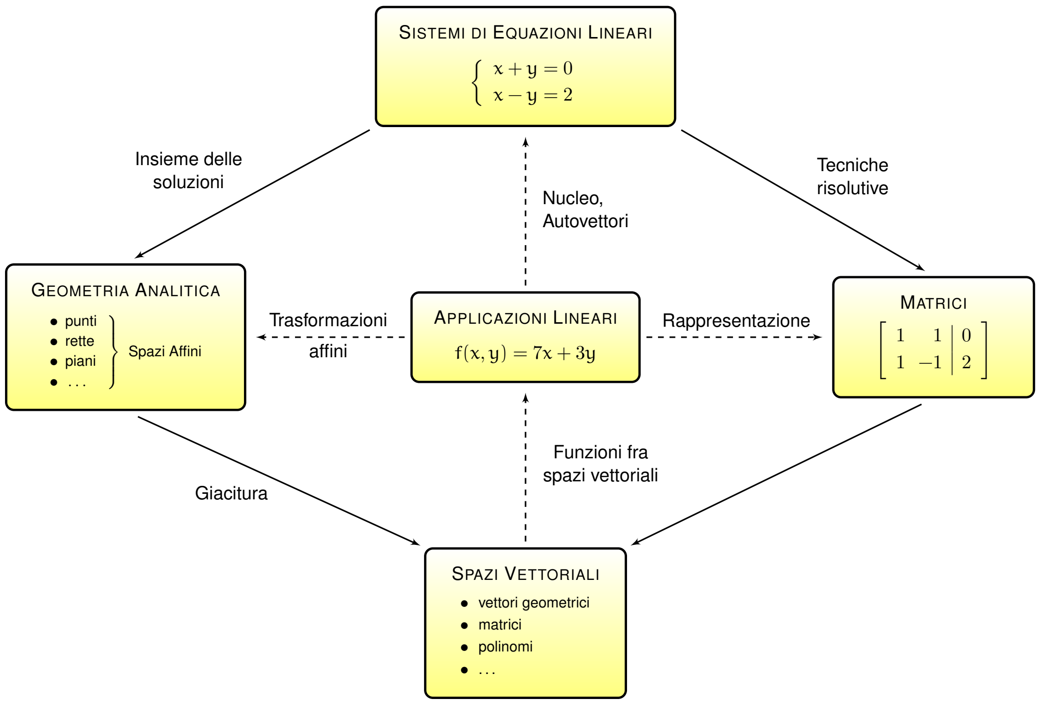
$$x' = x - 0.5\,y$$
$$y' = -0.5\,x + y$$

La trasformazione precedente consiste in uno “zoom” del 50% lungo una bisettrice, e del 150% lungo l’altra.



Una trasformazione ottenibile con due dilatazioni, di fattori λ_1 e λ_2, in direzione di due rette passanti per l’origine è detta diagonalizzabile. (Ne riparleremo verso la fine del corso.)

Chiamiamo λ_1 e λ_2 autovalori e le due rette autospazi.



— NOZIONI PRELIMINARI —

(Abate, §1)

Notazioni

Simboli usati in matematica, per semplificare la scrittura di equazioni e teoremi.

SIMBOLO	SIGNIFICATO
$\forall$	"per ogni" (detto **quantificatore universale**)
$\exists$	"esiste" (detto **quantificatore esistenziale**)
$\exists!$	"esiste ed è unico"
$\Longrightarrow$	implicazione logica
$\Longleftrightarrow$	"se e solo se"
$:=$	definizione ($a := b$ si legge "a per definizione è uguale a b")
$:$	"tale che"
$\mid$	"tale che"
$\wedge$	"e" (detto **congiunzione logica**)
$\vee$	"o" (detto **disgiunzione logica**)

Altri simboli verranno introdotti durante il corso.

Insiemi

Un insieme può essere definito elencando i suoi elementi, ad esempio

$$A := \{0, 1, 2, 3, -1, -2\} ,$$

oppure specificando le proprietà soddisfatte dai suoi elementi, ad esempio

$$B := \{n \text{ intero} : -2 \leqslant n \leqslant 3\} .$$

Evidentemente $A = B$.

Gli insiemi verranno indicati con lettere maiuscole ($A, B, C, \ldots$), i loro elementi con lettere minuscole ($a, b, c, \ldots$). L'espressione "$a \in A$" si legge "a appartiene ad A".

Gli elementi di un insieme possono avere natura arbitraria (insieme dei punti di una retta, insieme dei giocatori di una squadra di calcio, l'insieme dei caratteri di un alfabeto, etc.). Possono anche essere essi stessi degli insiemi. Ad esempio, dati $C := \{1, 2\}$ e $D := \{1, 4\}$, possiamo formare l'insieme:

$$E := \{C, D\} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}\} .$$

Possiamo immaginare un insieme come una specie di scatola con degli oggetti dentro (gli "elementi" dell'insieme). Tali oggetti possono essere a loro volta delle scatole più piccole.

Insiemi notevoli

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ numeri naturali (incluso lo 0)

$\mathbb{Z} :=$ numeri interi (relativi, ossia positivi e negativi, incluso lo zero)

$\mathbb{Q} :=$ numeri razionali (quozienti di due interi)

$\mathbb{R} :=$ numeri reali

$\mathbb{C} :=$ numeri complessi

etc.

⚠ Assumerò che lo studente conosca già questi insiemi dai corsi di Analisi Matematica.

⚠ A noi di interessano solo le proprietà algebriche di questi insiemi: in particolare il fatto che $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono dei campi (vedremo la definizione più avanti).

Operazioni fra insiemi

Definizione

Sottoinsieme:

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in A,\ x \in B .$$

Sottoinsieme proprio:

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad \{\forall\, x \in A,\ x \in B\} \wedge \{\exists\, b \in B : b \notin A\} .$$

Definizione

Intersezione, unione e differenza:

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\} ,$$
$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\} ,$$
$$A \smallsetminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\} .$$

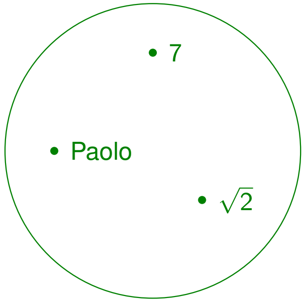
Si indica con $\varnothing$ l'insieme vuoto, ovvero privo di elementi.

Diagrammi di Venn

Un insieme può essere visualizzato graficamente utilizzando un diagramma di Venn, che consiste nel rappresentare gli elementi di un insieme finito con dei punti racchiusi da una curva (tipicamente un cerchio o un ellisse). Ad esempio,

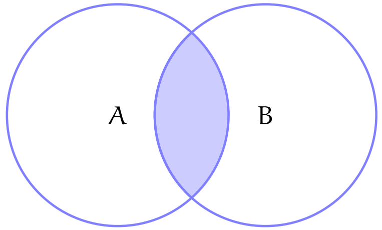
$$A := \{7, \text{Paolo}, \sqrt{2}\}$$

si può rappresentare nel seguente modo

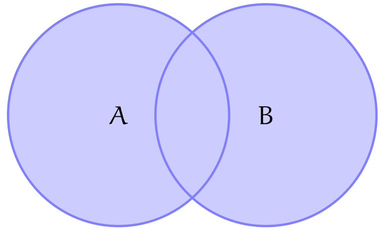


Operazioni insiemistiche con i diagrammi di Venn

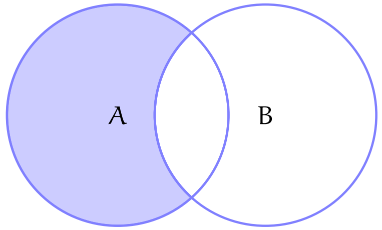
$A \cap B$



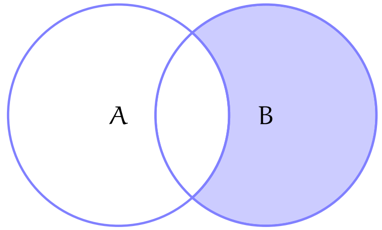
$A \cup B$



$A \setminus B$



$B \setminus A$



Proprietà delle operazioni fra insiemi

$$\{A \subseteq B\} \wedge \{B \subseteq A\} \Longrightarrow A = B$$

$$A \cap A = A \cup A = A$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{(proprietà commutativa di } \cap\text{)}$$

$$A \cup B = B \cup A \qquad \text{(proprietà commutativa di } \cup\text{)}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad \text{(proprietà associativa di } \cap\text{)}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad \text{(proprietà associativa di } \cup\text{)}$$

Funzioni/applicazioni

"Definizione"

Una applicazione (o funzione) f da A in B è una legge che associa ad ogni elemento x di A un elemento $y = f(x)$ in B, detto immagine di x tramite f. L'insieme A si dice dominio e l'insieme B si dice codominio di f.

Per le applicazioni useremo la scrittura:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Due applicazioni $f : A \to B$ e $g : C \to D$ sono uguali se e solo se

$$A = C\,, \qquad B = D\,, \qquad f(x) = g(x)\ \forall\, x \in A\,.$$

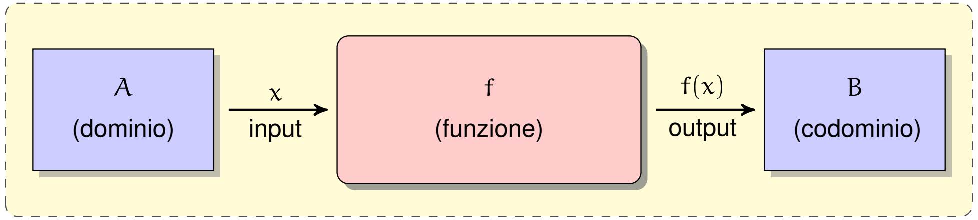
Commento (sulla definizione rigorosa di funzione)

A partire dalla definizione di prodotto cartesiano di due insiemi, si introduce la nozione di corrispondenza. Caso speciale sono le corrispondenze ovunque definite e di tipo funzionale, o funzioni.

Vedere ad es. il Cap. 1 di: S. Pellegrini, A. Benini e F. Morini, *Algebra Lineare 1*, Ed. F. Apollonio.

Applicazioni come “macchinari” [Abate, Oss. 1.1]

Un modo per immaginare una funzione è come una sorta di macchinario.



In ingresso viene inserito un elemento x preso da un insieme A, il dominio della funzione.
Il macchinario produce in risposta un elemento $f(x)$ di un altro insieme B, il codominio.

Gli elementi di A (e di B) possono essere di natura qualsiasi: numeri, punti (del piano o dello spazio della geometria Euclidea), insiemi, funzioni, ...

Applicazioni e diagrammi di Venn

Una applicazione $f : A \to B$ fra due insiemi finiti si può visualizzare graficamente disegnando i diagrammi di Venn dei due insiemi, e congiungendo ogni punto $x \in A$ con la sua immagine $f(x) \in B$.

Esempi:

n-uple

Sia K un insieme. Chiameremo n-upla (si legge “ennupla”) di elementi di K una “lista” di n elementi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ di K. Useremo la notazione:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \,.$$

Commento (sulla definizione rigorosa di n-upla)

Una n-upla di elementi di K è una funzione

$$a : \{1, \dots, n\} \to K$$

che ad ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ associa un elemento $a_i \in K$.

L'insieme di tutte le n-uple di elementi di K sarà indicato con K^n. Esempi:

$(9, 7)$ è una coppia di numeri interi ($K = \mathbb{Z}$);

$(\pi, 1, \sqrt{2})$ è una tripla di numeri reali ($K = \mathbb{R}$);

$(\clubsuit, \spadesuit)$ è una coppia di semi delle carte da gioco;

(Terra , Sole , Luna , Plutone) è una quadrupla di corpi celesti.

Una n-upla è un insieme ordinato elementi.
Ad esempio $(1, 3)$ e $(3, 1)$ sono coppie di numeri interi distinte: $(1, 3) \neq (3, 1)$.

Geometria Euclidea [Abate, §1.4]

Sistema ipotetico-deduttivo: insieme delle conseguenze logiche che si traggono da un qualunque insieme di assiomi (non contraddittori) tra enti primitivi.

Nella formulazione di Euclide:

- **Concetti primitivi**: punto, retta, piano, ... (“Un punto è ciò che non ha parti.” “Una linea retta è una lunghezza senza larghezza.” etc.)
- **Assiomi**: “verità assolute necessarie e indimostrabili”.
- **Postulati**: “verità aventi una evidenza sensibile”.

I cinque postulati di Euclide:

I Tra due punti distinti di un piano passa una e una sola retta.

II Si può prolungare la retta oltre i due punti indefinitamente.

III Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio.

IV Tutti gli angoli retti sono congruenti.

V (Versione moderna: postulato di Playfair) Dati una qualsiasi retta r ed un punto $P \notin r$, $\exists!$ retta r' passante per P e parallela alla retta r data.

Assiomatizzazione rigorosa della geometria Euclidea (David Hilbert, 1899):

- **Relazioni binarie primitive**: “contiene”, “stare in mezzo”, congruenza.
- **Assiomi di collegamento**, e.g.: Due punti distinti dello spazio individuano una retta. Ogni coppia di punti di una retta individua tale retta.
- **Assiomi di ordinamento**, e.g.: Dati tre punti distinti e allineati, ce n’è esattamente uno che giace tra gli altri due.
- **Assiomi di congruenza**.
- **Assioma delle parallele**, equivalente al V postulato di Euclide.
- **Assiomi di continuità**: assioma di Archimede, assioma di completezza.

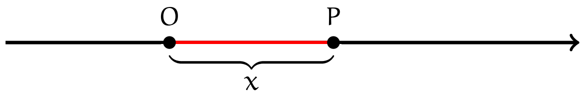
Hilbert non distingue fra assiomi e postulati: riunisce sotto il nome di <u>assioma</u> tutte le proprietà che si assumono valide a priori.

Nella formulazione di Hilbert i concetti primitivi non sono definiti all’interno del un sistema formale: l’unica cosa importante sono le proprietà che gli assiomi attribuiscono loro. (Non importa <u>cosa</u> è un punto, ma solo quali proprietà ha.)

Sistemi di riferimento, I

Sistema di riferimento monodimensionale: si fissa un punto, detto origine ed indicato con O, un verso di percorrenza ed un’unità di misura delle lunghezze.

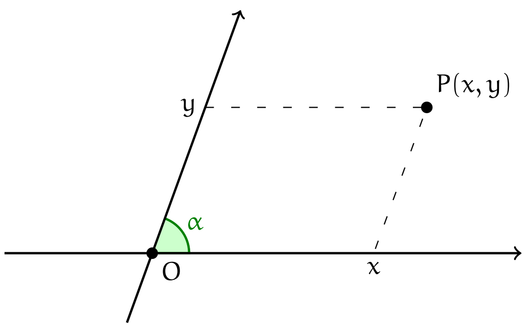
Fissare un verso vuol dire scegliere una semiretta fra le due uscenti da O.
Per convenzione se $P \neq O$ appartiene a tale semiretta, diremo che O precede P.
In caso contrario diremo che P precede O.



Fissato un sistema di riferimento, ogni punto P della retta è individuato da un numero reale $x \in \mathbb{R}$, il cui modulo indica la distanza di P dall’origine, nelle unità scelte. Si prende $x > 0$ se O precede P, e $x < 0$ in caso contrario.

Sistemi di riferimento, II

Sistema di riferimento bidimensionale: si scelgono due rette (distinte) non parallele, la cui intersezione determina l’origine del sistema di riferimento, un orientamento per ciascuna retta ed una unità di misura delle lunghezze.



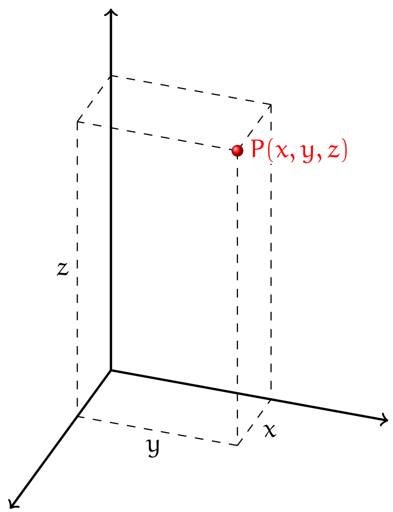
Fissato un sistema di riferimento, ogni punto P della retta è individuato da una coppia (ordinata) di numeri reali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, detti ascissa e ordinata del punto P.

Se $\alpha = 90°$, il sistema di riferimento si dice ortogonale.

Sistemi di riferimento, III

Un sistema di riferimento nello spazio tridimensionale della geometria Euclidea è determinato da tre rette ortogonali (per semplicità considereremo solo questo caso), che si intersecano in un punto (l’origine del sistema di riferimento), un orientamento per ciascuna retta ed una unità di misura delle lunghezze.

Graficamente, il punto P è il vertice di un parallelepipedo rettangolo (con vertice nell’origine e tre lati che giacciono sugli assi). Le lunghezze dei lati del parallelepipedo determinano (a meno di un segno, che dipende dall’ottante in cui ci troviamo) le coordinate (x, y, z) di P.



Lezione 02: Matrici

Una matrice di tipo $m \times n$ è una tabella di elementi disposti in m righe e n colonne.

Esempi:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \pi & \frac{12}{3} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se gli elementi di matrice sono numeri reali, si parlerà di matrice reale.

L'insieme di tutte le matrici reali $m \times n$ sarà indicato con il simbolo $\mathbb{R}^{m,n}$.

Matrici: definizione [Abate, def. 3.3]

Una matrice di tipo $m \times n$ con elementi in un insieme K è una applicazione

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$$

che ad ogni coppia di interi (i, j), con $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, associa un elemento $a_{ij} \in K$. Tali elementi saranno disposti in m righe e n colonne:

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(a_{ij} è l'elemento nell'intersezione della riga i con la colonna j.)
A volte useremo la notazione abbreviata

$$A = (a_{ij}) \quad , \quad \big(B = (b_{ij}) \quad , \quad \text{etc.} \big)$$

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad elementi in K è indicato con $K^{m,n}$.
Se $K = \mathbb{R}$, si parlerà di matrice reale.

Matrice trasposta

Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

chiamiamo trasposta di A, indicata con ${}^tA$ (oppure A^t o A^T), la matrice di tipo $n \times m$ che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne:

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Nota: l'elemento di ${}^tA$ in posizione (i, j) è a_{ji}. Esempi:

$${}^t\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad {}^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} \qquad {}^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Notazioni e convenzioni

Ricordiamo che

$$K^n = \{\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \ : \ v_1, v_2, \dots, v_n \in K\} \ .$$

L'elemento v_i è detto componente i-esima di $\underline{v}$. A noi interesserà il caso $K = \mathbb{R}$.

Identificheremo n-uple di elementi di K e matrici $1 \times n$ ad elementi in K:

$$\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

Per le n-uple useremo la notazione $\underline{v}, \underline{w}, \dots$ (notazioni alternative: $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots \quad \vec{v}, \vec{w}, \dots$).

Scriveremo ${}^t(v_1, v_2, \dots, v_n)$ per indicare la matrice di una colonna: $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

Ad esempio: $\quad {}^t(1, 0, \pi) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}$

Somma e prodotto per uno scalare [Abate, def. 4.1]

Date due n-uple $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$, definiamo somma e moltiplicazione per uno scalare (in questo contesto, un numero $k \in \mathbb{R}$ è detto anche scalare) come segue:

$$\underline{v} + \underline{w} := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \ ,$$

$$k\underline{v} := (kv_1, kv_2, \dots, kv_n) \ .$$

Esempio in $\mathbb{R}^2$

Sia $\underline{v} = (1, -5)$ e $\underline{w} = (3, 7)$. Allora

$$\underline{v} + \underline{w} = (1 + 3, -5 + 7) = (4, 2) \qquad \underline{w} + \underline{v} = (3 + 1, 7 - 5) = (4, 2)$$

Notiamo che, in questo esempio, $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$.

Esempio in $\mathbb{R}^3$

$$(2, 0, \pi) + (3, 12, -\sqrt{5}) = (5, 12, \pi - \sqrt{5})$$

$$3 \cdot (5, 1, 7) = (3 \cdot 5, 3 \cdot 1, 3 \cdot 7) = (15, 3, 21)$$

L'n-upla nulla e l'opposto $-\underline{v}$ di $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ sono definiti come segue:

$$0_{\mathbb{R}^n} = \underline{0} := (0, 0, \dots, 0) \qquad -\underline{v} := (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$$

Proposizione

Somma e moltiplicazione per uno scalare soddisfano le seguenti proprietà:

i) $\forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ si ha

1. $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$ (proprietà commutativa di $+$)
2. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ (proprietà associativa di $+$)
3. $\underline{v} + 0_{\mathbb{R}^n} = \underline{v}$ ($0_{\mathbb{R}^n}$ è elemento neutro)
4. $\underline{v} + (-\underline{v}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ (esistenza dell'opposto)

ii) $\forall\, k, k' \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ si ha

5. $(k + k')\underline{v} = k\underline{v} + k'\underline{v}$ (proprietà distributiva I)
6. $k(\underline{v} + \underline{w}) = k\underline{v} + k\underline{w}$ (proprietà distributiva II)
7. $k(k'\underline{v}) = (kk')\underline{v}$
8. $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

A titolo di esempio, vediamo come si dimostra la prima proprietà...

Dimostrazione punto 1.

Siano $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ due n-uple qualsiasi.
Per definizione:

$$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \qquad (\star)$$

e

$$\underline{w} + \underline{v} = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, \dots, w_n + v_n) \qquad (\dagger)$$

Per la proprietà commutativa della somma di due numeri reali: $v_1 + w_1 = w_1 + v_1$, $v_2 + w_2 = w_2 + v_2$, etc. Le due n-uple $(\star)$ e $(\dagger)$ sono quindi uguali. ∎

In maniera simile si dimostrano le altre proprietà: la proprietà associativa della somma fra n-uple segue dalla proprietà associativa della somma fra numeri reali, le proprietà distributive I e II seguono dalla proprietà distributive del prodotto fra numeri reali, etc.

Somma e prodotto per uno scalare: matrici

[Abate, es. 4.1]

Definizione

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici $m \times n$ (con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$).
Somma ed la moltiplicazione per uno scalare $k \in \mathbb{R}$ sono date da:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) , \qquad kA := (ka_{ij}) .$$

Chiamiamo matrice nulla di tipo $m \times n$ la matrice:

$$0_{\mathbb{R}^{m,n}} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} .$$

Chiamiamo opposta di A la matrice $-A := (-a_{ij})$.

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2+\sqrt{3} & \pi - 5 \end{bmatrix} \qquad \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 2\sqrt{3} & \pi\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Proposizione

Valgono le seguenti proprietà:

i) $\forall\, A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha

1. $A + B = B + A$ (proprietà commutativa di $+$)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (proprietà associativa di $+$)
3. $A + 0_{\mathbb{R}^{m,n}} = A$ ($0_{\mathbb{R}^n}$ è elemento neutro)
4. $A + (-A) = 0_{\mathbb{R}^{m,n}}$ (esistenza dell'opposto)

ii) $\forall\, k, k' \in \mathbb{R}$ e $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha

5. $(k + k')A = kA + k'A$ (proprietà distributiva I)
6. $k(A + B) = kA + kB$ (proprietà distributiva II)
7. $k(k'A) = (kk')A$
8. $1 \cdot A = A$

(...analoghe a quelle delle n-uple, che si riottengono come caso particolare per $m = 1$)

Prodotto righe per colonne

[Abate, §7.2]

Siano

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad B = {}^t(b_1, b_2, \dots, b_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Il loro prodotto è per definizione il numero reale dato da:

$$A \cdot B := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Esempio

Se $A = (-1, 7, 3)$ e $B = {}^t(9, 2, 5)$ si ha

$$A \cdot B = -1 \cdot 9 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = -9 + 14 + 15 = 20 .$$

Più in generale date due matrici $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,p}$, il loro prodotto $A \cdot B$ è quella matrice $m \times p$ che in posizione (i, k) ha l'elemento

$$R_i \cdot C_k = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}$$

in cui: $R_i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ è la i-esima riga di A,
$C_k := {}^t(b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk})$ è la k-esima colonna di B.

Esercizio

Date

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} ,$$

calcolare le matrice $A \cdot B$.

Soluzione.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

✓

Esercizio

Date A e B come sopra, calcolare il prodotto $B \cdot A$.

Soluzione.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & -2 \\ 14 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

✓

Esercizio (da C. Carrara, es. 1.3)

Date le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

calcolare, quando possibile, i prodotti $A_i \cdot A_j$ (per $i, j = 1, 2, 3$).

Vediamo in quali casi il prodotto $A_i \cdot A_j$ è definito:

$A_1 \cdot A_1 \rightsquigarrow$ no $\qquad A_1 \cdot A_2 \rightsquigarrow$ no $\qquad A_1 \cdot A_3 \rightsquigarrow$ sì

$A_2 \cdot A_1 \rightsquigarrow$ sì $\qquad A_2 \cdot A_2 \rightsquigarrow$ no $\qquad A_2 \cdot A_3 \rightsquigarrow$ no

$A_3 \cdot A_1 \rightsquigarrow$ no $\qquad A_3 \cdot A_2 \rightsquigarrow$ no $\qquad A_3 \cdot A_3 \rightsquigarrow$ sì

Esercizio (C. Carrara, es. 1.1)

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

calcolare: AB, BA, $A + B$, $B - A$, $5A + 2B$.

Esercizio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

calcolare $A^2 := A \cdot A$.

Esercizio

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Soluzione.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\checkmark$

Nota: $AB \neq BA \implies$ per il prodotto fra matrici <u>non vale</u> la proprietà commutativa.

Esercizio (C. Carrara, es. 1.4)

Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolare $A \cdot I_4$.

Lezione 03

Proprietà del prodotto fra matrici

Il prodotto di $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m,n}$ e $B=(b_{jk})\in\mathbb{R}^{n,p}$ si ottiene "contraendo" l'indice di colonna di a_{ij} con l'indice di riga di b_{jk}. L'elemento in posizione (i,k) di AB è:

$$a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

Proposizione (Associatività)

Per ogni $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m,n}$, $B=(b_{jh})\in\mathbb{R}^{n,p}$ e $C=(c_{hk})\in\mathbb{R}^{p,q}$ si ha

$$A(BC)=(AB)C\,.$$

Dimostrazione. L'elemento di matrice in posizione (i,k) di $A(BC)$ è dato da

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big(\underbrace{\sum_{h=1}^{p}b_{jh}c_{hk}}_{\text{elemento }(j,k)\text{ di }BC}\Big)=\sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\h=1,\ldots,p}}\;\sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\h=1,\ldots,p}}a_{ij}b_{jh}c_{hk}\,,$$

l'elemento di matrice in posizione (i,k) di $(AB)C$ è dato da

$$\sum_{h=1}^{p}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jh}}_{\text{elemento }(i,h)\text{ di }AB}\Big)c_{hk}=\sum_{\substack{j=1,\ldots,n\\h=1,\ldots,p}}a_{ij}b_{jh}c_{hk}\,.$$

■

In maniera simile si verifica che:

Proposizione (Bilinearità del prodotto)

Per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$, $A,A'\in\mathbb{R}^{m,n}$ e $B,B'\in\mathbb{R}^{n,p}$ valgono le proprietà:

i) $(A+A')B=AB+A'B$;

ii) $A(B+B')=AB+AB'$;

iii) $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$.

Proposizione (Proprietà della trasposizione)

Per ogni $A,A'\in\mathbb{R}^{m,n}$, $B\in\mathbb{R}^{n,p}$ e $\lambda\in\mathbb{R}$ si ha

i) ${}^t(A+A')={}^tA+{}^tA'$;

ii) ${}^t(AB)=({}^tB)\cdot({}^tA)$;

iii) ${}^t(\lambda A)=\lambda({}^tA)$.

Definizione

Elementi di $\mathbb{R}^{n,n}$ si dicono matrici quadrate. Notazione alternativa: $M_n(\mathbb{R})$.

Se $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice quadrata, gli elementi a_{ii} ($1\leqslant i\leqslant n$) si dice che formano la diagonale principale di A.

Esempio (gli elementi sulla diagonale principale sono in rosso):

$$\begin{bmatrix}\mathbf{3}&7&1\\1&\mathbf{0}&2\\3&2&\mathbf{5}\end{bmatrix}$$

Chiamiamo matrice identica di ordine n, la matrice $n\times n$ seguente:

$$I_n:=\begin{bmatrix}1&0&0&\ldots&0\\0&1&0&\ldots&0\\0&0&1&\ldots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\ldots&1\end{bmatrix}$$

Proposizione

Per ogni $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si ha

$$I_m A = A I_n = A\ .$$

Diciamo che I_n è elemento neutro rispetto al prodotto di matrici.

Esercizio

Date

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\ , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\ ,$$

calcolare i prodotti AB e BA.

Definizione

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice invertibile se esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$ tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n\ .$$

La matrice B si dirà inversa di A e sarà indicata con il simbolo A^{-1}.

Sistemi di equazioni lineari

Esempi:

$$3x = 6 \qquad 2x + y = 13 \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

I coefficienti possono assumere qualsiasi valore reale, incluso lo zero. Esempi:

$$0x = 2 \qquad 3x + 0y = 7$$

Alcune applicazioni:

Circuiti elettrici. Leggi di Kirkoff (e Ohm: $V = RI$):

$$\sum I_e - \sum I_u = 0 \qquad \text{(la somma algebrica delle correnti in un nodo è zero)}$$

$$\sum V_i = 0 \qquad \text{(la somma algebrica delle tensioni lungo una linea chiusa è zero)}$$

Chimica. Bilanciamento di un'equazione chimica.

Economia. Sistema di input-output (modello che descrive le relazioni tra le quantità di beni prodotte e consumate in un certo sistema economico).

$\rightsquigarrow$ Wassily Wassilyovich Leontief, Premio Nobel per l'Economia (1973).

Generalità sui sistemi lineari

Una equazione in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ si dice lineare se è della forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b\ , \qquad (*)$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. I numeri a_i si dicono coefficienti e b è detto termine noto.

Una n-upla

$$\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

si dice soluzione dell'equazione $(*)$ se sostituendo v_i ad x_i in $(*)$, per ogni $1 \leqslant i \leqslant n$, l'equazione si riduce ad una identità fra numeri reali.

Esempio

$(4, 1, 6) \in \mathbb{R}^3$ è una soluzione dell'equazione $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$.

Esempio

$(3, 5) \in \mathbb{R}^2$ <u>non</u> è soluzione dell'equazione $x_1 + x_2 = 0$.

Un sistema di m equazioni lineari in n incognite è un insieme di equazioni

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$. Una soluzione del sistema è una n-upla $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ che risolve simultaneamente tutte le m equazioni.

Esercizio

Verificare quali fra le seguente triple

$$(1, 0, 0) \qquad (2, 1, 1) \qquad (1, -1, 0) \qquad (3, 1, 0)$$

sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 = 2 \end{cases}$$

Chiamiamo soluzione generale di un sistema Σ l'insieme di tutte le sue soluzioni.
La soluzione generale di un sistema Σ è quindi un sottoinsieme $S_\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$.

Un sistema si dice compatibile (o risolubile) se ammette soluzioni, ovvero $S_\Sigma \neq \emptyset$; se non ha soluzioni, il sistema si dirà incompatibile.

Esempio

Si considerino i tre sistemi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Il primo è incompatibile; il secondo ammette $(1,1)$ come unica soluzione; qualunque coppia $(t,-t)$ è soluzione del terzo sistema, per ogni valore del parametro reale $t \in \mathbb{R}$.

Dato un sistema Σ, possono verificarsi solo tre casi (come dimostreremo più avanti):

1. non esistono soluzioni;
2. una soluzione esiste ed è unica;
3. esistono infinite soluzioni.

Sistemi lineari omogenei

Un sistema si dice omogeneo se i termini noti sono tutti zero.

Un sistema omogeneo di m equazioni (lineari) in n incognite ha quindi la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Un sistema omogeneo è sempre compatibile!

Infatti ammette almeno la soluzione nulla $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$.

Dato un sistema omogeneo, possono quindi verificarsi solo due casi:

1. il sistema ammette come unica soluzione quella nulla;
2. il sistema ammette infinite soluzioni.

Sistemi lineari e matrici

Dato un sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

poniamo

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Chiamiamo A matrice dei coefficienti, B colonna dei termini noti e $(A|B)$ matrice completa.

Esercizio

Si scriva la matrice completa del sistema:

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & & & = & 2 \end{cases}$$

Esercizio

Scrivere il sistema di equazioni lineari la cui matrice completa è:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Sistemi lineari e matrici

L'uso delle matrici permette di scrivere i sistemi lineari in forma più compatta.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B = (b_i) \in \mathbb{R}^{m,1}$ e scriviamo le incognite in una colonna:

$$X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Risolvere un sistema lineare di matrice completa $(A|B)$, equivale a trovare tutti gli $X \in \mathbb{R}^{n,1}$ tali che:

$$A \cdot X = B \qquad \text{(prodotto righe per colonne)}$$

Infatti:

- la i-esima componente della colonna $A \cdot X$ è: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$
- la i-esima componente della colonna B è: b_i
- si ha $A \cdot X = B$ se e solo se

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

($\Rightarrow$ l'i-esima equazione del sistema è soddisfatta) per ogni $i = 1, \ldots, m$.

Una equazione in una incognita

$$ax = b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{(1) se } a \neq 0 \text{ la soluzione esite, è unica ed è data da } x = a^{-1}b. \\ \text{(2) se } a = 0 \text{ allora } \begin{cases} (2') \text{ se } b \neq 0 \text{ il sistema è incompatibile} \\ (2'') \text{ se } b = 0\text{, l'equazione è } 0x = 0 \text{ e ammette infinite soluzioni: } x = t \text{ è soluzione per ogni } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Nel caso $(2'')$ le soluzioni sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{R}$.

Una equazione in n incognite, $n \geqslant 2$

Consideriamo l'equazione

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\ .$$

Se almeno un coefficiente è diverso da zero, diciamo a_1, possiamo assegnare alle incognite x_i, $i \neq 1$, dei valori $t_i \in \mathbb{R}$ arbitrari, e ricavare:

$$x_1 = a_1^{-1}b - a_1^{-1}(a_2t_2 + a_3t_3 + \ldots + a_nt_n)\ .$$

Le soluzioni sono in corrispondenza biunivoca con elementi $(t_2, t_3, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
In questo caso, le incognite $x_2, \ldots, x_n$ si dicono libere.

$$\begin{cases} \text{(1) se } (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0) \text{ le soluzioni in corrispondenza biunivoca con } \mathbb{R}^{n-1}. \\ \text{(2) se } (a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0) \text{ allora } \begin{cases} (2') \text{ se } b \neq 0 \text{ il sistema è incompatibile.} \\ (2'') \text{ se } b = 0 \text{ ogni } n\text{-upla } (t_1, \ldots, t_n) \text{ di } \mathbb{R}^n \text{ è una soluzione.} \end{cases} \end{cases}$$

Esercizio

Si consideri la matrice completa:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right]$$

Dire se il sistema lineare associato è compatibile.

Lezione 04: Cenni sul determinante

(Esercizi: C. Carrara, §6)

Cenni sul determinante [Abate, §9]

Ad ogni matrice <u>quadrata</u> è possibile associare uno scalare detto “determinante” della matrice stessa (poichè, fra le altre cose, serve a “determinare” se un sistema di n equazioni lineari in n incognite ammette un'unica soluzione, cf. teorema di Cramer).

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Il determinante di A, indicato con $|A|$ o $\det A$, è definito come segue. Se $n = 1$, $|A| := a_{11}$. Se $n = 2$,

$$|A| := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Se $n = 3$,

$$|A| := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Al crescere di n la definizione esplicita è sempre più complicata. Per $n \geqslant 4$,

$$|A| := (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\cdots a_{nn}) - (a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}\cdots a_{nn}) + (a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}\cdots a_{nn}) + \dots$$

è una somma di $n!$ monomi di grado n negli elementi di A.
Non darò la definizione generale, ma spiegherò dei metodi di calcolo.

Determinante di matrici 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - (-14) = 19$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = -4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$$

<u>Osservazione</u>: non vale la proprietà $|A| + |B| = |A + B|$. Controesempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si ha $A + B = 0_{\mathbb{R}^{2,2}}$, quindi $|A + B| = 0$. Ma $|A| = |B| = 1$ e $|A| + |B| = 2$.

Esercizio

Calcolare il determinante delle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esercizio

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificare che $|AB| = |A| \cdot |B|$.

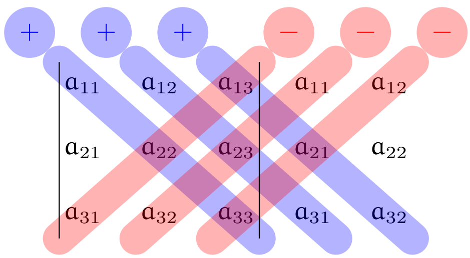
Enunciamo senza dimostrazione:

Teorema di Binet [Abate, §9.3]

Il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti:

$$|AB| = |A| \cdot |B| \qquad \forall\, A, B \in M_n(\mathbb{R})$$

Regola di Sarrus



Esercizio

Si calcoli il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

⚠ **Attenzione:** non esiste una regola analoga per matrici con più di 3 righe/colonne!

Sviluppo di Laplace

[Abate, §9.2]

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e indichiamo con $A_{hk} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice che si ottiene da A eliminando la riga h e la colonna k.

Definizione

La matrice A_{hk} si dice minore complementare dell'elemento a_{hk}, e lo scalare

$$\Gamma_{hk} = (-1)^{h+k}|A_{hk}|$$

è detto complemento algebrico o cofattore dell'elemento a_{hk}.

