PROPOSIZIONE

Siano A e B eventi indipendenti.

(i) A e B^c sono indipendenti.

(ii) A^c e B sono indipendenti.

(iii) A^c e B^c sono indipendenti.

DIM

(i) $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

$$\Big(\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}[A \cap (B \,\dot\cup\, B^c)]$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B \,\dot\cup\, A \cap B^c)$$
$$= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c). \Big)$$

Infatti,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\
&= \mathbb{P}(A)\,[1 - \mathbb{P}(B)] \\
&= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^c) .
\end{aligned}
$$

(ii) Basta scambiare il ruolo di A e di B.

(iii) Basta applicare la (i) alla coppia A^c, B.

PROPOSIZIONE

Siano $A_1, \dots, A_n$ di eventi indipendenti.

(Comunque si sceglie $K = (2, 3, \dots, n)$ e comunque si scelgono k di essi, le probabilità delle loro intersezione si fattorizza nel prodotto delle rispettive probabilità.)

Comunque si sceglie $k = (1, 2, \dots, n)$ e comunque si scelgono k di essi, sostituendo a essi i loro rispettivi complementi si ottiene un'altra n-pla di eventi indipendenti.

Ad esempio, se A_1, A_2, A_3, A_4 sono indipendenti allora

$k=1$ $\begin{cases} A_1^c, A_2, A_3, A_4 & \text{sono indipendenti} \\ A_1, A_2, A_3^c, A_4 & \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$

$k=2$ $\begin{cases} A_1^c, A_2^c, A_3, A_4 & \text{"} \quad \text{"} \\ A_1^c, A_2, A_3, A_4^c & \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$

A_1, A_2, A_3, A_4

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

ESEMPIO

Si lancia un dado onesto nella stanza 1 e un altro dado onesto nella stanza 2 e poi si esegue la somma S dei due punteggi.

$$\Omega = \{(i,j)\}_{\substack{i=1,\dots,6\\ j=1,\dots,6}}, \quad \mathcal{G} = \left(\{(i,j)\}\right)_{\substack{i=1,\dots,6\\ j=1,\dots,6}},$$

$$\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\Omega),$$

e $\mathbb{P}$ è la misura di probabilità classica.

Consideriamo l'evento

A : " S è multiplo di 4 ".

Risulta

$$\mathbb{P}_\Omega(A) = \mathbb{P}\Big(\{(1,3)\} \cup \{(2,2)\} \cup \{(2,6)\} \cup \{(3,1)\} \cup \{(3,5)\} \cup \{(4,4)\} \cup \{(5,3)\} \cup \{(6,2)\} \cup \{(6,6)\} \Big)$$

$$\left(\mathbb{P}_\Omega(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{1} = \mathbb{P}(A) \right)$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(1,3) + \dots + \mathbb{P}(6,6)}_{\text{9 addendi uguali a } 1/36} = \boxed{\frac{9}{36}}$$

Si supponga che prima di valutare la probabilità dell' evento A si venga a sapere che nella seconda stanza il punteggio sia stato 3; si indichi con

$$B = \{ (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3) \}$$

tale evento.

Lo spazio Ω è quindi sostituito da B; più in generale

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$$

Qui, $\mathcal{F}_B$ è la σ-algebra che si ottiene intersecando ogni evento di $\mathcal{F}$ con A.

Inoltre,

$$\underbrace{\mathbb{P}_B(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(1,3)\} \dot\cup \{(5,3)\})}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(1,3) + \mathbb{P}(5,3)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{12}{36}.$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

e risulta:

$$\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}_B(A).$$

Sia ora C = S è un multiplo di 3.

$$\begin{cases} \mathbb{P}(C) = \frac{12}{36} \\ \mathbb{P}_B(C) = \frac{2}{6} = \frac{12}{36} \end{cases}$$

e risulta:

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_B(C).$$

Sia ora $D = $ 5 è un multiplo di 5.

$$\begin{cases} \mathbb{P}(D) = \dfrac{7}{36} \\ \\ \mathbb{P}_B(D) = \dfrac{6}{36} \end{cases}$$

e risulta:

$$\mathbb{P}(D) > \mathbb{P}_B(D).$$

$\square$

<u>DEFINIZIONE</u>

$A, B \in \mathcal{F}$ e $B : \mathbb{P}(B) > 0$. Si definisce

$$\mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$\mathbb{P}(B)$

Se A: $\mathbb{P}(A) > 0$, si definisce

$$\mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P} A}. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE

L'esempio precedente mostra che non c'è relazione d'ordine tra $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}_B(A)$. $\square$

LA LEGGE DELLE PROBABILITÀ CONGIUNTE

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}_B(A)$

sono indipendenti

(si ricordi che se A e B ...
risulta

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A)$$

la qual cosa comporta:

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).\ )$$

- $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B)$$

ESEMPIO

$$\mathbb{P}(B_1\, N_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(N_2)$$

$$= \frac{\cancel{10}^{\,1}}{\cancel{20}_{\,2}} \cdot \frac{\cancel{10}^{\,5}}{19} = \frac{5}{19}.$$

