Richiamo: Centro di ordine 2

$$d_2(x, \underline{y}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x - y_i)^2}$$

$$\xi_2 = \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \; d_2(x, y)$$

Ma se consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x - y_i)^2$$

allora risulta

$$\xi_2 = \operatorname{argmin} d_2(x, y) = \operatorname{argmin} f(x)$$

$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$

in quanto la radice quadrata è una funzione strettamente crescente nel suo dominio. Considerando $f(x)$, risulta più semplice determinare ξ_2.

$\square$

OSSERVAZIONE

La funzione $\ln x$ è strettamente crescente per cui, posto

$$l(\underline{\theta}\,;\underline{x}) := \ln L(\underline{\theta}\,;\underline{x}),$$

risulta:

$$\underset{\underline{\theta} \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \, L(\underline{\theta}; \underline{x}) = \underset{\underline{\theta} \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \, \ell(\underline{\theta}; \underline{x}).$$

$\square$

ESEMPIO

$X \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0 \Rightarrow \Theta = (0, +\infty)$

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ c.c.s.

$$L(\lambda; \underline{x}) = \frac{1}{A} e^{-n\lambda} \lambda^{t}$$

dove $A = x_1! \, x_2! \cdots x_n!$

$t = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$

Allora,

$$\ell(\lambda;\underline{x}) = \ln L(\lambda;\underline{x}) = \ln\frac{1}{A} + \ln e^{-n\lambda} + \ln \lambda^{t}$$

$$= -\ln A - n\lambda + t\ln\lambda .$$

Per cui

$$\ell'(\lambda;\underline{x}) = \frac{d\,\ell(\lambda;\underline{x})}{d\lambda} = -n + \frac{t}{\lambda}$$

$$\ell'(\lambda;\underline{x}) = 0 \iff n = \frac{t}{\lambda} \iff \lambda = \frac{t}{n} = \overline{x}$$

$$\ell''(\lambda;\underline{x}) = -\frac{t}{\lambda^2} \Rightarrow \lambda > 0,\ \ell''(\lambda;\underline{x}) < 0 .$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} L(\lambda;\underline{x}) = 0 = \lim_{\lambda\to+\infty} L(\lambda;\underline{x}) \Rightarrow$$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \ell(\lambda; \underline{x}) = \lim_{\lambda \to 0^+} \ln L(\lambda; \underline{x})$$

$$= \ln \left(\lim_{\lambda \to 0^+} L(\lambda; x) \right) = -\infty,$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \ell(\lambda; \underline{x}) = \lim_{\lambda \to +\infty} \ln L(\lambda; \underline{x})$$

$$= \ln \left(\lim_{\lambda \to +\infty} L(\lambda; x) \right) = -\infty.$$

$\square$

ESEMPIO

$$X \sim B(1, p), \quad p \in (0,1) \equiv \Theta$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad \underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$p \in \Theta, \quad L(p; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = (1-p) \\ \mathbb{P}(X=1) = p \end{cases} \overset{x=\{0,1\}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(X=x) = p^{x}(1-p)^{1-x}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$

$t = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$= p^{t} \cdot (1-p)^{n-t}$$

$$p \in \Theta, \quad \ell(p; \underline{x}) = \ln L(p; \underline{x})$$

$$= t \ln p + (n-t) \ln (1-p).$$

PUNTI STAZIONARI

$$p \in \Theta, \quad \ell'(p; \underline{x}) = \frac{d\,\ell(p; \underline{x})}{dp} = \frac{t}{p} - \frac{n-t}{1-p} \Longrightarrow$$

$$\ell'(p; \underline{x}) = 0 \Longleftrightarrow \frac{t}{p} = \frac{n-t}{1-p}$$

$$\Longleftrightarrow t(1-p) = (n-t)p$$

$$\Longleftrightarrow t - \cancel{tp} = np - \cancel{tp}$$

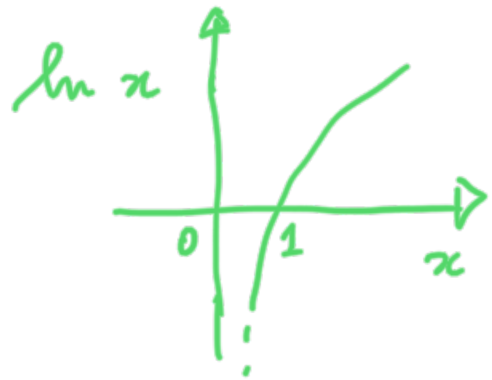
$$\Longleftrightarrow p = \frac{t}{n} = \bar{x}.$$

MINIMI E MASSIMI RELATIVI

$$\ell''(p; x) = -\frac{t}{} - \frac{n-t}{} < 0$$

$$p^2 \qquad (1-p)^2$$

per cui $\bar{x}$ è punto di massimo relativo.