Enunciamo senza dimostrazione:

Sviluppo di Laplace per righe

Per ogni $1 \leqslant i \leqslant n$ fissato, si ha:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$$

Sviluppo di Laplace per colonne

Per ogni $1 \leqslant j \leqslant n$ fissato, si ha:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$$

Esercizio

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Con lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna si trova:

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

sviluppando il 2° e 3° determinante rispetto alla terza colonna:

$$= -4 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \left\{ (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -4 \cdot 4 \cdot (1-2) + 3 \cdot (-2) \cdot (1-4) + 3 \cdot 4 \cdot 1$$

$$= 16 + 18 + 12 = 46 \,.$$

✓

Inversa di una matrice

Definizione

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Chiamiamo matrice dei cofattori di A, indicata con A^*, la matrice $n \times n$ che si ottiene da A sostituendo l'elemento a_{ij} con il suo complemento algebrico Γ_{ij}:

$$A^* := (\Gamma_{ij})$$

Enunciamo senza dimostrazione:

Teorema di Laplace

$A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $|A| \neq 0$, ed in tal caso l'inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^t(A^*)$$

Esercizio

Calcolare la matrice dei cofattori di

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione.

$$A^* = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

... continua:

$$A^* = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 14 & -7 & -7 \\ -19 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

✓

Usando la matrice dei cofattori si calcola l'inversa:

$$A^{-1} = -\underset{\substack{\uparrow \\ |A|=-35}}{\frac{1}{35}} \begin{bmatrix} 1 & 14 & -19 \\ 2 & -7 & -3 \\ -8 & -7 & 12 \end{bmatrix}$$

Regola di Cramer

Enunciamo senza dimostrazione:

Teorema di Cramer

Un sistema di n equazioni lineari in n incognite $AX = B$ ammette un'unica soluzione se (e solo se) $|A| \neq 0$, ed in tal caso la soluzione $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ è data da:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

<u>Note</u>: x_i è il quoziente di due determinanti. La matrice a numeratore si ottiene dalla matrice dei coefficienti A sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti B.

Esercizio

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 \qquad = 3 \end{cases}$$

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Applicando la regola di Cramer si ricava:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & -1 \\ \mathbf{3} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{4} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 2 & \mathbf{0} & -1 \\ -1 & \mathbf{3} & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{4} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 2 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 1 & \mathbf{3} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{4}$$

La soluzione è quindi $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 3$.

Lezione 05

Sommario

1. Matrici: triangolari, ridotte per righe
2. Sistemi: a scala, ridotti
3. Riduzione per righe.
4. Applicazioni: soluzione di sistemi
   determinante di una matrice
   inversa di una matrice

Matrici triangolari [Abate, §3.2]

Definizione

Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice

- triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$;
- triangolare inferiore se $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$.

Una matrice triangolare si dice completa se $a_{ii} \neq 0$ per ogni i.

Una matrice triangolare superiore ha quindi la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}}_{m}\underbrace{\begin{bmatrix} \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{2n} \\ \dots & a_{3n} \\ & \vdots \\ \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n-m}$$

(se $m \leqslant n$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-n \end{array}$$

(se $m > n$)

Determinante di una matrice triangolare [Abate, es. 9.3]

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è triangolare superiore, ripetendo n volte lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna si ottiene:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn} \,.$$

Si ha

$$|A| \neq 0 \qquad \iff \qquad a_{ii} \neq 0 \;\forall\, i = 1, \dots, n$$

(A è invertibile) (A è triangolare superiore completa)

Matrici ridotte per righe

Definizione

- Un elemento non nullo di una matrice che sotto abbia al più degli zeri verrà detto pivot.
- Una matrice si dice ridotta per righe se in ogni sua riga non nulla c'è (almeno) un pivot.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 9 \\ 3 & \sqrt{2} & 0 & 11 \\ 0 & 5 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

- Un sistema di equazioni lineari si dice ridotto se la matrice dei coefficienti è ridotta per righe.
- Un sistema di equazioni lineari la cui matrice dei coefficienti è triangolare superiore completa (TSC) si dice a scala.

(Esiste una analoga definizione di matrice ridotta per colonne.)

Osservazione

Una matrice è ridotta per righe se e solo se eliminando le righe nulle e riordinando le colonne può essere trasformata in una matrice triangolare superiore completa.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eliminando le righe nulle (3a riga) e riordinando le colonne in modo che i pivot vadano a finire sulla diagonale principale, si ottiene:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 13 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemi ridotti e a scala

MATRICE COMPLETA	SISTEMA LINEARE
Matrice dei coefficienti ridotta: $(A\|B) = \left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{array}\right]$	Sistema ridotto corrispondente: $\begin{cases} x + 7y + 8z = 9 \\ 3x + 2y = -5 \\ 5y = 3 \end{cases}$
Matrice TSC associata: $\left[\begin{array}{ccc\|c} 8 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right]$	Sistema a scala corrispondente: $\begin{cases} 8z + x + 7y = 9 \\ 3x + 2y = -5 \\ 5y = 3 \end{cases}$

Soluzione di un sistema a scala

[Abate, §6.1]

Consideriamo un sistema di matrice completa $(A|B)$ con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ TSC. Tre casi:

1. $m \leqslant n$.
2. $m > n$ e $b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = b_m = 0$.
3. $m > n$ ed i coefficienti $b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots, b_m$ non sono tutti nulli: in questo caso il sistema è incompatibile in quanto almeno una equazione è del tipo $0x = b_i \neq 0$.

Nei primi due casi il sistema è compatibile. A meno di eliminare equazioni del tipo $0 = 0$, possiamo assumere che sia $m \leqslant n$. Il sistema ha quindi la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3m}x_m + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

con $a_{ii} \neq 0 \; \forall\, i = 1, \ldots, m$. Si risolve per sostituzione dal basso verso l'alto, con x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots, x_n$ variabili libere.

Osservazioni sui sistemi ridotti

Poiché un sistema ridotto differisce da uno a scala solo per la numerazione delle incognite, possiamo affermare che:

- Un sistema ridotto è compatibile se e solo se non ha equazioni del tipo

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b$$

  in cui b è un termine noto diverso da zero.

- Le incognite che non moltiplicano (in nessuna delle righe) un pivot sono libere.
- Un sistema ridotto si può risolvere per sostituzione dal basso verso l'alto rispetto alle incognite che moltiplicano i pivot.
- Sia n il numero di incognite e k il numero di righe non nulle della matrice dei coefficienti. Se il sistema è compatibile, la soluzione generale dipenderà da $n-k$ parametri (variabili libere).

Esercizio

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + \mathbf{1}x_4 = 1 \\ 2x_1 + \mathbf{3}x_2 - x_3 = 3 \\ \mathbf{1}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Risolviamo dal basso verso l'alto rispetto all'incognita che moltiplica il pivot. Si ha $x_1 = -x_3$ (3a eq.) che sostito nelle rimanenti due dà:

$$\begin{cases} -2x_3 + x_2 + 2x_3 + \mathbf{1}x_4 = 1 \\ -2x_3 + \mathbf{3}x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + \mathbf{1}x_4 = 1 \\ \mathbf{3}x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Dalla 2a equazione si ricava $x_2 = x_3 + 1$, che sostituita nella 1a dà $x_3 + 1 + \mathbf{1}x_4 = 1$, ovvero $x_4 = -x_3$. Poniamo $x_3 = t$ (parametro libero), e otteniamo:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-t, t+1, t, -t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

✓

Lezione 06

Sistemi equivalenti

Definizione [Abate, Def. 3.6]

Due sistemi di equazioni lineari si dicono equivalenti se hanno la stessa soluzione generale. (Quindi: ogni soluzione del primo sistema è anche soluzione del secondo, e viceversa.)

Esempi

(1) I due sistemi seguenti sono equivalenti:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$$

(2) I due sistemi seguenti sono equivalenti:

$$x+y=1 \qquad 2x+2y=2$$

Esercizio

Verificare che i sistemi seguenti sono equivalenti:

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=4 \end{cases}$$

Operazioni elementari [Abate, §3.3]

Le seguenti operazioni elementari trasformano qualsiasi sistema in uno equivalente:

	SISTEMA LINEARE	MATRICE COMPLETA
(I)	Scambiare di posto due equazioni: $E_i \leftrightarrow E_j$	Scambiare di posto due righe: $R_i \leftrightarrow R_j$
(II)	Moltiplicare un'equazione per $\lambda \neq 0$: $E_i \longrightarrow \lambda E_i$	Moltiplicare una riga per $\lambda \neq 0$: $R_i \longrightarrow \lambda R_i$
(III')	Sostituire un'equazione E_i con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione E_j: $E_i \longrightarrow E_i + \lambda E_j$	Sostituire una riga R_i con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga R_j: $R_i \longrightarrow R_i + \lambda R_j$

Riduzione per righe

- Qualunque matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ può essere trasformata in una matrice ridotta per righe utilizzando l'operazione elementare

  (III') “ $R_i \to R_i + \lambda R_j$ ”

  un numero opportuno di volte.

- Per ottenere una matrice ridotta, si parte dalla prima riga non nulla di A, sia essa la j-esima, e si sceglie un qualunque elemento a_{jk} diverso da zero. Quindi si usa (III') sulle righe successive, e si somma ad esse un multiplo opportuno di R_j, scelto in modo tale da ottenere tutti zeri sotto a_{jk}. In formule:

  $$\forall\, i > j, \qquad R_i \to R_i - \frac{a_{ik}}{a_{jk}} R_j$$

  L'elemento a_{jk} sarà un pivot per la matrice ottenuta in questo modo.

- Si ripete il procedimento per tutte le righe non nulle, fino a che in ogni riga non nulla non ci sia un pivot.

Esempio uso (III')

Supponiamo di voler far diventare l'elemento cerchiato un pivot:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{2} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1} A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightsquigarrow R_1 \\ \rightsquigarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ \rightsquigarrow R_3 + R_1 \end{array}$$

⋆ $2^{\underline{a}}$ riga: $\boxed{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_1}$

$$\begin{array}{rl} -\frac{1}{2}R_1 = & -\frac{1}{2}(\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1\ ) \\ R_2 = & (\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad -1\ ) \\ \hline R_2 - \frac{1}{2}R_1 = & (\ 2-\frac{1}{2}\cdot 2 \quad 1-\frac{1}{2}\cdot 2 \quad 1-\frac{1}{2}\cdot 1 \quad -1-\frac{1}{2}\cdot 1\ ) = (\ 1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{3}{2}\ ) \end{array}$$

⋆ $3^{\underline{a}}$ riga: $\boxed{R_3 \to R_3 - \frac{(-2)}{2} R_1}$

$$\begin{array}{rl} R_1 = & (\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 1\ ) \\ R_3 = & (\ 3 \quad -2 \quad 1 \quad 3\ ) \\ \hline R_3 + R_1 = & (\ 5 \quad 0 \quad 2 \quad 4\ ) \end{array}$$

Esercizio

Ridurre per righe la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 4 & -8 & 7 \\ 4 & -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Il primo elemento non nullo nella prima riga è quello in posizione $(1,2)$. Usiamo (III') per ottenere tutti zeri sotto di esso:

$$A \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 4R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_1}]{R_2 \to R_2 + R_1} A' := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Possiamo saltare la 2a riga. Usiamo (III') per ottenere zero sotto a'_{34}:

$$A' \xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{8}{3}R_3} A'' := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

✓

Risolvere un sistema per riduzione

Un sistema $AX = B$ di matrice completa $(A|B)$ può essere risolto come segue:

- Usando le tre operazioni elementari si trasforma $(A|B)$ in una nuova matrice $(A'|B')$ tale che A' è ridotta per righe.
- Il sistema ridotto $A'X = B'$ è equivalente a quello di partenza e si può risolvere per sostituzione.

Osservazione 12.2.1

Attenzione: è la matrice A' che deve essere ridotta per righe, non $(A'|B')$.

$(A'|B')$ ridotta per righe $\not\Rightarrow$ A' ridotta per righe.

Esempio:

$$(A'|B') = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nell'esempio $(A'|B')$ è ridotta per righe, ma A' non lo è (non ha pivot nella 1a riga).

Esercizio

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Soluzione.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] =: (A'|B')$$

Il sistema di matrice completa $(A'|B')$ è:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \\ -x_3 = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -1 + x_3 = -1 + 2 = 1 \\ x_2 = 5 - 4x_3 = 5 - 8 = -3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Esercizio (Esame del 03/09/2012)

Si consideri il sistema di equazioni lineari dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 + (\lambda+2)x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

a) Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.

b) Nei casi in cui il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.

Soluzione. Conviene iniziare riordinando le righe, in modo da poter scegliere 1 come pivot:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & 2 & 3 \\ 5 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \lambda & 1 \\ 5 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - \lambda R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2-3\lambda & 0 & 2-\lambda^2 & 3-\lambda \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2-3\lambda & 0 & 2-\lambda^2 & 3-\lambda \end{array}\right]$$

(continua. . .)

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - (2-3\lambda)R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(3-\lambda) & 3-\lambda \end{array}\right] =: (A'|B')$$

Il sistema di matrice completa $(A'|B')$ è equivalente a quello di partenza.
L'ultimo elemento in rosso è diverso da zero (quindi è un pivot) se $\lambda \neq 0, 3$.

Se $\lambda \notin \{0, 3\}$ la matrice A' è ridotta per righe. Poiché non contiene equazioni "del tipo $0 = b \neq 0$" (cioè coefficienti tutti nulli e termine noto diverso da zero), il sistema è compatibile. Risolvendo per sostituzione (dal basso) si ottiene

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ 1x_1 \quad\quad + \ x_3 = 0 \\ \quad\quad \lambda(3-\lambda)x_3 = 3-\lambda \end{cases} \iff (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$$

Come ci aspettavamo la soluzione è unica (in un sistema ridotto con $n = 3$ incognite e $k = 3$ equazioni non nulle, il numero di parametri liberi è $n - k = 0$).

Se $\lambda = 0$, la terza equazione non ammette soluzione, quindi il sistema è incompatibile.

Rimane da studiare il caso $\lambda = 3$. In questo caso la matrice completa diventa

$$(A'|B') = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il sistema associato è ridotto, ha $k = 2$ equazioni e $n = 3$ incognite.
La soluzione generale dipenderà da $n - k = 1$ parametro reale. Si ha

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 1 \\ 1x_1 \quad\quad + \ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Qualunque valore reale assegnamo alla variabile libera x_3, otteniamo una soluzione particolare. Ponendo $x_3 = t$, scriviamo l'insieme di tutte le soluzioni in forma parametrica (in funzione di un parametro $t \in \mathbb{R}$) come segue.

La soluzione generale è l'insieme delle terne:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, 1, t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

In risposta alle due domande dell'esercizio:

a) il sistema è compatibile se e solo se $\lambda \neq 0$
(ha infinite soluzioni per $\lambda = 3$ e un'unica soluzione se $\lambda \neq 0, 3$);

b1) se $\lambda \neq 0, 3$,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$$

b2) se $\lambda = 3$,

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t, 1, t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

✓

Esercizio

Si consideri il sistema di equazioni lineari dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \lambda \end{cases}$$

a) Stabilire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il sistema è compatibile.

b) Nei casi in cui il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.

Soluzione.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \lambda \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{array}\right]$$

(a) Il sistema è compatibile se e solo se $\lambda = -1$. (b) Se $\lambda = -1$, si ha:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \implies (x_1, x_2, x_3) = (1, -t-1, t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Esercizio (Esame del 10/06/2013)

Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 6x_2 = 3 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_2 + \lambda x_3 = -3 \end{cases}$$

a) Dire per quali valori di λ il sistema è compatibile (specificare per quali valori ammette un'unica soluzione, e per quali ne ammette infinite).

b) In tutti i casi in cui il sistema è compatibile, determinare la soluzione generale.

Soluzione. Scriviamo la matrice completa $(A|B)$, iniziando dalla 2a equazione (che non dipende da λ), e riduciamola per righe:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & 2 & 0 \\ \lambda & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & \lambda & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ \lambda & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & \lambda & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \lambda R_1}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4\lambda+6 & -\lambda & 3 \\ 0 & 6 & \lambda & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4\lambda+6 & -\lambda & 3 \\ 0 & 4(\lambda+3) & 0 & 0 \end{array}\right] = (A'|B')$$

Se $\lambda \notin \{0, -3\}$ abbiamo un sistema ridotto compatibile con $n = 3$ incognite e $k = 3$ equazioni non nulle: ammette quindi un'unica soluzione ($n - k = 0$ variabili libere). Si ha

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ (4\lambda+6)x_2 - \lambda x_3 = 3 \\ 4(\lambda+3)x_2 = 0 \end{cases} \implies^{*} \begin{cases} x_1 = 3/\lambda \\ x_3 = -3/\lambda \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

(* Per sostituzione, notando che il coefficiente di x_2 nella 3a equazione è, per ipotesi, diverso da zero.)

Se $\lambda = -3$, l'ultima riga di $(A'|B')$ è nulla e abbiamo un sistema ridotto compatibile con $n = 3$ incognite e $k = 2$ equazioni non nulle: ammette quindi infinite soluzioni ($n - k = 1$ variabile libera). La soluzione generale, in forma parametrica, è data da

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \overset{(\text{ponendo } x_2 = t)}{\implies} \begin{cases} x_1 = 2t - 1 \\ x_3 = 2t + 1 \\ x_2 = t \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, il sistema non è ridotto (manca il pivot della 2a riga). Completando la riduzione:

$$(A'|B') = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

si vede che il sistema è incompatibile (3a equazione).

In risposta alle due domande dell'esercizio:

a) il sistema è compatibile se e solo se $\lambda \neq 0$

(ha infinite soluzioni per $\lambda = -3$ e un'unica soluzione se $\lambda \neq 0, -3$);

b1) se $\lambda \neq 0, -3$,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{\lambda}, 0, -\frac{3}{\lambda}\right)$$

b2) se $\lambda = -3$,

$$(x_1, x_2, x_3) = (2t - 1, t, 2t + 1) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

✓

Calcolare un determinante per riduzione

[Abate, §3.3]

Proposizione (senza dimostrazione)

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora:

1. se B è una matrice ottenuta da A scambiando fra di loro due righe (o due colonne), allora $|B| = -|A|$; Operazione (I)
2. se B è ottenuta da A moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$ gli elementi di una sua riga (o colonna), allora $|B| = \lambda|A|$; Operazione (II)
3. se B è ottenuta da A sommando a una sua riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna), allora $|B| = |A|$. Operazione (III')

Esempio

Calcoliamo il determinante della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} A' := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Otteniamo $|A| = |A'| = 0$ (calcolare $|A'|$ con lo sviluppo di Laplace rispetto alla 3a riga).

Esercizio

Calcolare il determinante di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Con l'operazione (III') otteniamo

$$A \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo $|A|$ con lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot 2 = -6$$

Notiamo che, a meno di un segno, il determinante è proprio il prodotto dei pivot. ✓

Matrici fortemente ridotte e metodo di Gauss-Jordan

Una matrice si dice fortemente ridotta per righe se

1. è ridotta per righe;
2. tutti i pivot sono uguali ad 1;
3. sopra a ciascun pivot non sono presenti elementi diversi da zero.

(Nota: le colonne contenenti i pivot hanno tutti gli elementi nulli tranne uno, il pivot!)

Esempio

La prima matrice è ridotta ma non fortemente ridotta, la seconda è fortemente ridotta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Metodo di Gauss-Jordan. Usando le tre operazioni elementari, ogni matrice può essere trasformata in una fortemente ridotta: prima si riduce la matrice; poi si usa l'operazione (II) per ottenere tutti pivot uguali ad 1; infine si usa l'operazione (III') per annullare tutti gli elementi sopra i pivot.

Esempio

Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Riduzione:

$$A \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pivot uguali ad 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tutti zeri sopra i pivot:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio

Usando il metodo di Gauss-Jordan risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 &= \ \ 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa è la stessa dell'esercizio precedente. Si ha

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Il nuovo sistema, equivalente a quello di partenza, è:

$$\begin{cases} x_3 = \ \ 2 \\ x_1 \qquad = -5 \\ x_2 \qquad = \ \ 3 \end{cases}$$

✓

Invertire una matrice con il metodo di Gauss-Jordan

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice invertibile. Determinare l'inversa di A equivale a determinare una matrice $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ soluzione dell'equazione

$$AX = I_n$$

(n^2 equazioni in n^2 incognite)

Se A è invertibile, la soluzione si può determinare con il metodo di Gauss-Jordan. Possiamo trasformare la matrice completa del sistema

$$(A|I_N) \rightsquigarrow (A'|B')$$

con A' fortemente ridotta. Riordinando le righe in modo che i pivot vadano sulla diagonale principale si ottiene

$$(A'|B') \rightsquigarrow (I_n|B'')$$

Il nuovo sistema, equivalente a quello di partenza, sarà:

$$I_n X = B''$$

cioé $X = B''$ è proprio la matrice cercata (l'inversa di A).

Esercizio

Usando il metodo di Gauss-Jordan invertire, se possibile, le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Nell'ordine: riduciamo, facciamo diventare 1 i pivot, comparire 0 sopra i pivot, se necessario riordiniamo le righe in modo che i pivot vadano sulla diagonale.

Iniziamo con la matrice A:

$$(A|I_2) = \left[\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] =: (A'|B')$$

Siccome $|A| = |A'| = 0$, la matrice A non è invertibile. Passiamo alla seconda matrice:

$$(C|I_2) = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = (I_2|C^{-1}) \qquad \Longrightarrow \qquad C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio

Usando il metodo di Gauss-Jordan invertire la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Soluzione.

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3} R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -3R_3]{R_2 \to \frac{1}{3} R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{2}{3} R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

✓

Lezione 07: strutture algebriche

Strutture algebriche

[L. Lomonaco, *Un'introduzione all'algebra lineare*, §1]

Definizione

Una operazione interna (binaria) di un insieme S è una legge che associa ad ogni coppia di elementi di S un terzo elemento di S che chiameremo "risultato dell'operazione".

Osservazioni:

- Una operazione interna di S è una applicazione con dominio $S \times S$ e codominio S.
- Le operazioni tipicamente si indicano non con delle lettere ma con dei simboli:

$$*, +, \cdot, \times, \div, \cap, \cup, \smallsetminus \text{ etc.}$$

- Se $*$ è una operazione interna di S, l'immagine di una coppia $(a, b) \in S \times S$ del dominio verrà indicata con $a * b$.
(Se il simbolo scelto per l'operazione è $+$, scriveremo l'immagine di (a, b) come $a + b$, se il simbolo è $\div$ scriveremo $a \div b$, etc.)

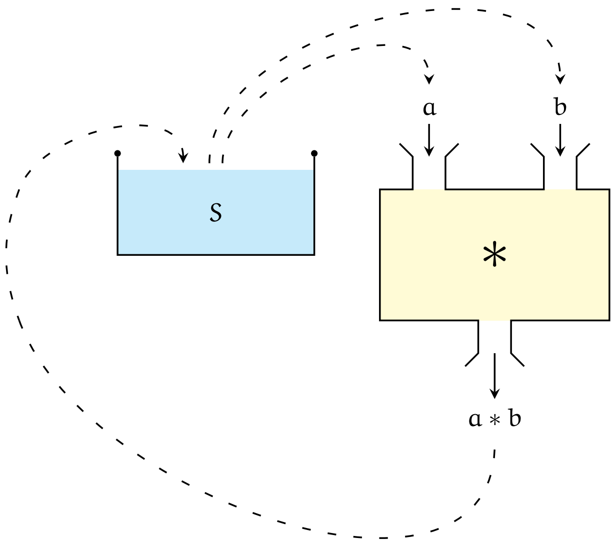


Figura 1: operazione binaria interna.

Esempi

Operazioni aritmetiche:

- Somma e prodotto fra numeri naturali, interi, razionali, reali, complessi sono operazioni interne rispettivamente di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- La sottrazione è una operazione interna di $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ma non è una operazione interna di $\mathbb{N}$, poiché la differenza fra due numeri naturali non è sempre un numero naturale (esempio: $2 - 7 = -5$ è un intero negativo).
- La divisione non è una operazione interna di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ (il rapporto fra due numeri naturali/interi non è sempre un numero naturale/intero), né di $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ (non si può dividere per 0). E' una operazione, ad esempio, di $\mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ ed $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

Operazioni fra matrici:

- La somma di matrici reali è una operazione interna di $\mathbb{R}^{m,n}$, per ogni $m, n \geqslant 1$.
- Il prodotto righe per colonne è una operazione interna di $M_n(\mathbb{R})$, per ogni $n \geqslant 1$.

Operazioni insiemistiche:

- Sia I un insieme e indichiamo con $\mathcal{P}(I)$ la collezione dei sottoinsiemi di I, detto insieme delle parti di I; intersezione e unione sono operazioni interne di $\mathcal{P}(I)$.

Definizione

Siano K e S due insiemi. Una operazione esterna di S ad operatori in K è una applicazione

$$K \times S \to S\ .$$

L'immagine di una coppia $(\lambda, a) \in K \times S$ si indica semplicemente con λa.

Esempio:

- Il prodotto di una matrice reale $m \times n$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è una operazione esterna dell'insieme $S = \mathbb{R}^{m,n}$ ad operatori in $K = \mathbb{R}$.

Definizione

Un insieme con delle operazioni (interne o esterne) è detto struttura algebrica.

Esempi:

- $(\mathbb{N}, +, \cdot\,)$ è una struttura algebrica con due operazioni (entrambe interne).
- Sia I un insieme e $S := \mathcal{P}(I)$ l'insieme delle parti di I.
  $(S, \cup, \cap)$ è una struttura algebrica con due operazioni interne.

Proprietà delle operazioni interne

Definizione

Una operazione interna $*$ di un insieme S si dice commutativa se $\forall\ a, b \in S$ si ha

$$a * b = b * a\ ,$$

e si dice associativa se per ogni $a, b, c \in S$ si ha

$$a * (b * c) = (a * b) * c\ .$$

In tal caso scriveremo semplicemente $a * b * c$ per indicare il risultato dell'operazione.

Esempi:

	Commutativa	**Associativa**
Somma di due numeri / n-uple / matrici	✓	✓
Unione e intersezione	✓	✓
Prodotto di due numeri	✓	✓
Prodotto fra matrici	×	✓
Divisione	×	×

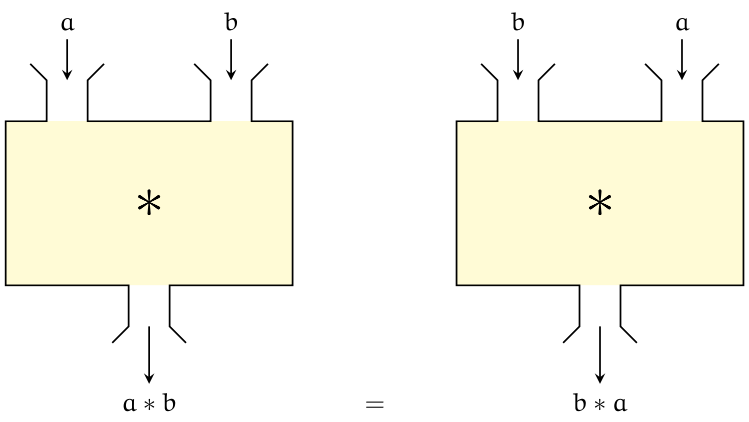


Figura 2: proprietà commutativa.

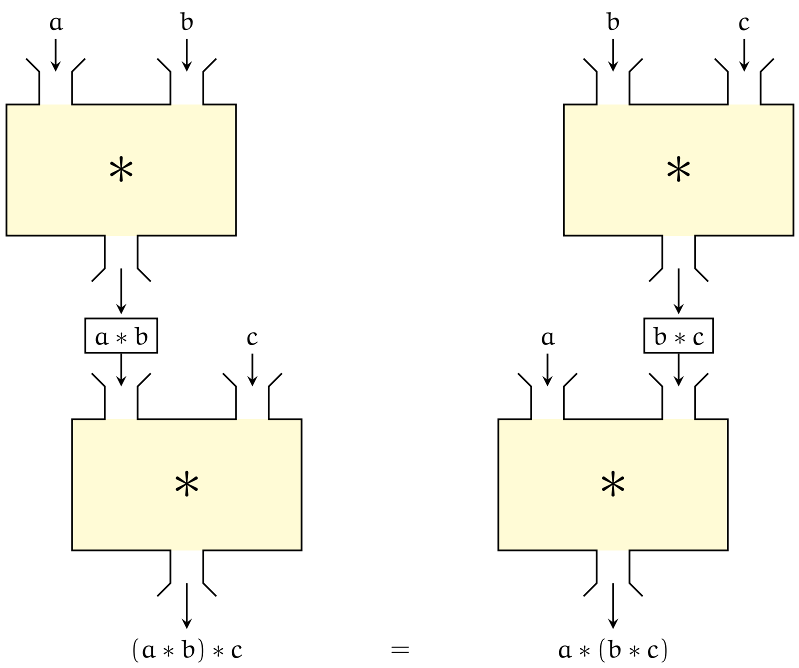


Figura 3: proprietà associativa.

Elemento neutro

Definizione

Sia $(S, *)$ un insieme con una operazione interna. Un elemento $e \in S$ è detto elemento neutro rispetto all'operazione considerata se:

$$\forall\, a \in S, \quad a * e = e * a = a\,.$$

Esempi:

- il numero intero 0 è elemento neutro rispetto alla somma di due numeri;
- il numero intero 1 è elemento neutro rispetto al prodotto di due numeri;
- la matrice nulla $0_{\mathbb{R}^{m,n}}$ è elemento neutro rispetto alla somma di matrici $m \times n$;
- la matrice identica I_n è elemento neutro rispetto al prodotto di matrici $n \times n$.
- l'insieme vuoto $\emptyset$ è elemento neutro per l'operazione di unione di insiemi.

Proposizione (unicità dell'elemento neutro)

Se $(S, *)$ ha un elemento neutro, questo è unico. [...corollari]

Dimostrazione (per assurdo). Siano e ed e' due elementi neutri. Allora $e * e' = e'$ poiché e è elemento neutro; ma $e * e' = e$ poiché anche e' è elemento neutro. Quindi $e = e'$. ∎

Elementi simmetrizzabili

Sia $(S, *, e)$ un insieme con una operazione interna ed un elemento neutro.

Definizione

Un elemento $a \in S$ si dice simmetrizzabile (o invertibile) in $(S, *, e)$ se esiste un elemento $b \in S$ tale che

$$a * b = b * a = e\,.$$

In tal caso b si dice simmetrico (o opposto, o inverso) di a.

Esempi:

- Ogni elemento n di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ è simmetrizzabile, ed il simmetrico è il suo opposto $-n$.
- Ogni elemento non nullo x di $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ è simmetrizzabile, ed il suo simmetrico è l'inverso x^{-1}. L'elemento $0 \in \mathbb{Q}$ non è simmetrizzabile (rispetto al prodotto).
- Ogni elemento $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è simmetrizzabile rispetto alla somma, ed il simmetrico è dato dalla matrice opposta $-A$.
- Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile, il suo simmetrico rispetto al prodotto è A^{-1}.

Unicità del simmetrico

Sia $(S, *, e)$ un insieme con una operazione interna associativa ed un elemento neutro.

Proposizione (unicità del simmetrico di un elemento)

Se un elemento è simmetrizzabile allora il suo simmetrico è unico.

Dimostrazione. Sia $a \in S$ e supponiamo che $b, b' \in S$ siano due simmetrici di a. Per definizione di simmetrico,

$$a * b = e \qquad\qquad b' * a = e$$

Per definizione di elemento neutro,

$$b' * (a * b) = b' * e = b' \qquad\qquad (b' * a) * b = e * b = b$$

Dall'associatività dell'operazione si evince che

$$b' = b' * (a * b) = (b' * a) * b = b\,,$$

ovvero b e b' sono uguali. ∎

Corollari: l'opposta di una matrice è unica; l'inversa di una matrice, se esiste, è unica.

Strutture algebriche: campi, anelli e spazi vettoriali

Vedremo ora tre strutture algebriche importanti:

1. campi $(K, +, \cdot\,)$, strutture algebriche con due operazioni (somma e prodotto), con proprietà simili a quelle dei numeri reali $\mathbb{R}$.
2. anelli $(A, +, \cdot\,)$, strutture algebriche con due operazioni (somma e prodotto), con proprietà simili a quelle dei numeri interi $\mathbb{Z}$ o delle matrici quadrate $M_n(\mathbb{R})$.
3. spazi vettoriali $(V, +, \cdot\,)$, strutture algebriche con una operazione interna ed una esterna, con proprietà simili a quelle delle n-uple di numeri reali $\mathbb{R}^n$.

L'insieme sottostante un campo tipicamente è indicato con K,
l'insieme sottostante un anello con A,
l'insieme sottostante uno spazio vettoriale con V.

A volte indicheremo un campo (anello o spazio vettoriale) semplicemente con K (A o V) omettendo di indicare le operazioni, quando queste sono chiare dal contesto.

Definizione

Un insieme K con due operazioni interne, che chiameremo "somma" (indicata con $+$) e "prodotto" (indicato con $\cdot$) si dice campo se:

1. somma e prodotto sono associative, commutative e possiedono un elemento neutro;

$\rightarrow$ indicheremo con 0_K l'elemento neutro per la somma, e con 1_K l'elemento neutro per il prodotto (a volte omettendo l'indice K quando questo non genera ambiguità)

2. ogni elemento di K ha un opposto (un "simmetrico" rispetto alla somma);
3. ogni elemento diverso da 0_K ha un inverso (un "simmetrico" rispetto al prodotto);

$\rightarrow$ indicheremo con $-a$ l'opposto di $a \in K$, e con a^{-1} il suo inverso.

4. vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: per ogni $a, b, c \in K$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \big(\text{ed anche } (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a\big)$$

- se tutte le proprietà della definizione precedente sono soddisfatte esclusa la terza, diremo che K è un anello commutativo (con unità).
- se rinunciamo anche alla proprietà commutativa del prodotto, otteniamo la definizione generale di anello (con unità).

Esempi:

- L'insieme $\mathbb{Z}$ con le usuali operazioni aritmetiche è un anello commutativo; $\mathbb{Z}$ non è un campo (l'inverso di un intero non è in generale intero).
- Per $n \geqslant 2$, l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ con le operazioni di somma e prodotto righe per colonne è un anello non commutativo. $M_n(\mathbb{R})$ non è un campo (non tutte le matrici non nulle possiedono una inversa, e non vale la proprietà commutativa del prodotto).
- Gli insiemi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ con le usuali operazioni aritmetiche sono campi. Notiamo che:

$$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}, z \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

- L'insieme

$$\mathbb{Q}[i] = \{x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

(numeri complessi con parte reale e immaginaria razionali) è un altro esempio di campo, detto campo dei razionali di Gauss.

Osservazione.

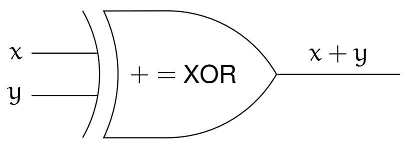
Si possono considerare matrici con elementi in un campo K qualsiasi, e sistemi di equazioni lineari con coefficienti in un campo K arbitrario. I teoremi enunciati fin'ora sono validi nel caso in cui invece di $\mathbb{R}$ si consideri un campo K arbitrario (ad esempio $K = \mathbb{C}$ o $K = \mathbb{Q}$).

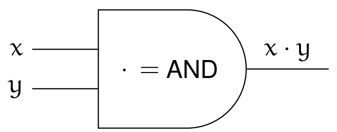
Esempio: $\mathbb{F}_2$

Un campo con due soli elementi **0** e **1** può essere costruito come segue. Definiamo somma e prodotto ponendo:

$$x + y = \mathbf{0} \iff x = y$$
$$x \cdot y = \mathbf{1} \iff x = y = \mathbf{1}$$

Chiamiamo tale campo $\mathbb{F}_2$. Nei circuiti logici, queste due operazioni sono implementate dagli operatori XOR (disgiunzione esclusiva) e AND (unione logica):





Se K è un campo, nell'insieme K^n delle n-uple di elementi di K possiamo definire, come nel caso reale, moltiplicazione per uno scalare e somma per componenti.

Per $K = \mathbb{F}_2$, elementi di K^n sono stringhe di bit di lunghezza n fissata.

Lezione 08

Sommario

1. Polinomi.
2. Vettori geometrici.
3. Spazi vettoriali astratti.

L'anello dei polinomi $K[x]$ [Abate, §4C.1]

Definizione

Un polinomio di grado $n \geqslant 0$ in una variabile x e a coefficienti in un campo K è una espressione del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_i \in K$ per ogni $i = 0, \ldots, n$, e $a_n \neq 0$.

Un elemento $r \in K$ è detto radice del polinomio considerato se $P(r) = 0$.

Una equazione del tipo $P(x) = 0$ è detta algebrica o polinomiale di grado n in x.

E' utile considerare anche il polinomio nullo, a cui si assegna per convenzione grado $-\infty$.

L'insieme dei polinomi (di grado arbitrario) in una variabile x e a coefficienti in un campo K viene indicato con $K[x]$. A noi interesserà il caso $K = \mathbb{R}$.

Osservazione: $K[x]$ è un anello commutativo (con unità).

Un polinomio reale può non avere radici reali. Esempio: $P(x) = x^2 + 1$ non ha radici reali; ammette però due radici complesse. Diciamo che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, poiché ogni equazione algebrica in $\mathbb{C}$ (di grado $n \geqslant 1$) ammette soluzioni.

Teorema fondamentale dell'algebra [Abate, Teorema 4C.2]

Un polinomio di grado $n \geqslant 1$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ può sempre essere scritto nella forma

$$P(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n)\,,$$

dove $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ sono le radici e $c \in \mathbb{C}$ un coefficiente non nullo.

Le radici di un polinomio non sono necessariamente tutte distinte.
Ad esempio $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ ha due radici, entrambe uguali a 3.

Indicando con $\mu_1, \ldots, \mu_k$ le radici distinte del polinomio $P(x)$ ($k \leqslant n$), si avrà

$$P(x) = c(x - \mu_1)^{m_1}(x - \mu_2)^{m_2}\ldots(x - \mu_k)^{m_k}\,,$$

dove $m_i \geqslant 1$ è detto molteplicità della radice μ_i, e si ha $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$.

Equazioni algebriche

Formula risolutiva per l'equazione di 2° grado ($a \neq 0$):

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

La formula vale sia quando i coefficienti sono reali, sia quando sono complessi.

Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, si possono verificare tre casi, che dipendono dal segno della grandezza $\Delta = b^2 - 4ac$, detta discriminante:

- se $\Delta > 0$ si hanno due soluzioni reali distinte;
- se $\Delta = 0$ si ha una sola soluzione ed è reale (di molteplicità 2);
- se $\Delta < 0$ si hanno due soluzioni complesse coniugate.

Per le equazioni di 3° e 4° grado esiste una formula risolutiva.

Per equazioni di grado superiore al quarto è noto che non esistono formule risolutive esprimibili tramite radicali (Teorema di Abel-Ruffini).

Teorema delle radici razionali

Consideriamo un polinomio ($a_n \neq 0$)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

a coefficienti interi. Se un numero razionale $r = p/q$ è una radice di $P(x)$, allora

i) p divide a_0;

ii) q divide a_n.