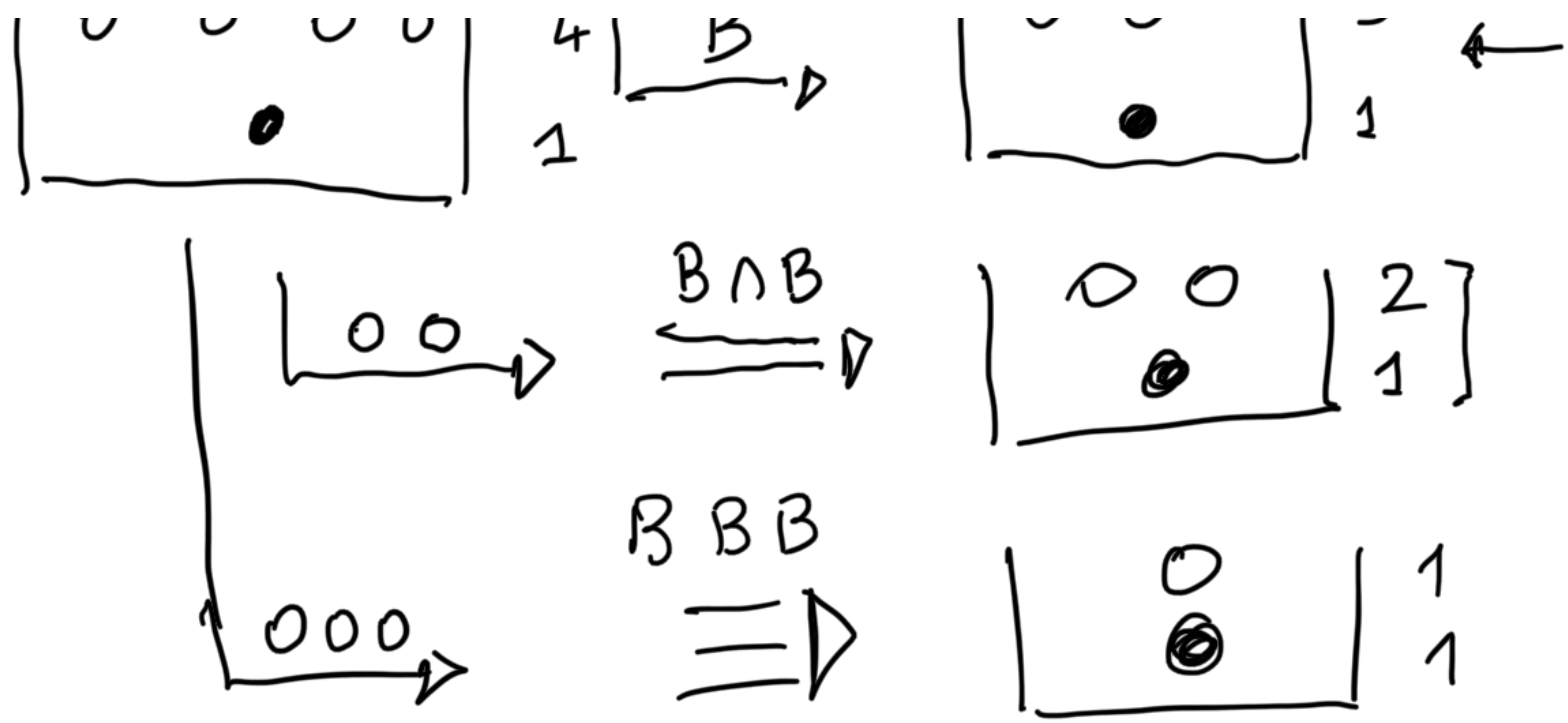
$\square$

ESEMPIO

Un'urna contiene 4 biglie bianche (B) e una biglia nera (N). Cinque giocatori,

$$G_1, G_2, G_3, G_4, G_5,$$

si accordano sulla seguente scommessa: G_1 estrae una biglia; se esce N vince altrimenti depone la biglia bianca su un tavolo e la partita prosegue con il giocatore G_2 allo stesso modo. Vince la partita il primo che estrae la biglia nera.



$$\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(N_2)$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(G_3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap N_3)$$

$$= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \cdot \quad ? \quad = \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \cdot \left(\mathbb{P}_{B_1}\right)_{B_2}(N_3)$$

$$= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \cdot \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(N_3)$$

$\square$

PROPOSIZIONE

$A, B, C \in \mathcal{F} \quad : \quad \mathbb{P}(B \cap C) > 0.$

allora,

$$\left(\mathbb{P}_B\right)_C(A) = \mathbb{P}_{B \cap C}(A).$$

DIM

Poniamo $Q = \mathbb{P}_B$

$$(\mathbb{P}_B)_C(A) = Q_C(A) = \frac{Q(A \cap C)}{Q(C)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_B(A \cap C)}{\mathbb{P}_B(C)} = \frac{\dfrac{\mathbb{P}(A \cap C \cap B)}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}}{\dfrac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\cancel{\mathbb{P}(B)}}}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[A \cap (B \cap C)]}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \mathbb{P}_{B \cap C}(A).$$

$\square$

ESEMPIO (continuazione)

$$\mathbb{P}(G_4) = \mathbb{P}(B_1\ B_2\ B_3\ N_4)$$

$$= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{\dots}(B_2) \cdot \mathbb{P}(B_3) \cdot \mathbb{P}_{\dots}(N_4)$$

$$B_1 \qquad B_1B_2 \qquad B_1B_2B_3$$

$$= \frac{\cancel{4}}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{5}.$$

Infine,

$$\mathbb{P}(G_5) = \mathbb{P}\left((G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)^c \right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Una interpretazione "frequentista" del risultato ottenuto è la seguente: su ogni 100 partite, G_1 le gioca tutte, "mediamente", ne vince 20; G_2 allora, mediamente, ne gioca 80 e ne vince 20; G_3, mediamente, ne gioca 60 e ne vince 20; G_4, mediamente, ne gioca 40 e ne vince 20; G_5, mediamente ne gioca 20 e ne vince 20.

Infatti, l'urna di G_1 gli consente di vincere con probabilità $1/5$; quella di G_2 gli consente di vincere con probabilità $1/4$; quella di G_3 gli consente di vincere con probabilità $1/3$; quella di G_4 gli consente di vincere con

con probabilità 1/2; quella di G_5 gli consente di vincere con probabilità 1. $\square$