FRONTIERA

$$\lim_{p \to 0^+} \ell(p\,;\underline{x}) = \lim_{p \to 0^+} \left[t \ln p + (n-t) \ln (1-p) \right]$$

$$= -\infty.$$

$$\lim_{p \to 1^-} \ell(p\,;\underline{x}) = \lim_{p \to 1^-} \left[t \ln p + (n-t) \ln (1-p) \right]$$

$$= -\infty.$$

CONCLUSIONE

- La derivata di $\ell(p;\underline{x})$ esiste in Θ;
- Sulla frontiera di Θ $\ell(p;\underline{x})$ è infinitamente grande e negativa;
- $\bar{x}$ è (unico) punto di massimo relativo.

In definitiva, si ha:

$$\underset{p\in\Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(p;\underline{x}) = \underset{p\in\Theta}{\operatorname{argmax}}\, \ell(p;\underline{x}) = \bar{x} \Rightarrow$$

e pertanto

$$\hat{P}_{MV} = \overline{X}^{(1)} = \overline{X},$$ stimatore di massima verosimiglianza

e

$\hat{p}_{MV} = \bar{x}$. stima di massima verosimiglianza

$\square$

Come si procede nel caso di una genitrice assolutamente continua? Si osservi che, se X è dotata di funzione di densità $f_X(x)$, risulta

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}\left[X \in \underbrace{(x, x+dx)}_{}\right] = f_X(x)\,dx$$

$$\mathbb{P}\left[X \in (a,b)\right] = \int_a^b \underbrace{f_X(x)\cdot dx}_{= \mathbb{P}\left[X \in (x, x+dx)\right]} \qquad \Sigma$$

e allora si definisce

$$L(\underline{\theta}; \underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \underline{\theta}).$$

ESEMPIO

$X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0 \Leftrightarrow \Theta = (0, +\infty)$

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \in (0,+\infty), \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0,+\infty)^n$ $\quad \underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.
c.c.s.

$t = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$\lambda \in (0,+\infty), \quad L(\lambda;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda t},$$

$$\ell(\lambda;\underline{x}) = \ln L(\lambda;\underline{x}) = n \ln \lambda - \lambda t$$

PUNTI STAZIONARI

$$\lambda \in (0,+\infty), \quad \ell'(\lambda;\underline{x}) = \frac{d\,\ell(\lambda;\underline{x})}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - t \implies$$

$$\ell'(\lambda;\underline{x}) = 0 \iff \frac{n}{\lambda} = t \iff \lambda = \frac{n}{t} = \frac{1}{\overline{x}}.$$

MINIMI e MASSIMI RELATIVI

$$\ell''(\lambda;\underline{x}) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \implies$$

$\frac{1}{\bar{x}}$ è punto di massimo relativo.

FRONTIERA

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \ell(\lambda; \underline{x}) = \lim_{\lambda \to 0^+} (n \ln \lambda - \lambda t) = -\infty;$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \ell(\lambda; \underline{x}) = \lim_{\lambda \to +\infty} (n \ln \lambda - \lambda t) = -\infty.$$

CONCLUSIONE

- La derivata di $\ell(\lambda; \underline{x})$ esiste in Θ;
- Sulla frontiera di Θ $\ell(\lambda; \underline{x})$ è infinitamente grande e negativa;
- $\bar{x}^{-1}$ è (unico) punto di massimo rela-

— x è punto quindi di massimo assoluto.