Le radici razionali si possono determinare considerando tutte i possibili valori di p/q, con p divisore di a_0 e q divisore di a_n, e verificando per sostituzione quali sono radici.

Esempio

Sia $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.
I divisori di $a_0 = 2$ sono $\pm 1, \pm 2$;
i divisori di $a_3 = 2$ sono $\pm 1, \pm 2$; quindi:

$$p/q \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm \tfrac{1}{2}\right\}\ .$$

Si verifica che le radici sono -1, 2 e $\frac{1}{2}$, quindi:

$$P(x) = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x+1)(x-2)\ .$$

Esercizio

Usando il teorema delle radici razionali, fattorizzare i polinomi

$$P_1(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$P_2(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$$

Soluzione:

$$P_1(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

$$P_2(x) = 3\left(x - \tfrac{1}{3}\right)(x+1)(x-2)$$

Regola di Ruffini

Dato uno scalare r e un polinomio $P(x)$ di grado n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, la regola di Ruffini permette di decomporre $P(x)$ nella forma

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

in cui

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

è il quoziente della divisione ed R è una costante, detta resto. Si procede come segue:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
r & & b_{n-1}r & b_{n-2}r & \ldots & b_2 r & b_1 r & b_0 r \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + b_{n-1}r & a_{n-2} + b_{n-2}r & \ldots & a_2 + b_2 r & a_1 + b_1 r & a_0 + b_0 r \\
 & = b_{n-1} & = b_{n-2} & = b_{n-3} & \ldots & = b_1 & = b_0 & = R
\end{array}$$

Se r è una radice di $P(x)$, allora il resto è $R = 0$.

Data una equazione di 3° grado, la regola di Ruffini permette di ridurla ad una di 2° grado se almeno una soluzione è nota a priori.

Esempio

Sia

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 2\ .$$

Usando il teorema delle radici razionali, scopriamo che una radice è $r = -\frac{1}{2}$.
Dividendo $P(x)$ per $x - r$ si ottiene:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -4 & -2 \\
-\frac{1}{2} & & -1 & 0 & 2 \\
\hline
 & 2 & 0 & -4 & 0 \\
 & = b_2 & = b_1 & = b_0 & = R
\end{array}$$

Quindi:

$$P(x) = (x + \tfrac{1}{2})(2x^2 - 4)\ .$$

Esempio

Sia

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 3\ .$$

Usando il teorema delle radici razionali, scopriamo che una radice è $r = 1$.
Dividendo $P(x)$ per $x - r$ si ottiene:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 2 & -1 & -3 \\
1 & & 2 & 4 & 3 \\
\hline
 & 2 & 4 & 3 & 0 \\
 & = b_2 & = b_1 & = b_0 & = R
\end{array}$$

Quindi:

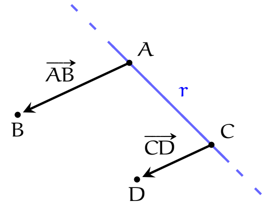
$$P(x) = (x-1)(2x^2 + 4x + 3)\ .$$

Vettori geometrici [Abate, §2]

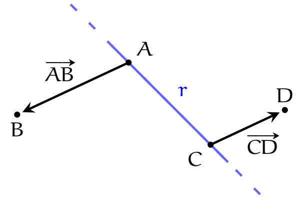
- Due rette del piano si dicono parallele se non hanno punti in comune.
  Due rette dello spazio tridimensionale si dicono parallele se sono contenute in un piano e non hanno punti in comune.
- Dati due punti A e B distinti (del piano o dello spazio), orientare il segmento $\overline{AB}$ vuol dire scegliere quale dei due estremi precede l'altro nel segmento. Il primo estremo verrà detto punto di applicazione, il secondo verrà detto estremo libero.
- Esistono esattamente due segmenti orientati di estremi A e B, indicati con $\overrightarrow{AB}$ (A precede B) e $\overrightarrow{BA}$ (B precede A) rispettivamente. Un segmento orientato è anche detto vettore geometrico applicato.
- La lunghezza del segmento $\overline{AB}$ è detta modulo o norma del vettore, ed è indicata con $\|\overrightarrow{AB}\|$ (chiaramente $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ hanno la stessa norma).
- Diciamo che due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno la stessa direzione se giacciono sulla stessa retta oppure in rette parallele (in particolare, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ hanno la stessa direzione).

Orientamento

- Siano $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ giacenti in rette parallele (distinte). La retta r passante per A e C divide il piano che contiene i vettori in due semipiani. Si dice che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno lo stesso verso se gli estremi liberi B e D appartengono entrambi allo stesso semipiano.
  Altrimenti si dice che i vettori hanno verso opposto.



$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno lo stesso verso.



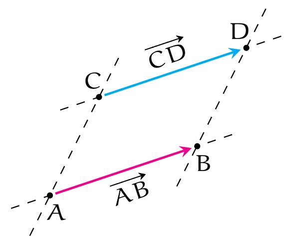
$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno verso opposto.

- Siano $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ due vettori che giacciono sulla stessa retta. Sia s la semiretta uscente da A e contenente B, ed s' la semiretta uscente da C e contenente D.
  Se $s \subseteq s'$ oppure $s' \subseteq s$ diciamo che i due vettori hanno lo stesso verso, altrimenti diciamo che hanno verso opposto.

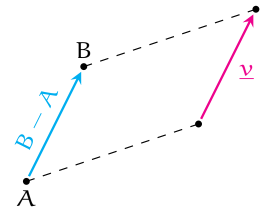
Vettori liberi [Abate, §2C.1]

- E' utile considerare anche vettori di lunghezza nulla, i cui estremi coincidono. Un vettore nullo $\overrightarrow{AA}$ è caratterizzato dal solo punto di applicazione A.
- Due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ (del piano o dello spazio) si dicono equipollenti se sono entrambi nulli oppure hanno uguale direzione, modulo e verso.
- Dato un vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, l'insieme di tutti i vettori applicati equipollenti ad $\overrightarrow{AB}$ è detto vettore libero rappresentato da $\overrightarrow{AB}$, e viene indicato con $B - A$.
  Se $A = B$ si ottiene il vettore libero nullo, $B - A = \underline{0}$.
  (L'equipollenza è una relazione di equivalenza, e $B - A$ è la classe di equivalenza di tutti i vettori equipollenti ad $\overrightarrow{AB}$.)
- Un vettore libero non nullo è univocamente determinato da modulo, direzione e verso. Il vettore nullo ha modulo zero, e direzione e verso indefiniti.

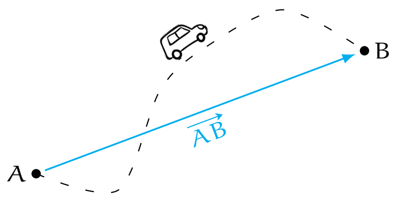
- Due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ non nulli sono equipollenti (rappresentano lo stesso vettore libero) se e solo sono lati opposti (orientati nel modo giusto) di un parallelogramma:



- [Partendo dagli assiomi della geometria euclidea, si dimostra che. . .]
  dato un vettore libero $\underline{v}$ ed un punto A qualsiasi, esiste uno ed un solo punto B tale che $\underline{v} = B - A$ (cioé: ogni vettore libero $\underline{v}$ si può rappresentare con un vettore applicato in un punto scelto a piacere).

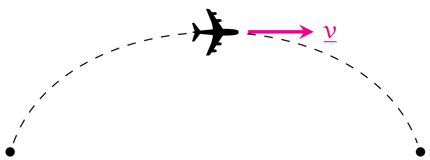


Un vettore applicato può rappresentare, ad esempio, uno spostamento:



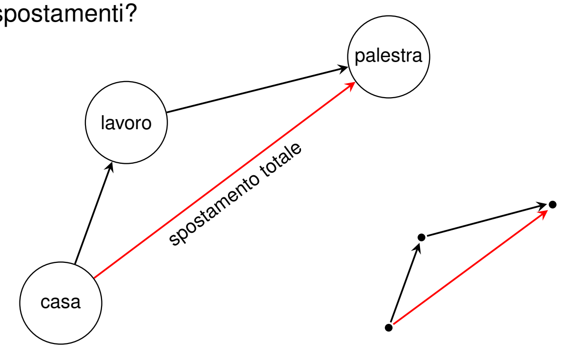
(spostamento, forza applicata in un punto, etc.)

Un tipico esempio di vettore libero è il vettore velocità di un corpo in movimento

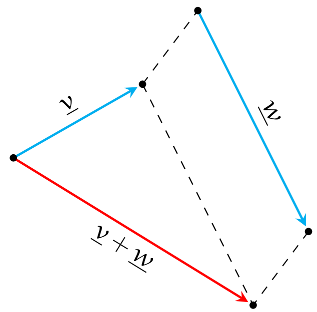


(velocità, accelerazione di un punto materiale, etc.)

Come “sommiamo” due spostamenti?



Come “sommiamo” due velocità?



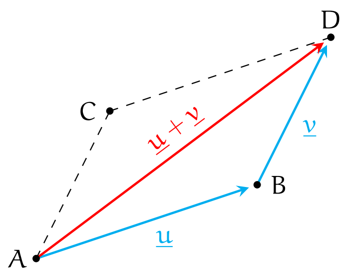
Somma e moltiplicazione per uno scalare

Indichiamo con $\mathbb{V}_2$ l'insieme di tutti i vettori liberi del piano, e con $\mathbb{V}_3$ l'insieme di tutti i vettori liberi dello spazio tridimensionale.

Definizione (regola del parallelogramma)

In $\mathbb{V}_2$ (risp. $\mathbb{V}_3$) è definita una operazione interna di “somma” come segue. Dati due vettori liberi $\underline{u} = B - A$ e $\underline{v} = D - B$ (scegliamo i rappresentanti in modo che l'estremo libero del primo sia il punto di applicazione del secondo), definiamo:

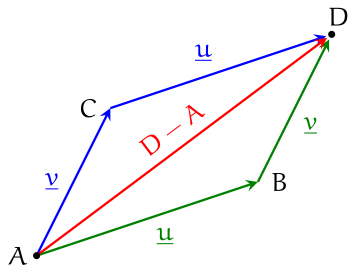
$$\underline{u} + \underline{v} := D - A$$



Si dimostra usando gli assiomi della geometria euclidea che la definizione è ben posta (il risultato non dipende dai segmenti orientati scelti come rappresentanti dei vettori).

Osservazioni.

Vale la proprietà commutativa:

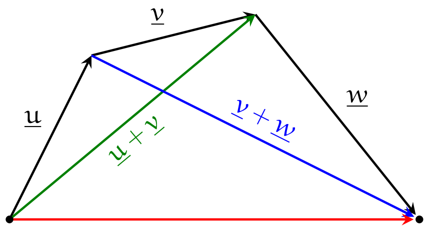


$$D - A = (C - A) + (D - C) = \underline{v} + \underline{u}$$

$$D - A = (B - A) + (D - B) = \underline{u} + \underline{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{v} + \underline{u} = \underline{u} + \underline{v}$$

Vale la proprietà associativa:



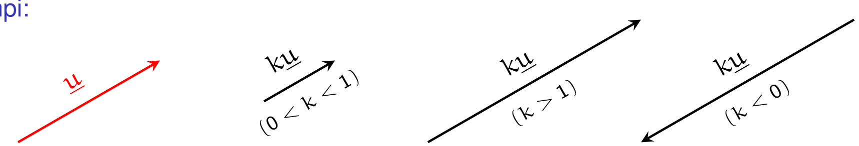
$$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$$

Il vettore libero nullo è elemento neutro della somma. Ogni vettore $\underline{u} = B - A$ ha un opposto dato da $-\underline{u} = A - B$.

Definizione (moltiplicazione per uno scalare)

In $\mathbb{V}_2$ (risp. $\mathbb{V}_3$) è definita una operazione esterna come segue. Se $\underline{u}$ è un vettore libero non nullo e $k \in \mathbb{R}$ è diverso da zero, allora $k\underline{u}$ è per definizione il vettore di modulo $|k|\,\|\underline{u}\|$, direzione uguale a quella di $\underline{u}$, e verso uguale ad $\underline{u}$ se $k > 0$ oppure opposto se $k < 0$. Se $k = 0$ o $\underline{u} = \underline{0}$ si pone $k\underline{u} = \underline{0}$.

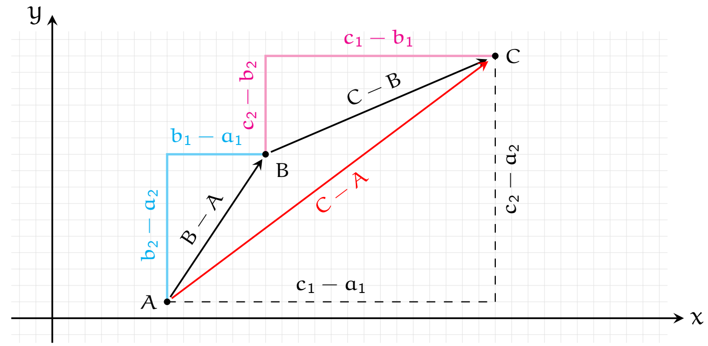
Esempi:



Operazioni fra vettori geometrici soddisfano proprietà analoghe ad operazioni fra n-uple.

Dai vettori geometrici alle n-uple...

Fissato un sistema di riferimento bidimensionale, possiamo trasformare punti del piano in coppie di numeri reali (ascissa e ordinata). Dati due punti A e B di coordinate (a_1, a_2) e (b_1, b_2), al vettore libero $B - A$ associamo la coppia $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Otteniamo in questo modo una corrispondenza biunivoca fra vettori liberi del piano e coppie di numeri reali che trasforma le operazioni di $\mathbb{V}_2$ in quelle di $\mathbb{R}^2$.



Non faremo troppa distinzione fra punti del piano della geometria Euclidea, vettori liberi e coppie di numeri reali, e scriveremo (con abuso di notazione): $B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

(Similmente trasformiamo punti e vettori liberi dello spazio tridimensionale in terne di numeri reali.)

Lezione 09: Spazi vettoriali

Esercizi C. Carrara:

- §1. Operazioni tra matrici e n-uple
- §3. Spazi e sottospazi vettoriali (saltare "gruppi")
- §4. La riduzione a gradini e i sistemi lineari
- §6. Determinante e inversa di una matrice

Spazi vettoriali

[Abate, §4.1]

Definizione

Sia K un campo. Un insieme non vuoto V è detto K-spazio vettoriale se in V sono definite una operazione interna di "somma":

$$V \times V \to V\,, \qquad (\underline{v}, \underline{v}') \mapsto \underline{v} + \underline{v}'\,,$$

ed una operazione esterna ad operatori in K di "prodotto per uno scalare":

$$K \times V \to V\,, \qquad (k, \underline{v}) \mapsto k\underline{v}\,,$$

soddisfacenti le seguenti proprietà: i) La somma è commutativa, associativa, possiede un elemento neutro $\underline{0}_V$, ed ogni elemento $\underline{v}$ ha un opposto $-\underline{v}$. ii) Il prodotto per uno scalare è associativo, 1_K è elemento neutro, e vale la proprietà distributiva. In formule:

i) $\forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$:

1. $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
2. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
3. $\underline{v} + \underline{0}_V = \underline{v}$
4. $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}_V$

ii) $\forall\, k, k' \in K$ e $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$:

5. $(k + k')\underline{v} = k\underline{v} + k'\underline{v}$
6. $k(\underline{v} + \underline{w}) = k\underline{v} + k\underline{w}$
7. $k(k'\underline{v}) = (kk')\underline{v}$
8. $1_K \cdot \underline{v} = \underline{v}$

Osservazioni.

Dato un K-spazio vettoriale V:

- Chiamiamo vettori gli elementi di V.
- L'elemento neutro rispetto alla somma è indicato con $\underline{0}_V$, o semplicemente con $\underline{0}$ quando questo non generi confusione, ed è detto vettore nullo.
- L'opposto di un vettore $\underline{v}$ (il simmetrico rispetto all'operazione di somma) è indicato con $-\underline{v}$. Scriveremo
  $$\underline{v} - \underline{v}' = \underline{v} + (-\underline{v}')$$
  per indicare la somma di un vettore $\underline{v}$ con l'opposto di un secondo vettore $\underline{v}'$.
- Ci limiteremo per semplicità a studiare il caso $K = \mathbb{R}$, ovvero gli spazi vettoriali reali.

Esempi di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali:

- l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple reali;
- l'insieme $\mathbb{R}^{m,n}$ delle matrici reali $m \times n$;
- l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{R}$;
- gli insiemi $\mathbb{V}_2$ e $\mathbb{V}_3$ dei vettori liberi della geometria Euclidea.

[Altri esempi: l'insieme $(\mathbb{F}_2)^n$ delle strighe di n bit è un $\mathbb{F}_2$-spazio vettoriale.]

Legge di semplificazione della somma

Sia V uno spazio vettoriale reale (da adesso in poi $K = \mathbb{R}$).

Proposizione (legge di semplificazione della somma)

Per ogni $\underline{v}, \underline{v}', \underline{v}'' \in V$ si ha

$$(i) \quad \underline{v} + \underline{v}' = \underline{v} + \underline{v}'' \qquad \Longleftrightarrow \qquad (ii) \quad \underline{v}' = \underline{v}''\,.$$

Dimostrazione. L'implicazione $(i) \Leftarrow (ii)$ è ovvia. Dimostriamo che $(i) \Rightarrow (ii)$.

Per definizione di spazio vettoriale ogni $\underline{v} \in V$ possiede un opposto $-\underline{v}$.

Da (i) segue che

$$-\underline{v} + (\underline{v} + \underline{v}') = -\underline{v} + (\underline{v} + \underline{v}'')$$

Usando l'associatività della somma e la definizione di opposto si ottiene:

$$\underline{0} + \underline{v}' = \underline{0} + \underline{v}''$$

ovvero $\underline{v}' = \underline{v}''$ (per definizione di elemento neutro). ■

Legge di annullamento del prodotto

Proposizione (legge di annullamento del prodotto)

$$k\underline{v} = \underline{0} \quad \iff \quad k = 0 \text{ o } \underline{v} = \underline{0}\,.$$

Dimostrazione. In tre parti:

1. $0\underline{v} = \underline{0}\ \forall\, \underline{v} \in V$

Dalla proprietà distributiva segue che:

$$0\underline{v} = (0+0)\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}\,.$$

Aggiungendo $\underline{0}$ (elemento neutro) al primo membro, si ottiene $0\underline{v} + \underline{0} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$.
Dalla legge di semplificazione della somma segue che $\underline{0} = 0\underline{v}$.

2. $k\underline{0} = \underline{0}\ \forall\, k \in \mathbb{R}$

Simile al punto 1, si fa uso dell'identità $k\underline{0} = k(\underline{0}+\underline{0}) = k\underline{0} + k\underline{0}$.

3. $\forall\, k \neq 0,\ k\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Per ogni $k \neq 0$ si ha: $\quad \underline{v} = 1\underline{v} = (k^{-1}k)\underline{v} = k^{-1}(k\underline{v})\,.$
Ne deduciamo che, se $k\underline{v} = \underline{0}$, allora: $\quad \underline{v} = k^{-1}(k\underline{v}) = k^{-1}\underline{0} \overset{\text{(punto 2)}}{=} \underline{0}$. ∎

Corollari

Osservazione

Se uno spazio vettoriale reale V ha un elemento $\underline{v}$ diverso da $\underline{0}$, allora ha infiniti elementi. Infatti:

$$k\underline{v} \in V\ \forall\, k \in \mathbb{R}$$

e

$$k\underline{v} = k'\underline{v} \iff (k-k')\underline{v} = \underline{0} \iff k - k' = 0 \iff k = k'$$

Esercizio

Sia V uno spazio vettoriale. Dimostrare che $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$ per ogni $\underline{v} \in V$.

Soluzione. Sia $\underline{w} := (-1)\underline{v}$. Per l'unicità dell'opposto, basta provare che $\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$.
Dalle proprietà 5 e 8 della definizione di spazio vettoriale, e dalla legge di annullamento del prodotto, segue la tesi:

$$\underline{v} + \underline{w} = 1\underline{v} + (-1)\underline{v} = (1-1)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$$

✓

Sottospazi vettoriali

[Abate, §4.1]

(a) Definizione

Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ di uno spazio vettoriale V è detto sottospazio vettoriale di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma e prodotto di V.

(b) Proposizione (Primo criterio di sottospazio)

Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ di uno spazio vettoriale V è un sottospazio se e solo se $\forall\, k \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \underline{w}, \underline{w}' \in W$ si ha

1. $\underline{w} + \underline{w}' \in W,$ (W è stabile rispetto alla somma)
2. $k\underline{w} \in W.$ (W è stabile rispetto alla moltiplicazione per uno scalare)

(c) Proposizione (Secondo criterio di sottospazio)

Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ di uno spazio vettoriale V è un sottospazio se e solo se

$$k\underline{w} + k'\underline{w}' \in W$$

per ogni $k, k' \in \mathbb{R}$ e $\underline{w}, \underline{w}' \in W$.

b) $\forall\, k \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \underline{w}, \underline{w}' \in W$ si ha

b1) $\underline{w} + \underline{w}' \in W$, b2) $k\underline{w} \in W$.

c) $\forall\, k, k' \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \underline{w}, \underline{w}' \in W$ si ha

$k\underline{w} + k'\underline{w}' \in W$.

Dimostrazione (in tre parti).

a) ⇒ c) è elementare. Per definizione di spazio vettoriale, per ogni $\underline{w}, \underline{w}' \in W$ e ogni $k, k' \in \mathbb{R}$ il risultato delle operazioni $k\underline{w}$ e $k'\underline{w}'$ deve essere ancora elemento di W.
Per lo stesso motivo, la somma di due elementi di W deve essere ancora elemento di W, quindi $k\underline{w} + k'\underline{w}' \in W$.

c) ⇒ b) Scegliendo $k = k' = 1$, da c) si ottiene b1); ponendo $k' = 0$ si ottiene b2).

b) ⇒ a) La somma ed il prodotto per uno scalare di V, per b1) e b2) rispettivamente, inducono una operazione interna ed una esterna di W.
Tutte le proprietà di spazio vettoriale, poichè valgono in V, valgono anche in W. Dobbiamo solo verificare che $\underline{0}_V \in W$.
Sostituendo $k = 0$ in b2), per la legge di annullamento del prodotto si ottiene

$$0\underline{w} = \underline{0}_V \in W\,.$$

∎

Osservazione

Uno spazio vettoriale V possiede sempre almeno due sottospazi: il primo è V stesso ($V \subseteq V$), il secondo è dato dal sottoinsieme $\{\underline{0}_V\}$.

Dimostrazione. Proviamo che $W = \{\underline{0}_V\}$ soddisfa il criterio c) di sottospazio. Chiaramente se $\underline{w}, \underline{w}' \in W$ allora $\underline{w} = \underline{w}' = \underline{0}_V$. Dalla legge di annullamento del prodotto segue che $k\underline{w} + k'\underline{w}' = \underline{0}_V \in W$, per ogni $k, k' \in \mathbb{R}$. ∎

Proposizione

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle soluzioni di un sistema di matrice completa $(A|B) \in \mathbb{R}^{m,n+1}$. Allora: S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n \iff$ il sistema è omogeneo.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Se S è un sottospazio, deve contenere $\underline{0}_{\mathbb{R}^n}$. Se il vettore nullo è soluzione, allora $B = A \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^{n,1}} = \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}}$ ed il sistema è omogeneo.

"$\Leftarrow$" Viceversa, sia $B = \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}}$ e siano $X, X' \in \mathbb{R}^{n,1}$ due soluzioni, ovvero $AX = \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}}$ e $AX' = \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}}$. Dalle proprietà del prodotto righe per colonne segue:

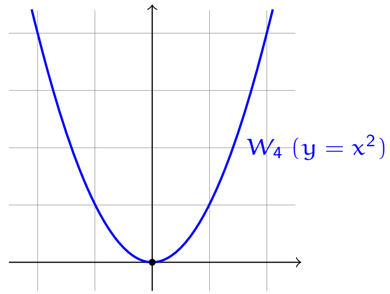
$$A(kX + k'X') = k(AX) + k'(AX') = k \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}} + k' \cdot \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}} = \underline{0}_{\mathbb{R}^{m,1}}$$

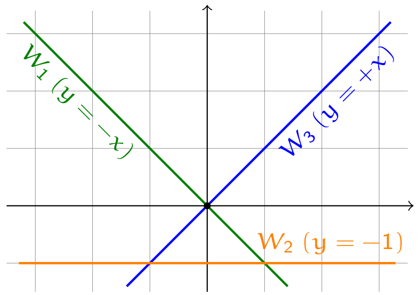
Quindi $kX + k'X' \in S\ \forall\, k, k' \in \mathbb{R}$, e il criterio c) di sottospazio è soddisfatto. ∎

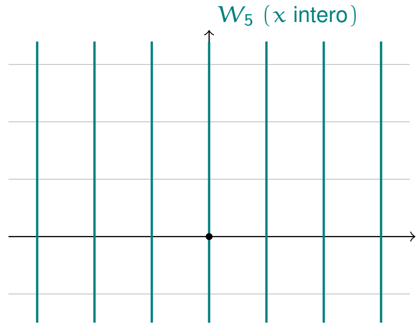
Esercizio

Dire quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$:

- $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\}$
- $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y + 1 = 0\}$
- $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - y = 0\}$
- $W_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y = 0\}$
- $W_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$







Sottospazi di $\mathbb{R}^2$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soluzione dell'equazione omogenea:

$$ax + by = 0$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Se $(a, b) \neq (0, 0)$, l'equazione descrive una retta passante per l'origine degli assi.

I sottospazi non banali di $\mathbb{R}^2$ (cioé diversi da $\{\underline{0}\}$ e $\mathbb{R}^2$) sono tutti di questo tipo:

rette passanti per l'origine

(lo dimostreremo più avanti).

I sottospazi non banali di $\mathbb{R}^3$ (diversi da $\{\underline{0}\}$ ed $\mathbb{R}^3$) sono

rette e piani passanti l'origine.

Esercizi

Esercizio

Stabilire quale dei seguenti insiemi è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, a_{12} = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \pi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, a_{12} \neq 0 \right\}, \qquad W_4 = W_3 \cup \{\underline{0}\}.$$

Domande

Le matrici $m \times n$ triangolari superiori formano un sottospazio di $\mathbb{R}^{m,n}$?

E quelle triangolari superiori complete?

E le matrici ridotte per righe?

Esercizio (da C. Carrara, 3.6)

Verificare che l'insieme $\mathbb{R}_n[x]$ dei polinomi di grado non superiore ad n è un sottospazio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$.

Soluzione. La somma di due polinomi di grado $\leqslant n$ è ancora un polinomio di grado $\leqslant n$, il prodotto di un polinomio di grado $\leqslant n$ per uno scalare è ancora un polinomio di grado $\leqslant n$. $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}[x]$ è stabile rispetto alle due operazioni, quindi è un sottospazio. ✓

Esercizio

In $\mathbb{R}^2$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} , \qquad W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} .$$

Si verifichi che $U \cup W$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Poichè $(0,1) \in U \subseteq U \cup W$ e $(1,0) \in W \subseteq U \cup W$, se $U \cup W$ fosse un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ dovrebbe contenere il vettore

$$(0,1) + (1,0) = (1,1)$$

Ma $(1,1)$ non è contenuto né in U né in W, quindi $(1,1) \notin U \cup W$ e l'insieme $U \cup W$ non è un sottospazio (non è stabile rispetto alla somma). ✓

Operazioni su sottospazi

Siano W_1 e W_2 sottospazi di V. Usando i criteri di sottospazio si verifica che:

1. $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V.
2. $W_1 + W_2 := \{\underline{v} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \ : \ \underline{w}_1 \in W_1, \underline{w}_2 \in W_2\}$ è un sottospazio di V.

$W_1 + W_2$ è detto somma di W_1 e W_2. L'unione $W_1 \cup W_2$ non è necessariamente uno spazio vettoriale. Il più piccolo sottospazio di V che contiene $W_1 \cup W_2$ è $W_1 + W_2$.

Esempio

Siano $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

W_1 e W_2 sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$ (asse orizzontale ed asse verticale).

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$ è l'origine degli assi. Dall'identità:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$

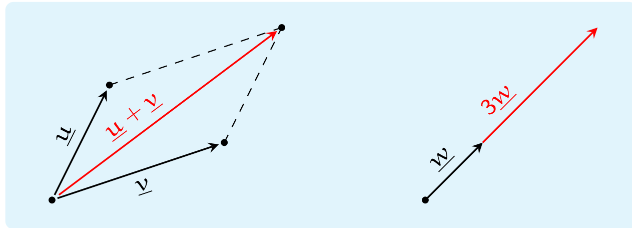
segue che ogni vettore $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è la somma di un vettore $(x,0) \in W_1$ ed un vettore $(0,y) \in W_2$. Quindi

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2 .$$

Lezione 10

Riassunto lezione 9

- Uno spazio vettoriale (su un campo $\mathbb{K}$) è un insieme $V \neq \varnothing$ dotato di due operazioni, una interna ($+$) e una esterna ad operatori in $\mathbb{K}$ ($\cdot$), soddisfacenti otto condizioni...



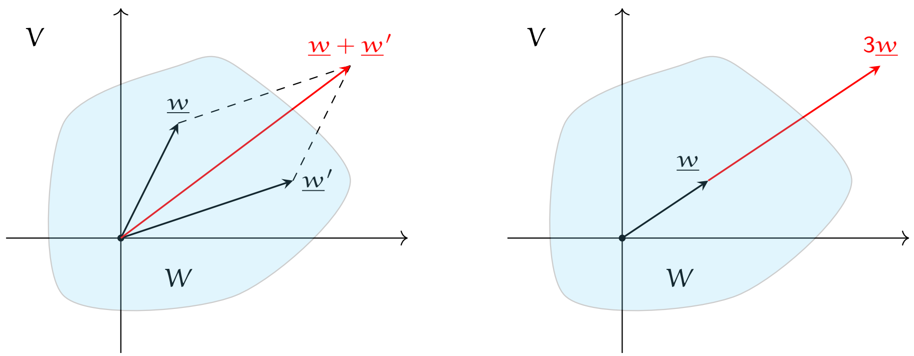
- (Per semplicità prendiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.) Un sottoinsieme $W \subseteq V$ non vuoto è un sottospazio vettoriale se e solo se è stabile rispetto alla somma di V:

b1) $\underline{w} + \underline{w}' \in W \quad \forall\, \underline{w}, \underline{w}' \in W$

ed è stabile rispetto alla moltiplicazione per uno scalare:

b2) $k\underline{w} \in W \quad \forall\, \underline{w} \in W$ e $\forall\, k \in \mathbb{R}$.

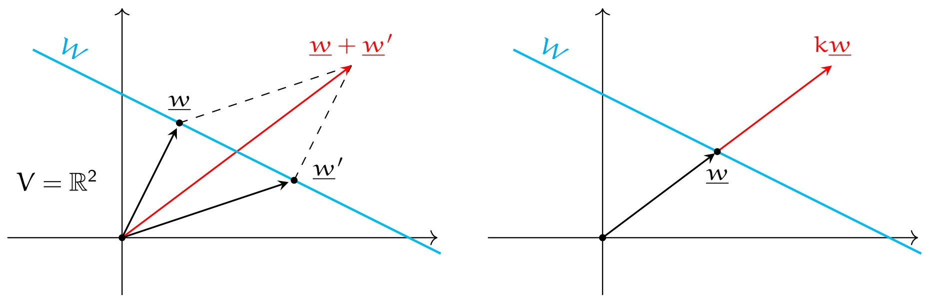
Esempio 1 (area racchiusa da una curva)



W non è stabile rispetto alla somma. W non è stabile rispetto al prodotto.

$\Rightarrow W$ ***non*** è un sottospazio vettoriale di V.

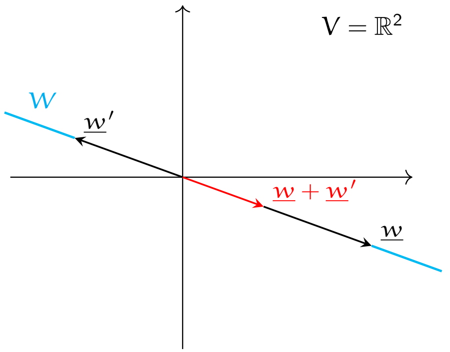
Esempio 2 (retta non passante per l'origine)

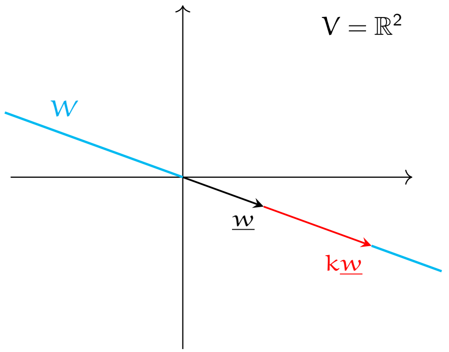


W non è stabile rispetto alla somma. W non è stabile rispetto al prodotto.

$\Rightarrow W$ ***non*** è un sottospazio vettoriale di V.

Esempio 3 (retta passante per l'origine)





W è stabile rispetto alla somma. W è stabile rispetto al prodotto.

$\Rightarrow$ W è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio

In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 4z\right\}, \qquad W = \left\{(a, 2b, 0) \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si verifichi che $U \cup W$ <u>non</u> è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Consideriamo i vettori:

$$\underline{u} = (2, 2, 1) \in U \qquad \underline{w} = (-2, -2, 0) \in W$$

Il vettore

$$\underline{u} + \underline{w} = (0, 0, 1)$$

1. non appartiene a U, poiché $x + y = 0 \neq 4z = 4$
2. non appartiene a W, poiché la terza componente è diversa da zero.

Quindi

$$\underline{u} + \underline{w} \notin U \cup W$$

Questo prova che $U \cup W$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (non è stabile rispetto alla somma). ✓

- Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno stesso spazio vettoriale V.

  Chiamiamo <u>somma</u> di W_1 e W_2 l'insieme

  $$W_1 + W_2 := \left\{\underline{v} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \ : \ \underline{w}_1 \in W_1, \underline{w}_2 \in W_2\right\}.$$

  Usando i criteri di sottospazio si verifica che:

  1. l'intersezione $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio di V,
  2. la somma $W_1 + W_2$ è un sottospazio di V.

  L'unione $W_1 \cup W_2$ non è necessariamente uno spazio vettoriale.

  Il più piccolo sottospazio di V che contiene $W_1 \cup W_2$ è $W_1 + W_2$.

- Ricordiamo che $W \subseteq V$ è un sottospazio se e solo se (2° criterio di sottospazio):

  c) $k\underline{w} + k'\underline{w}' \in W$ per ogni $k, k' \in \mathbb{R}$ e $\underline{w}, \underline{w}' \in W$.

  L'espressione $\boxed{k\underline{w} + k'\underline{w}'}$ è detta combinazione lineare di $\underline{w}$ e $\underline{w}'$.

Combinazioni lineari

[Abate, §4.2]

Sia V uno spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ dei vettori di V. Diremo che un vettore $\underline{w} \in V$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ se esistono $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n .$$

Esempi

- In $\mathbb{R}^2$, la coppia $(2, 5)$ è combinazione lineare dei vettori $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Infatti:

  $$(2, 5) = 3(0, 1) + 2(1, 1) .$$

- Lo stesso vettore $(2, 5)$ è anche combinazione lineare di $(1, 1)$ e $(1, -2)$. Infatti:

  $$(2, 5) = 3(1, 1) - (1, -2) .$$

- Il vettore $\underline{w} = (2, 5)$, <u>non</u> è combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1 = (3, 0)$ e $\underline{v}_2 = (5, 0)$. Infatti, $\forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$:

  $$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 = (3a_1 + 5a_2, 0) \neq \underline{w} .$$

  (La seconda componente è nulla.)

Esempi

- Siano $A, B, C \in \mathbb{R}^{2,3}$ le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 4 & 8 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

  Allora A è combinazione lineare di B e C, infatti: $A = \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C$.

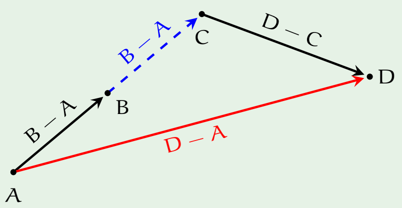
- Siano $P_1(x), P_2(x), P_3(x) \in \mathbb{R}[x]$ i polinomi:

$$P_1(x) = x^2 + 1 \qquad P_2(x) = x^2 + 2x + 1 \qquad P_3(x) = x^2 + 3x + 1$$

  Allora P_1 è combinazione lineare di P_2 e P_3, infatti: $P_1(x) = 3P_2(x) - 2P_3(x)$.

- Nella figura a fianco, il vettore $D - A$ è combinazione lineare di $B - A$ e $C - D$:

$$D - A = 2(B - A) + (C - D)$$



Sia $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ un insieme di vettori di V. L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di I verrà indicato con il simbolo $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ oppure $\mathcal{L}(I)$. Quindi:

$$\mathcal{L}(I) = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) := \{\underline{w} \in V : \underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \ldots + a_n\underline{v}_n \text{ , con } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} .$$

Esercizio

Dire se il vettore $\underline{w} = (1, 2, 3)$ di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 1, 1) \qquad \underline{v}_2 = (3, 2, 1)$$

(= "Dire se $\underline{w} \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$." = "Dire se esistono $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$.")

Esercizio

Dire se

1. $(3, 2) \in \mathcal{L}\big((0, 0), (2, 2)\big)$
2. $(3, 2) \in \mathcal{L}\big((1, -1), (2, 2)\big)$
3. $(0, 0) \in \mathcal{L}\big((1, -1), (2, 2)\big)$
4. $(3, 2) \in \mathcal{L}\big((1, 1), (2, 2)\big)$

Esempi

- Ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere nella forma

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$$

  Da cui: $\mathcal{L}\big((1, 0), (0, 1)\big) = \mathbb{R}^2$.

- Ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si può scrivere nella forma

$$(x, y) = \frac{x + y}{2} \cdot (1, 1) + \frac{x - y}{2} \cdot (1, -1)$$

  Da cui: $\mathcal{L}\big((1, 1), (1, -1)\big) = \mathbb{R}^2$.

- In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici

$$E_{11} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad E_{12} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad E_{21} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad E_{22} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

  Mostrare che $\mathcal{L}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = M_2(\mathbb{R})$.

