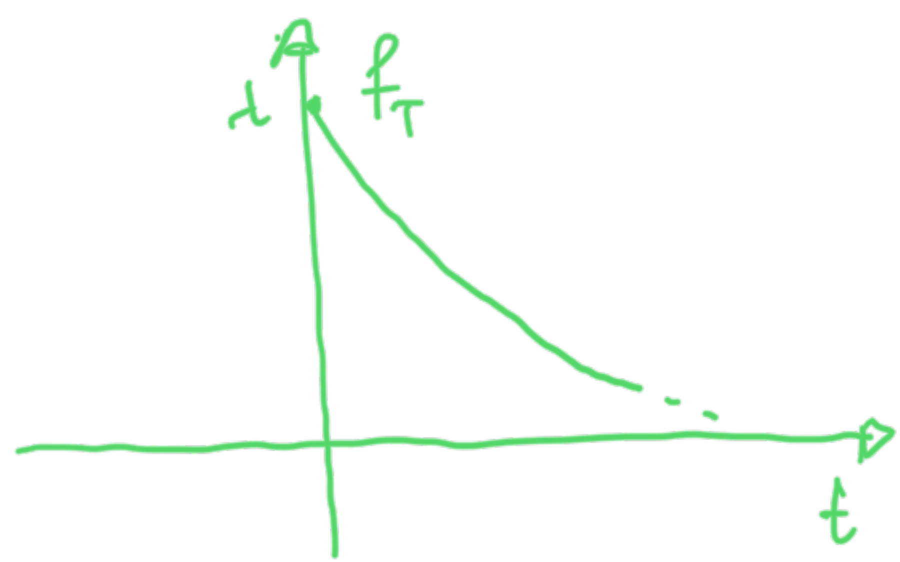
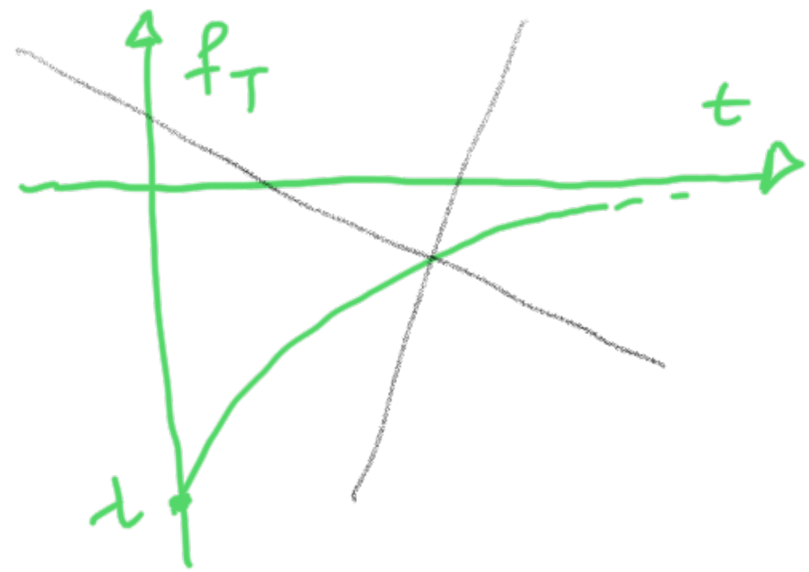
ESEMPIO 5.1.b

T è il tempo (aleatorio, misurato in ore) di funzionamento di un dispositivo elettronico (ovvero fino alla sua prima rottura) avente funzione di densità di probabilità (f.d.p.):

$$t \in \mathbb{R}, \qquad f_T(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-t/100}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$





In particolare per $t < 0$ è immediato

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot d\tau = 0$$

Qual è la probabilità che

(a) il dispositivo funziona tra 50 h e 150 h; $\mathbb{P}(50 \leq T \leq 150)$

(b) il dispositivo funzioni per meno di 100 h. $\mathbb{P}(T \leq 100)$

Svolgimento

Bisogna dapprima determinare il valore di λ. Il primo requisito per una f.d.p è quello di essere una funzione non negativa in $\mathbb{R}$ e pertanto $\lambda > 0$. Il secondo requisitivo richie d'è che l'area sotto la f.d.p. debba essere unitaria:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-t/100}\,dt$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-t/100}\,dt \implies$$

$$\lambda = \left[\int_0^{+\infty} e^{-t/100}\,dt\right]^{-1} = \frac{1}{100}.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t/100}\,dt \qquad \tau = t/100 \iff t = 100\tau \implies \frac{dt}{d\tau} = 100$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}\,100\,d\tau = 100\int_0^{+\infty} e^{-\tau}\,d\tau$$

$$= -100 \cdot e^{-\tau}\Big|_0^{+\infty} = -100\cdot(0-1) = 100.$$

(a)

$$\mathbb{P}(50 \le T \le 150) = \frac{1}{100} \int_{50}^{150} e^{-t/100} \, dt$$

