ESERCIZIO

Un'urna contiene k biglie bianche (B) e 1 biglia nera (N). Due giocatori estraggono

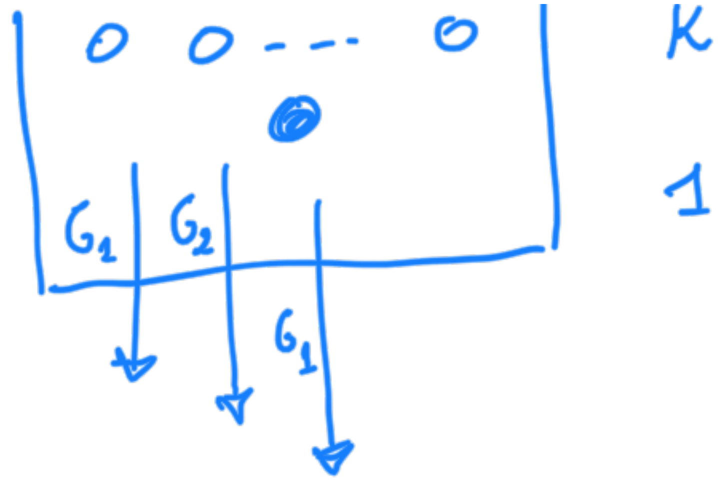
1) "a sorte",
2) senza rimpiazzamento,
3) con alternanza,
4) inizia il giocatore denotato con G_1,

una biglia dall'urna fino a quando si verifica l'uscita della biglia nera.

Si vuole valutare $\mathbb{P}(G_1)$ ovvero la probabilità dell'evento che sia G_1 a estrarre la biglia nera.

In simboli

G_1 , G_2



$\mathbb{P}(G_1) = ?$

Si osservi che : $G_{1;1}$: G_1 vince all'estrazione 1

$G_{1;3}$: G_1 " " 3

$G_{1;2n+1}$: G_1 " " 2n+1

$$\mathbb{P}(G_{1;1}) = \frac{1}{K+1},$$

$$\mathbb{P}(G_{1;3}) = \mathbb{P}(B_1 B_2 N_3) = \mathbb{P}(B_1)\, \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\, \mathbb{P}_{B_1 B_2}(N_3)$$

$$= \frac{K}{K+1} \cdot \frac{K-1}{K} \cdot \frac{1}{K-1} = \frac{1}{K+1},$$

$$\mathbb{P}(G_{1;5}) = \mathbb{P}(B_1 B_2 B_3 B_4 N_5) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \cdot$$

$$\cdot\, \mathbb{P}_{B_1 B_2}(B_3) \cdot \mathbb{P}_{B_1 B_2 B_3}(B_4) \cdot \mathbb{P}_{B_1 B_2 B_3 B_4}(N_5)$$

$$= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{k-3}{k-2} \cdots \frac{1}{k-3} = \frac{1}{k+1},$$

$\vdots$

Qui noti, ogniqualvolta estrae G_1 ha probabilità $1/_{k+1}$ di estrarre biglia nera.

D'altra parte,

$$G_1 = \begin{cases} G_{1;1} \,\dot\cup\, G_{1;3} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_{1;k+1} & \text{se } k \text{ è pari} \\ G_{1;1} \,\dot\cup\, G_{1;3} \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, G_{1;k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

il secondo indice è ottenuto dal precedente $+2$

e il numero delle estrazioni che al massimo lo vedono impegnato è

$$\# G_1 = \begin{cases} \frac{k}{2} + 1, & k \text{ pari}, \end{cases}$$

$\frac{K+1}{2}$ $\quad K$ dispari.

Dopo di ciò, se K è dispari

$$\mathbb{P}(G_1) = \underbrace{\mathbb{P}(G_{1;1}) + \mathbb{P}(G_{1;3}) + \dots + \mathbb{P}(G_{1;K})}_{\frac{K+1}{2}}$$

$$= \frac{K+1}{2} \cdot \mathbb{P}(G_{1;1}) = \frac{K+1}{2} \cdot \frac{1}{K+1} = \frac{1}{2},$$

mentre se K è pari

$$\mathbb{P}(G_1) = \underbrace{\mathbb{P}(G_{1;1}) + \mathbb{P}(G_{1;3}) + \dots + \mathbb{P}(G_{1;K+1})}_{\frac{K}{2}+1}$$

$$= \left(\frac{K}{2} + 1\right) \mathbb{P}(G \quad) \quad \left(\frac{K}{2} + 1\right) \frac{1}{\quad} = \frac{K+2}{\quad}$$

$$= \left(\frac{k}{2}+1\right) \mathbb{P}(U_1;1) = \left(\frac{k}{2}+1\right) \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2}{k+1} > \frac{1}{2}.$$

Inoltre,

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{2} \lim_{k \to \infty} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{2}.$$

Se ne conclude che per limitare il "vantaggio" del giocatore G_1, esistente nel caso di k pari, il giocatore G_2 può richiedere di riempire l'urna con il numero massimo di biglie disponibili. $\square$

FORMULA DI BAYES

$A, B \in \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$, $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A) > 0$ e $\mathbb{P}(B) > 0$

Per la formula delle probabilità congiunte si può scrivere

$$\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}_A(B)$$

dalla quale discende

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

"a priori"

"a posteriori"

verosimiglianza

ESEMPIO

S : Portatore di una particolare volipendolenza lieve

T : " " " grave

Applicando agli eventi S e T la formula di Bayes, si ha:

$$\mathbb{P}_S(T) = \frac{\mathbb{P}_T(S)\,\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(S)} = \mathbb{P}(T)\,\frac{\mathbb{P}_T(S)}{\mathbb{P}(S)}.$$

La formula precedente assume questo significato:

a) $\mathbb{P}_T(S)$ si ottiene "ora" in quanto si chiede ad un certo numero di individui con T se nel passato era un individuo con S.

b) $\mathbb{P}_S(T)$ si otterrà "in futuro" in quanto individuato un certo nu-

mero di individui con S
necessario aspettare un fissato
periodo di tempo per chiedere
a essi se nel frattempo sono
diventati individui con T.

e) Quindi, se si è in grado di valutare anche il rapporto $\mathbb{P}_T(S)/\mathbb{P}(S)$, la formula di Bayes consente di non procedere con la rilevazione dati b). $\square$

Ritornando alla formula di Bayes, in generale bisogna valutare $\mathbb{P}(B)$.

FORMULA DELLE ALTERNATIVE

Un insieme di eventi, $H_1, H_2, \dots, H_n$ si dice costituire un "sistema completo di alternative" (s.c.a.) se gode delle seguenti 3 proprietà:

1) $i = (1, 2, \dots, n)$, $\quad \mathbb{P}(H_i) > 0$;

2) $i, j = (1, 2, \dots, n) : i \neq j$, $\quad H_i \cap H_j = \emptyset$;

3) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

FORMULA

$\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ un s.c.a.

Sia $B \in \mathcal{F}$, e $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$

allora,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{H_i}(B) \cdot \mathbb{P}(H_i) .$$