Proposizione

Sia $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\} \subset V$. L'insieme $\mathcal{L}(I)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Usiamo il criterio c) di sottospazio. Siano:

$$\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n \qquad \underline{w}' = a_1'\underline{v}_1 + a_2'\underline{v}_2 + \ldots + a_n'\underline{v}_n$$

due vettori arbitrari di $\mathcal{L}(I)$, e siano $k, k' \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{array}{ccccccccc} k\underline{w} & = & (ka_1)\underline{v}_1 & + & (ka_2)\underline{v}_2 & + \ldots + & (ka_n)\underline{v}_n \\ k'\underline{w}' & = & (k'a_1')\underline{v}_1 & + & (k'a_2')\underline{v}_2 & + \ldots + & (k'a_n')\underline{v}_n \\ \hline \end{array}$$

$$k\underline{w} + k'\underline{w}' = (ka_1 + k'a_1')\underline{v}_1 + (ka_2 + k'a_2')\underline{v}_2 + \ldots + (ka_n + k'a_n')\underline{v}_n$$

Quindi

$$k\underline{w} + k'\underline{w}' \in \mathcal{L}(I)$$

essendo combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. ∎

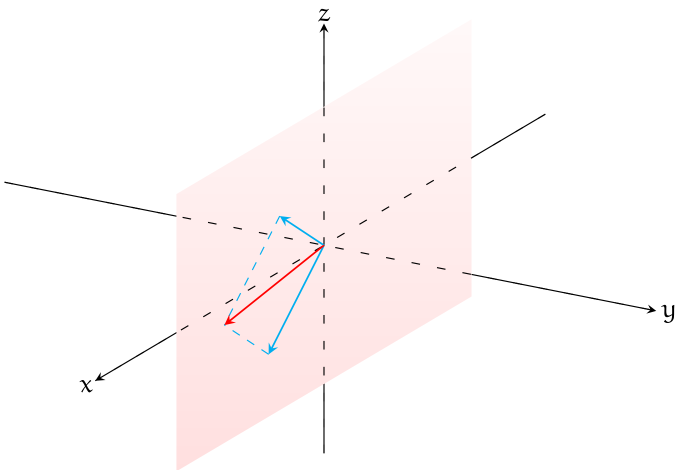
Nota: $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ è detto spazio generato dai vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$;
i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono detti generatori di $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$.

Esercizio. Siano $\underline{v}_1 = (1, 0, -1)$ e $\underline{v}_2 = (2, 0, 0)$. Provare che $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \subsetneq \mathbb{R}^3$.
(Cioè: esiste $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{w} \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$).

Soluzione. Qualunque combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ ha la seconda componente nulla:

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 = (a_1 + 2a_2, 0, -a_1) \qquad \forall\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Vettori di $\mathbb{R}^3$ con seconda componente diversa da zero non appartengono a $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ (non sono combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$). Ad esempio, $\underline{w} := (0, 1, 0) \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. ✓



Esempio

Sia $V = \mathbb{R}[x]$ e sia $I = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ l'insieme dei monomi di grado $\leqslant n$ in x. Allora:

$$\mathcal{L}(I) = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n \,:\, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\right\}$$

è l'insieme di tutti i polinomi in x di grado $\leqslant n$, $\mathcal{L}(I) \equiv \mathbb{R}_n[x]$.

Uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se ammette un numero finito di generatori, ossia se esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ tali che

$$\mathcal{L}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) = V\,.$$

Esempio: $\mathbb{R}^2$ e $M_2(\mathbb{R})$ sono finitamente generati (vedere esempio slide nr. 10).

Teorema

Lo spazio $\mathbb{R}[x]$ non è finitamente generato.

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che esista un insieme finito di generatori $I = \{P_1(x), P_2(x) \dots, P_n(x)\}$, e sia d il grado del polinomio di grado massimo.
Allora $x^{d+1} \notin \mathcal{L}(I)$ ed $\mathcal{L}(I)$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}[x]$, contraddicendo l'ipotesi. ∎

Lezione 11

(Esercizi: C. Carrara, §5)

Riassunto / Insiemi liberi e legati

[Abate, §4.3]

Dato un insieme di vettori $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V:

- Un vettore $\underline{w} \in V$ si dice combinazione lineare dei vettori dell'insieme I se:

$$\exists\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ tali che } a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n = \underline{w}.$$

- L'insieme I si dice legato se:

$$\exists\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ non tutti nulli tali che } a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n = \underline{0}.$$

  Un insieme di vettori che non è legato si dice libero.

- In altre parole, I è libero se l'unico modo per scrivere $\underline{0}$ come combinazione lineare dei vettori di I è con coefficienti tutti nulli.

Sinonimi: insieme legato $\iff$ vettori linearmente dipendenti

insieme libero $\iff$ vettori linearmente indipendenti

Esempio

In $\mathbb{R}^3$, siano

$$\underline{v}_1 = (1, -4, 6)\ , \qquad \underline{v}_2 = (9, -1, -1)\ , \qquad \underline{v}_3 = (3, 2, -4)\ .$$

L'insieme $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è legato, infatti $3\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + 5\underline{v}_3 = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$.

Esempio

In $\mathbb{R}^{2,3}$, consideriamo matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 \\ 4 & 8 & -5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

L'insieme $I = \{A, B, C\}$ è legato, in quanto: $2A - 3B + C = \underline{0}_{\mathbb{R}^{2,3}}$.

Esempio

In $\mathbb{R}[x]$, consideriamo i polinomi:

$$P_1(x) = x^3 + 7x^2 + 9x + 3\ , \qquad P_2(x) = 4x^3 + x - 2\ , \qquad P_3(x) = 6x^3 - 2x^2 - x - 4\ .$$

L'insieme $I = \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ è legato, in quanto: $2P_1(x) - 11P_2(x) + 7P_3(x) = 0$.

Osservazioni

- se $\underline{0} \in I$, allora I è legato (infatti $a_1\underline{0} + 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + \dots + 0\underline{v}_n = \underline{0}$ anche se $a_1 \neq 0$);
- se I è libero e $I' \subseteq I$, allora I' è libero;
- se I è legato e $I' \supseteq I$, allora I' è legato.

Iniziamo a studiare i casi più semplici. Sia $I = \{\underline{v}_1\}$ un insieme formato da un solo vettore $\underline{v}_1 \in V$. Se $\underline{v}_1 = \underline{0}$ l'insieme è legato. Se $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, per la legge di annullamento del prodotto $a_1\underline{v}_1 = \underline{0}$ implica $a_1 = 0$, quindi I è libero.

$I = \{\underline{v}_1\}$ è legato se e solo se $\underline{v}_1 = \underline{0}$.

Definizione/Osservazione.

Due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ si dicono proporzionali se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{v} = k\underline{w}$ oppure $\underline{w} = k\underline{v}$. Il vettore nullo è proporzionale ad ogni altro vettore ($\underline{0} = 0\underline{v}\ \forall\, \underline{v} \in V$).

Sia $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ un insieme di due vettori di V. Allora:

$I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è legato $\iff$ i due vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono proporzionali.

Questo è un caso particolare della proposizione seguente...

Proposizione

Sia $n \geqslant 2$. Un insieme $I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è libero se e solo se nessun suo elemento si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti vettori di I.

Dimostrazione. Se I è legato, allora esistono $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_n\underline{v}_n = \underline{0}$. Da questo ricaviamo, se $a_1 \neq 0$:

$$\underline{v}_1 = -\frac{1}{a_1}\big(a_2\underline{v}_2 + \dots + a_n\underline{v}_n\big) .$$

Più in generale se $a_i \neq 0$, $\underline{v}_i$ si può scrivere come combinazione dei rimanenti vettori di I. Siccome almeno un coefficiente è non nullo per ipotesi, questo prova "$\Leftarrow$".

Viceversa, immaginiamo per ipotesi che un vettore di I si possa scrivere come combinazione lineare dei rimanenti, sia esso ad esempio $\underline{v}_1$:

$$\underline{v}_1 = b_2\underline{v}_2 + b_3\underline{v}_3 + \dots + b_n\underline{v}_n , \qquad \text{con } b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R} .$$

Allora posto $a_1 = 1$ e $a_i = -b_i \ \forall\, i \geqslant 2$, si ha

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_n\underline{v}_n = \underline{0} .$$

Poichè almeno un coefficiente è non nullo ($a_1 = 1$), l'insieme I è legato. ∎

Esercizio

Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti:

$$\underline{v}_1 = (1, -5, -2) \qquad \underline{v}_2 = (3, 5, 4) \qquad \underline{v}_3 = (6, 0, 3)$$

In caso negativo, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio

Studiare la dipendenza/indipendenza lineare dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$\underline{v}_1 = (2, 1) , \qquad \underline{v}_2 = (1, -1) , \qquad \underline{v}_3 = (4, 2) .$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- $\underline{v}_1$ come combinazione lineare di $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$;
- $\underline{v}_2$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_3$;
- $\underline{v}_3$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

Teorema

$I = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è libero $\iff$ $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e, $\forall\, 2 \leqslant i \leqslant n$, si ha $\underline{v}_i \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{i-1})$.

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" segue dalla proposizione precedente. Dimostriamo "$\Leftarrow$". Per assurdo, immaginiamo si possano scegliere $a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_n\underline{v}_n = \underline{0} . \tag{$\star$}$$

Se $a_n \neq 0$, possiamo scrivere $\underline{v}_n$ come combinazione lineare dei primi $n-1$ vettori, contraddicendo l'ipotesi. Deve essere quindi $a_n = 0$, e da ($\star$) si ricava

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_{n-1}\underline{v}_{n-1} = \underline{0} .$$

Ripetendo lo stesso ragionamento, siccome $\underline{v}_{n-1}$ non può essere combinazione lineare primi $n-2$ vettori, deve essere necessariamente $a_{n-1} = 0$, e:

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_{n-2}\underline{v}_{n-2} = \underline{0} .$$

Iterando il ragionamento, si dimostra che $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ e che $a_1\underline{v}_1 = \underline{0}$. Siccome per ipotesi $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, per la legge di annullamento del prodotto anche $a_1 = 0$. L'insieme I è quindi libero. ∎

Basi e componenti

Definizione

Una base $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ di V è un insieme libero e ordinato di generatori.

Esempio

Per ogni $1 \leqslant i \leqslant n$, sia

$$\underline{e}_i = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1 \text{ volte}}, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-i \text{ volte}})$$

la n-upla con i-esima componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a zero. Per ogni $\underline{v} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vale l'identità

$$\underline{v} = a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + \dots + a_n\underline{e}_n . \tag{$\star$}$$

Questo prova che i vettori $\underline{e}_i$ sono generatori di $\mathbb{R}^n$. Inoltre la combinazione lineare ($\star$) è nulla solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, quindi i vettori formano una base

$$\mathcal{B} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$$

detta base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione: lo spazio $V = \{\underline{0}\}$ che ha come unico elemento il vettore nullo non possiede nessuna base (ogni sottoinsieme non vuoto di V è legato).

Esempio

Per ogni $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, sia

$$E_{ij} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

la matrice che ha 1 in posizione (i,j) e tutti gli altri elementi uguali a zero. Per ogni matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ vale l'identità

$$A = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij} E_{ij} \; . \qquad (\star\star)$$

Questo prova che le matrici E_{ij} sono generatori di $\mathbb{R}^{m,n}$. Inoltre la combinazione lineare $(\star\star)$ è nulla solo se $a_{ij} = 0$ per ogni i, j. Quindi le matrici E_{ij} formano una base

$$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn})$$

detta base canonica di $\mathbb{R}^{m,n}$.

Esempio

L'insieme

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$$

è una base per lo spazio $\mathbb{R}_n[x]$.

Esempio

Siano $\underline{v}_1 = (1,1)$, $\underline{v}_2 = (1,0)$ e $\underline{v}_3 = (0,1)$. L'insieme $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ contiene la base canonica, quindi genera $\mathbb{R}^2$. Non è però una base, in quanto $\underline{v}_1 = \underline{v}_2 + \underline{v}_3$ ed i vettori non sono linearmente indipendenti.

Esempio

Abbiamo visto che i vettori $\underline{v}_1 = (1,1)$ e $\underline{v}_2 = (1,-1)$ generano $\mathbb{R}^2$. Siccome nessuno dei due è proporzionale all'altro, l'insieme

$$\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

è una base di $\mathbb{R}^2$.

Osservazione

Per costruzione, se $I = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è libero, allora è una base dello spazio $\mathcal{L}(I)$.

Basi e sistemi di riferimento

[Abate, §2.2]

Si dice versore di una retta orientata r il vettore libero di modulo 1 avente la stessa direzione e lo stesso verso di r.

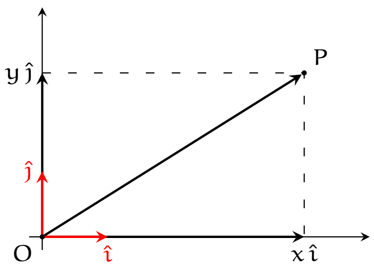
Nel piano, scegliamo un sistema di riferimento e indichiamo con $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ i versori degli assi, che rappresentiamo applicati nell'origine.

Ogni vettore libero $P - O$ si può scrivere nella forma

$$P - O = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

dove (x, y) sono le coordinate di P.
L'insieme

$$\mathcal{B} = (\hat{\imath}, \hat{\jmath})$$



è libero ($P - O = \underline{0} \iff x = y = 0$), quindi è una base di $\mathbb{V}_2$.

Nello spazio tridimensionale, i tre versori degli assi $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ formano una base di $\mathbb{V}_3$.

Teorema (Caratterizzazione di una base)

$\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è una base di V se e solo se ogni $\underline{w} \in V$ si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare

$$\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n \qquad (\dagger)$$

dei vettori di $\mathcal{B}$.

Definizione/Osservazione

Il coefficiente a_i in $(\dagger)$ si dice componente i-esima di $\underline{w}$ nella base $\mathcal{B}$.
Fissata una base ogni vettore è univocamente determinato dalle sue componenti.

Esempio

Siano

$$\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n \, , \qquad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n} \, .$$

Allora w_i è la è la i-esima componente di $\underline{w}$ nella base canonica di $\mathbb{R}^n$, mentre a_{ij} sono le componenti di A nella base canonica di $\mathbb{R}^{m,n}$.

Se $P - O \in \mathbb{V}_2$ è un vettore libero, le sue componenti nella base $\mathcal{B} = (\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ sono le coordinate del punto P nel sistema di riferimento corrispondente.

Dimostrazione del Teorema.

"$\Rightarrow$" Sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ una base di V. Se

$$\begin{aligned} \underline{w} &= a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n \\ &= a_1'\underline{v}_1 + a_2'\underline{v}_2 + \ldots + a_n'\underline{v}_n \ , \end{aligned}$$

allora

$$(a_1 - a_1')\underline{v}_1 + (a_2 - a_2')\underline{v}_2 + \ldots + (a_n - a_n')\underline{v}_n = \underline{w} - \underline{w} = \underline{0} \ .$$

Per definizione di base, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, e quindi deve essere $a_1 - a_1' = a_2 - a_2' = \ldots = a_n - a_n' = 0$. Se ne deduce che $\underline{w}$ si può scrivere in un unico modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$.

"$\Leftarrow$" Supponiamo che ogni $\underline{v} \in V$ si possa scrivere in uno e un solo modo come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Allora $\mathcal{B}$ genera V. Inoltre

$$b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \ldots + b_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

se e solo se $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, altrimenti si avrebbero due modi differenti di scrivere $\underline{0}$ come combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$, contraddicendo l'ipotesi di partenza. Se ne deduce che $\mathcal{B}$ è libero, e quindi una base. ∎

Esercizio

In $\mathbb{R}^2$, detti

$$\underline{v}_1 = (1, 1) \ , \qquad \underline{v}_2 = (1, -1) \ ,$$

determinare le componenti del vettore $\underline{u} = (2, 1)$ nella base $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2)$.

Soluzione. Per definizione le componenti $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ del vettore $\underline{u}$ nella base $\mathcal{B}$ si ottengono imponendo l'uguaglianza

$$\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$$

ovvero scrivendo i vettori in colonna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene in questo modo un sistema di due equazioni nelle incognite a_1, a_2,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 2 \\ a_1 - a_2 = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è unica e data da

$$a_1 = \frac{3}{2} \ , \qquad a_2 = \frac{1}{2} \ .$$

✓

Lezione 12

Sommario

- Lemma di Steiniz; dimensione di uno spazio vettoriale.
- Per V finitamente generato, vogliamo provare che:
  - Ogni insieme di generatori non tutti nulli di V contiene una base. (Metodo degli scarti successivi.)
  - Ogni insieme libero di vettori di V è contenuto in una base. (Metodo del completamento ad una base.)
  - Ogni sottospazio $W \subseteq V$ è finitamente generato.
- Determinare una base con la riduzione per righe (solo per $V = \mathbb{R}^n$).

Lemma di Steinitz

Se $A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V e $B = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ un insieme libero, allora $k \leqslant n$.

Dimostrazione (per assurdo). Supponiamo $k > n$. Dato che A è un insieme di generatori di V, $\underline{w}_1$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori di A:

$$\underline{w}_1 = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \dots + a_n\underline{v}_n$$

I coefficienti a_i non possono essere tutti nulli, poichè B è libero e quindi $\underline{w}_1 \neq \underline{0}$. A meno di riordinare i vettori, possiamo supporre $a_1 \neq 0$. Allora

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{a_1}(\underline{w}_1 - a_2\underline{v}_2 - \dots - a_n\underline{v}_n) .$$

Pertanto anche $A_1 := \{\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di V. Possiamo scrivere $\underline{w}_2$ come combinazione lineare dei vettori di A_1:

$$\underline{w}_2 = b_1\underline{w}_1 + b_2\underline{v}_2 + b_3\underline{v}_3 + \dots + b_n\underline{v}_n$$

ed i coefficienti $b_2, \dots, b_n$ non possono essere tutti zero, perché altrimenti si avrebbe $\underline{w}_2 = b_1\underline{w}_1$, contraddicendo l'ipotesi che B è un insieme libero.

... continua.

Lemma di Steinitz

Se $A = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un insieme di generatori di uno spazio vettoriale V e $B = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ un insieme libero, allora $k \leqslant n$.

Dimostrazione (2a parte). Senza perdere generalità, supponiamo $b_2 \neq 0$. Allora

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{b_2}(\underline{w}_2 - b_1\underline{w}_1 - b_3\underline{v}_3 - \dots - b_n\underline{v}_n) .$$

Pertanto anche $A_2 := \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di generatori di V.

Iterando il ragionamento, si prova che per ogni $1 \leqslant i \leqslant n$ l'insieme

$$A_i := \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_i, \underline{v}_{i+1}, \underline{v}_{i+2}, \dots, \underline{v}_n\}$$

è un insieme di generatori di V.

Siccome $A_n := \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n\}$ è un insieme di generatori di V, i restanti vettori $\underline{w}_{n+1}, \dots \underline{w}_k$ di B si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$, contraddicendo l'ipotesi che B sia un insieme libero.

Deve essere quindi $k \leqslant n$. ■

Teorema (equipotenza delle basi)

Se $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k)$ sono due basi di uno stesso spazio vettoriale V, allora $k = n$.

Dimostrazione. Per ipotesi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono basi, e quindi insiemi liberi di generatori.

Siccome $\mathcal{B}'$ è libero e $\mathcal{B}$ genera V dal lemma di Steinitz segue che $k \leqslant n$.

Siccome $\mathcal{B}$ è libero e $\mathcal{B}'$ genera V dal lemma di Steinitz segue che $n \leqslant k$.

Quindi $k = n$. ■

Definizione (dimensione di uno spazio vettoriale)

Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi; tale numero è detto dimensione di V ed indicato con "$\dim(V)$". Per convenzione $\dim(\{\underline{0}\}) := 0$.

Teorema

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n \qquad \dim(\mathbb{R}^{m,n}) = m \cdot n \qquad \dim(\mathbb{V}_2) = 2 \qquad \dim(\mathbb{V}_3) = 3$$

Dimostrazione. Contare gli elementi delle basi canoniche (Lezione 11). ■

Metodo degli scarti successivi

Osservazione: se

$$\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_k\underline{v}_k$$

allora gli insiemi $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w}\}$ generano lo stesso spazio vettoriale:

$$\mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{w})$$

Infatti ogni combinazione lineare

$$b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \ldots + b_k\underline{v}_k + b_{k+1}\underline{w}$$
$$= (b_1 + b_{k+1}a_1)\underline{v}_1 + (b_2 + b_{k+1}a_2)\underline{v}_2 + \ldots + (b_k + b_{k+1}a_k)\underline{v}_k$$

si può riscrivere in funzione dei soli vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$.

Teorema

Ogni insieme di generatori non tutti nulli di V contiene una base.

La dimostrazione del teorema è costruttiva e fornisce un metodo concreto per costruire una base a partire da un insieme di generatori, detto metodo degli scarti successivi.

Dimostrazione. A partire da un insieme

$$I = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k)$$

di generatori (non tutti $\underline{0}$) di uno spazio vettoriale V è possibile "estrarre" una base $\mathcal{B} \subseteq I$.

Sia I_1 l'insieme ottenuto da I rimuovendo eventualmente il vettore nullo.

Se $\underline{u}_2 \in \mathcal{L}(\underline{u}_1)$ chiamiamo $I_2 = I_1 \smallsetminus \{\underline{u}_2\}$ ("scartiamo" $\underline{u}_2$), altrimenti $I_2 = I_1$ (teniamo $\underline{u}_2$).

Se $\underline{u}_3 \in \mathcal{L}(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ chiamiamo $I_3 = I_2 \smallsetminus \{\underline{u}_3\}$, altrimenti $I_3 = I_2$.

Iterando il procedimento (controllando tutti i vettori dell'insieme I fino all'ultimo) si costruisce una successione

$$I \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_h$$

dove $h \leqslant k$ è il numero di vettori non nulli di I, $I_i = I_{i-1} \smallsetminus \{\underline{u}_i\}$ se $\underline{u}_i \in \mathcal{L}(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{i-1})$ e $I_i = I_{i-1}$ in caso contrario. Per l'osservazione nella slide precedente, si ha

$$V = \mathcal{L}(I) = \mathcal{L}(I_1) = \mathcal{L}(I_2) = \ldots = \mathcal{L}(I_h) .$$

I_h genera V ed è libero (nessun vettore è combinazione lineare di quelli che lo precedono nell'elenco), quindi è una base di V. ■

Esercizio

Dall'insieme

$$I = \Big(\underline{v}_1 = (0,0,0), \underline{v}_2 = (0,1,1), \underline{v}_3 = (0,3,3), \underline{v}_4 = (1,0,3), \underline{v}_5 = (1,-3,0)\Big) .$$

estrarre una base del sottospazio $W := \mathcal{L}(I) \subseteq \mathbb{R}^3$. Determinare la dimensione di W.

Metodo del completamento ad una base

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ una base di uno spazio vettoriale V e $I = \{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k\}$ un insieme libero. Applicando il metodo degli scarti successivi all'insieme di generatori

$$I' = (\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$$

i primi k vettori non vengono scartati, perché linearmente indipendenti per ipotesi. Come risultato, si ottiene una nuova base $\mathcal{B}'$ contenente tutti i vettori dell'insieme I.

Esercizio. Completare ad una base di $\mathbb{R}^3$ l'insieme: $\quad I = \big(\,\underline{u}_1 = (1,1,1)\,,\, \underline{u}_2 = (0,1,1)\,\big)$

Osservazioni su basi e dimensione

Con il metodo degli scarti successivi possiamo trovare una base di qualunque spazio $V \neq \{\underline{0}\}$ finitamente generato. Quindi:

$$V \neq \{\underline{0}\} \text{ è finitamente generato} \iff \text{esiste una base di } V.$$

Proprietà della dimensione. Se $\dim(V) = n$:

- ogni insieme di generatori di V ha almeno n elementi; (Lemma di Steinitz)
- ogni insieme libero di V ha al più n elementi; (Lemma di Steinitz)
- ogni insieme I di n generatori è una base di V;
  (Esiste una base $\mathcal{B} \subseteq I$. Ma $\mathcal{B}$ ed I hanno lo stesso numero di elementi, quindi $\mathcal{B} = I$.)
- ogni insieme libero I con n elementi è una base di V.
  (Esiste una base $\mathcal{B} \supseteq I$. Ma $\mathcal{B}$ ed I hanno lo stesso numero di elementi, quindi $\mathcal{B} = I$.)

In particolare, per sapere se un insieme libero è una base basta contarne gli elementi.

Teorema (dimensione di un sottospazio)

Sia V uno spazio finitamente generato e $W \subseteq V$ un sottospazio. Allora:

i) W è finitamente generato,
ii) $\dim(W) \leqslant \dim(V)$,
iii) $\dim(W) = \dim(V) \iff W = V$.

Dimostrazione. Se $W = \{\underline{0}\}$ la dimostrazione è banale (ed è lasciata come esercizio). Assumiamo che W possieda almeno un vettore non nullo $\underline{v}_1$ e chiamiamo $n := \dim V$.

i) Se $\{\underline{v}_1\}$ genera W la dimostrazione è conclusa. In caso contrario possiamo trovare un vettore $\underline{v}_2 \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1)$. Se $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ genera W la dimostrazione è conclusa. In caso contrario possiamo trovare un vettore $\underline{v}_3 \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. Andiamo avanti aggiungendo vettori finché non troviamo un insieme $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ di generatori. Notiamo che il procedimento si deve arrestare dopo un numero finito di passi, perché per costruzione ciascun insieme $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ è un insieme libero di V ($\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e nessun vettore è combinazione di quelli che lo precedono nell'elenco) e quindi non può avere più di n elementi (per il Lemma di Steiniz).

ii) Sia $\mathcal{B}$ una base di W, e $k := \dim W$ il numero di elementi di $\mathcal{B}$. Siccome $\mathcal{B}$ è un insieme libero di V, per il Lemma di Steiniz $k \leqslant n$.

iii) ("$\Leftarrow$" è ovvia. Dimostriamo "$\Rightarrow$".) $\mathcal{B}$, insieme libero di V, è contenuto in una base $\mathcal{B}'$ di V. Se $k = n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quindi $W = \mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}') = V$. ∎

Esercizio

Dati $(a, b) \neq (0, 0)$, si consideri il sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax + by = 0 \right\} .$$

Quale è la dimensione di W?

Suggerimento: si può verificare che $W = \mathcal{L}\big((b, -a)\big)$. Quindi $\dim(W) = 1$.

Esercizio

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 1. Elencare tutti i sottospazi di V.

Suggerimento: $W \subseteq V$ è un sottospazio se e solo se $W = V$ oppure $W = \{\underline{0}_V\}$.

Esercizio

Sia V uno spazio di dimensione 2. i) Elencare tutti i sottospazi di V. ii) Provare che se $W \subseteq \mathbb{R}^2$ è un sottospazio non banale, allora è una retta passante per l'origine.

Soluzione. Se $W \subseteq V$ e $\dim(V) = 2$, allora $\dim(W) \in \{0, 1, 2\}$. Se $\dim(W) = 0$, allora $W = \{\underline{0}_V\}$. Se $\dim(W) = 2$, allora $W = V$. W se e solo se $\dim(W) = 1$, ossia W è generato da un singolo vettore non nullo: $W = \mathcal{L}(\underline{w})$. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $\underline{w} = (w_1, w_2)$, posto $a := -w_2$ e $b := w_1$, si verifica che $(x, y) \in W$ se e solo se $ax + by = 0$. ✓

Esercizio (Esame del 12/02/2019)

Per ciascuno dei seguenti insiemi di vettori:

$$S := \left\{ \underline{u}_1 = (1, 1, 0) \,,\ \underline{u}_2 = (0, 1, 1) \,,\ \underline{u}_3 = (1, 0, 1) \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$T := \left\{ \underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1) \,,\ \underline{v}_2 = (2, 2, 2, 2) \,,\ \underline{v}_3 = (1, 2, 3, 4) \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$U := \left\{ \underline{w}_1 = (0, 1, 2, 0, 0) \,,\ \underline{w}_2 = (0, 2, 3, 0, 0) \,,\ \underline{w}_3 = (0, 0, 0, 1, 0) \,, \right.$$
$$\left. \underline{w}_4 = (2, 0, 0, 0, 0) \,,\ \underline{w}_5 = (0, 0, 0, 0, 3) \right\} \subset \mathbb{R}^5$$

a) verificare se è libero o legato.
b) Quale di questi insiemi è una base dello spazio vettoriale ambiente?
c) Se possibile, scrivere un vettore (scelto a piacere) di T come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme.
d) Calcolare la dimensione dello spazio generato dai vettori dell'insieme T.

Lezione 13

Proposizione

Le righe non nulle di una matrice ridotta per righe sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

- Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k,n}$ ridotta per righe. E' sufficiente dare la dimostrazione quando tutte le righe di A sono non nulle. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ le righe di A numerate dal basso verso l'alto: $\underline{v}_k$ la prima, $\underline{v}_{k-1}$ la seconda, etc.
- Per assurdo, immaginiamo che

$$\underline{v}_k = b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \ldots + b_{k-1}\underline{v}_{k-1}\ , \qquad b_1, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{R}. \qquad (\star)$$

Sia a_{1p} il pivot della prima riga ($1 \leqslant p \leqslant n$). Allora la componente p-esima di $\underline{v}_k$ è a_{1p}, e la componente p-esima di $\underline{v}_i$ è zero $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant k-1$. Da $(\star)$ segue che

$$a_{1p} = b_1 0 + b_2 0 + \ldots + b_{k-1} 0 = 0$$

contraddicendo l'ipotesi che a_{1p} fosse un pivot. Quindi $\underline{v}_k \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1})$.

- Poiché eliminando la riga $\underline{v}_k$ da A si ottiene una matrice ancora ridotta per righe, con righe $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{k-1}$ tutte non nulle, per induzione si prova che, $\forall\ 2 \leqslant i \leqslant k$, si ha $\underline{v}_i \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1})$. Quindi l'insieme $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ è libero. ■

Esercizio (Esame del 12/02/2019)

Per ciascuno dei seguenti insiemi di vettori:

$$S := \{\, \underline{u}_1 = (1,3,5)\,,\ \underline{u}_2 = (0,0,0)\,,\ \underline{u}_3 = (0,7,9) \,\} \subset \mathbb{R}^3$$
$$T := \{\, \underline{v}_1 = (1,0,0,0)\,,\ \underline{v}_2 = (1,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3 = (0,1,1,0)\,,\ \underline{v}_4 = (0,0,1,1) \,\} \subset \mathbb{R}^4$$
$$U := \{\, \underline{w}_1 = (0,1,0,1,0)\,,\ \underline{w}_2 = (1,0,1,0,1)\,,\ \underline{w}_3 = (0,2,0,2,0) \,\} \subset \mathbb{R}^5$$

a) verificare se è libero o legato.
b) Quale di questi insiemi è una base dello spazio vettoriale ambiente?
c) Se possibile, scrivere un vettore (scelto a piacere) di S come combinazione lineare dei rimanenti vettori dell'insieme.

Determinare una base per riduzione

Osservazione

Siano $A, A' \in \mathbb{R}^{k,n}$. Se A' è ottenuta da A usando una delle tre operazioni elementari, le righe di A' e le righe di A generano lo stesso sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Il metodo di riduzione di una matrice può essere usato per trovare una base di uno spazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ a partire da un insieme $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ di generatori:

1. Si scrivono i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$ come righe di una matrice $A \in \mathbb{R}^{k,n}$;
2. Si trasforma A in una matrice A' ridotta per righe usando l'operazione elementare (III'). Le righe di A e di A' generano lo stesso sottospazio W di $\mathbb{R}^n$.
3. Le righe non nulle di A', essendo linearmente indipendenti, formano una base di W.
4. La dimensione di W è data dal numero di righe non nulle di A'.

Esercizio

Determinare una base del sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,-2)\,, \qquad \underline{v}_2 = (-1,1,3)\,, \qquad \underline{v}_3 = (2,1,-3)\,.$$

Soluzione. Scriviamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

e riduciamola per righe. Si ottiene:

$$A \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Una base di W è data dalle righe non nulle di A', quindi

$$\underline{w}_1 = (1,0,-2)\,, \qquad \underline{w}_2 = (0,1,1)\,. \qquad \checkmark$$

Osservazione: siccome $\dim(W) = 2$, l'insieme $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è legato (è un insieme di generatori, ma non una base di W).

Esercizio d'esame

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$V := \mathcal{L}\big((1,1,3,-1)\,, (3,2,6,0)\,, (6,2,6,6)\,, (5,2,6,4) \big)\,,$$

$$W := \big\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 - x_3 = x_2 - x_4 = 0 \big\}\,.$$

Si determini una base per ciascuno dei sottospazi: V, W, $V+W$, $V \cap W$.

Soluzione: 1a parte, base di V.

Scrivendo i generatori di V come righe di una matrice e riducendo per righe si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_2]{R_3 \to R_3 - 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le righe non nulle della matrice trovata formano una base di V. Una base di V è quindi data dai due vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,3,-1)\,, \qquad \underline{v}_2 = (1,0,0,2)\,.$$

Esercizio d'esame

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$V := \mathcal{L}\big((1,1,3,-1)\,, (3,2,6,0)\,, (6,2,6,6)\,, (5,2,6,4) \big)\,,$$

$$W := \big\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 - x_3 = x_2 - x_4 = 0 \big\}\,.$$

Si determini una base per ciascuno dei sottospazi: V, W, $V+W$, $V \cap W$.

Soluzione: 2a parte, base di W.

Risolviamo il sistema che definisce W:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

La soluzione generale dipende quindi da due parametri $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (t_1, t_2, t_1 + t_2, t_2) = t_1(1,0,1,0) + t_2(0,1,1,1)\,.$$

I due vettori (ottenuti scegliendo rispettivamente $(t_1,t_2) = (1,0)$ e $(t_1,t_2) = (0,1)$):

$$\underline{w}_1 = (1,0,1,0)\,, \qquad \underline{w}_2 = (0,1,1,1)\,,$$

generano W, ed essendo linearmente indipendenti formano una base.

Esercizio d'esame

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$V := \mathcal{L}\big((1,1,3,-1)\,, (3,2,6,0)\,, (6,2,6,6)\,, (5,2,6,4) \big)\,,$$

$$W := \big\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 - x_3 = x_2 - x_4 = 0 \big\}\,.$$

Si determini una base per ciascuno dei sottospazi: V, W, $V+W$, $V \cap W$.

Soluzione: 3a parte, base di $V+W$.

Lo spazio $V+W$ è generato dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w}_1, \underline{w}_2$. Per riduzione si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \underline{w}_1 \\ \underline{w}_2 \\ \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base di $V+W$ è quindi data dai tre vettori $(1,0,1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,-2)$.

Esercizio d'esame

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$V := \mathcal{L}\big(\,(1,1,3,-1)\,,\,(3,2,6,0)\,,\,(6,2,6,6)\,,\,(5,2,6,4)\,\big)\;,$$

$$W := \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\;:\;x_1+x_2-x_3=x_2-x_4=0\big\}\;.$$

Si determini una base per ciascuno dei sottospazi: V, W, $V+W$, $V\cap W$.

Soluzione: 4a parte, base di $V\cap W$. Un vettore $\underline{u}$ appartiene a V se e solo se è combinazione lineare dei suoi vettori di base $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$, quindi

$$\underline{u}=y_1\underline{v}_1+y_2\underline{v}_2=(\,y_1+y_2\,,\,y_1\,,\,3y_1\,,\,-y_1+2y_2\,)\;.$$

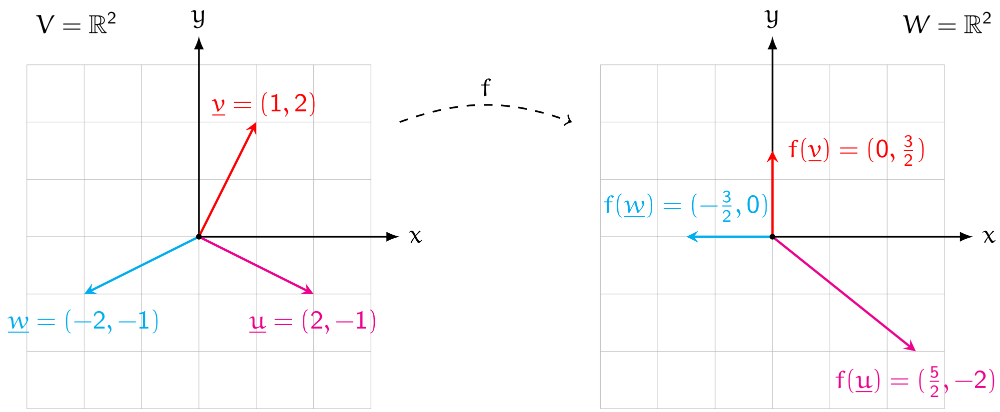
Si ha $\underline{u}\in W$ se e solo le componenti di $\underline{u}$ risolvono le equazioni di W. Sostituendo $(x_1,x_2,x_3,x_4)\rightsquigarrow(\,y_1+y_2\,,\,y_1\,,\,3y_1\,,\,-y_1+2y_2\,)$ nel sistema, si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=\;-y_1\;+\;y_2\;=0 \\ x_1-x_3+x_4=-3y_1+3y_2=0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y_1=y_2=t\in\mathbb{R}$. Scegliendo $t=1$ si ottiene una base di $V\cap W$, data dal vettore $\underline{u}=\underline{v}_1+\underline{v}_2=(2,1,3,1)$. ✓

Parte II: Applicazioni lineari

Ci interessa studiare funzioni $f:V\to W$ che hanno come dominio V e codominio W due spazi vettoriali. Come nel seguente esempio:



$$\boxed{f(x,y):=\big(x-\tfrac{1}{2}y,-\tfrac{1}{2}x+y\big)}$$

Useremo come sinonimi le parole: funzione, applicazione, trasformazione.

Applicazioni lineari

[Abate, §5]

Definizione

[Abate, def. 5.2]

Una applicazione $f:V\to W$ fra due spazi vettoriali V e W si dice lineare se per ogni $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$ e $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ si ha

$$f(\lambda_1\underline{v}_1+\lambda_2\underline{v}_2)=\lambda_1 f(\underline{v}_1)+\lambda_2 f(\underline{v}_2)\;.$$

Nel caso in cui $V=W$, l'applicazione f è detta endomorfismo di V.

Osservazione

Una applicazione $f:V\to W$ è lineare se e solo se è:

i) additiva: $f(\underline{v}_1+\underline{v}_2)=f(\underline{v}_1)+f(\underline{v}_2)\;\;\forall\,\underline{v}_1,\underline{v}_2\in V$;

ii) omogenea di 1° grado: $f(\lambda\underline{v})=\lambda f(\underline{v})\;\;\forall\,\lambda\in\mathbb{R},\underline{v}\in V$.

