TEOREMA 1

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$, (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

tesi

$$\emptyset \in \mathcal{F}.$$ ("evento impossibile")

DIM

$$\Omega \in \mathcal{F} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \Omega^c \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}. \quad \square$$

TEOREMA 2

$n \in \mathbb{N}$, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

TESI

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

DIM

$i = (1, 2, \dots, n)$, $B_i = A_i$ $\overset{(3)}{\Longrightarrow}$

$i > n$, $B_i = \emptyset$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m \in \mathcal{F} \iff \left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) \cup \left(\bigcup_{m=n+1}^{\infty} B_m\right) \in \mathcal{F}$$

$$\iff \left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) \cup \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$\iff \bigcup_{m=1}^{n} A_m \in \mathcal{F}. \qquad \square$$

$$\begin{cases} (1) & \Omega \in \mathcal{F} \\ (2) & A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ (3) & (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1') & \Omega \in \mathcal{A} \\ (2') & A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \\ (3') & (A_1, A_2, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{A} \\ & \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ è una σ-algebra

$\mathcal{A}$ è un'algebra

TEOREMA 3

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{J} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{J}.$$

DIM

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \underbrace{\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n^c}_{\overset{(2)}{\in \mathcal{J}}}}_{\overset{(3)}{\in \mathcal{J}}}\Big)^c}_{\overset{(2)}{\in \mathcal{J}}} \in \mathcal{J}$$

$\square$

TEOREMA 4

$$A \in \mathcal{J}, \quad (A^c)^c = A.$$

$\square$

$n \in \mathbb{N}$

$(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{F}$

$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c =$ si verifica "almeno" un evento tra $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right]^c = \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right]^c$$

$$\Leftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right]^c$$

PROPOSIZIONE

$A, B \in \mathcal{F}$

(i) $A \cup B = A \,\dot\cup\, (\overset{\subseteq A^c}{B \cap A^c})$

(ii) $A = \underbrace{(A \cap B)}_{\subseteq B} \,\dot\cup\, \underbrace{(A \cap B^c)}_{\subseteq B^c}$ $\square$

Significato di $\dot\cup$

$$C_1 \,\dot\cup\, C_2 \iff C_1 \cup C_2 \text{ con } C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

$\mathcal{E}$ esperimento aleatorio, $(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P})$

$\mathcal{G}$: eventi generatori

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \longrightarrow \mathbb{P}(A)$$

<u>misura</u> di probabilità

MISURA DI PROBABILITÀ CLASSICA

a) $\exists n \in \mathbb{N} : |\Omega| = n \Rightarrow \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

e $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}) = a(\mathcal{G})$ (ovvero, $\mathcal{F}$ è un'algebra)

b) nessuno degli esiti elementari è preferito da $\mathcal{E}$, ovvero esiste una perfetta simmetria tra gli elementi di Ω

DEFINIZIONE

$$\underbrace{A \in \mathcal{F}}, \quad \mathbb{P}_c(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$(1)_c$: $$\mathbb{P}_c(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1.$$

esperimento del lancio del dado; $M = \{3, 4\}$ e $B = \{1, 2\}$; $M \cap B = \emptyset$ e

$$\mathbb{P}_c(M \cup B) = \mathbb{P}_c(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{|\{1,2,3,4\}|}{|\Omega|} = \frac{4}{6}$$

$$\mathbb{P}_c(M) = \frac{2}{6}; \mathbb{P}_c(B) = \frac{2}{6} \Rightarrow \mathbb{P}_c(M) + \mathbb{P}_c(B) = \frac{4}{6}$$

In altri termini:

$$\mathbb{P}_e(M \cup B) = \frac{4}{6} = \mathbb{P}_e(M) + \mathbb{P}_e(B).$$

Tale fatto è generalizzabile a tutte le coppie di eventi disgiunti:

$$(2)_e: \quad A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}_e(A \cup B) = \mathbb{P}_e(A) + \mathbb{P}_e(B).$$

più in generale sussiste:

$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cap C = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \end{cases} \implies \mathbb{P}_e(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}_e(A) + \mathbb{P}_e(B) + \mathbb{P}_e(C)$$

$$(3)_e: \quad A \in \mathcal{J} \implies \mathbb{P}_e(A) \geq 0.$$

MISURA DI PROBABILITÀ FREQUENTISTA

a) vale
b) <u>non vale</u> (ovvero non si riscontra perfetta simmetria tra i punti campione)

comunque, vale in alternativa a b):

e) l'esperimento è ripetibile nelle medesime condizioni un numero indefinito di volte (ciascuna ripetizione si dice "prova".)

DEFINIZIONE

$$A \in \mathcal{F}, \qquad \mathbb{P}_f(A) := \underbrace{\text{'}\lim\text{'}}_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

frequenza relativa di A

n: numero delle prove;

n_A: numero, tra le n prove dove A si verifica;

in '$\lim_n$'

La coppia di apici evidenzia il fatto che l'operazione di limite non è quella delle successioni numeriche; in effetti la successione $(n_A/n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di tipo sperimentale.

$$(1)_f: \quad \mathbb{P}_f(\Omega) = \text{'}\lim_n\text{'} \frac{n_\Omega}{n} = \text{'}\lim_n\text{'} \frac{n}{n} = \text{'}\lim_n\text{'}\, 1 = 1.$$

$$(2)_f: \quad \underbrace{A \cap B = \emptyset},$$

$$\mathbb{P}_f(A \dot\cup B) =$$

$$= \text{'}\lim_n\text{'} \frac{n_{A \dot\cup B}}{n} = \text{'}\lim_n\text{'} \frac{n_A + n_B}{n}$$

$$= \text{'}\lim_n\text{'} \left(\frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} \right)$$

$$= \text{'}\lim_{n}\text{'} \frac{n_A}{n} + \text{'}\lim_{n}\text{'} \frac{n_B}{n} = \mathbb{P}_f(A) + \mathbb{P}_f(B).$$

$(3)_f$: $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}_f(A) = \text{'}\lim_{n}\text{'} \frac{n_A}{n} \geq 0.$