$\tau = \frac{t}{100}, \quad dt = 100 \, d\tau$

$$= \frac{1}{100} \int_{1/2}^{3/2} e^{-\tau} \, 100 \, d\tau$$

$t \to 50, \; \tau \to 1/2$

$t \to 150, \; \tau \to 3/2$

$$= - e^{-\tau} \Big|_{1/2}^{3/2} = - \left(e^{-3/2} - e^{-1/2} \right)$$

$$= e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0{,}384.$$

(b)

$$\mathbb{P}(T \le 100) = F_T(100) = \int_{-\infty}^{100} f_T(t) \, dt$$

$\tau = \frac{t}{100}$

$$= \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{-t/100} \, dt$$

$t \to 100, \ \tau \to 1$

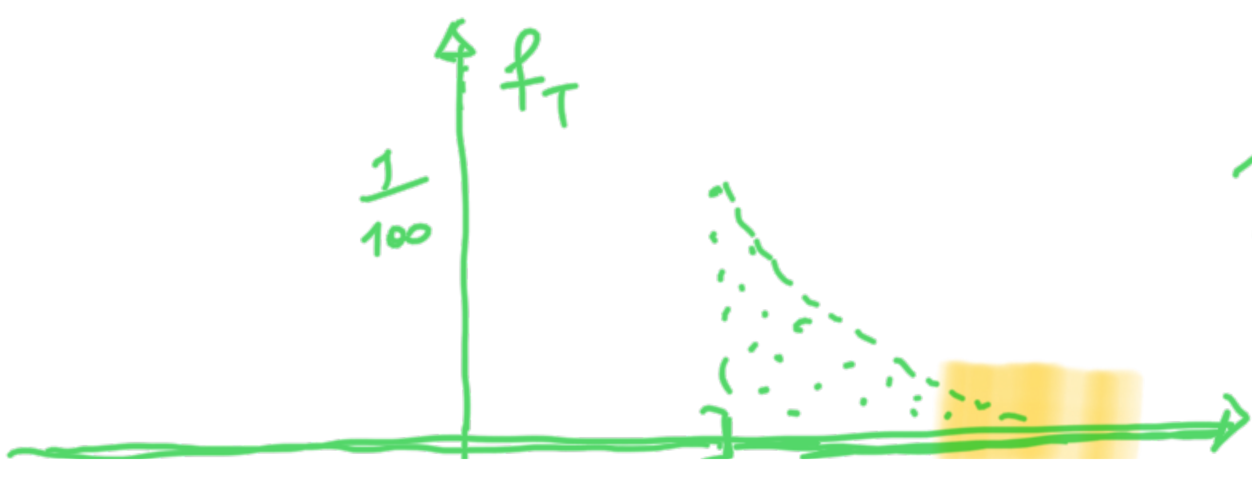
$$= \int_0^1 e^{-\tau}\, d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\approx 0,633. \qquad \square$$

ESEMPIO 5.1.e

T, il tempo di vita di un particolare tipo di pila (per le radio), è una v.a. con f.d.p.:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \le 100; \\ \dfrac{100}{t^2}, & t > 100. \end{cases}$$



$$\lim_{t \to 100^+} \frac{100}{t^2} = \frac{1}{100}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\,dt = \cancel{\int_{-\infty}^{100} 0\,dt} + \int_{100}^{+\infty} \frac{100}{t^2}\,dt$$

$$= 100 \int_{100}^{+\infty} t^{-2}\,dt = 100 \left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_{100}^{+\infty}$$

$$= 100\, t^{-1}\Big|_{+\infty}^{100} = 100\left(\frac{1}{100} - 0\right)$$

$$= \frac{100}{100} = 1.$$

Bisogna determinare la probabilità che la generica pila si esaurisca nelle prime 150 ore di funzionamento della radio.

Soluzione

$$\mathbb{P}(T \leq 150) = F_T(150)$$

$$= \int_{100}^{150} \frac{100}{t^2}\, dt = 100 \int_{100}^{150} t^{-2}\, dt$$

$$= 100 \left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_{100}^{150} = 100 \left. t^{-1} \right|_{150}^{100} = 100 \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{150} \right)$$

$$= 100 \, \frac{150 - 100}{100 \cdot 150} = \frac{50}{150} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

ESEMPIO 5.1.d

Sia X una v.a. con F.D. F_X e f.d.p. f_X assegnate. Posto

$$Y = 2X$$

si determini la f.d.p. di Y.