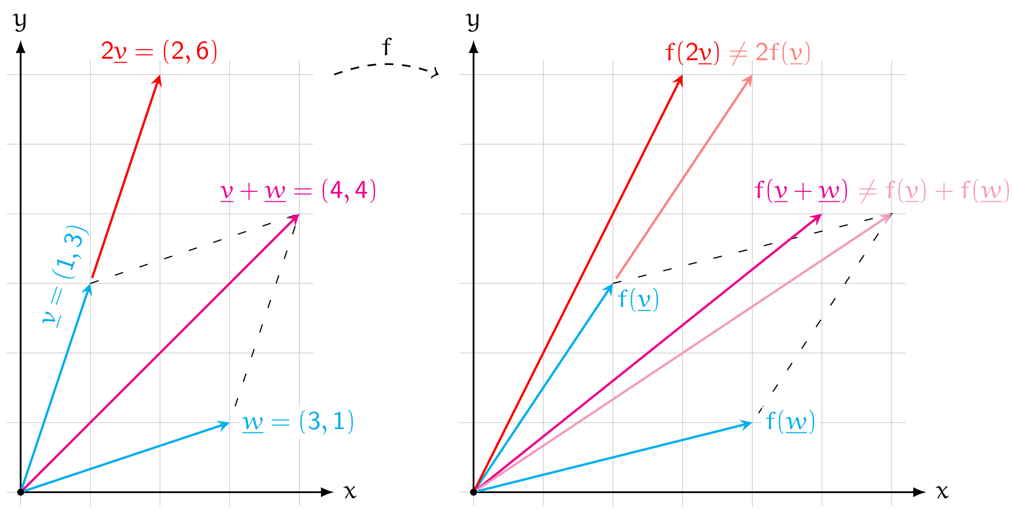
Esempi

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x$ è lineare. Per ogni $\lambda_1,\lambda_2,x_1,x_2\in\mathbb{R}$:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^2$ non è lineare, perché ad esempio $f(2)=4\neq 2\,f(1)=2$.

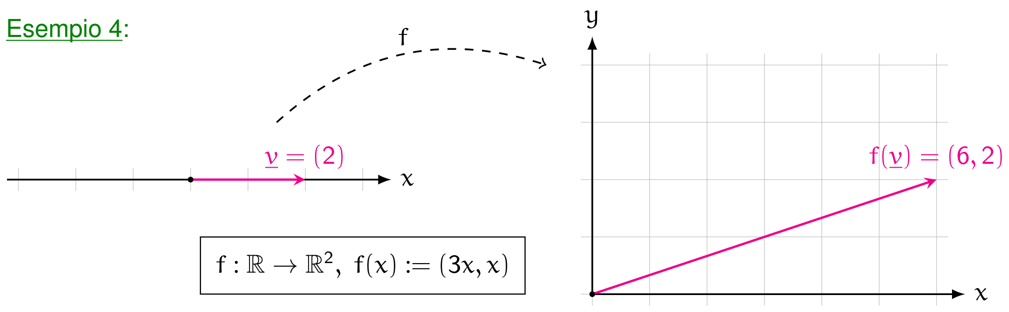
Esempio 3:



$$\boxed{f(x,y) := (x+1,y)}$$

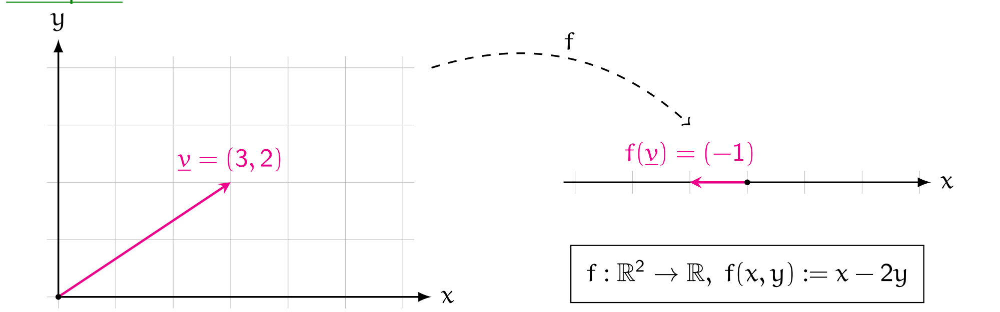
L'applicazione f nell'esempio non è né additiva, né omogenea di 1° grado.

Esempio 4:



$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(x) := (3x, x)}$$

Esempio 5:



$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x - 2y}$$

Queste due applicazioni sono lineari, come si evince dalla seguente proposizione.

Definizione [Abate, def. 5.1]

Ad ogni $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ è associata una applicazione $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, data dal prodotto righe per colonne:

$$L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}$$

per ogni $\underline{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. (Per comodità, scriviamo le n-uple in una colonna.)

Proposizione

Per ogni $A \in \mathbb{R}^{k,n}$, l'applicazione L_A è lineare.

Dimostrazione. Se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^n$ (scritti come vettori colonna) e $a, b \in \mathbb{R}$, allora dalla proprietà distributiva del prodotto righe per colonne segue che

$$L_A(a\underline{v} + b\underline{w}) = A \cdot (a\underline{v} + b\underline{w}) = a(A\underline{v}) + b(A\underline{w}) = a\,L_A(\underline{v}) + b\,L_A(\underline{w})$$ ■

Proposizione

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

1. $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.
2. per ogni $n \geqslant 1$, per ogni $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ e per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n) = \lambda_1 f(\underline{v}_1) + \lambda_2 f(\underline{v}_2) + \ldots + \lambda_n f(\underline{v}_n)\ .$$

Dimostrazione punto 1. Dall'omogeneità di 1° grado, applicata nel caso particolare in cui $\lambda = 0$ e $\underline{v} = \underline{0}_V$ si ottiene

$$f(\underline{0}_V) = f(0 \cdot \underline{0}_V) = 0 \cdot f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W\ .$$ ■

Esempio

L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x + 2$ non è lineare, in quanto $f(0) \neq 0$.
L'applicazione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$g(x,y) = (1, x, y+1)$$

non è lineare, in quanto $g(0,0) = (1,0,1) \neq (0,0,0)$.

Proposizione

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

1. $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.
2. per ogni $n \geqslant 1$, per ogni $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ e per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n) = \lambda_1 f(\underline{v}_1) + \lambda_2 f(\underline{v}_2) + \ldots + \lambda_n f(\underline{v}_n) \ .$$

Dimostrazione punto 2 (per induzione). L'affermazione per $n = 1$ è semplicemente l'omogeneità di 1° grado dell'applicazione: $f(\lambda_1\underline{v}_1) = \lambda_1 f(\underline{v}_1)$.

Se (ipotesi induttiva) l'affermazione al punto 2 è vera per un qualche valore di $n \geqslant 1$, allora è vera anche per $n + 1$. Detto infatti $\underline{v}' = \lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n$ si ha

$$\begin{aligned} &f(\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{v}_n + \lambda_{n+1}\underline{v}_{n+1}) = f(\underline{v}' + \lambda_{n+1}\underline{v}_{n+1}) \\ &\qquad = f(\underline{v}') + \lambda_{n+1} f(\underline{v}_{n+1}) = \lambda_1 f(\underline{v}_1) + \lambda_2 f(\underline{v}_2) + \ldots + \lambda_n f(\underline{v}_n) + \lambda_{n+1} f(\underline{v}_{n+1}) \ , \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla definizione di applicazione lineare e la terza dall'ipotesi induttiva. ■

Proposizione

Per ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ esiste una (e una sola) matrice $A \in \mathbb{R}^{k,n}$, detta matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^k$, tale che $f = L_A$.

Dimostrazione. Per convenienza di notazione, scriviamo i vettori di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{R}^k$ in una colonna. Sia $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, ed $(\underline{e}'_1, \ldots, \underline{e}'_k)$ la base canonica di $\mathbb{R}^k$ (con un apice per distinguerla dalla prima). Per definizione di base, è possibile scrivere (in un unico modo) $f(\underline{e}_j) \in \mathbb{R}^k$ come combinazione lineare:

$$\boxed{f(\underline{e}_j) = a_{1j}\underline{e}'_1 + a_{2j}\underline{e}'_2 + \ldots + a_{kj}\underline{e}'_k} \qquad \Longleftarrow$$

Detta $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ la matrice di elementi a_{ij}, per ogni n-upla

$$\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j\underline{e}_j$$

di $\mathbb{R}^n$, dalla linearità di f segue che:

$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\underline{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij}\underline{e}'_i = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \end{bmatrix} = L_A(\underline{x}) \ .$$

■

Lezione 14

Esercizi C. Carrara:

§7. (Rango,[lezione 15]) dimensione e basi di spazi vettoriali.

§8. Applicazioni lineari.

Richiami

- Una applicazione $f : V \to W$ fra spazi vettoriali si dice lineare se trasforma le operazioni di V in quelle di W. Più precisamente, per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$ e $k \in \mathbb{R}$:

$$f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) \qquad f(k\underline{v}) = k\, f(\underline{v})$$

(Additività) (Omogeneità 1° grado)

- Se $f : V \to W$ è lineare, allora $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ e, $\forall\, n \geqslant 1$ e $\forall\, a_1, \ldots, a_n, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$:

$$f(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n) = a_1 f(\underline{v}_1) + a_2 f(\underline{v}_2) + \ldots + a_n f(\underline{v}_n)$$

- Ad ogni $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ è associata una applicazione $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare data dal prodotto righe per colonne. Per ogni $\underline{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$$

- Per ogni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineare esiste (ed è unica) $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ tale che $f = L_A$.
(A è detta matrice rappresentativa di f nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^k$.)

Esercizio (C. Carrara, es. 8.5)

Determinare (se esiste) una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,1) = (1,2)\,, \qquad f(0,2) = (4,4)\,.$$

Esercizio (C. Carrara, es. 8.3)

Stabilire se esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,2) = (3,0)\,, \qquad f(2,7) = (4,5)\,, \qquad f(1,5) = (1,4)\,.$$

Osservazione: $f(1,2) + f(1,5) \neq f(2,7) \implies f$ non può essere additiva.

Esercizio (C. Carrara, es. 8.4)

Stabilire se esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(1,2) = (3,0)\,, \qquad f(2,4) = (5,0)\,, \qquad f(0,1) = (1,1)\,.$$

Osservazione: $f(2,4) \neq 2 \cdot f(1,2) \implies f$ non può essere omogenea di 1° grado.

Definizione

Siano V e W due spazi vettoriali, $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ una base di V e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k)$ una base di W. Data una app. lineare $f : V \to W$, chiamiamo matrice rappresentativa di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k,n}$ determinata da

$$f(\underline{v}_j) = a_{1j}\underline{w}_1 + a_{2j}\underline{w}_2 + \ldots + a_{kj}\underline{w}_k \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

La j-esima colonna di A ha per elementi le componenti del vettore $f(\underline{v}_j)$ nella base $\mathcal{B}'$.
Per definizione di base, la matrice rappresentativa di f è univocamente determinata.
Usando la linearità di f, si verifica facilmente che le componenti di un vettore

$$\underline{u} = x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \ldots + x_n\underline{v}_n$$

e le componenti della sua immagine, qui indicate con y_j:

$$f(\underline{u}) = y_1\underline{w}_1 + y_2\underline{w}_2 + \ldots + y_k\underline{w}_k$$

sono legate dalla relazione

$$\underline{y} = A\underline{x}\,,$$

con $\underline{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ e $\underline{y} = {}^t(y_1, \ldots, y_k)$.

Esercizio

Siano $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \underline{w}_2)$ le basi di $\mathbb{R}^2$ formate dai vettori seguenti, ed $f = L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice seguente:

$$\underline{v}_1 = \underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{v}_2 = \underline{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinare la matrice rappresentativa di f, sia essa A', rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Soluzione.

$$f(\underline{v}_1) = A \cdot \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 5\,\underline{v}_1 - 2\,\underline{v}_2$$

$$f(\underline{v}_2) = A \cdot \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\,\underline{v}_1$$

Quindi la matrice A' è data da

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che la stessa applicazione lineare f è rappresentata da matrici differenti (in questo esempio A e A') in basi differenti. ✓

Nucleo, immagine e loro proprietà

[Abate, §5.2]

Definizione (immagine di un insieme/immagine di una funzione)

Se $f : V \to W$ è una funzione ed $S \subseteq V$ un sottoinsieme del dominio, indichiamo con $f(S)$ il sottoinsieme di W dei vettori che sono immagine di (almeno) un vettore di S:

$$f(S) := \big\{ \underline{w} \in W : \exists\, \underline{v} \in S \text{ tale che } \underline{w} = f(\underline{v}) \big\}$$

ed in particolare definiamo:

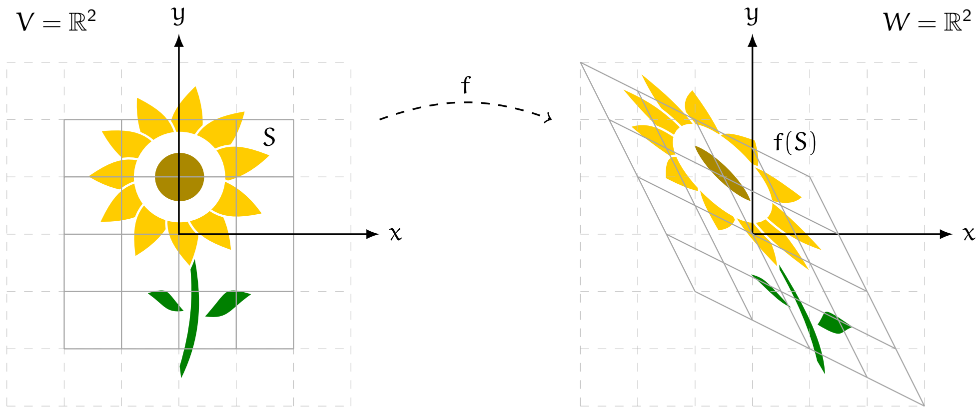
$$\mathrm{im}(f) := f(V)$$

Terminologia:
- il vettore $f(\underline{v})$ è detto immagine di $\underline{v}$,
- l'insieme $f(S)$ è detto immagine di S,
- l'insieme $\mathrm{im}(f)$ è detto immagine di f.

Ricordiamo che f si dice suriettiva se:

$$f(V) = W$$

Esempio:



$$\boxed{f(x,y) := \big(x - \tfrac{1}{2}y, -\tfrac{1}{2}x + y\big)}$$

Definizione (nucleo)

Data $f : V \to W$ lineare, chiamiamo nucleo (in inglese "kernel") di f l'insieme

$$\ker(f) := \big\{ \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0}_W \big\}$$

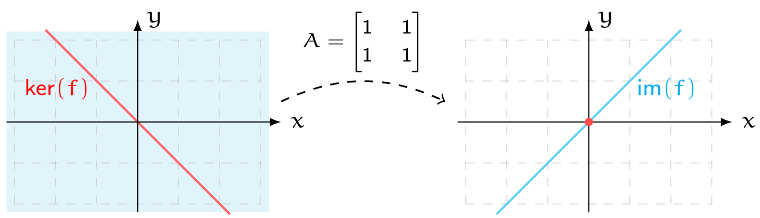
Esempio

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione $f(x,y) := (x+y, x+y)$.
Il nucleo di f è l'insieme delle coppie (x,y) che risolvono l'equazione $x + y = 0$. Quindi:

$$\ker(f) = \big\{ (t,-t) : t \in \mathbb{R} \big\} = \mathcal{L}\big((1,-1)\big)$$

L'immagine di f è l'insieme dei vettori $\underline{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ che hanno $w_1 = w_2$. Quindi:

$$\mathrm{im}(f) = \big\{ (t,t) : t \in \mathbb{R} \big\} = \mathcal{L}\big((1,1)\big)$$



Teorema (Proprietà di nucleo e immagine)

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

1. $\ker(f)$ è un sottospazio di V;
2. se $S \subseteq V$ è un sottospazio, allora anche $f(S) \subseteq W$ è un sottospazio;
   (f trasforma sottospazi in sottospazi; in particolare $f(V)$ è un sottospazio di W)
3. se I è un insieme di generatori di S, allora $f(I)$ è un insieme di generatori di $f(S)$.
   (f trasforma insiemi di generatori in insiemi di generatori)

Dimostrazione punto 1. Siano $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \ker(f)$, ovvero $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono vettori di V che soddisfano

$$f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) = \underline{0}_W .$$

Dalla linearità di f segue che:

$$f(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2) = a_1 f(\underline{v}_1) + a_2 f(\underline{v}_2) = a_1\underline{0}_W + a_2\underline{0}_W = \underline{0}_W ,$$

ovvero

$$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 \in \ker(f) .$$

Per il criterio c) di sottospazio, $\ker(f)$ è un sottospazio di V.

Teorema (Proprietà di nucleo e immagine)

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

1. $\ker(f)$ è un sottospazio di V;
2. se $S \subseteq V$ è un sottospazio, allora anche $f(S) \subseteq W$ è un sottospazio;
   (f trasforma sottospazi in sottospazi; in particolare $f(V)$ è un sottospazio di W)
3. se I è un insieme di generatori di S, allora $f(I)$ è un insieme di generatori di $f(S)$.
   (f trasforma insiemi di generatori in insiemi di generatori)

Dimostrazione punto 2. Sia $S \subseteq V$ un sottospazio, $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in f(S)$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Per definizione esistono $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in S$ tali che

$$\underline{w}_1 = f(\underline{v}_1) \qquad \underline{w}_2 = f(\underline{v}_2)$$

Dalla linearità di f segue che

$$\underline{w} := a_1\underline{w}_1 + a_2\underline{w}_2 = a_1 f(\underline{v}_1) + a_2 f(\underline{v}_2) = f(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2) .$$

Siccome S è per ipotesi un sottospazio, allora $\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 \in S$, e quindi $\underline{w} = f(\underline{v})$ appartiene $f(S)$ ($\underline{w}$ è immagine tramite f di un vettore di S). Per il criterio c) di sottospazio, $f(S)$ è un sottospazio di W.

Teorema (Proprietà di nucleo e immagine)

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Allora:

1. $\ker(f)$ è un sottospazio di V;
2. se $S \subseteq V$ è un sottospazio, allora anche $f(S) \subseteq W$ è un sottospazio;
   (f trasforma sottospazi in sottospazi; in particolare $f(V)$ è un sottospazio di W)
3. se I è un insieme di generatori di S, allora $f(I)$ è un insieme di generatori di $f(S)$.
   (f trasforma insiemi di generatori in insiemi di generatori)

Dimostrazione punto 3. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ dei generatori di S.
Per costruzione, per ogni $\underline{w} \in f(S)$ esiste $\underline{v} \in S$ tale che $f(\underline{v}) = \underline{w}$. Possiamo scrivere $\underline{v}$ come combinazione lineare dei generatori di S:

$$\underline{v} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n ,$$

con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dalla linearità di f ricaviamo

$$\begin{aligned}\underline{w} = f(\underline{v}) &= f(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_n\underline{v}_n) \\ &= a_1 f(\underline{v}_1) + a_2 f(\underline{v}_2) + \ldots + a_n f(\underline{v}_n) .\end{aligned}$$

Siccome questo vale per ogni $\underline{w} \in f(S)$, i vettori $f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_n)$ formano un insieme di generatori di $f(S)$. ■

Ricordiamo che $f : V \to W$ si dice è iniettiva se $f(\underline{v}) = f(\underline{v}')$ se e solo se $\underline{v} = \underline{v}'$.

Proposizione

Una applicazione lineare $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$.

Dimostrazione. "⇒" Se $\ker(f)$ contiene un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}_V$, da $f(\underline{v}) = \underline{0}_W = f(\underline{0}_V)$ segue che f non è iniettiva (due vettori diversi hanno la stessa immagine).

"⇐" Due vettori $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ hanno la stessa immagine se e solo se

$$f(\underline{v} - \underline{v}') = f(\underline{v}) - f(\underline{v}') = \underline{0}_W$$

ovvero $\underline{v} - \underline{v}' \in \ker(f)$. Se $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$, due vettori $\underline{v}$ e $\underline{v}'$ hanno la stessa immagine se e solo se $\underline{v} - \underline{v}' = \underline{0}_V$, ovvero $\underline{v} = \underline{v}'$. Quindi f è iniettiva. ■

Esempio

L'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \qquad f(x, y) = x + y$$

non è inettiva. Infatti il nucleo contiene vettori non nulli, come il vettore $(1, -1)$.

Proposizione

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare iniettiva. Se $I = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è un insieme di vettori di V linearmente indipendenti, allora $f(I) = \{f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_n)\}$ è un insieme di vettori di W linearmente indipendenti.

(una applicazione lineare iniettiva trasforma insiemi liberi in insiemi liberi)

Dimostrazione. Indichiamo con $\underline{w}_i$ l'immagine del vettore $\underline{v}_i$ (per ogni $1 \leqslant i \leqslant n$):

$$\underline{w}_i = f(\underline{v}_i)$$

Per assurdo, assumiamo che $a_1\underline{w}_1 + a_2\underline{w}_2 + \ldots + a_n\underline{w}_n = \underline{0}_W$ per qualche scelta di coefficienti non tutti nulli. Dalla linearità di f segue:

$$\begin{aligned} f(a_1\underline{v}_1 + \ldots + a_n\underline{v}_n) &= a_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + a_n f(\underline{v}_n) \\ &= a_1\underline{w}_1 + \ldots + a_n\underline{w}_n = \underline{0}_W \,, \end{aligned}$$

cioè $a_1\underline{v}_1 + \ldots + a_n\underline{v}_n \in \ker(f)$. Siccome $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$ (f è iniettiva), segue che

$$a_1\underline{v}_1 + \ldots + a_n\underline{v}_n = \underline{0}_V$$

contraddicendo l'ipotesi che I fosse un insieme libero. ■

Una immediata conseguenza delle proposizioni precedenti è:

Corollario 1

Se $f : V \to W$ applicazione lineare iniettiva e $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ è una base di V, allora $f(\mathcal{B}) = \big(f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2), \ldots, f(\underline{v}_n)\big)$ è una base di $\mathrm{im}(f) \subseteq W$.

(una applicazione lineare iniettiva trasforma basi di V in basi di $f(V)$)

Corollario 2

Se V è finitamente generato ed $f : V \to W$ è una applicazione lineare iniettiva, allora:

$$\dim \mathrm{im}(f) = \dim(V) \qquad (\star)$$

Dimostrazione. Se $V \neq \{\underline{0}_V\}$, questa è una conseguenza del Corollario 1.

Se

$$V = \{\underline{0}_V\} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{im}(f) = \{\underline{0}_W\}$$

e l'uguaglianza $(\star)$ diventa un banale $0 = 0$. ■

Teorema della dimensione [Abate, Teorema 5.7]

Se V è finitamente generato ed $f : V \to W$ è una applicazione lineare, allora:

$$\dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f) = \dim(V)\,.$$

Dimostrazione. Se $\ker(f) = \{\underline{0}_V\}$ la dimostrazione è banale: f è iniettiva, per il Corollario appena dimostrato $\boxed{\dim\mathrm{im}(f) = \dim(V)}$, e $\boxed{\dim\ker(f) = 0}$, da cui la tesi.

Supponiamo che $\ker(f) \neq \{\underline{0}_V\}$. Indichiamo con n la dimensione di V, k la dimensione di $\ker(f)$ e sia $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$ una base di $\ker(f)$. Usando il metodo del completamento ad una base, possiamo completare tale insieme ad una base

$$(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \ldots, \underline{v}_n)$$

di V. Osserviamo che f si annulla sui primi k vettori di base, e

$$\underline{w}_1 := f(\underline{v}_{k+1}) \qquad \underline{w}_2 := f(\underline{v}_{k+2}) \qquad \ldots \qquad \underline{w}_{n-k} := f(\underline{v}_n)$$

sono generatori di $\mathrm{im}(f)$. Vogliamo dimostrare che sono linearmente indipendenti, e quindi una base di $\mathrm{im}(f)$, da cui segue la tesi:

$$\dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f) = k + (n-k) = n = \dim(V)\,.$$

Teorema della dimensione [Abate, Teorema 5.7]

Se V è finitamente generato ed $f : V \to W$ è una applicazione lineare, allora:

$$\dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f) = \dim(V)\,.$$

(2a parte). Dalla linearità di f segue che

$$a_1\underline{w}_1 + a_2\underline{w}_2 + \ldots + a_{n-k}\underline{w}_{n-k} = f(a_1\underline{v}_{k+1} + a_2\underline{v}_{k+2} + \ldots + a_{n-k}\underline{v}_n)$$

per ogni $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. La precedente combinazione lineare è nulla se e solo se l'argomento di f è un vettore del nucleo. Poiché $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$ è una base di $\ker(f)$ questo vuol dire che esistono $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_1\underline{v}_{k+1} + a_2\underline{v}_{k+2} + \ldots + a_{n-k}\underline{v}_n = b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \ldots + b_k\underline{v}_k\,.$$

Siccome i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti, la precedente uguaglianza si può verificare solo se tutti i coefficienti sono nulli:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-k} = b_1 = b_2 = \ldots = b_k = 0$$

Questo prova in particolare che i vettori $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{n-k}$ sono linearmente indipendenti. ■

Corollari

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare fra due spazi finitamente generati. Allora:

1. f suriettiva $\implies \dim(V) \geqslant \dim(W)$;
2. f iniettiva $\implies \dim(V) \leqslant \dim(W)$;
3. f biunivoca $\implies \dim(V) = \dim(W)$.

Dimostrazione.

1. Se f è suriettiva (quindi $\text{im}(f) = W$), dal teorema della dimensione segue che

$$\dim(V) = \dim\ker(f) + \dim(W) \geqslant \dim(W)$$

2. Se f è iniettiva (quindi $\ker(f) = \{\underline{0}\}$), dal teorema della dimensione segue che

$$\dim(V) = \dim\text{im}(f) \leqslant \dim(W)$$

(l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\text{im}(f) \subseteq W$ è un sottospazio vettoriale)

3. Se f è sia iniettiva che suriettiva, chiaramente $\dim(V) = \dim(W)$. ∎

Lezione 15

Applicazioni e sistemi lineari

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k,n}$ ed $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ l'applicazione associata, data da

$$L_A(\underline{x}) := A\underline{x} \qquad \forall\, \underline{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Un vettore $B = {}^t(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ è nell'immagine di $L_A \iff \exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$A\underline{x} = B \tag{$\star$}$$

Quindi:

- $B \in \mathrm{im}(L_A) \iff$ il sistema di matrice completa $(A|B)$ è compatibile.
- La soluzione generale di ($\star$) è data dall'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ che hanno per immagine la colonna dei termini noti B.

Il nucleo di L_A è l'insieme dei vettori $\underline{x}$ che hanno per immagine il vettore nullo:

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

Sia $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ (i cui vettori scriviamo qui in colonna). Poiché

$$L_A(\underline{e}_i) = {}^t(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ki})$$

è la i-esima colonna di A, e una applicazione lineare trasforma generatori in generatori:

L'immagine di L_A è generata dalle colonne della matrice A.

Esercizi

Esercizio (C. Carrara, es. 8.8)

Sia $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Determinare, se esiste, una base di nucleo e immagine di L_A.
b) Stabilire se ${}^t(-3, 2, 1) \in \mathrm{im}(L_A)$.

Esercizio (Esame del 30/01/2012)

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$f(x_1, x_2, x_3) := (\, x_1 + x_2\,,\ x_1 + x_3\,,\ x_2 - x_3\,)$$

a) Determinare una base, se esiste, del nucleo di f.
b) Determinare una base, se esiste, dell'immagine di f.
c) Il vettore $\underline{v} = (-3, 3, 3)$ è nel nucleo di f e/o nell'immagine.

Rango di una matrice

[Abate, §5.2]

Definizione

Chiamiamo rango per colonne di una matrice A la dimensione dello spazio generato dalle colonne di A, indicata con $\rho_{\text{colonne}}(A)$; chiamiamo rango per righe di una matrice A la dimensione dello spazio generato dalle righe di A, indicata con $\rho_{\text{righe}}(A)$.

Quindi:

$$\rho_{\text{colonne}}(A) = \dim \mathrm{im}(L_A) \qquad\qquad \rho_{\text{righe}}(A) = \rho_{\text{colonne}}({}^tA)$$

Teorema [Abate, prop. 5.11(2)]

Il rango per righe è uguale al rango per colonne:

$$\rho_{\text{righe}}(A) = \rho_{\text{colonne}}(A)$$

per ogni $A \in \mathbb{R}^{k,n}$. Tale numero sarà chiamato rango di A ed indicato con $\rho(A)$.

Dimostrazione ($\rho_{\text{righe}}(A) = \rho_{\text{colonne}}(A)\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{k,n}$).

Sia A' ottenuta da A con la riduzione per righe. Le righe non nulle di A', siano esse r, formano una base per lo spazio generato dalle righe di A. Quindi:

$$\rho_{\text{righe}}(A) = r\ .$$

Il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente ad $A'\underline{x} = \underline{0}$. La dimensione dello spazio delle soluzioni, ovvero del nucleo di L_A, è data dal numero di incognite libere:

$$\dim \ker(L_A) = n - r$$

(n° parametri liberi = n° incognite − n° righe non nulle $= n - r$).
Per il teorema della dimensione:

$$\dim \ker(L_A) + \dim \operatorname{im}(L_A) = \dim(\mathbb{R}^n) = n\ .$$

Quindi

$$\rho_{\text{colonne}}(A) = \dim \operatorname{im}(L_A) = n - \dim \ker(L_A) = n - (n - r) = r = \rho_{\text{righe}}(A)\ . \qquad \blacksquare$$

Corollario

Lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ ha dimensione $n - \rho(A)$.

Osservazione: possiamo determinare il rango di una matrice riducendola per righe e contando le righe non nulle della matrice ridotta ottenuta.

Esercizio

Determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Soluzione (per riduzione).
Riducendo A si ottiene:

$$A \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ .$$

Quindi $\rho(A) = \rho(A') = 3$. ✓

Proprietà del rango

Osservazioni.

- Se A è ridotta per righe, $\rho(A)$ è dato dal numero di righe non nulle di A.
- Se $A \in \mathbb{R}^{k,n}$ è triangolare superiore completa, allora $\rho(A) = \min(k, n)$.

Proposizione

Se $A \in \mathbb{R}^{k,n}$, allora

$$\rho(A) \leqslant \min(k, n)\ .$$

Se $\rho(A) = \min(k, n)$ diciamo che A ha rango massimo.

Dimostrazione. Le righe di A generano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, la cui dimensione $\rho_{\text{righe}}(A)$ è al più n; le colonne di A generano un sottospazio di $\mathbb{R}^k$, la cui dimensione $\rho_{\text{colonne}}(A)$ è al più k. Da $\rho(A) = \rho_{\text{righe}}(A) = \rho_{\text{colonne}}(A)$ segue la tesi. $\blacksquare$

Definizione [Abate, §9.4]

Sia $A \in \mathbb{R}^{k,n}$. Un minore di ordine p di A è una matrice quadrata M di tipo $p \times p$ ottenuta da A eliminando $k - p$ righe e $n - p$ colonne.

Un orlato di M è un minore di A di ordine $p + 1$ contenente M.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & 0 & \cancel{3} & 7 \\ \cancel{5} & 2 & \cancel{4} & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \cancel{1} & 2 \\ 1 & 0 & \cancel{3} & 7 \\ 5 & 2 & \cancel{4} & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

▸ M è un minore di ordine 2 di A. M' è un minore di ordine 3 nonché un orlato di M.

Enunciamo senza dimostrazione:

Teorema degli orlati [Abate, teorema 9.13]

Una matrice ha rango p se e solo se esiste un minore di ordine p il cui determinante è non nullo, e tutti i suoi orlati hanno determinante nullo.

Esercizio

Determinare il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Soluzione (con il teorema degli orlati).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

il minore evidenziato ha determinante diverso da zero e tutti i suoi orlati hanno determinante nullo. Per il teorema degli orlati, si ha quindi $\rho(A) = 2$. ✓

Soluzioni di un sistema in forma vettoriale

Proposizione [Abate, teorema 5.1]

Data una soluzione $\underline{u}$ di un sistema compatibile

$$A\underline{x} = B\,, \qquad (\dagger)$$

ogni altra soluzione di (†) si può ottenere sommando ad $\underline{u}$ una soluzione del sistema omogeneo associato:

$$A\underline{x} = \underline{0}\,. \qquad (\ddagger)$$

Dimostrazione. Sia $\underline{v}$ un'altra soluzione di (†). Dalla proprietà distributiva del prodotto righe per colonne segue che

$$A(\underline{v} - \underline{u}) = A\underline{v} - A\underline{u} = B - B = 0$$

ovvero $\underline{v} - \underline{u}$ risolve (‡).

Viceversa, se $\underline{w}$ risolve (‡), cioè $A\underline{w} = 0$, allora detto $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ si ha

$$A\underline{v} = A\underline{u} + A\underline{w} = B + 0 = B$$

cioè $\underline{v}$ è soluzione di (†). ■

Corollario

La soluzione generale di un sistema compatibile di matrice completa $(A|B) \in \mathbb{R}^{m,n+1}$ si può sempre scrivere nella forma

$$\underline{x} = \underline{v}_0 + \underbrace{t_1\underline{v}_1 + t_2\underline{v}_2 + \ldots + t_k\underline{v}_k}_{\text{soluzione generale sistema omogeneo associato}}$$

dove:

- $k = n - \rho(A)$,
- $\underline{v}_0$ è una soluzione particolare del sistema,
- $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k)$ è una base dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$,
- $t_1, t_2, \ldots, t_k$ sono parametri reali.

Esempio

La soluzione generale dell'equazione

$$2x + y = 6$$

(ossia $y = -2x + 6$) è data da:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 6 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{array}{ccccc} \underline{x} & = & \underline{v}_0 & +\,t & \underline{v}_1 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} & +\,t & \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Esercizio (esame del 04/07/2011)

Si consideri il seguente sistema lineare dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 + (\lambda - 3)x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

a) dire per quali valori di λ il sistema ammette infinite soluzioni;

b) per i valori di λ trovati al punto a), scrivere una base per lo spazio delle soluzioni.

Soluzione. a) Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti (con sviluppo di Laplace rispetto alla 2a colonna):

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ \lambda & 0 & 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 3 & \cancel{0} & \lambda \\ \cancel{1} & \cancel{\lambda - 3} & \cancel{1} \\ \lambda & \cancel{0} & 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(9 - \lambda^2)$$

Le soluzioni sono infinite se e solo se $|A| = 0$, ovvero

$$\lambda = \pm 3\,.$$

b1) Sia W_λ lo spazio delle soluzioni. Per $\lambda = 3$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + \ \ x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \implies \qquad (x_1, x_2, x_3) = (t_1, t_2, -t_1) \ \ \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Due generatori $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di W_3 si ottengono scegliendo $(t_1, t_2) = (1, 0)$ e $(t_1, t_2) = (0, 1)$:

$$\underline{v}_1 = (1, 0, -1) \qquad \underline{v}_2 = (0, 1, 0)$$

I due vettori sono linearmente indipendenti (verificare), quindi formano una base.

b2) Per $\lambda = -3$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + \ \ x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \to E_3 + E_1]{E_2 \to E_2 + \frac{1}{3}E_1} \begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La soluzione generale è

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, \tfrac{1}{3}t, t) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\ .$$

Una base di W_{-3} è data da una qualsiasi soluzione non nulla, ad esempio scegliendo $t = 3$ si ottiene il vettore $(3, 1, 3)$. ✓

Teorema di Rouché-Capelli [Abate, cor. 5.9]

Un sistema di matrice completa $(A|B) \in \mathbb{R}^{m,n+1}$ è compatibile se e solo se

$$\rho(A|B) = \rho(A)\ .$$

Dimostrazione. Ricordiamo che un sistema di matrice completa $(A|B)$ è compatibile se e solo se il vettore colonna B appartiene all'immagine dell'applicazione L_A:

$$A\underline{x} = B \text{ è compatibile} \iff B \in \mathrm{im}(L_A)$$

Due casi:

- $B \in \mathrm{im}(L_A)$ (sistema compatibile): se B è combinazione lineare delle colonne di A, le colonne di A e quelle di $(A|B)$ generano lo stesso sottospazio di $\mathbb{R}^m$ e $\rho(A|B) = \rho(A)$.
- $B \notin \mathrm{im}(L_A)$ (sistema incompatibile): se B non è combinazione lineare delle colonne di A, lo spazio generato dalle colonne di $(A|B)$ ha dimensione maggiore dello spazio generato dalle colonne di A, e $\rho(A|B) > \rho(A)$. ■

Osservazione: si ha sempre $\rho(A) \leqslant \rho(A|B) \leqslant \rho(A) + 1$ (poiché la matrice $(A|B)$ si ottiene da A aggiungendo una colonna).

Lezioni 16 e 17: Spazi metrici.

(Esercizi: C. Carrara, §10)

Spazi metrici

[Abate, §11]

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale reale. Una applicazione

$$f : V \times V \to \mathbb{R}$$

che associa ad ogni coppia di vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ un numero reale è detta un prodotto scalare o prodotto interno di V se è:

i) simmetrica, ovvero $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$,

$$f(\underline{v}, \underline{w}) = f(\underline{w}, \underline{v}) \ .$$

ii) lineare (nell'argomento di sinistra), ovvero $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\,,\ \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ si ha:

$$f(a\underline{u} + b\underline{v}, \underline{w}) = af(\underline{u}, \underline{w}) + bf(\underline{v}, \underline{w}) \ .$$

iii) definita positiva, ovvero

$$f(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \qquad \forall\ \underline{v} \neq \underline{0} \ .$$

Uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare si dice spazio metrico.

Esercizio

Siano $\underline{v} = (v_1, v_2)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Dire quale delle seguenti funzioni è un prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$:

1. $f(\underline{v}, \underline{w}) = v_1^2 + w_1^2 + v_1 w_1 + v_2 w_2$, (no: soddisfa (i) e (iii) ma non (ii))
2. $f(\underline{v}, \underline{w}) = 3v_1 w_1 + 7v_2 w_2$, (ok: è un prodotto scalare)
3. $f(\underline{v}, \underline{w}) = 3v_1 w_1 - 7v_2 w_2$, (no: soddisfa (i) e (ii) ma non (iii))
4. $f(\underline{v}, \underline{w}) = 3v_1 w_1$, (no: soddisfa (i) e (ii) ma non (iii))
5. $f(\underline{v}, \underline{w}) = 3v_1 w_1 + 7$, (no: soddisfa (i) e (iii) ma non (ii))
6. $f(\underline{v}, \underline{w}) = v_1 w_1^3 + v_2 w_2^3$. (no: soddisfa (ii) e (iii) ma non (i))

Sebbene un prodotto scalare sia un particolare tipo di funzione, conviene introdurre una notazione differente da quella usata per funzioni generiche.