In definitiva, si ha:

$$\underset{\lambda \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \, L(\lambda; \underline{x}) = \underset{\lambda \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \, \ell(\lambda; \underline{x}) = \frac{1}{\bar{x}} \Rightarrow$$

$$\hat{\Lambda}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}}$$ stimatore di massima verosimiglianza

e

$$\hat{\lambda}_{MV} = \frac{1}{\bar{x}}.$$ stima di massima verosimiglianza

$\square$

ESEMPIO

$X \sim U(0, b) \quad b > 0 \Rightarrow \Theta = (0, +\infty)$

$$f_X(x;b) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & x \in (0,b) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (0,+\infty)^n, \quad \underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ c.c.s.}$$

$$X \sim X_1 \sim X_2 \sim \dots \sim X_n$$

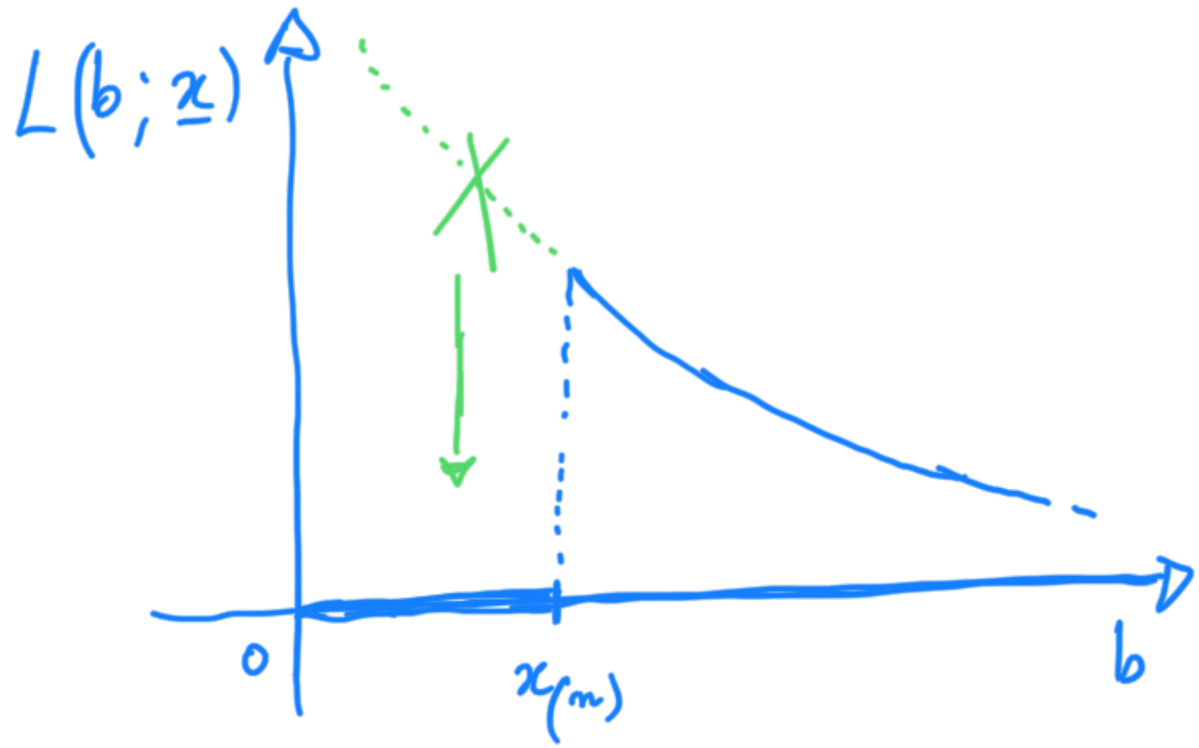
$\underline{x} \in (0,+\infty)^n$

$$b>0, \quad L(b;\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} \cdot 1_{\{x_i<b\}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} \cdot 1_{\{b>x_i\}} = \frac{1}{b^n} \prod_{i=1}^{n} 1_{\{\underbrace{b>x_i}\}}$$

$x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$= \frac{1}{b^n} \cdot 1_{\bigcap_{i=1}^{n} \{b>x_i\}} = \frac{1}{b^n} 1_{\{b>x_{(n)}\}}.$$



Di conseguenza

$$\underset{b>0}{\operatorname{argmax}}\, L(b; \underline{x}) = x_{(n)}.$$

Quindi,

$$\hat{B}_{MV} := X_{(n)}$$

è lo stimatore di massima verosimiglianza per b,

e se $\underline{x}$ è la realizzazione di $\underline{X}$

$$\hat{b}_{MV} = x_{(n)}$$

è la stima di massima verosimiglianza di b.

$\square$