Soluzione

$$y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(2X \leq y)$$
$$= \mathbb{P}(X \leq y/2) = F_X(y/2).$$

Allora

$$y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = F_X(y/2).$$

Ricordando che la f.d.p. si ottiene per derivazione dalla F.D. si ha:

$$y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = f_X(y/2) \cdot \frac{1}{2}. \qquad \square$$

MOMENTI

$$m \in \mathbb{N}, \quad \mu'_m = \mathbb{E}(X^m) = \int^{+\infty} x^m \cdot f(x)\, dx$$

$m \in \mathbb{N}, \quad \mu'_m = \mathbb{E}(X^m) = \int_{-\infty} x^m f_X(x)\, dx$

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$
$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2.$$

ESEMPIO 5.2.a

X è una v.a. con f.d.p.:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Bisogna determinare la media di X.

(1) $\quad f_X(x) \geq 0 \quad$ in $\mathbb{R}$

(2) $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^1 2x\, dx = \cancel{2}\, \frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 = (1^2 - 0^2) = 1.$

Inoltre,

$$x < 0, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 0$$

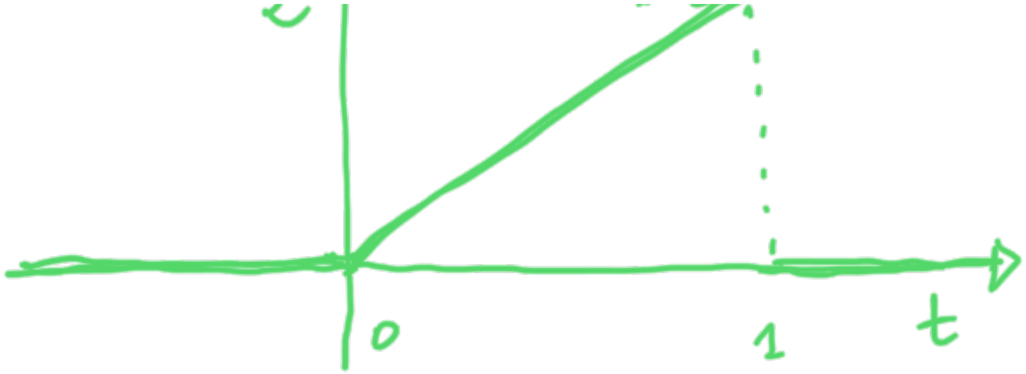
$$0 < x < 1, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{0}^{x} 2t\,dt$$

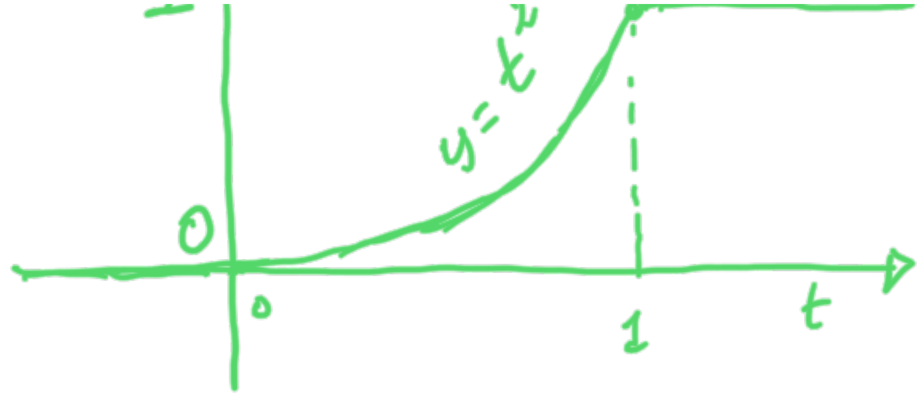
$$= t^2 \Big|_0^x = x^2.$$

$$x \geq 1, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0 \cdot dt$$

$$= t^2 \Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$





$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2 \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \, x^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

$\square$

<u>ESEMPIO 5.2.b</u>

X è una v.a. con f.d.p.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Determinare $\mathbb{E}(e^X)$.

__Soluzione__

$$Y = e^X \quad ; \qquad \mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy \,.$$

$y > 0$, $\quad F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(e^X \le y)$

$$= \mathbb{P}\left[\ln(e^X) \le \ln y\right]$$

$$= \mathbb{P}(X \ln e \le \ln y)$$

$$= \mathbb{P}(X \le \ln y) = F_X(\ln y)$$

Allora

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(\ln y), & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

Dopo di ciò

$$y > 0, \qquad f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y}$$

In definitiva

$0 < \ln y < 1$

$\Leftrightarrow 1 < y < e$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora, possiamo ottenere il risultato:

$$\mathbb{E}(e^X) = \mathbb{E}(Y)$$

$$= \int_1^e y \cdot \frac{1}{y}\, dy = \int_1^e dy = e - 1.$$

Si può procedere per altra via utilizzando la seguente formula:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_X(x)\,dx.$$

Allora

$$\mathbb{E}(e^X) = \int_0^1 e^x \cdot 1 \cdot dx = \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

$\square$