Notazione. Se V è uno spazio metrico, indicheremo il prodotto scalare di $\underline{v}, \underline{w} \in V$ con

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

invece di $f(\underline{v}, \underline{w})$ o $g(\underline{v}, \underline{w})$, etc. Useremo lo stesso simbolo $\langle\ ,\ \rangle$, qualunque sia la funzione che definisce il prodotto scalare di V considerato.

Definizione

Due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di uno spazio metrico V si dicono ortogonali se

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \ .$$

Proposizione

Un prodotto scalare di V soddisfa:

iv) $\langle \underline{0}, \underline{v} \rangle = 0 \ \ \forall\ \underline{v} \in V\,;$

v) $\langle \underline{w}, a\underline{u} + b\underline{v} \rangle = a\,\langle \underline{w}, \underline{u} \rangle + b\,\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}\,,\ \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V\,.$

Dimostrazione. La proprietà iv) segue da ii). Infatti:

$$\langle \underline{0}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{0} + \underline{0}, \underline{v} \rangle \overset{\text{(ii)}}{=} \langle \underline{0}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{0}, \underline{v} \rangle \ ,$$

e sottraendo $\langle \underline{0}, \underline{v} \rangle$ ambo i membri si ottiene $\langle \underline{0}, \underline{v} \rangle = 0$ per ogni $\underline{v} \in V$.

Usando prima i), poi ii), e quindi ancora i) si dimostra che:

$$\langle \underline{w}, a\underline{u} + b\underline{v} \rangle \overset{\text{(i)}}{=} \langle a\underline{u} + b\underline{v}, \underline{w} \rangle \overset{\text{(ii)}}{=} a\,\langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + b\,\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \overset{\text{(i)}}{=} a\,\langle \underline{w}, \underline{u} \rangle + b\,\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$. ∎

Definizione

Sia V uno spazio metrico. Chiamiamo norma di $\underline{v} \in V$ la grandezza

$$\|\underline{v}\| := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \, .$$

Definizione

Siano $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$. Un prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ è dato da

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n = \underline{v} \cdot {}^t \underline{w} \, ,$$

ed è detto prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$. La norma associata è

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \, .$$

Esempio

Siano $\underline{v} = (2, 1, 0, 2)$ e $\underline{w} = (-2, 2, 4, 1)$. Rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^4$:

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 0 \qquad \text{(i vettori sono ortogonali)}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2} = 3 \qquad \|\underline{w}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2 + 1^2} = 5$$

Proprietà del prodotto scalare e della norma

Proprietà della norma

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $\underline{u}, \underline{v} \in V$ si ha:

1. $\|a\underline{v}\| = |a| \, \|\underline{v}\|$;
2. $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$;
3. $\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + 2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \|\underline{v}\|^2$.

Dimostrazione. Usando le proprietà (ii) e (v) del prodotto scalare, si ricava:

$$\|a\underline{v}\| = \sqrt{\langle a\underline{v}, a\underline{v} \rangle} = \sqrt{a^2 \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = |a| \, \|\underline{v}\| \, .$$

Usando le proprietà (iii) e (iv) si ricava:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = 0 \iff \underline{v} = \underline{0} \, .$$

Per finire, dalle proprietà (ii) e (v) si ricava:

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle + 2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\|^2 + 2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \|\underline{v}\|^2 \, .$$

■

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$, si ha:

$$|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle| \leqslant \|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \, .$$

Dimostrazione. Se $\underline{w} = \underline{0}$ la disuguaglianza si riduce ad un banale $0 \leqslant 0$. Assumiamo allora che $\underline{w} \neq \underline{0}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, dalla 3a proprietà della norma, applicata alla coppia di vettori $\underline{v}$ e $-\lambda \underline{w}$, si ottiene

$$0 \leqslant \|\underline{v} - \lambda \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - 2\lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \lambda^2 \|\underline{w}\|^2 \, ,$$

In particolare scegliendo $\lambda = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle / \|\underline{w}\|^2$ si ottiene

$$0 \leqslant \|\underline{v}\|^2 - 2 \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2}{\|\underline{w}\|^2} + \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2}{\|\underline{w}\|^4} \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2}{\|\underline{w}\|^2} \, ,$$

ovvero $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 / \|\underline{w}\|^2 \leqslant \|\underline{v}\|^2$. Moltiplicando ambo i membri per $\|\underline{w}\|^2$ ed estraendo la radice quadrata di ambo i membri della disuguaglianza, si dimostra la tesi. ■

Disuguaglianza triangolare

Per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$, si ha

$$\|\underline{v} + \underline{w}\| \leqslant \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$$

Dimostrazione. Dalla 3a proprietà della norma e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2 \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle + \|\underline{w}\|^2 \leqslant \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = \big(\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\| \big)^2$$

Estraendo la radice, si ricava la disuguaglianza triangolare. ■

Proposizione ("Teorema di Pitagora")

Due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ soddisfano

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$$

se e solo se sono ortogonali.

Dimostrazione. Per la 3a proprietà della norma, la differenza:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 - \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 2 \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

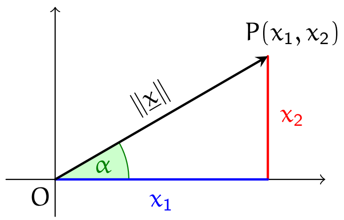
si annulla se e solo se $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$. ■

Prodotto scalare e vettori geometrici

Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico.
La norma della coppia $\underline{x} = (x_1, x_2)$,

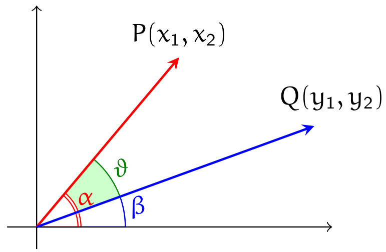
$$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \,,$$

per il teorema di Pitagora, è proprio la lunghezza del segmento $\overline{OP}$ (1a figura), ovvero il modulo del vettore geometrico $\overrightarrow{OP}$: $\quad \|\underline{x}\| = \|\overrightarrow{OP}\|$.



Per $\underline{x} \neq (0,0)$, l'angolo α in figura soddisfa:

$$\cos\alpha = x_1/\|\underline{x}\| \,, \qquad \sin\alpha = x_2/\|\underline{x}\| \,. \qquad (\star)$$



Dati $\underline{x} = (x_1, x_2)$ e $\underline{y} = (y_1, y_2)$ non nulli (2a figura), dalle formule di addizione di seno e coseno, e usando $(\star)$, ricaviamo:

$$\cos\vartheta = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|} = \frac{\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\|} \,,$$

in cui ϑ è l'angolo angolo convesso tra i due vettori ($0 \leqslant \vartheta \leqslant 180°$).

Abbiamo dimostrato (per vettori non nulli, ma è banalmente vero anche se sono zero):

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\| \cos\vartheta$$

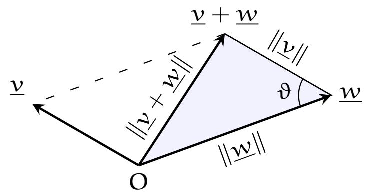
(Il prodotto scalare è il prodotto delle norme per il coseno dell'angolo angolo compreso fra i vettori.)

Osservazione. Due vettori geometrici non nulli sono perpendicolari se e solo se sono ortogonali (nel senso del prodotto scalare):

$$\vartheta = 90° \iff \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \|\underline{x}\|\,\|\underline{y}\| \cos\vartheta = 0$$

Nel caso dei vettori geometrici, la disuguaglianza:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\| \leqslant \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$$

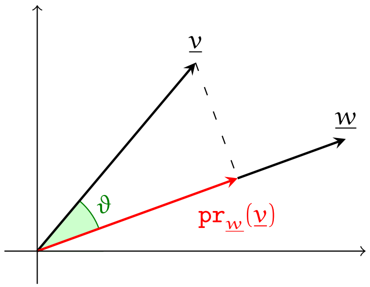


è la ben nota disuguaglianza triangolare della geometria euclidea:

in un triangolo la lunghezza di un qualsiasi suo lato non può essere superiore alla somma delle lunghezze degli altri due.

La proposizione successiva si riduce al Teorema di Pitagora: $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ se e solo se il triangolo in figura è rettangolo ($\vartheta = 90°$).

Dato un vettore $\underline{w} = (w_1, w_2)$ diverso da zero, ed un vettore $\underline{v} = (v_1, v_2)$ arbitrario (anche zero) indichiamo con $\mathtt{pr}_{\underline{w}}(\underline{v})$ la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ in direzione di $\underline{w}$, ovvero il vettore rosso in figura.



Proposizione

La proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{w}$ è data da:

$$\mathtt{pr}_{\underline{w}}(\underline{v}) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2}\,\underline{w}$$

Dimostrazione. Essendo $\underline{u} := \mathtt{pr}_{\underline{w}}(\underline{v})$ parallelo ad $\underline{w}$, si ha $\underline{u} = k\underline{w}$ per qualche $k \in \mathbb{R}$. Se $0 \leqslant \vartheta \leqslant 90°$, $\underline{u}$ e $\underline{w}$ hanno lo stesso orientamento e $k \geqslant 0$; altrimenti $k < 0$. Assumiamo che sia $0 \leqslant \vartheta \leqslant 90°$, ovvero $k \geqslant 0$ (la dimostrazione per $k < 0$ è analoga).

Vediamo dalla figura che la norma di $\underline{u}$ è pari a $\cos\vartheta \cdot \|\underline{v}\|$; ma è anche uguale a

$$\|k\underline{w}\| = \sqrt{(kw_1)^2 + (kw_2)^2} = k\|\underline{w}\| \,.$$

Quindi:

$$k = \cos\vartheta \cdot \frac{\|\underline{v}\|}{\|\underline{w}\|} = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|}\,\frac{\|\underline{v}\|}{\|\underline{w}\|} = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle}{\|\underline{w}\|^2} \,.$$

■

Esercizio (C. Carrara, es. 10.1 e 10.2)

Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ si calcoli il prodotto scalare $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j\rangle$ per $i, j = 1,2,3,4$ e si dica quali vettori sono ortogonali tra loro:

$$\underline{v}_1 = (6,3) \qquad \underline{v}_2 = (-1,0) \qquad \underline{v}_3 = (1,-2) \qquad \underline{v}_4 = (-2,0)$$

Nota: negli esercizi quando non è specificato il prodotto scalare, si intende sempre quello canonico.

Esercizio (C. Carrara, es. 10.3)

Dati i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$ si calcoli il prodotto scalare $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j\rangle$ per $i, j = 1, 2, \ldots, 6$ e dica quali vettori sono ortogonali tra loro:

$$\underline{v}_1 = (1,3,4) \qquad \underline{v}_2 = (0,-1,2) \qquad \underline{v}_3 = (1,2,1)$$
$$\underline{v}_4 = (-2,3,0) \qquad \underline{v}_5 = (1,1,1) \qquad \underline{v}_6 = (1,-3,2)$$

Esercizio (C. Carrara, es. 10.4)

Si calcoli la norma dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$:

$$\underline{v}_1 = (-2,5,1) \qquad \underline{v}_2 = (1,0,-2) \qquad \underline{v}_3 = (7,1,1)$$
$$\underline{v}_4 = (4,1) \qquad \underline{v}_5 = (10,1) \qquad \underline{v}_6 = (-1,-3)$$

Lezione 17

Insiemi ortogonali e ortonormali

[Abate, §11.3]

Definizione

Un insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k\}$ di vettori di uno spazio metrico V si dice ortogonale se

i) $\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = 0$ per ogni $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant k)$.

Se in aggiunta

ii) $\|\underline{u}_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, k$.

allora l'insieme si dice ortonormale.

Esempi

- Sia $V = \mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico. Se $\underline{u}_1 = (1,1)$ e $\underline{u}_2 = (1,-1)$, l'insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è ortogonale. Quindi $\mathcal{B} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^2$.
- Sia $V = \mathbb{R}^3$ con prodotto scalare canonico. Se $\underline{u}_1 = (1,0,1)$ e $\underline{u}_2 = (1,0,-1)$, l'insieme $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ è ortogonale (non è una base, poiché $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3).
- La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico.

Proposizione

Un insieme $I = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\} \subset V$ ortogonale è libero se e solo se $\underline{0} \notin I$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare l'implicazione "$\Leftarrow$". Sia

$$\underline{u} := a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \ldots + a_m\underline{v}_m .$$

Per la linearità del prodotto scalare:

$$\langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = a_1 \langle \underline{v}_1, \underline{v}_i \rangle + a_2 \langle \underline{v}_2, \underline{v}_i \rangle + \ldots + a_m \langle \underline{v}_m, \underline{v}_i \rangle \ .$$

Per ipotesi $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \ \forall\, i \neq j$, quindi tutti i termini della somma escluso l'i-esimo sono zero, e

$$\langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = a_i \langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle = a_i \|\underline{v}_i\|^2 \ .$$

Per ipotesi $\underline{v}_i \neq \underline{0}$, quindi $\|\underline{v}_i\| \neq 0$ e

$$\underline{u} = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \langle \underline{u}, \underline{v}_i \rangle = a_i \|\underline{v}_i\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$. Questo prova che l'insieme I è libero. ∎

Osservazione

In uno spazio vettoriale V di dimensione n, un insieme ortogonale di n vettori non nulli è una base di V.

Esempio

I tre vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,1) \qquad \underline{v}_2 = (1,-1,0) \qquad \underline{v}_3 = (1,1,-2)$$

formano una base (ortogonale) di $\mathbb{R}^3$.

Definizione

In analogia con l'esempio di $\mathbb{R}^2$ (con prodotto scalare canonico), dati due vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ di uno spazio metrico V ($\underline{w} \neq \underline{0}$), il vettore

$$\frac{\langle \underline{w}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{w}\|^2}\, \underline{w}$$

si dice proiezione di $\underline{v}$ in direzione di $\underline{w}$, e viene indicato con il simbolo "$\mathtt{pr}_{\underline{w}}(\underline{v})$".

Metodo di Gram-Schmidt

Sia $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n)$ una base di uno spazio metrico V. E' possibile ricavare da essa una base ortonormale come illustrato nel seguito (metodo di Gram-Schmidt). Il primo passo è definire dei vettori $(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n)$ in maniera ricorsiva, ponendo:

$$\underline{w}_1 := \underline{v}_1$$

e per ogni $i = 2, \ldots, n$:

$$\underline{w}_i := \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathtt{pr}_{\underline{w}_j}(\underline{v}_i) = \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2}\, \underline{w}_j$$

Lemma L'insieme $\mathcal{B} = (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n)$ è una base ortogonale di V. [Abate, teorema 11.6]

Il secondo passo consiste nel "normalizzare" i vettori ottenuti. Chiamiamo

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|}, \qquad \underline{u}_2 = \frac{\underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|}, \qquad \ldots \qquad \underline{u}_n = \frac{\underline{w}_n}{\|\underline{w}_n\|}.$$

Corollario. L'insieme $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n)$ è una base ortonormale di V.

Dimostrazione del Lemma. Per l'osservazione nella slide 3, è sufficiente dimostrare che i vettori di $\mathcal{B}$ sono non nulli e ortogonali fra di loro.

Notiamo che $\underline{w}_i \in \mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i)$. I vettori di $\mathcal{B}$ sono non nulli, infatti $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e per $i \geqslant 2$, se per assurdo fosse $\underline{w}_i = \underline{0}$, se ne dedurrebbe che

$$\underline{v}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2}\, \underline{w}_j$$

appartiene a $\mathcal{L}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1})$, contraddicendo l'ipotesi che $(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ è una base.

L'ortogonalità si dimostra per induzione. Chiaramente $\{\underline{w}_1\}$ è un insieme ortogonale. Sia $2 \leqslant i \leqslant n$. Per ipotesi induttiva, assumiamo che $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_{i-1}\}$ siano a due a due ortogonali, e mostriamo che $\underline{w}_i \perp \underline{w}_k \ \forall\, 1 \leqslant k \leqslant i-1$. Per costruzione

$$\langle \underline{w}_k, \underline{w}_i \rangle = \Big\langle \underline{w}_k, \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2}\, \underline{w}_j \Big\rangle = \langle \underline{w}_k, \underline{v}_i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_j \rangle}{\|\underline{w}_j\|^2} \langle \underline{w}_k, \underline{w}_j \rangle$$

Ma $\langle \underline{w}_k, \underline{w}_j \rangle = 0 \ \forall\, j \neq k$ (ipotesi induttiva), quindi

$$\langle \underline{w}_k, \underline{w}_i \rangle = \langle \underline{w}_k, \underline{v}_i \rangle - \frac{\langle \underline{v}_i, \underline{w}_k \rangle}{\|\underline{w}_k\|^2} \langle \underline{w}_k, \underline{w}_k \rangle = 0$$

■

Esercizio

Determinare una base ortonormale del sottospazio $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generato dai tre vettori (linearmente indipendenti) $\underline{v}_1 = (1,1,1,0)$, $\underline{v}_2 = (0,1,2,0)$ e $\underline{v}_3 = (5,3,-5,3)$.

Soluzione. Come primo passo calcoliamo i vettori

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 = (1,1,1,0)\,,$$

$$\begin{aligned}\underline{w}_2 &= \underline{v}_2 - \mathtt{pr}_{\underline{w}_1}(\underline{v}_2) = (0,1,2,0) - \tfrac{\langle (1,1,1,0),(0,1,2,0)\rangle}{\|(1,1,1,0)\|^2}(1,1,1,0) \\ &= (0,1,2,0) - \tfrac{3}{3}(1,1,1,0) = (-1,0,1,0)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{w}_3 &= \underline{v}_3 - \mathtt{pr}_{\underline{w}_1}(\underline{v}_3) - \mathtt{pr}_{\underline{w}_2}(\underline{v}_3) \\ &= (5,3,-5,3) - \tfrac{\langle (5,3,-5,3),(1,1,1,0)\rangle}{\|(1,1,1,0)\|^2}(1,1,1,0) - \tfrac{\langle (5,3,-5,3),(-1,0,1,0)\rangle}{\|(-1,0,1,0)\|^2}(-1,0,1,0) \\ &= (5,3,-5,3) - \tfrac{3}{3}(1,1,1,0) + \tfrac{10}{2}(-1,0,1,0) = (-1,2,-1,3)\,.\end{aligned}$$

Normalizzando i vettori otteniamo una base ortonormale $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$:

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{w}_1}{\|\underline{w}_1\|} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)\,, \qquad \underline{u}_2 = \frac{\underline{w}_2}{\|\underline{w}_2\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0)\,,$$

$$\underline{u}_3 = \frac{\underline{w}_3}{\|\underline{w}_3\|} = \tfrac{1}{\sqrt{15}}(-1,2,-1,3)\,.$$

✓

Proprietà delle basi ortonormali

Proposizione [Abate, prop. 11.4]

Sia $\mathcal{B} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n)$ una base ortonormale di V, e $\underline{v} \in V$ un vettore qualsiasi. La componente i-esima di $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ è data da

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle\,.$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle\, \underline{u}_1 + \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle\, \underline{u}_2 + \ldots + \langle \underline{v}, \underline{u}_n \rangle\, \underline{u}_n \\ &= \mathtt{pr}_{\underline{u}_1}(\underline{v}) + \mathtt{pr}_{\underline{u}_2}(\underline{v}) + \ldots + \mathtt{pr}_{\underline{u}_n}(\underline{v})\,.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ le componenti di $\underline{v}$, ovvero

$$\underline{v} = a_1 \underline{u}_1 + \ldots + a_n \underline{u}_n\,.$$

Dalla definizione di insieme ortonormale e dalla linearità del prodotto scalare segue che

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle = a_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle + \sum_{j \neq i} a_j \langle \underline{u}_j, \underline{u}_i \rangle = a_i \|\underline{u}_i\|^2 + \sum_{j \neq i} a_j \cdot 0 = a_i$$

cioè $a_i = \langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle$, per ogni $i = 1, \ldots, n$. ■

Esercizio

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico, si consideri la base ortonormale formata dai vettori

$$\underline{u}_1 = \tfrac{1}{5}(3,4) \qquad \underline{u}_2 = \tfrac{1}{5}(4,-3)$$

Determinare le componenti del vettore

$$\underline{v} = (8,-1)$$

nella base $\mathcal{B} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$.

Soluzione. Dobbiamo determinare due numeri reali a_1, a_2 tali che $\underline{v} = a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2$.

Tipicamente, bisognerebbe risolvere due equazioni nelle incognite a_1, a_2.
Siccome però $\mathcal{B}$ è ortonormale, dalla proposizione precedente segue che

$$a_1 = \langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle = \underline{v} \cdot {}^t\underline{u}_1 = \tfrac{1}{5}(8 \cdot 3 - 1 \cdot 4) = 4$$

$$a_2 = \langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle = \underline{v} \cdot {}^t\underline{u}_2 = \tfrac{1}{5}(8 \cdot 4 + 1 \cdot 3) = 7$$

✓

Sottospazi ortogonali

[Abate, §11.4]

Definizione

Sia V uno spazio metrico e $W \subseteq V$ un sottospazio. L'insieme

$$W^\perp := \{\underline{v} \in V : \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \ \forall\, \underline{w} \in W\}$$

è detto complemento ortogonale di W in V.

Proposizione

$W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W^\perp$, il vettore $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$ soddisfa

$$\langle a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2, \underline{w} \rangle = a_1 \langle \underline{v}_1, \underline{w} \rangle + a_2 \langle \underline{v}_2, \underline{w} \rangle = 0$$

per ogni $\underline{w} \in W$. Quindi $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 \in W^\perp$ e per il criterio c) di sottospazio l'insieme $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V. ∎

Lemma

Siano $\underline{v}, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$ vettori di uno spazio metrico V. Se $\underline{v}$ è ortogonale a ciascuno dei vettori $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k$, allora è ortogonale ad ogni loro combinazione lineare.

Dimostrazione. Per ipotesi $\langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle = 0 \ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k$. Dalla linearità del prodotto scalare segue che

$$\langle \underline{v}, a_1\underline{w}_1 + a_2\underline{w}_2 + \ldots + a_k\underline{w}_k \rangle = a_1 \langle \underline{v}, \underline{w}_1 \rangle + a_2 \langle \underline{v}, \underline{w}_2 \rangle + \ldots + a_k \langle \underline{v}, \underline{w}_k \rangle = 0$$

per ogni $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. ∎

Corollario

Sia $W = \mathcal{L}(\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_k)$ un sottospazio di V. Allora:

$$\underline{v} \in W^\perp \iff \langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, k$$

Esercizio

Sia $W = \mathcal{L}\big((1,0,1)\,,\,(1,1,1)\big) \subset \mathbb{R}^3$. Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$.

Enunciamo senza dimostrazione:

Proposizione

Sia V uno spazio metrico finitamente generato e $U, W \subseteq V$ due sottospazi. Allora:

1. $\{\underline{0}\}^\perp = V$ e $V^\perp = \{\underline{0}\}$;
   (ogni vettore è ortogonale a $\underline{0}$, e $\underline{0}$ è l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di V)
2. $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$; $W + W^\perp = V$;
3. $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$;
4. se $U = W^\perp$, allora $U^\perp = W$.
   (la relazione "essere il complemento ortogonale di" è simmetrica)

Osservazione sui sistemi lineari

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$, ed $\underline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ la sua i-esima riga.

Una soluzione di un sistema omogeneo di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

è un vettore $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ortogonale a tutti i vettori $\underline{a}_i$ (rispetto al prodotto scalare canonico):

$$\langle \underline{a}_i, \underline{x} \rangle = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0 \qquad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant m\,.$$

Se $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è lo spazio generato dalle righe di A ed S la soluzione generale del sistema:

$$S = W^{\perp}\,.$$

In termini di applicazioni lineari: lo spazio generato dalle colonne di A è l'immagine di L_A, lo spazio generato dalle righe di A è il complemento ortogonale del nucleo ($S = \ker(L_A)$).

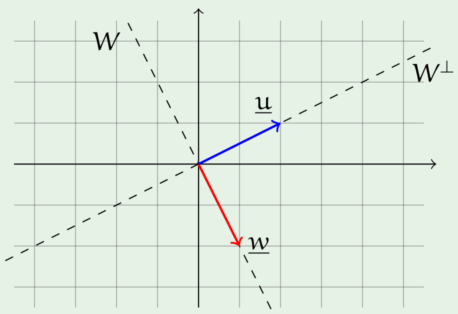
Esempio

Sia

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\}$$

Una base di W è data dalla soluzione $\underline{w} = (1, -2)$.

Il vettore $\underline{u} = (2, 1)$, unica riga della matrice dei coefficienti, è una base di $W^{\perp}$.



Esercizio (esame del 04/07/2011)

Sia V il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V := \mathcal{L}\big\{(0,1,5,-1), (1,1,0,1), (2,1,0,0), (3,3,5,0)\big\}\,.$$

a) Si determini, se esiste, una base di V.

b) Dire se il vettore $\underline{w} = (1, -2, 0, 1)$ appartiene al complemento ortogonale di V.

Soluzione. a) Riduciamo la matrice 4×4 che ha per righe i generatori di V:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ * \end{bmatrix}$$

Una base di V è data da $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

b) Si ha:

$$\begin{aligned} \langle \underline{v}_1, \underline{w} \rangle &= \ \ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = \ \ 2 - 2 = 0 \\ \langle \underline{v}_2, \underline{w} \rangle &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1 + 1 = 0 \\ \langle \underline{v}_3, \underline{w} \rangle &= -3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = -3 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{w} \notin V^{\perp} \end{aligned}$$

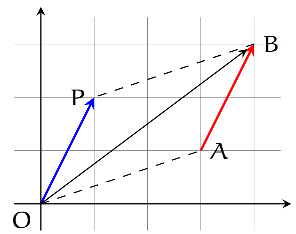
✓

Lezioni 18-20: Geometria analitica

(Esercizi: C. Carrara, §2)

Richiami sui vettori geometrici

Siano A, B, P tre punti del piano, di coordinate date dalle coppie $\underline{a} = (a_1, a_2)$, $\underline{b} = (b_1, b_2)$, $\underline{p} = (p_1, p_2)$, in un sistema di riferimento cartesiano di origine O.



I vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OP}$ hanno uguale norma e direzione se e solo se i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{OP}$ sono lati opposti di un parallelogramma.

Rappresentano lo stesso vettore libero (quindi $P - O = B - A$) se in aggiunta hanno lo stesso verso (come in figura). In questo caso, dalla regola del parallelogramma

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} \qquad \text{cioè} \qquad \underline{a} + \underline{p} = \underline{b}$$

ricaviamo le coordinate di P, date dal vettore di $\mathbb{R}^2$: $\quad \underline{p} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Due vettori applicati non nulli $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno la stessa direzione se e solo se rappresentano vettori liberi proporzionali, ossia:

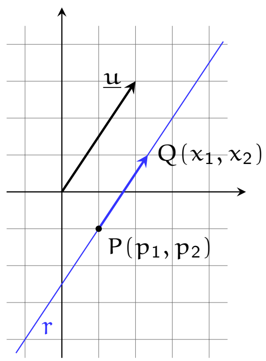
$$\exists\, t \in \mathbb{R} \text{ tale che } B - A = t(D - C)$$

Geometria di $\mathbb{R}^2$

[Abate, §2.3 e §10]

Equazioni parametriche e cartesiane di una retta

Sia $\underline{u} = (u_1, u_2) \neq \underline{0}$ un vettore non nullo e P un punto di coordinate $\underline{p} = (p_1, p_2)$. Sia r la retta passante per P e parallela ad $\underline{u}$ (come in figura).



Un punto Q di coordinate $\underline{x} = (x_1, x_2)$ appartiene ad r se e solo se $Q - P$ ed $\underline{u}$ hanno la stessa direzione:

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \, : \, Q - P = t\underline{u}$$

Si ottiene in questo modo una equazione parametrica della retta r:

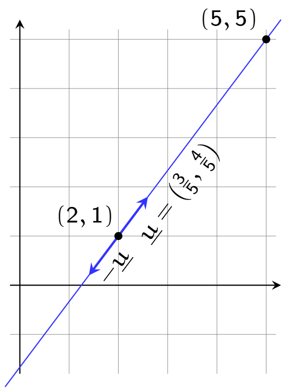
$$\underline{x} = \underline{p} + t\underline{u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = p_1 + tu_1 \\ x_2 = p_2 + tu_2 \end{cases} \qquad (\star)$$

Al variare di $t \in \mathbb{R}$, l'equazione $(\star)$ descrive tutti i punti appartenenti alla retta r (il punto P si ottiene ad esempio per $t = 0$). Nell'esempio in figura, è disegnata la retta di direzione $\underline{u} = (2, 3)$ e passante per il punto $\underline{p} = (1, -1)$.

Versori di una retta

L'equazione parametrica $\underline{x} = \underline{p} + t\underline{u}$ di una retta non è unica:

- $\underline{u}$ e $k\underline{u}$ hanno la stessa direzione ($\forall\, k \neq 0$);
- $\underline{p}$ è un qualsiasi punto della retta stessa.



Esercizio

Riconoscere che le tre equazioni seguenti descrivono la stessa retta:

$$r : \underline{x} = (2, 1) + t(3, 4)$$
$$r' : \underline{x} = (2, 1) + t'(6, 8)$$
$$r'' : \underline{x} = (-1, -3) + t''(6, 8)$$

Soluzione. Dalla 1^a equazione si ottiene la 2^a con la sostituzione $t = 2t'$. Dalla 1^a equazione si ottiene la 3^a con la sostituzione $t = 2t'' - 1$. Le tre equazioni descrivono lo stesso insieme di punti, solo "parametrizzato" in tre modi differente. ✓

Possiamo ridurre l'ambiguità nella scelta di $\underline{u}$ chiedendo che abbia norma 1. Esistono solo due vettori di norma 1 paralleli ad r e si dicono versori della retta.

Vettore normale ed equazione cartesiana

Dall'equazione parametrica di una retta r si può ottenere una equazione detta equazione cartesiana eliminando il parametro t.

Esempio

$$r: \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 - 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = x_1 - 2 \\ x_2 = 1 - 2(x_1 - 2) \end{cases} \iff \boxed{2x_1 + x_2 - 5 = 0}$$

Un vettore normale ad r è vettore non nullo perpendicolare alla retta stessa. Il vettore

$$\underline{n} = (-u_2, u_1)$$

è ortogonale ad $\underline{u} = (u_1, u_2)$, e tutti i vettori normali sono proporzionali ad esso.

In generale, possiamo moltiplicare l'eq. $(\star)$, $\underline{x} - \underline{p} = t\underline{u}$, per il vettore normale $\underline{n}$. Si ottiene:

$$\langle \underline{n}, \underline{x} - \underline{p} \rangle = t \langle \underline{n}, \underline{u} \rangle = 0 \iff -u_2 x_1 + u_1 x_2 + (u_2 p_1 - u_1 p_2) = 0 \ .$$

Chiamando $a = -u_2$, $b = u_1$ e $c = u_2 p_1 - u_1 p_2$ si trova l'equazione cartesiana

$$a x_1 + b x_2 + c = 0 \ . \qquad (\dagger)$$

Una equazione del tipo $(\dagger)$ rappresenta una retta se e solo se $\underline{n} = (a, b) \neq (0, 0)$.

Rette ortogonali

Sia r la retta di equazione

$$a x_1 + b x_2 + c = 0$$

e $\underline{p} = (p_1, p_2)$ un punto qualsiasi del piano. Vogliamo scrivere l'equazione parametrica della retta r' passante per $\underline{p}$ ed ortogonale ad r. Evidentemente la direzione di r' è data dal vettore $\underline{n} = (a, b)$, che è perpendicolare ad r. Quindi r' ha equazione

$$r': \begin{cases} x_1 = p_1 + ta \\ x_2 = p_2 + tb \end{cases}$$

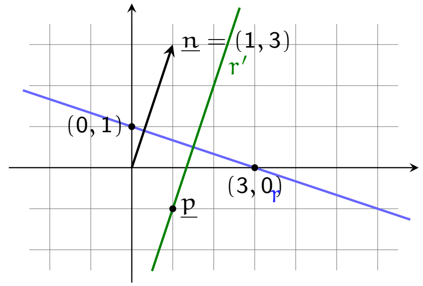
Esempio

Se r è la retta di equazione

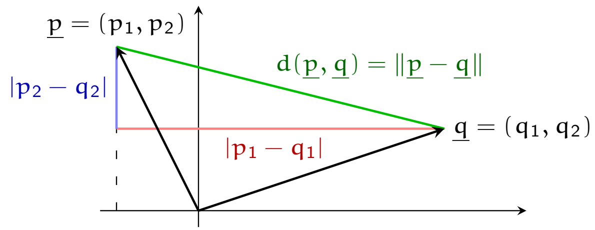
$$x_1 + 3x_2 - 3 = 0$$

e $\underline{p} = (1, -1)$, allora r' ha equazione

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 1 + t \\ x_2 = -1 + 3t \end{cases}$$



Norma e distanza



Ricordiamo che la distanza del punto P di coordinate $\underline{p} = (p_1, p_2)$ dall'origine, ovvero la lunghezza del segmento $\overline{OP}$, è data da

$$\|\underline{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \ .$$

Più in generale (vedere figura), la distanza fra due punti di coordinate $\underline{p} = (p_1, p_2)$ e $\underline{q} = (q_1, q_2)$, indicata con $d(\underline{p}, \underline{q})$, è la norma del vettore $\underline{p} - \underline{q}$, ossia

$$d(\underline{p}, \underline{q}) := \|\underline{p} - \underline{q}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \ .$$

Distanza punto-retta

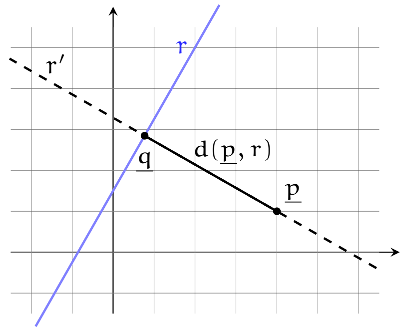
La distanza di un punto $\underline{p}$ da una retta r è la lunghezza del segmento che va da $\underline{p}$ alla proiezione ortogonale di $\underline{p}$ su r, sia essa $\underline{q}$.

Se r ha equazione cartesiana:

$$r: \ a x_1 + b x_2 + c = 0$$

la retta r' ortogonale ad r passante per $\underline{p}$ è:

$$r': \begin{cases} x_1 = p_1 + ta \\ x_2 = p_2 + tb \end{cases}$$



L'intersezione fra r ed r' si ottiene sostituendo le espressioni di x_1 e x_2 in funzione di t nella prima equazione e ricavando t. Si ottiene

$$a x_1 + b x_2 + c = a(p_1 + ta) + b(p_2 + tb) + c = 0$$

ovvero

$$t = t_0 := -\frac{a p_1 + b p_2 + c}{a^2 + b^2} \ .$$

Sostituendo il valore di t trovato nelle equazioni parametriche di r' si trovano le coordinate del punto $\underline{q} = (x_1, x_2)$, date da

$$x_1 = p_1 + t_0 a \,, \qquad x_2 = p_2 + t_0 b \,.$$

La distanza fra $\underline{p}$ ed r è quindi data da

$$d(\underline{p}, r) = \|\underline{p} - \underline{q}\| \,.$$

Notiamo che

$$\underline{p} - \underline{q} = -t_0(a, b)$$

e

$$d(\underline{p}, r) = \|\underline{p} - \underline{q}\| = |t_0| \cdot \|(a, b)\| = \left| \frac{ap_1 + bp_2 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} \,.$$

Formula per la distanza punto-retta

La distanza fra un punto $\underline{p} = (p_1, p_2)$ e una retta r di equazione $ax_1 + bx_2 + c = 0$ è:

$$d(\underline{p}, r) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \,.$$

Esempio

La distanza fra la retta r di equazione $7x_1 - 4x_2 + 6 = 0$ ed il punto $\underline{p} = (4, 1)$ è

$$d(\underline{p}, r) = \frac{|7 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{30}{\sqrt{65}} \,.$$

Esercizio

Si determini la distanza del punto $\underline{p} = (2, 1)$ dalla retta r di equazione $2x_1 - x_2 + 5 = 0$.

Si determini la distanza del punto $\underline{p}' = (1, 3)$ dalla retta r' di equazione $x_1 + 2x_2 - 7 = 0$.

Soluzione. Si ha

$$d(\underline{p}, r) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \,,$$

e

$$d(\underline{p}', r') = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 0 \,.$$

La distanza di $\underline{p}'$ da r' è zero. Si può in effetti notare che $\underline{p}' \in r'$. ✓

Retta passante per due punti

Due punti distinti, di cooordinate $\underline{a} = (a_1, a_2)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2)$, individuano un'unica retta r.

Un'equazione parametrica di r è data da:

$$\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) \qquad (*)$$

Si tratta evidentemente di una retta (il vettore $\underline{u} := \underline{b} - \underline{a}$ che ne dà la direzione è diverso da zero), e passa sia per $\underline{a}$ ($t = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{a}$) che per $\underline{b}$ ($t = 1 \Rightarrow \underline{x} = \underline{b}$).

L'equazione $(*)$ è soddisfatta se e solo se i vettori $\underline{x} - \underline{a}$ e $\underline{b} - \underline{a}$ sono linearmente dipendenti, ossia (teorema degli orlati):

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (**)$$

L'equazione $(**)$ è una equazione cartesiana di r, equivalente a (fare la verifica):

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Esempio

Scriviamo le equazioni della retta passante per i due punti $\underline{a} = (1, 2)$ e $\underline{b} = (-2, 4)$.

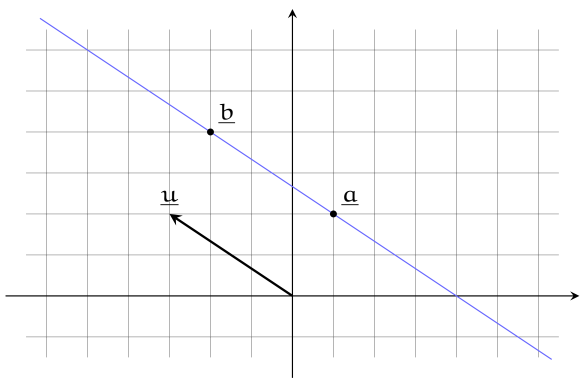
La direzione è data da $\underline{u} = \underline{b} - \underline{a} = (-3, 2)$.

EQUAZIONI PARAMETRICHE:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 3t \\ x_2 = 2 + 2t \end{cases}$$

EQUAZIONE CARTESIANA:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2x_1 + 3x_2 - 8 = 0 \,.$$



Aree di triangoli e parallelogrammi

[Abate, §8.2]

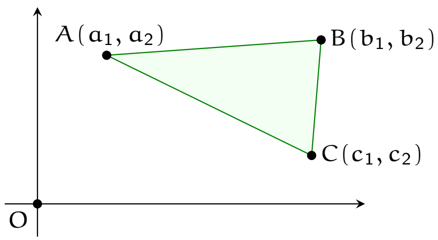
Più in generale, si può dimostrare che…

Teorema

Il modulo del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

è due volte l'area del triangolo $\widehat{ABC}$.



La formula è valida qualunque sia la disposizione dei punti A, B, C.

Tre punti $A, B, X(x_1, x_2)$ sono allineati se e solo se l'area di $\widehat{XAB}$ è zero:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Ritroviamo in questo modo l'equazione cartesiana della retta passante per A e B.

Esercizio

Stabilire se i punti $(1,3)$, $(-2,-1)$ e $(3,1)$ sono allineati.

Soluzione. Scriviamo i punti come righe di una matrice nella slide precedente. Calcolando il determinante per riduzione e poi con lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14 \neq 0 \,.$$

Quindi i punti non sono allineati. ✓

Esercizio

Stabilire se i punti $(1,1)$, $(0,-3)$ e $(2,5)$ sono allineati.

Soluzione. Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Quindi i tre punti sono allineati. ✓

Intersezione fra due rette

[Abate, §10.4]

Date due rette r ed r', $r \cap r'$ è il luogo dei punti le cui coordinate risolvono il sistema:

$$\begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0 \end{cases}$$

in cui la prima equazione è un'equazione cartesiana della retta r, la seconda è un'equazione cartesiana della retta r', e per ipotesi $(a,b) \neq (0,0)$ e $(a',b') \neq (0,0)$.

Detta $(A|B)$ la matrice completa del sistema, evidentemente

$$1 \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(A|B) \leqslant 2 \,.$$

Usando il teorema di Rouché-Capelli, possiamo distinguere tre casi:

1. se $\rho(A) = 1$ e $\rho(A|B) = 2$ il sistema non ammette soluzione, e $r \cap r' = \varnothing$ è l'insieme vuoto (questo vuol dire che le rette r e r' sono parallele);
2. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 1$ le due righe della matrice $(A|B)$ sono proporzionali, e le due rette coincidono: $r = r'$; in questo caso $r \cap r' = r$ è una retta;
3. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$ il sistema ammette un'unica soluzione, e $r \cap r'$ è un punto.

Esempio

Siano r e r' le rette di equazioni cartesiane

$$r \;:\; 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$$
$$r' :\; 4x_1 - 6x_2 = 0$$

Si ha $\rho(A) = 1$ e $\rho(A|B) = 2$: le due rette sono parallele e non coincidenti.

Esempio

Siano r e r' le rette di equazioni cartesiane

$$r \;:\; 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$$
$$r' :\; 4x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

Si ha $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$: le due rette si incontrano in un punto.

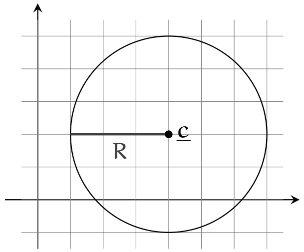
Esempio

Siano r e r' le rette di equazioni cartesiane

$$r \;:\; 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$$
$$r' :\; 4x_1 - 6x_2 + 2 = 0$$

Si ha $\rho(A) = \rho(A|B) = 1$: le due rette coincidono.

Circonferenze



Una circonferenza di centro $\underline{c} = (c_1, c_2)$ e raggio $R > 0$ è l'insieme dei punti del piano a distanza R dal punto $\underline{c}$. Quindi un punto $\underline{x}$ è sulla circonferenza se e solo se:

$$d(\underline{x}, \underline{c}) \equiv \|\underline{x} - \underline{c}\| = R \ ,$$

Elevando al quadrato ambo i membri si ottiene l'equazione della circonferenza:

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = R^2 \ .$$

Nell'esempio in figura, $\underline{c} = (4, 2)$ ed $R = 3$.

Intersezione retta-circonferenza

L'intersezione fra una circonferenza C di equazione $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = R^2$ ed una retta r di equazione $ax_1 + bx_2 + d = 0$ è data dalle soluzioni del sistema (non lineare):

$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = R^2 \\ ax_1 + bx_2 + d = 0 \end{cases}$$

Per trovare le intersezioni si procede per sostituzione. Sappiamo che $(a, b) \neq (0, 0)$. Supponiamo che ad esempio sia $a \neq 0$, allora dalla seconda equazione ricaviamo

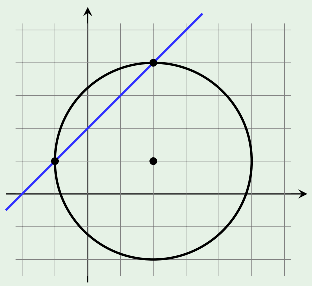
$$x_1 = -\frac{1}{a}(bx_2 + d)$$

che sostituita nella prima dà una equazione di 2° grado in una sola variabile. Il numero di soluzioni (reali) dipenderà dal segno del discriminante Δ. Si hanno tre possibilità:

1. se $\Delta > 0$, retta e circonferenza si incontrano in due punti;
2. se $\Delta = 0$, retta e circonferenza si incontrano in un solo punto (in questo caso la retta si dice tangente alla circonferenza);
3. se $\Delta < 0$, l'intersezione è vuota.

Esempio

Determiniamo l'intersezione tra la retta di equazione $x_1 - x_2 + 2 = 0$ e la circonferenza di centro $(2, 1)$ e raggio 3.



Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $x_2 = x_1 + 2$, che sostituita nella prima dà

$$(x_1 - 2)^2 + (x_1 + 1)^2 - 9 = 0 \ .$$

Sviluppando i quadrati si trova

$$2x_1^2 - 2x_1 - 4 = 0$$

che ha soluzioni $x_1 = 2$ e $x_1 = -1$. Usando $x_2 = x_1 + 2$ si evince che l'intersezione è data dai due punti di coordinate $(2, 4)$ e $(-1, 1)$.

Intersezione fra due circonferenze

Consideriamo due circonferenze, la prima di centro $\underline{c} = (c_1, c_2)$ e raggio R e la seconda di centro $\underline{c}' = (c_1', c_2')$ e raggio R'. Se le due circonferenze hanno lo stesso centro, allora coincidono oppure hanno intersezione vuota. Supponiamo quindi $\underline{c} \neq \underline{c}'$.

L'intersezione è l'insieme delle soluzioni del sistema (non lineare):

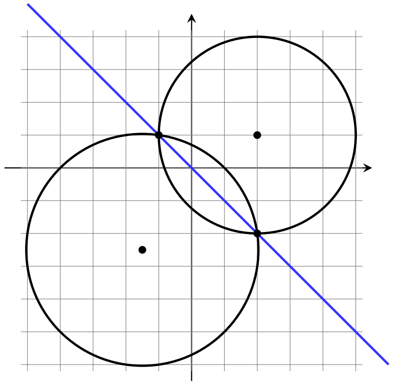
$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = R^2 \\ (x_1 - c_1')^2 + (x_2 - c_2')^2 = R'^2 \end{cases}$$

Notiamo che sottraendo membro a membro le due equazioni, i termini di secondo grado scompaiono. Si ottiene in questo modo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = R^2 \\ 2(c_1 - c_1')x_1 + 2(c_2 - c_2')x_2 = (c_1^2 - c_1'^2) + (c_2^2 - c_2'^2) - R^2 + R'^2 \end{cases}$$

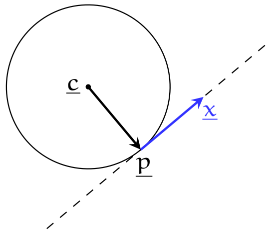
La seconda equazione descrive una retta, ed il problema è ridotto allo studio delle intersezioni fra retta e circonferenza. Anche in questo caso, le due circonferenze si possono incontrare in un punto, in due o in nessuno.

Nella figura qui sotto è mostrata come esempio l'intersezione fra la circonferenza di centro $(2,1)$ e raggio 3 e la circonferenza di centro $(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2})$ e raggio $5\sqrt{2}/2$. Le due circonferenze si incontrano nei punti $(-1,1)$ e $(2,-2)$. Sottraendo le equazioni delle due circonferenze si ottiene l'equazione di una retta: questa è la retta in blu nella figura.



Equazione della tangente

Consideriamo una circonferenza di centro $\underline{c}$ e raggio R. Sia $\underline{p}$ un punto sulla circonferenza, ed r la retta tangente alla circonferenza nel punto $\underline{p}$.



$\underline{x}$ appartiene ad r se e solo se il vettore $\underline{x}-\underline{p}$ è ortogonale al vettore $\underline{p}-\underline{c}$ (vedere figura).

Una equazione cartesiana di r è quindi data da:

$$\langle \underline{p}-\underline{c}, \underline{x}-\underline{p} \rangle = 0$$

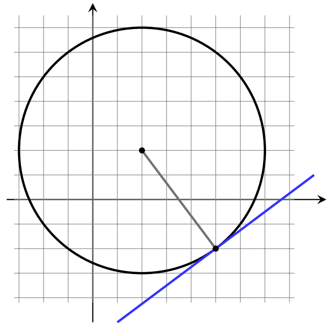
Esempio

Nell'esempio nella figura a fianco, si ha:

$$\underline{c} = (2,2) \qquad R = 5 \qquad \underline{p} = (5,-2)$$

L'equazione della tangente è:

$$3x_1 - 4x_2 - 23 = 0 \ .$$



Lezione 19

Geometria di $\mathbb{R}^3$

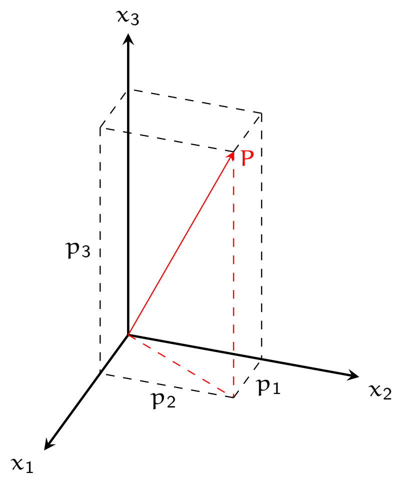
Coordinate di un punto nello spazio tridimensionale

Introducendo un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale, è possibile individuare un punto P dello spazio tridimensionale attraverso una terna di coordinate $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$.

Graficamente, il punto P è il vertice di un parallelepipedo rettangolo i cui lati hanno lunghezza data dal modulo di p_1, p_2 e p_3.

Esiste una corrispondenza biunivoca fra punti, vettori applicati nell'origine O e vettori liberi:

$$P \quad \longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} \quad \longleftrightarrow \quad P - O$$



Questi tre enti matematici verranno spesso identificati con la terna di coordinate di P.

Rette e piani: equazioni parametriche

Come in 2d, anche in 3d due vettori applicati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ non nulli hanno la stessa direzione se e solo se i corrispondenti vettori liberi sono linearmente dipendenti:

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ B - A = t(D - C)$$

Una retta r è univocamente determinata da una direzione $\underline{u}$ (che specifica il fascio di rette parallele a cui appartiene) ed un punto P appartenente alla retta stessa.

Un punto Q, di coordinate $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$, appartiene ad r se e solo se i vettori $Q - P$ ed $\underline{u}$ sono paralleli. Da questa osservazione si ricavano le equazioni parametriche di r:

$$\underline{x} = \underline{p} + t\underline{u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = p_1 + tu_1 \\ x_2 = p_2 + tu_2 \\ x_3 = p_3 + tu_3 \end{cases}$$

I dati $\underline{u}$ e $\underline{p}$ non sono univocamente determinati da r: $\underline{u}$ può essere moltiplicato per uno scalare diverso da zero, e $\underline{p}$ può essere sostituito da un qualsiasi punto di r.

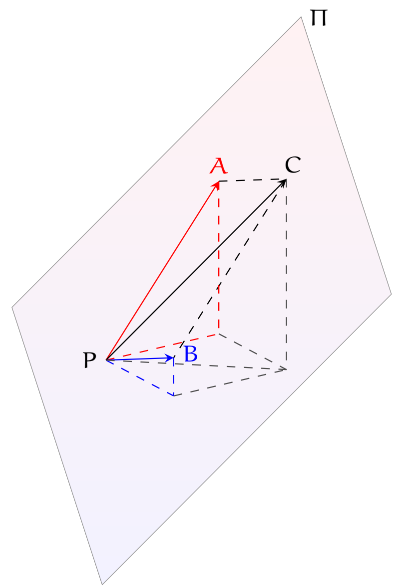
Se $\|\underline{u}\| = 1$, il vettore $\underline{u}$ si dice versore della retta r.

La somma di due vettori $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ applicati nello stesso punto P è data dalla diagonale $\overrightarrow{PC}$ del parallelogramma che ha i due vettori come lati.

Siano $\underline{u} = A - P$ e $\underline{v} = B - P$. Per ogni $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ i vettori $t_1\underline{u}$ ed $\underline{u}$ hanno la stessa direzione, così come i vettori $t_2\underline{v}$ e $\underline{v}$.

La somma $t_1\underline{u} + t_2\underline{v}$ è rappresentata da un vettore $\overrightarrow{PQ}$ complanare ad $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.

Se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti, esiste un unico piano Π contenente $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ ed ogni vettore complanare $\overrightarrow{PQ}$ è dato da una loro combinazione lineare.



Un punto Q di coordinate $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ appartiene a Π se e solo se

$$\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ : \ Q - P = t_1\underline{u} + t_2\underline{v}$$

Dall'ultima osservazione si ricavano le equazioni parametriche del piano Π passante per $\underline{p}$ e di direzione data da due vettori linearmente indipendenti $\underline{u}$ e $\underline{v}$:

$$\underline{x} = \underline{p} + t_1\underline{u} + t_2\underline{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = p_1 + t_1u_1 + t_2v_1 \\ x_2 = p_2 + t_1u_2 + t_2v_2 \\ x_3 = p_3 + t_1u_3 + t_2v_3 \end{cases}$$

Al variare di $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ da queste equazioni si ottengono tutti i punti Π.

Notiamo che:

- Se $\underline{p} = \underline{0} \Rightarrow \Pi = \mathcal{L}(\underline{u}, \underline{v})$ è lo spazio generato dai vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$.
- Se $\underline{p} \neq \underline{0} \Rightarrow \Pi$ è parallelo a $\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{v})$ (ricordiamo che due piani si dicono paralleli se non hanno punti in comune).

Se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente dipendenti, si ritrova l'equazione di una retta (uno dei due parametri t_1, t_2 è superfluo e può essere eliminato).

Osservazione: come in $\mathbb{R}^2$, anche in $\mathbb{R}^3$ è possibile eliminare il parametro t dalle equazioni parametriche di una retta, o i parametri t_1, t_2 dalle equazioni parametriche di un piano, ed ottenere delle equazioni cartesiane.

Esempio

Si consideri la retta $r \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \quad 1 - t \\ x_2 = -3 - 2t \\ x_3 = \quad 5 + 3t \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $t = 1 - x_1$, che sostituita nelle altre due dà:

$$\begin{cases} x_2 = -3 + 2x_1 - 2 \\ x_3 = \quad 5 - 3x_1 + 3 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - 8 = 0 \end{cases}$$

Esempio

Si consideri il piano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 2 - t_1 - t_2 \\ x_3 = t_2 \end{cases}$$

Risolvendo le ultime due equazioni rispetto a t_1 e t_2 si trova $t_1 = 2 - x_2 - x_3$ e $t_2 = x_3$, che sostituite nella prima danno l'equazione cartesiana:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0 .$$

Equazione cartesiana di un piano

Se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (e $d \in \mathbb{R}$), l'equazione cartesiana:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

descrive un piano Π. Per convincersene, basta scrivere la soluzione generale in funzione di due parametri reali. Se ad esempio $a \neq 0$, si ricava

$$\begin{cases} x_1 = -a^{-1}(bt_1 + ct_2 + d) \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases}$$

La direzione è data dai vettori $\underline{u} = (-a^{-1}b, 1, 0)$ e $\underline{v} = (-a^{-1}c, 0, 1)$. Questi sono linearmente indipendenti, e quindi si tratta effettivamente di un piano.

Il vettore $\underline{n} := (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ è ortogonale al sottospazio $\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{v})$ e quindi al piano Π. Infatti $\underline{u}, \underline{v}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$\langle \underline{n}, \underline{x} \rangle = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Chiamiamo $\underline{n}$ vettore normale e le sue componenti parametri direttori di Π.

Data una equazione cartesiana di un piano Π:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \qquad (\dagger)$$

risolvendola si possono trovare delle equazioni parametriche, della forma

$$\underline{x} = \underline{p} + t_1\underline{u} + t_2\underline{v} \qquad (\ddagger)$$

I vettori $\underline{u}, \underline{v}$ formano una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato (ossia il piano $\mathcal{L}(\underline{u}, \underline{v})$ passante per l'origine e parallelo a Π) , e $\underline{p}$ è una qualsiasi soluzione particolare (che esiste, se i coefficienti di $(\dagger)$ non sono tutti zero).

Viceversa, date delle equazioni parametriche $(\ddagger)$ di un piano, notando che $(\ddagger)$ equivale a $\underline{x} - \underline{p} \in \mathcal{L}(\underline{u}, \underline{v})$ si ricava la condizione equivalente (teorema degli orlati):

$$\begin{vmatrix} \underline{x} - \underline{p} \\ \underline{u} \\ \underline{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & x_3 - p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

La precedente è una equazione cartesiana di Π.

Equazioni cartesiane di una retta

Le equazioni parametriche

$$\underline{x} - \underline{p} = t\underline{u} \qquad (*)$$

descrivono una retta (parallela ad $\underline{u}$ e passante per $\underline{p}$) se e solo se $\underline{u} \neq \underline{0}$.
Supponiamo ad esempio $u_1 \neq 0$ e consideriamo i seguenti vettori:

$$\underline{n} := (a, b, c) = (u_2, -u_1, 0) \qquad \underline{n}' := (a', b', c') = (u_3, 0, -u_1)$$

Entrambi i vettori $\underline{n}$ ed $\underline{n}'$ sono ortogonali ad $\underline{u}$, e da $(*)$ si ricava il sistema:

$$\langle \underline{n}, \underline{x} - \underline{p} \rangle = \langle \underline{n}', \underline{x} - \underline{p} \rangle = 0$$

Più esplicitamente, detti $d = -u_2 p_1 + p_2$ e $d' = -u_3 p_1 + p_3$:

$$\begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Siccome il rango della matrice dei coefficienti è 2 ($\underline{n}$ e $\underline{n}'$ sono linearmente indipendenti) tutte e sole le soluzioni sono date da $(*)$ (la soluzione generale dipende da 1 parametro reale). Le eq. $(*)$ e $(**)$ descrivono quindi lo stesso insieme.

In generale, equazioni cartesiane del tipo

$$\begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$$

descrivono una retta r se e solo se

$$\rho \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2 \,,$$

ovvero i vettori $\underline{n} := (a, b, c)$ e $\underline{n}' := (a', b', c')$ sono non allineati.
direzione del fascio di piani ortogonali ad r.

La soluzione generale del sistema si può infatti scrivere nella forma $\underline{x} = \underline{p} + t\underline{u}$, dove $\underline{p}$ è una soluzione particolare e $\underline{u}$ una soluzione non nulla del sistema omogeneo associato, ovvero un qualunque vettore ortogonale ad $\underline{n}$ ed $\underline{n}'$ (che quindi sono ortogonali ad r).

Tabella riassuntiva: Equazioni di rette e piani.

	Retta r	Piano Π
Equazioni parametriche	$\underline{x} = \underline{p} + t\underline{u}$	$\underline{x} = \underline{p} + t_1\underline{u} + t_2\underline{v}$
Condizione	$\underline{u} \neq \underline{0}$	$\rho \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 2$
Equazioni cartesiane	$\begin{cases} a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases}$	$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$
Condizione	$\rho \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2$	$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
Osservazioni	$\underline{u} \parallel r,\ (a, b, c) \perp r,\ (a', b', c') \perp r.$	$(a, b, c) \perp \Pi,\ \underline{u} \parallel \Pi,\ \underline{v} \parallel \Pi.$

Intersezione fra due piani

[Abate, §10.6]

Siano Π e Π' due piani di equazioni cartesiane:

$$\Pi :\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \,, \qquad \Pi' :\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \,.$$

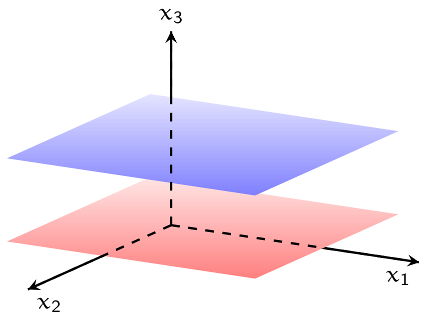
L'intersezione $\Pi \cap \Pi'$ è l'insieme delle soluzioni del sistema di matrice completa

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{array}\right] .$$

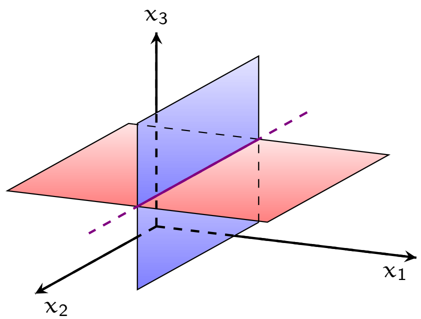
Notiamo che $1 \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(A|B) \leqslant 2$. Possono allora verificarsi tre casi:

1. se $\rho(A) = 1$ e $\rho(A|B) = 2$, il sistema non ammette soluzione, e $\Pi \cap \Pi' = \varnothing$ è l'insieme vuoto (questo vuol dire che i piani Π e Π' sono paralleli e distinti);
2. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 1$ le due righe della matrice $(A|B)$ sono proporzionali, e i due piani coincidono: $\Pi = \Pi'$; in questo caso $\Pi \cap \Pi' = \Pi$ è un piano;
3. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, si ottengono le equazioni cartesiane di una retta: $\Pi \cap \Pi'$ è una retta di $\mathbb{R}^3$.

Notiamo che l'intersezione fra due piani incidenti (cioé, non paralleli) è sempre una retta. In figura sono mostrati due piani paralleli e distinti, e due piani incidenti.



(a) Piani paralleli



(b) Piani incidenti

Intersezione fra retta e piano

[Abate, §10.5]

Consideriamo ora l'intersezione fra un piano Π e una retta r di equazioni cartesiane:

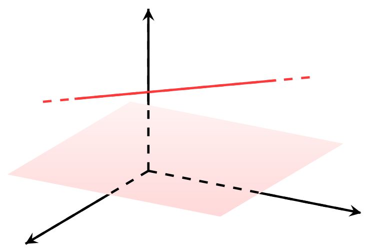
$$\Pi : a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_3 + d_0 = 0 \qquad r : \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \end{cases}$$

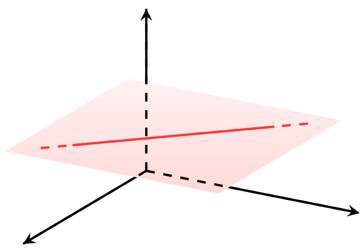
L'intersezione $r \cap \Pi$ è l'insieme delle soluzioni del sistema di matrice completa

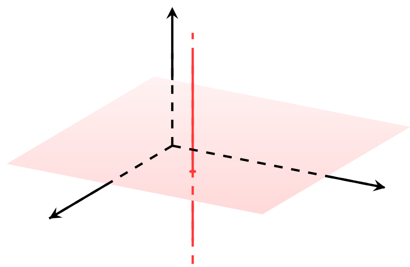
$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} a_0 & b_0 & c_0 & -d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{array}\right] .$$

Siccome (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono linearmente indipendenti (condizione per avere una retta), si ha $2 \leqslant \rho(A) \leqslant \rho(A|B) \leqslant 3$. Possono allora verificarsi tre casi:

1. se $\rho(A) = 2$ e $\rho(A|B) = 3$, il sistema è incompatibile e l'intersezione è vuota;
2. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, siccome le ultime due righe sono linearmente indipendenti, la prima deve essere combinazione lineare delle altre due: la prima equazione (quella di Π) è quindi superflua, e $r \cap \Pi = r$ (ovvero $r \subset \Pi$);
3. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, la soluzione è unica e $r \cap \Pi$ è un punto.


(1) Retta e piano paralleli


(2) Retta contenuta nel piano


(3) Retta e piano incidenti

Intersezione fra due rette

[Abate, §10.4]

Per finire, consideriamo due rette di equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} a_1'x_1 + b_1'x_2 + c_1'x_3 + d_1' = 0 \\ a_2'x_1 + b_2'x_2 + c_2'x_3 + d_2' = 0 \end{cases}$$

L'intersezione $r \cap r'$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare di matrice completa:

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' & -d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & -d_2' \end{array}\right] .$$

Per costruzione (condizione necessaria e sufficiente affinché r ed r' siano rette) le prime due righe di A sono linearmente indipendenti, così come le ultime due. Quindi $\rho(A) \geqslant 2$. Ricordiamo inoltre che $\rho(A) \leqslant \rho(A|B) \leqslant \rho(A) + 1$. Quindi:

$$2 \leqslant \rho(A) \leqslant 3 \qquad \text{e} \qquad \rho(A) \leqslant \rho(A|B) \leqslant \rho(A) + 1 .$$

Possono allora verificarsi i seguenti casi:

1. se $\rho(A) = 2$ e $\rho(A|B) = 3$, il sistema non ammette soluzioni e $r \cap r' = \varnothing$;
2. se $\rho(A) = 3$ e $\rho(A|B) = 4$, come nel primo caso l'intersezione è vuota;
3. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 2$, possiamo eliminare due equazioni (ad esempio, per riduzione) ed ottenere le equazioni cartesiane di una retta: questo vuol dire che $r = r'$ e $r \cap r' = r = r'$ è una retta;
4. se $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile ed ammette un'unica soluzione (si hanno $3 - \rho(A) = 0$ parametri liberi): quindi l'intersezione è un punto.

Sia nel primo che nel secondo caso l'intersezione è vuota. Quale è la posizione reciproca delle due rette?

Nel primo caso le due rette sono parallele (poiché $\rho(A) = 2$) e distinte.

Se $\rho(A) = 3$ e $\rho(A|B) = 4$ le due rette non sono parallele e non si intersecano: due rette di questo tipo si dicono sghembe.

Siccome due rette distinte contenute in un piano sono sempre parallele oppure si intersecano in un punto, due rette sono sghembe se e solo se non sono complanari.

In figura è illustrato un esempio di due rette sghembe. Qualunque piano contenente una delle due rette intersecherà l'altra al più in un punto.

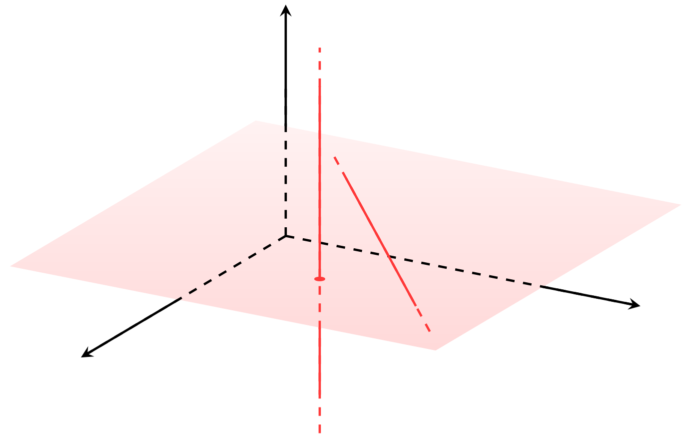


Tabella riassuntiva: Intersezioni.

$\rho(A)$	$\rho(A\|B)$	$r \cap r'$	$r \cap \Pi$	$\Pi \cap \Pi'$
1	1	—	—	piano ($\Pi = \Pi'$)
1	2	—	—	$\varnothing$
2	2	retta ($r = r'$)	retta ($r \subset \Pi$)	retta
2	3	$\varnothing$	$\varnothing$	—
3	3	punto	punto	—
3	4	$\varnothing$	—	—

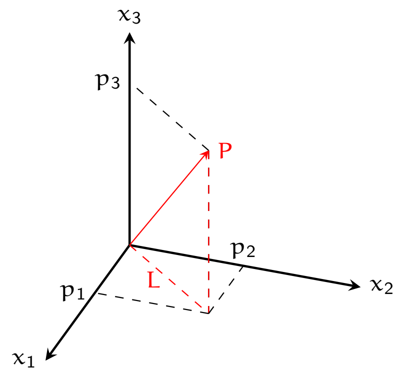
Lezione 20

Distanze in $\mathbb{R}^3$

[Abate, §12.2]

Come in $\mathbb{R}^2$, anche in $\mathbb{R}^3$ la distanza dall'origine di un punto di coordinate $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ è data dalla norma:

$$\|\underline{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} .$$



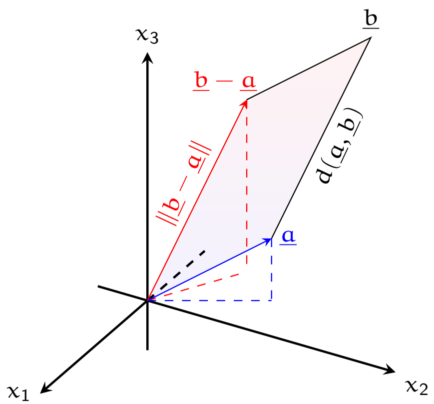
Verifichiamo questa affermazione. . .

Per il teorema di Pitagora, la diagonale del rettangolo nel piano di equazione $x_3 = 0$, disegnato in figura, ha lunghezza

$$L = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

il segmento $\overline{OP}$ è la diagonale di un triangolo rettangolo (in rosso) i cui cateti hanno lunghezza L e $|p_3|$: per il teorema di Pitagora, la lunghezza di $\overline{OP}$ è data da

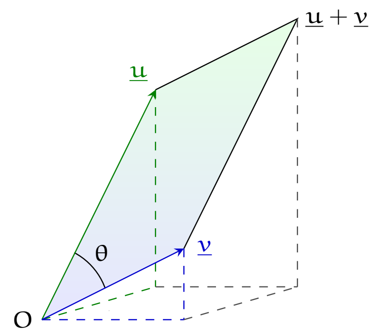
$$\sqrt{L^2 + p_3^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} .$$



Dati due punti $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, possiamo costruire il parallelogramma di vertici $\underline{0}$, $\underline{a}$, $\underline{b} - \underline{a}$ e $\underline{b}$ (come in figura). La distanza fra $\underline{a}$ e $\underline{b}$ è uguale alla distanza di $\underline{b} - \underline{a}$ dall'origine, quindi:

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \|\underline{b} - \underline{a}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} .$$

Angolo fra due vettori di $\mathbb{R}^3$



Indichiamo con

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

il prodotto scalare canonico fra due vettori $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Come in 2d, anche in 3d vale la formula (banale se uno dei vettori è zero):

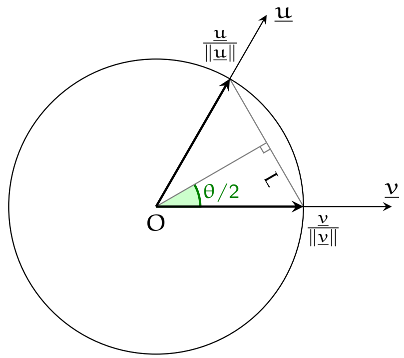
$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| \cos\theta ,$$

dove θ è l'angolo convesso formato dai vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$. Verifichiamo l'affermazione. . .

Dalla figura a fianco si evince che

$$\sin\frac{\theta}{2} = L\ .$$

Usando la formula per la distanza fra due punti e la definizione di norma, si ricava:



$$2L = d\left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\right) = \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\|$$

$$= \sqrt{\left\langle \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}, \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\rangle}$$

e dalla bilinearità del prodotto scalare segue che:

$$2L = \sqrt{\left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{u}{\|u\|} \right\rangle + \left\langle \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle - 2\left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle} = \sqrt{2 - 2\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}}\ .$$

Per finire, usando la formula di duplicazione del coseno, si arriva alla conclusione:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2L^2 = 1 - \left(1 - \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\ .$$

Prodotto vettoriale e prodotto misto

Dati due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ di $\mathbb{R}^3$, il loro prodotto vettoriale, indicato con $\underline{u} \wedge \underline{v}$, è il vettore:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \left(+ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(u_2v_3 - u_3v_2\ ,\ u_3v_1 - u_1v_3\ ,\ u_1v_2 - u_2v_1 \right)\ .$$

Dati tre vettori $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ di $\mathbb{R}^3$, chiamiamo prodotto misto dei tre vettori il determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Usando lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza riga si ricava:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = w_1 \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \langle \underline{u} \wedge \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

Il prodotto misto si ottiene, quindi, facendo il prodotto vettoriale dei primi due vettori, e poi il prodotto scalare con il terzo.

Proposizione

Il prodotto vettoriale è una operazione interna di $\mathbb{R}^3$ non associativa e non commutativa. Gode invece della proprietà anti-commutativa:

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{u} \qquad \forall\ \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3\ .$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente (la verifica è lasciata come esercizio) che:

$$\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2 = \underline{e}_3\ , \qquad \underline{e}_2 \wedge \underline{e}_1 = -\underline{e}_3\ .$$

Siccome $\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2 \neq \underline{e}_2 \wedge \underline{e}_1$, il prodotto vettoriale non è commutativo.
Dalla definizione di $\underline{u} \wedge \underline{v}$ si vede immediatamente che, scambiando i due vettori fra di loro, il prodotto vettoriale cambia segno: questo prova la proprietà anti-commutativa.
Infine, detto $\underline{u} = (1, 1, 0)$, il vettore

$$(\underline{e}_1 \wedge \underline{e}_2) \wedge \underline{u} = \underline{e}_3 \wedge \underline{u} = (-1, 1, 0)$$

è diverso da

$$\underline{e}_1 \wedge (\underline{e}_2 \wedge \underline{u}) = \underline{e}_1 \wedge (0, 0, -1) = (0, 1, 0)\ ;$$

quindi il prodotto vettoriale non è associativo. ■

Proposizione

Due vettori $\underline{u}, \underline{v}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti se e solo se $\underline{u} \wedge \underline{v} = \underline{0}$.

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che le componenti di $\underline{u} \wedge \underline{v}$ sono date (a meno di un segno) dal determinante dei minori di ordine 2 della matrice:

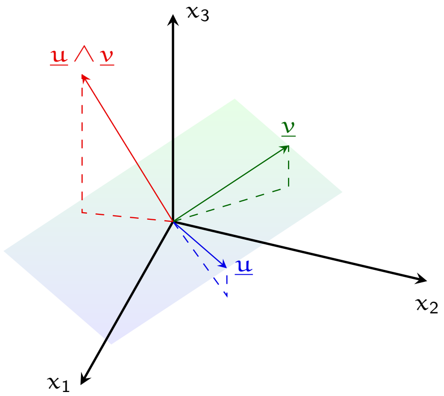
$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}.$$

I vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\rho(A) = 2$.
Per teorema degli orlati, una condizione necessaria e sufficiente è che almeno un minore di ordine 2 di A abbia determinante non nullo, ovvero almeno una componente di $\underline{u} \wedge \underline{v}$ sia diversa da zero, come volevasi dimostrare. ■

Dati due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ linearmente indipendenti...

Proposizione

Il prodotto vettoriale $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è ortogonale al piano contenente i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$.



Dimostrazione. Si ha

$$\langle \underline{u} \wedge \underline{v}, \underline{u} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Il determinante è zero perché la matrice ha due righe uguali. Allo stesso modo si prova che

$$\langle \underline{u} \wedge \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0$$

da cui segue che $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è ortogonale a qualsiasi combinazione lineare dei vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$, ovvero la tesi. ∎

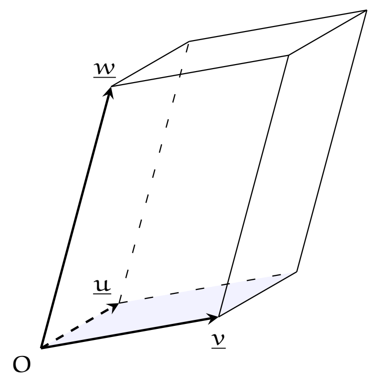
Enunciamo senza dimostrazione...

Proposizione

La norma del vettore $\underline{u} \wedge \underline{v}$ è l'area del parallelogramma di lati $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

Proposizione

Il volume del parallelepipedo che ha per lati i vettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è dato da $|\langle \underline{u} \wedge \underline{v}, \underline{w} \rangle|$.



Esercizi

Esercizio (C. Carrara, 2.5)

a) Determinare la posizione reciproca (cioé se sono coincidenti, incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t + 1 \\ x_3 = t + 3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x_1 = t' \\ x_2 = 2 \\ x_3 = t' + 2 \end{cases}$$

b) Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.

Esercizio (C. Carrara, 2.6)

Determinare la posizione reciproca (coincidenti, incidenti, parallele o sghembe) delle rette r e r' di equazioni parametriche:

$$r: \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t + 1 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x_1 = t' \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2t' + 1 \end{cases}$$

Esercizio (C. Carrara, 2.8)

Si considerino le rette r e r' di equazioni

$$r: \begin{cases} x_1 = t + 1 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t + 1 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

a) Si mostri che le due rette sono incidenti.

b) Si determini l'equazione della retta ortogonale a r e r' e passante per il loro punto di intersezione.

Esercizio

Si considerino la retta r ed il piano Π di equazioni cartesiane:

$$r: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \Pi: x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

Scrivere una equazione cartesiana del piano Π' parallelo ad r, ortogonale a Π e passante per il punto $A(1, 2, -1)$.

Esercizio

Si considerino i piani Π_1, Π_2 e Π_3 di equazioni:

$$\Pi_1 : 2x_1 - x_2 = 1 \qquad \Pi_2 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad \Pi_3 : x_1 - 2x_3 = 1.$$

a) Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.
b) Si trovi il piano Π_4 passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Esercizio (C. Carrara, 2.25)

Si considerino i tre piani di equazioni

$$\Pi_1 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad \Pi_2 : x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0 \qquad \Pi_3 : 2x_1 + \lambda x_3 = 1$$

a) Stabilire la posizione reciproca dei tre piani al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Si determini l'equazione del piano passante per l'origine e perpendicolare alla retta $r := \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Esercizio

Determinare delle equazioni parametriche e cartesiane delle seguenti rette del piano:

(a) passante per i punti $A(1, 2)$ e $B(-1, 3)$;
(b) passante per il punto $P(2, 3)$ e parallela al vettore $\underline{u} = (-1, 2)$;
(c) di equazione cartesiana $y = 2x + 5$.

Esercizio

Nel piano, si considerino i punti $A(1, -2)$ e $B(-1, 1)$ e sia M il punto medio del segmento di estremi A e B.

(a) Determinare le coordinate del punto M.
(b) Scrivere una equazione cartesiana della retta r passante per A e B e della retta r' passante per M ed ortogonale ad r.
(c) Trovare un punto C che abbia distanza 2 dal punto A.

Esercizio (C. Carrara, es. 2.2)

Determinare equazioni parametriche e cartesiane delle seguenti rette dello spazio:

(a) passante per i punti $A(1, 0, 2)$ e $B(3, -1, 0)$;
(b) passante per il punto $P(1, 3, 1)$ e parallela al vettore $\underline{u} = (2, 0, 0)$;
(c) di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.

Esercizio (C. Carrara, es. 2.11)

(a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r dello spazio passante per i punti $A(2, -1, 3)$ e $B(3, 5, 4)$.
(b) Stabilire se la retta r interseca il piano di equazione cartesiana $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Esercizio (C. Carrara, es. 2.22)

Dire se i quattro punti

$$A(1, 2, 1) \qquad B(2, 1, 0) \qquad C(-1, 0, -1) \qquad D(0, 0, -1)$$

sono complanari e, in caso affermativo, determinare una equazione cartesiana del piano che li contiene.

Esercizio (C. Carrara, es. 2.3)

(a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano Π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$. Il punto $P(0, 2, 0)$ appartiene a tale piano?
(b) Determinare una equazione della retta passante per A e ortogonale a Π.

Esercizio (C. Carrara, es. 2.7)

(a) Determinare delle equazioni parametriche della retta r passante per i punti $A(2, 3, 1)$ e $B(0, 0, 1)$ e della retta s passante per i punti $C(0, 0, 0)$ e $D(4, 6, 0)$.
(b) Stabilire se r e s sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente r e s.

Lezioni 21-23: Autovalori e autovettori

(Esercizi: C. Carrara, §9)

Autovalori ed autovettori

[Abate, §13.1]

Definizione

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se esiste $\underline{v} \in V$ non nullo tale che

$$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \, ,$$

diremo che λ è un autovalore di f e che $\underline{v}$ è un autovettore di f associato a λ.

In altre parole, un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ è autovettore di f se e solo se $\underline{v}$ ed $f(\underline{v})$ hanno la stessa "direzione" oppure $f(\underline{v}) = \underline{0}$ (e quindi $\underline{v}$ è nel nucleo di f).

Esempi

- In $\mathbb{R}^2$, $\underline{v} = (3,1)$ è autovettore dell'applicazione $f(x,y) := (2x, x-y)$. Infatti:

  $$f(\underline{v}) = (6,2) = 2\underline{v}$$

  L'autovalore associato è $\lambda = 2$.
- In $\mathbb{R}^3$, $\underline{v} = (1,-1,1)$ è autovettore di $f(x,y,z) := (x+y, x-z, y+z)$. Infatti:

  $$f(\underline{v}) = (0,0,0) = 0\underline{v}$$

  L'autovalore associato è $\lambda = 0$.

Esempio

L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dato da

$$f(x,y) := (-y,x)$$

non possiede autovettori: non esiste nessun vettore $\underline{v} = (x,y)$ non nullo e nessuno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ soddisfacenti la condizione $f(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$, ovvero soluzione di

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ \ \ x = \lambda y \end{cases}$$

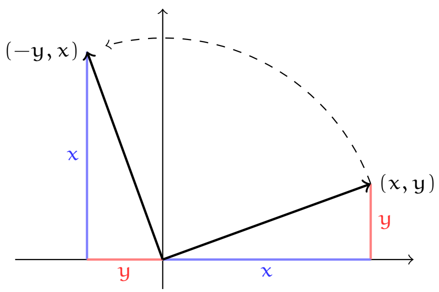
Qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}$, l'unica soluzione del sistema è quella nulla.

L'applicazione

$$f(x,y) := (-y,x)$$

rappresenta una rotazione antioraria di 90° rispetto all'origine degli assi.

Se $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{v}$ ed $f(\underline{v})$ non possono avere la stessa direzione.



Definizione

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, diremo che $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ (vettore colonna) è un autovettore di A di autovalore λ se $\underline{v}$ è autovettore di L_A di autovalore λ, ovvero è non nullo e soddisfa:

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \, .$$

Esempio

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Il vettore $\underline{e}_1 = {}^t(1,0)$ è autovettore di A di autovalore 3:

$$A\underline{e}_1 = 3\underline{e}_1 \, .$$

Il vettore $\underline{v} = {}^t(1,-1)$ è autovettore di A di autovalore 1: infatti,

$$A\underline{v} = \underline{v} \, .$$

Definizione

Se λ è un autovalore di f, chiameremo autospazio di f associato a λ l'insieme:

$$V_\lambda = \{ \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \} .$$

Per estensione, se $f = L_A$ diremo che V_λ è un autospazio della matrice A.

Proposizione

V_λ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Usiamo il criterio c) di sottospazio. Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_\lambda$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Per definizione di autospazio, $f(\underline{v}_1) = \lambda \underline{v}_1$ e $f(\underline{v}_2) = \lambda \underline{v}_2$. Sia $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$.
Dalla linearità di f segue che

$$\begin{aligned} f(\underline{w}) &= f(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2) = a_1 f(\underline{v}_1) + a_2 f(\underline{v}_2) \\ &= a_1\lambda\underline{v}_1 + a_2\lambda\underline{v}_2 = \lambda(a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2) = \lambda\underline{w} . \end{aligned}$$

Quindi $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$ appartiene a V_λ. ■

Osservazioni: i) $V_\lambda \neq \{\underline{0}\}$; ii) ad ogni autovalore sono associati infiniti autovettori!

Esempio

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione $f(x, y) := (2x, 3y)$. Sono autospazi di f gli insiemi:

$$V_2 = \{ (x, 0) : x \in \mathbb{R} \} , \qquad V_3 = \{ (0, y) : y \in \mathbb{R} \} .$$

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x, y) := (3x + 2y, y)$. Sono autospazi di f gli insiemi:

$$V_1 = \{ (t, -t) : t \in \mathbb{R} \} , \qquad V_3 = \{ (t, 0) : t \in \mathbb{R} \} .$$

Per induzione si dimostra che:

Proposizione

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ degli autovettori di f associati ad autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ distinti (cioè $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall\, i \neq j$). Allora l'insieme $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k\}$ è libero.

Esempio

Sia $f(x, y) = (3x + 2y, y)$. Gli autovettori $(1, -1)$ e $(1, 0)$, associati agli autovalori $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$ rispettivamente, sono linearmente indipendenti. Gli autovettori $(1, -1)$ e $(2, -2)$, associati allo stesso autovalore $\lambda = 1$, non sono linearmente indipendenti.

Vediamo la dimostrazione per $k = 2$...

Proposizione

Sia $f : V \to V$ una applicazione lineare e siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ due autovettori di f associati ad autovalori λ_1, λ_2 distinti (cioè $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Allora l'insieme $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è libero.

Dimostrazione. Sia per assurdo $\underline{v}_2 = a\underline{v}_1$. Allora

$$\lambda_2\underline{v}_2 = f(\underline{v}_2) = f(a\underline{v}_1) = af(\underline{v}_1) = a\lambda_1\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_2 .$$

Quindi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v}_2 = \underline{0} .$$

Ma $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ per ipotesi, e $\underline{v}_2 \neq \underline{0}$ per definizione di autovettore. Abbiamo raggiunto un assurdo: $\underline{v}_2$ non può essere proporzionale a $\underline{v}_1$. Siccome $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ e $\underline{v}_2 \notin \mathcal{L}(\underline{v}_1)$, l'insieme $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è libero. ■

Ricordiamo che, in uno spazio di dimensione n, un insieme libero può avere al più n elementi. Un'immediata conseguenza è la seguente:

Corollario

- Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, un endomorfismo $f : V \to V$ ha al più n autovalori distinti.
- Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha al più n autovalori distinti.

Esempi

- Abbiamo visto che l'applicazione $f(x, y) = (2x, 3y)$ ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Segue dal corollario precedente che questi sono gli unici suoi autovalori.
- Come già visto, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Segue dal corollario precedente che A non possiede altri autovalori oltre ai due citati.

- Un tipico problema di algebra lineare consiste nel determinare autovalori ed autovettori di un endomorfismo o di una matrice. Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, risolvere il problema agli autovalori associato vuol dire determinare tutte le possibili coppie $(\lambda, \underline{x})$, con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vettore colonna diverso da zero, tali che

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \qquad (*)$$

L'equazione $(*)$ è detta equazione agli autovalori. La matrice A si suppone nota, mentre sia le componenti di $\underline{x}$ sia λ sono incognite che vogliamo determinare.

- Lo studio di autovalori ed autovettori di un endomorfismo f di V si può ridurre al caso delle matrici, studiando la matrice rappresentativa di f in una qualsiasi base di V. Vedremo come si risolve il problema nel caso delle matrici.
- Applicazioni:
  - geometria (coniche, quadriche);
  - fisica classica (i modi di vibrazione di una corda o di una membrana sono autovalori di una opportuna applicazione lineare);
  - fisica quantistica (le righe degli spettri di emissione/assorbimento di un atomo sono autovalori di una opportuna applicazione lineare);
  - economia, elaborazione digitale delle immagini, Google (page ranking), ...

Polinomio caratteristico

[Abate, §13.2]

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e $\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'equazione

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

si può riscrivere come $A\underline{x} - \lambda\underline{x} = \underline{0}$, ovvero

$$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0} \, . \qquad (\dagger)$$

Per il teorema di Cramer, l'equazione $(\dagger)$ ammette soluzioni non nulle se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è zero. Il determinante

$$|A - \lambda I_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

è un polinomio reale di grado n nella variabile λ, detto polinomio caratteristico di A ed indicato con $p_A(\lambda)$. Un numero $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ è autovalore di A se e solo se $p_A(\lambda_0) = 0$. Quindi: gli autovalori di A sono le radici (reali) del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$.

Esempio

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) \, .$$

Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$.

Esempio

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 \, .$$

Tale polinomio non ammette radici reali. Quindi A non possiede autovalori.

Esempio

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Il polinomio caratteristico è dato da (sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna):

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4) - (-\lambda - 2) + (2 + \lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 \, .$$

Il polinomio si può fattorizzare come segue (con la regola di Ruffini):

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2) \, .$$

Gli autovalori di A sono: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$.

Metodo pratico di ricerca degli autovalori e autovettori di A:

1. si determinano gli autovalori, ovvero le radici reali del polinomio caratteristico;
2. per ogni autovalore λ, si determinano gli autovettori associati risolvendo il sistema omogeneo

$$(A - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}\ .$$

Lo spazio delle soluzioni è l'autospazio V_λ, e la sua dimensione è data da

$$\dim(V_\lambda) = n - \rho(A - \lambda I_n)$$

in cui $\rho(A - \lambda I_n)$ è il rango di $A - \lambda I_n$.

Definizione [Abate, §13.3]

Se λ è autovalore di A, chiamiamo:

- molteplicità geometrica di λ, indicata con g_λ, la dimensione dell'autospazio associato:

$$g_\lambda = \dim(V_\lambda)$$

- molteplicità algebrica di λ, indicata con m_λ, la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

Esempio

Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siccome $A - \lambda I_3$ è triangolare, il determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (1 - \lambda)^3\ .$$

Quindi $\lambda = 1$ è autovalore di molteplicità algebrica pari a $m_1 = 3$, ed A non possiede altri autovalori. L'autospazio associato V_1 si ottiene risolvendo il sistema

$$(A - I_3)\underline{x} = \underline{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_3 = 0 \end{cases}$$

La soluzione è $x_2 = x_3 = 0$ e $x_1 = t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Quindi

$$V_1 = \big\{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\big\}$$

e la molteplicità geometrica è $g_1 = \dim(V_1) = 1$. Notiamo che $g_1 < m_1$: in questo esempio la molteplicità geometrica è minore della molteplicità algebrica.

Osservazione

Gli autovalori di una matrice triangolare superiore sono gli elementi sulla diagonale. Se infatti

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

allora $A - \lambda I_n$ è una matrice triangolare, ed il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda)\ .$$

Tutte e sole le radici del polinomio caratteristico (ovvero gli autovalori di A) sono date dagli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Lezione 22

Riassunto Lezione 21

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\underline{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di A se il sistema:

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

ammette soluzioni non nulle.

$\rightarrow$ L'insieme di tutte le soluzioni (compresa quella nulla) è l'autospazio V_λ associato a λ.

$\rightarrow$ Le soluzioni $\underline{x}$ non nulle sono gli autovettori associati all'autovalore λ.

- Gli autovalori si determinano risolvendo l'equazione di grado n (nella variabile λ):

$$\underbrace{|A - \lambda I_n|}_{\substack{\text{polinomio}\\ \text{caratteristico}}} = 0$$

- Se f è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V finitamente generato, scelta una base di V, la ricerca di autovalori e autovettori di f si riduce alla ricerca di autovalori e autovettori della matrice rappresentativa.

Polinomio caratteristico, traccia e determinante

Il polinomio caratteristico di $A \in M_n(\mathbb{R})$ è della forma

$$p_A(\lambda) := |A - \lambda I_n| = (-1)^n\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

con coefficienti $c_i \in \mathbb{R}$ che dipendono da A. In particolare,

$$c_n = p_A(0) = |A|$$

è il determinante e $(-1)^{n-1}c_1$ è la somma degli elementi sulla diagonale,

$$(-1)^{n-1}c_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn} \ ,$$

detta traccia della matrice A, e indicata con $\mathrm{tr}(A)$:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Esercizio

Calcolare la traccia delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Definizione [Abate, prop. 8.3]

Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ si dicono coniugate se esiste $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$B = P^{-1}AP$$

(Nota: Abate usa il termine "simili" invece di "coniugate".)

Proposizione. Matrici coniugate hanno lo stesso polinomio caratteristico, la stessa traccia e lo stesso determinante.

Dimostrazione. Per il teorema di Binet, se $P \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile allora

$$1 = |I_n| = |P^{-1}P| = |P^{-1}| \cdot |P|$$

da cui segue $|P^{-1}| = |P|^{-1}$. Sempre per il teorema di Binet, se $B = P^{-1}AP$ allora

$$B - \lambda I_n = P^{-1}(A - \lambda I_n)P$$

e

$$p_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = |P|^{-1} \cdot |A - \lambda I_n| \cdot |P| = |A - \lambda I_n| = p_A(\lambda) \ .$$

Siccome traccia e determinante sono il primo e l'ultimo coefficiente del polinomio caratteristico, da $p_B(\lambda) = p_A(\lambda)$ segue $|B| = |A|$ e $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$. ■

Matrice del cambiamento di base [Abate, §8.1]

Siano $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n)$ due basi di uno spazio vettoriale V.
Possiamo allora scrivere i vettori di $\mathcal{B}'$ nella base $\mathcal{B}$ e viceversa.

Definizione

Chiamiamo matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la matrice che ha come j-esima colonna l'n-upla di componenti di $\underline{v}'_j$ nella base $\mathcal{B}$ (per ogni $1 \leqslant j \leqslant n$).

Indicando con $A = (a_{ij})$ tale matrice, per definizione (per ogni $1 \leqslant j \leqslant n$):

$$\underline{v}'_j = \underline{v}_1 a_{1j} + \underline{v}_2 a_{2j} + \dots + \underline{v}_n a_{nj} \ . \qquad (\star)$$

La formula è più semplice da ricordare scrivendo gli scalari a destra dei vettori.
Nel membro di destra di $(\star)$ riconosciamo infatti il prodotto righe per colonne fra la n-upla $\mathcal{B}$ e la j-esima colonna di A. Possiamo riscrivere $(\star)$ nella forma compatta

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \ .$$

(Attenzione: $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono n-uple di vettori; non sono n-uple di numeri reali.)

In maniera simile, la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è la matrice A' data da:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A' \ .$$

Proposizione

La matrice A del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è invertibile, e la sua inversa è la matrice A' del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Evidentemente:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A' = (\mathcal{B} \cdot A) \cdot A' = \mathcal{B} \cdot (A \cdot A') \ ,$$

ovvero $\mathcal{B} \cdot (AA' - I_n) = 0$. Indicando con b_{ij} gli elementi della matrice $AA' - I_n$, si ha

$$\underline{v}_1 b_{1j} + \underline{v}_2 b_{2j} + \dots + \underline{v}_n b_{nj} = \underline{0} \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n \ .$$

Siccome i vettori sono linearmente indipendenti, questo implica

$$b_{1j} = b_{2j} = \dots = b_{nj} = 0 \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n \ ,$$

ovvero $AA' - I_n = 0$. L'ultima identità si può riscrivere come $AA' = I_n$. In maniera simile si dimostra che $A'A = I_n$. Quindi $A' = A^{-1}$. ∎

Matrici rappresentative e cambi di base

- Che relazione c'è tra le matrici rappresentative di un endomorfismo $f : V \to V$ in due basi diverse di V?
- Siano $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n)$ due basi di uno spazio vettoriale V.
  Ricordiamo che $C = (c_{ij})$ si dice matrice rappresentativa di f nella base $\mathcal{B}$ se:

  $$f(\underline{v}_j) = \underline{v}_1 c_{1j} + \underline{v}_2 c_{2j} + \dots + \underline{v}_n c_{nj} \ , \qquad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant n \, .$$

  (La j-esima colonna di C è la n-upla di componenti di $f(\underline{v}_j)$ nella base $\mathcal{B}$.)

  In maniera simile è definita la matrice rappresentativa $C' = (c'_{ij})$ di f nella base $\mathcal{B}'$.
- In notazione matriciale, dette

  $$\mathcal{F} := \big(f(\underline{v}_1) \, , \, f(\underline{v}_2) \, , \, \dots \, , \, f(\underline{v}_n) \big)$$
  $$\mathcal{F}' := \big(f(\underline{v}'_1) \, , \, f(\underline{v}'_2) \, , \, \dots \, , \, f(\underline{v}'_n) \big)$$

  si ha

  $$\mathcal{F} = \mathcal{B} \cdot C \qquad \mathcal{F}' = \mathcal{B}' \cdot C'$$

Proposizione [Abate, prop. 8.2]

Le matrici rappresentative C e C' sono legate dalla relazione (di coniugio):

$$C' = A^{-1} \cdot C \cdot A \ .$$

in cui A è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Dimostrazione. Dalla linearità di f segue che

$$f(\underline{v}'_j) = f(a_{1j}\underline{v}_1 + a_{2j}\underline{v}_2 + \dots + a_{nj}\underline{v}_n) = a_{1j} f(\underline{v}_1) + a_{2j} f(\underline{v}_2) + \dots + a_{nj} f(\underline{v}_n)$$

per ogni $1 \leqslant j \leqslant n$, ossia $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cdot A$. Poiché $\mathcal{F} = \mathcal{B} \cdot C$ e $\mathcal{F}' = \mathcal{B}' \cdot C'$, si ha

$$\mathcal{B}' \cdot C' = \mathcal{B} \cdot C \cdot A \ .$$

Usando $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A' = \mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A^{-1}$ si ottiene:

$$\mathcal{B}' \cdot C' = \mathcal{B}' \cdot A^{-1} \cdot C \cdot A$$

che può essere riscritta nella forma $\mathcal{B}' \cdot (C' - A^{-1}CA) = 0$. Come nella prova della proposizione precedente (slide 5), dall'indipendenza lineare dei vettori di $\mathcal{B}'$ segue

$$C' - A^{-1}CA = 0 \ ,$$

che è proprio la tesi. ∎

Esercizio

In $\mathbb{R}^2$, si considerino le basi

$$\mathcal{B} = \left(\underline{v}_1 = (1,0)\,,\, \underline{v}_2 = (0,1)\right)\,, \qquad \mathcal{B}' = \left(\underline{v}_1' = (1,1)\,,\, \underline{v}_2' = (-1,1)\right)\,.$$

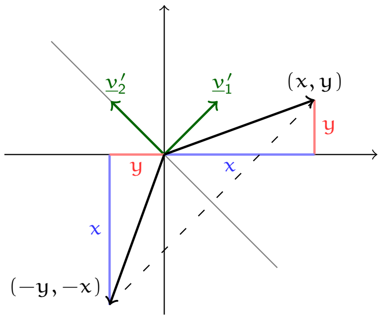
Determinare la matrice A del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e la matrice A' del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) := (-y,-x)$$

determinare la matrice rappresentativa di f nella base $\mathcal{B}$ e quella nella base $\mathcal{B}'$.

L'applicazione f è una riflessione nel piano rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante, come mostrato in figura.

I punti della bisettrice, corrispondenti ai vettori proporzionali a $\underline{v}_2' = (-1,1)$, sono lasciati invariati da f. I punti fuori dalla bisettrice vengono riflessi rispetto ad essa.



Endomorfismi semplici

Nell'esercizio precedente, la base $\mathcal{B}'$ era formata da autovettori dell'endomorfismo f...

Definizione

Un endomorfismo f di uno spazio finitamente generato V si dice semplice se esiste una base di V formata da suoi autovettori.

Esempi

- L'endomorfimo f di $\mathbb{R}^2$ dato da $f(x,y) := (-y,-x)$ è semplice.
  Una base di autovettori è data da $\mathcal{B} = \left(\underline{v}_1 = (1,1), \underline{v}_2 = (-1,1)\right)$.
- L'endomorfimo g di $\mathbb{R}^2$ dato da $g(x,y) := (2x, 3y)$ è semplice.
  Una base di autovettori è quella canonica $\mathcal{B} = \left(\underline{e}_1 = (1,0), \underline{e}_2 = (0,1)\right)$.
- L'endomorfismo h di $\mathbb{R}^2$ dato da $h(x,y) := (x+2y, 3x+2y)$ è semplice. Una base di autovettori è $\mathcal{B} = \left(\underline{v}_1 = (2,3), \underline{v}_2 = (1,-1)\right)$. Si può infatti verificare che

$$h(\underline{v}_1) = 4\underline{v}_1 \qquad h(\underline{v}_2) = -\underline{v}_2$$

Definizione

Una matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ si dice diagonale se $a_{ij} = 0 \;\forall\, i \neq j$.

Definizione

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice diagonalizzabile se è coniugata ad una matrice diagonale, ovvero se esiste una matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile, detta matrice diagonalizzante di A, tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

Esempio

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

è diagonale.

Esempio

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$P^{-1}AP$ è diagonal-<u>e</u>. La matrice A è quindi diagonal-<u>izzabile</u> e P è una matrice diagonal-<u>izzante</u> di A (attenzione ai suffissi!).

- Ogni matrice diagonale è diagonalizzabile, essendo coniugata a sé stessa (in questo caso, una matrice diagonalizzante è la matrice identica I_n).
- Se P è una matrice diagonalizzante di A, anche kP lo è (per ogni $k \neq 0$). Le matrici diagonalizzanti di A, se esistono, sono quindi infinite.

Osservazione

Un endomorfismo f di uno spazio V di dimensione n è semplice se esiste una base $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n)$ di V formata da autovettori di f, ovvero tali che

$$f(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1 \qquad f(\underline{v}_2) = \lambda_2 \underline{v}_2 \qquad \ldots \qquad f(\underline{v}_n) = \lambda_n \underline{v}_n$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ autovalori di f (non necessariamente distinti).
La matrice rappresentativa $A = (a_{ij})$ di f nella base $\mathcal{B}$ è data da

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases} \qquad (\dagger)$$

In altre parole,

- f è semplice $\iff$ $\exists$ una base di V in cui f è rappresentato da una matrice diagonale.

Le matrici rappresentative di f sono tutte coniugate fra di loro, e in particolare sono coniugate alla matrice diagonale ($\dagger$). Quindi

- f è semplice se e solo se le sue matrici rappresentative sono (tutte) diagonalizzabili.

Una matrice A è diagonalizzabile se e solo se L_A è un endomorfismo semplice.
Si può infatti dire di più: data una base di autovettori di A è possibile costruire una matrice diagonalizzante come segue…

Proposizione

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A, la matrice P che ha i vettori di $\mathcal{B}$ come colonne è una matrice diagonalizzante di A.

Dimostrazione. I vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\rho(P) = n$. Per teorema degli orlati $|P| \neq 0$, e dal teorema di Laplace deduciamo che P è invertibile.

La j-esima colonna di AP è data da $A\underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$. Indicando con R_i la i-esima riga di P^{-1}, la condizione $P^{-1}P = I_n$ equivale a

$$R_i \cdot \underline{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j\,, \\ 1 & \text{se } i = j\,. \end{cases}$$

L'elemento di matrice (i,j) di $P^{-1}AP$ vale quindi

$$R_i \cdot A\underline{v}_j = R_i \cdot (\lambda_j \underline{v}_j) = \lambda_j (R_i \cdot \underline{v}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j\,, \\ \lambda_i & \text{se } i = j\,. \end{cases}$$

Questo prova che $P^{-1}AP$ è diagonale, e P è una matrice diagonalizzante di A. ■

…Viceversa, data una matrice diagonalizzante di A, si può costruire una base di autovettori come segue…

Proposizione

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizzabile e $P = (p_{ij})$ una sua matrice diagonalizzante. Se indichiamo con $\underline{v}_j := {}^t(p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj})$ la j-esima colonna di P, allora $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Dimostrazione. Sia $D := P^{-1}AP$. Per ipotesi, $D = (d_{ij})$ è diagonale: $d_{ij} = 0 \;\forall\, i \neq j$.
L'elemento (i,j) della matrice PD è:

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik} d_{kj} = d_{jj} p_{ij}$$

Ma p_{ij} è la i-esima componente di $\underline{v}_j$. Quindi la j-esima colonna di PD è data dal vettore colonna $d_{jj}\underline{v}_j$. La j-esima colonna del prodotto AP è data da $A\underline{v}_j$, da cui

$$D = P^{-1}AP \iff AP = PD \iff A\underline{v}_j = d_{jj}\underline{v}_j \quad \forall\, j = 1, \dots, n$$

(le colonne di P sono autovettori di A associate agli autovalori $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$).
Siccome $|P| \neq 0$, allora $\rho(P) = n$ (teorema degli orlati) e le colonne di P sono n vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti. Formano quindi una base. ■

Diagonalizzabilità in campo complesso

Non tutte le matrici reali sono diagonalizzabili. Ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

non possiede autovalori/autovettori (reali), e quindi non è diagonalizzabile.

Le cose cambiano se invece di lavorare in campo reale si lavora in campo complesso.
La matrice complessa (qui $i = \sqrt{-1}$):

$$P = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

ad esempio è una matrice diagonalizzante di A:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Le colonne di P sono autovettori (complessi) di A.

Ancora su traccia e determinante…

Se $D = P^{-1}AP$ è diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

allora è triangolare superiore, e i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale.

Matrici coniugate hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi hanno anche gli stessi autovalori. In particolare, gli autovalori di A sono proprio $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Matrici coniugate hanno lo stesso determinante e la stessa traccia, ma determinante e traccia di D sono facili da calcolare:

$$|A| = |D| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Osservazione. Il determinante di una matrice diagonalizzabile è il prodotto dei suoi autovalori. La traccia di una matrice diagonalizzabile è la somma dei suoi autovalori.

Esercizi

Esercizio

Siano A, B, C, D le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determinare il polinomio caratteristico di ciascuna matrice.

b) Determinare gli autovalori di ciascuna matrice.

c) Stabilire quale delle quattro matrici è diagonalizzabile.

Esercizio

Determinare autovalori e autovettori della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Esercizio

Determinare gli autovalori della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Semplifichiamo $A - \lambda I_3$:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 4 & 3-\lambda & -8 \\ 2 & 2 & -5-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2(\lambda+1) & -(\lambda+1) & 0 \\ \lambda+1 & 0 & -(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

Possiamo portare i fattori $\lambda + 1$ “fuori” dal determinante (operazione elementare II):

$$|A - \lambda I_3| = (\lambda+1)(\lambda+1) \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L’ultimo determinante si calcola con lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza riga, ed è uguale a $1 - \lambda$. Gli autovalori sono quindi:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = 1$$

✓

Lezione 23

Riassunto Lezione 22

- $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice diagonalizzabile se esiste $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile tale che

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

  è diagonale. La matrice P è detta matrice diagonalizzante di A.

- I numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $(\star)$ sono proprio gli autovalori di A, ciascuno ripetuto tante volte quanto è la sua molteplicità algebrica.

- Se P è una matrice diagonalizzante di A, dette $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ le colonne di P, allora $\mathcal{B} := (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A:

$$A\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

- Se esiste una base $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A (cioé L_A è semplice), allora A è diagonalizzabile e $P = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \dots & \underline{v}_n \end{bmatrix}$ è una matrice diagonalizzante.

Diagonalizzabilità di una matrice: criteri

Ricordiamo che un polinomio reale $p(x)$ di grado n si può sempre scrivere nella forma:

$$p(x) = c(x - z_1)^{m_1}(x - z_2)^{m_2} \dots (x - z_r)^{m_r}$$

dove $c \in \mathbb{R}$, $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ sono radici complesse distinte di $p(x)$, $1 \leqslant r \leqslant n$ ed m_i è detta molteplicità della radice z_i. Ad esempio:

$$x^3 + x^2 - 33x + 63 = (x - 3)^2(x + 7)$$
$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i) \qquad \left(i = \sqrt{-1} \right)$$

Ovviamente

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n\,.$$

Osservazione

Gli autovalori di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ sono le radici reali di $p_A(\lambda)$. Dette $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ le radici reali distinte, per la molteplicità algebrica vale la disuguaglianza

$$m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \dots + m_{\lambda_r} \leqslant n\,,$$

e si ha uguaglianza se e solo se tutte le radici di $p_A(\lambda)$ sono reali.

Teorema [Abate, prop. 13.8]

Per ogni autovalore λ_0 di A, si ha $1 \leqslant g_{\lambda_0} \leqslant m_{\lambda_0}$.

Dimostrazione. Sia $k = g_{\lambda_0}$. Prendiamo una base $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ di V_{λ_0} e completiamola ad una base $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n)$ di $\mathbb{R}^n$. Siccome per ogni $i \leqslant k$,

$$(A - \lambda I_n)\underline{v}_i = (\lambda_0 - \lambda)\underline{v}_i\,,$$

l'applicazione lineare $L_{A-\lambda I_n}$ nella base $\mathcal{B}$ è rappresentata da una matrice

$$M = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{array}\right]$$

Facendo k volte lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna si ricava

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = |M| = (\lambda_0 - \lambda)^k q(\lambda)$$

dove $q(\lambda)$ è un polinomio in λ. La molteplicità algebrica di λ_0 è k se λ_0 non è una radice di $q(\lambda)$, altrimenti è maggiore di k. Questo prova che $m_{\lambda_0} \geqslant k = g_{\lambda_0}$. ∎

Definizione

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Un autovalore λ di A si dice:

- semplice se ha molteplicità algebrica uguale ad 1: $m_\lambda = 1$.
- semisemplice se ha molteplicità algebrica uguale quella geometrica: $m_\lambda = g_\lambda$.

Dalla disuguaglianza

$$1 \leqslant g_\lambda \leqslant m_\lambda$$

segue che, se $m_\lambda = 1$, anche $g_\lambda = 1$. Quindi:

Osservazione

Ogni autovalore semplice è semisemplice.

Teorema (Criterio di diagonalizzabilità di una matrice) [Abate, teorema 13.9]

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se e solo se:

i) tutte le radici del polinomio caratteristico sono reali;
ii) tutti gli autovalori di A sono semisemplici.

Dimostrazione. 1a parte: la condizione i) è necessaria.

Se A è coniugata ad una matrice diagonale D,

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

allora

$$p_A(\lambda) = p_D(\lambda) = (d_{11} - \lambda)(d_{22} - \lambda)\dots(d_{nn} - \lambda) .$$

Tutte e sole le radici del polinomio caratteristico sono date dagli elementi sulla diagonale della matrice D. Sono quindi numeri reali.

Teorema (Criterio di diagonalizzabilità di una matrice) [Abate, teorema 13.9]

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se e solo se:

i) tutte le radici del polinomio caratteristico sono reali;
ii) tutti gli autovalori di A sono semisemplici.

Dimostrazione. 2a parte: la condizione ii) è necessaria.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A, con $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall\, i \neq j$ e $r \leqslant n$. Per $k = 1, \dots, r$, indichiamo con $I_k \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme delle colonne della matrice diagonalizzante P che appartengono all'autospazio V_{λ_k}. Poichè si tratta di vettori linearmente indipendenti (le colonne di P sono una base di $\mathbb{R}^n$), ed essendo $\dim(V_{\lambda_i}) = g_{\lambda_i}$, I_1 ha al più g_{λ_1} elementi, I_2 ha al più g_{λ_2} elementi, etc. In tutto le colonne di P sono n, da cui

$$n \leqslant g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} + \dots + g_{\lambda_r} \leqslant m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \dots + m_{\lambda_r} = n$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che tutte le radici di $p_A(\lambda)$ sono reali (oss. slide 2). Se ne deduce che le precedenti disuguaglianze sono uguaglianze, e

$$(m_{\lambda_1} - g_{\lambda_1}) + (m_{\lambda_2} - g_{\lambda_2}) + \dots + (m_{\lambda_r} - g_{\lambda_r}) = n - n = 0$$

Ma $m_{\lambda_i} - g_{\lambda_i} \geqslant 0$ (per il teorema precedente), e una somma di termini non negativi è nulla se e solo se tutti i termini sono zero. Si ricava $m_{\lambda_i} - g_{\lambda_i} = 0 \ \forall\, i$, ossia la condizione ii).

Teorema (Criterio di diagonalizzabilità di una matrice) [Abate, teorema 13.9]

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se e solo se:

i) tutte le radici del polinomio caratteristico sono reali;
ii) tutti gli autovalori di A sono semisemplici.

Dimostrazione. 3a parte: le condizioni i) e ii) sono sufficienti.

Sia $n_i = g_{\lambda_i} = \dim(V_{\lambda_i})$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Scegliamo una base di ciascun autospazio:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_{n_1}) && \text{base di } V_{\lambda_1}, \\ \mathcal{B}_2 &= (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n_2}) && \text{base di } V_{\lambda_2}, \\ &\ \ \vdots && \quad \vdots \\ \mathcal{B}_r &= (\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_{n_r}) && \text{base di } V_{\lambda_r}. \end{aligned}$$

e mostriamo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ è un insieme libero di $\mathbb{R}^n$. Sia

$$\begin{aligned} \underline{u} &= a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \dots + a_{n_1}\underline{u}_{n_1} \\ \underline{v} &= b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \dots + b_{n_2}\underline{v}_{n_2} \\ &\ \ \vdots \\ \underline{w} &= c_1\underline{w}_1 + c_2\underline{w}_2 + \dots + c_{n_r}\underline{w}_{n_r} \end{aligned}$$

Teorema (Criterio di diagonalizzabilità di una matrice) [Abate, teorema 13.9]

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile se e solo se:

i) tutte le radici del polinomio caratteristico sono reali;

ii) tutti gli autovalori di A sono semisemplici.

(...segue.) Poichè autovettori associati ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, la somma

$$\begin{aligned}(a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2 + \ldots + a_{n_1}\underline{u}_{n_1}) + (b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + \ldots + b_{n_2}\underline{v}_{n_2}) + \\ + \ldots + (c_1\underline{w}_1 + c_2\underline{w}_2 + \ldots + c_{n_r}\underline{w}_{n_r}) = \underline{u} + \underline{v} + \ldots + \underline{w}\end{aligned} \tag{$\star$}$$

è $\underline{0}$ solo se $\underline{u} = \underline{v} = \ldots = \underline{w} = \underline{0}$. Poichè $\mathcal{B}_1$ è libero, $\underline{u} = a_1\underline{u}_1 + \ldots + a_{n_1}\underline{u}_{n_1} = \underline{0}$ implica $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n_1} = 0$. In maniera simile siccome $\mathcal{B}_2$ è libero, $\underline{v} = \underline{0}$ implica $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n_2} = 0$, etc. La combinazione lineare ($\star$) è zero solo se tutti i coefficienti sono nulli, quindi $\mathcal{B}$ è un insieme libero. Il numero di elementi di $\mathcal{B}$ è dato da

$$g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} + \ldots + g_{\lambda_r} = m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \ldots + m_{\lambda_r} = n$$

La prima uguaglianza segue dalla condizione ii) e la seconda da i) e dall'osservazione nella slide 2. Ma n vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti formano una base. Abbiamo trovato una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A, e questo prova che A è diagonalizzabile. ■

Quella che segue è una semplice condizione sufficiente (ma non necessaria)...

Osservazione

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha n autovalori distinti (cioé: se tutti gli autovalori sono semplici), allora è diagonalizzabile.

Dimostrazione. n autovettori associati ad n autovalori distinti di A formano un insieme libero. Ma in $\mathbb{R}^n$ un insieme libero di n vettori è una base. ■

Concludiamo con un teorema, enunciato senza dimostrazione.

Definizione

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si dice simmetrica se ${}^tA = A$.

Teorema spettrale [Abate, §14.1]

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora:

- A è diagonalizzabile;
- autovettori associati ad autovalori distinti sono ortogonali;
- esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Esercizio

Dire quale fra le matrici seguenti è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio

Per ciascuna delle matrici seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una matrice diagonalizzante.

Esercizio (Esame del 05/06/2012)

Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1-k & 3 \end{bmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori della matrice A.

b) Dire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile.

c) Per i valori di k calcolati al punto b), trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Esercizio (Esame del 06/06/2012)

Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori della matrice A.

b) Dire per quali valori di k la matrice è diagonalizzabile.

c) Per un valori di k scelto a piacere, trovare una matrice diagonalizzante di A.