Un insieme di eventi, $H_1, H_2, \dots, H_n$ si dice costituire un "sistema completo di alternative" (s.c.a.) se gode delle seguenti 3 proprietà:

1) $i = (1, 2, \dots, n)$, $\quad \mathbb{P}(H_i) > 0$;

2) $i, j = (1, 2, \dots, n) : i \neq j$, $\quad H_i \cap H_j = \emptyset$;

3) $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

FORMULA DELLE ALTERNATIVE

Sia $B \in \mathcal{F}$, e $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ un s.c.a.

allora,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{H_i}(B) \cdot \mathbb{P}(H_i).$$

<u>DIM</u>

$$B = B \cap \Omega \underset{3)}{\overset{2)}{=}} B \cap \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} H_i \right)$$

$$= \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (B \cap H_i)$$

e questo comporta che:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left[\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (B \cap H_i) \right]$$

$$\overset{\text{finita}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap H_i)$$

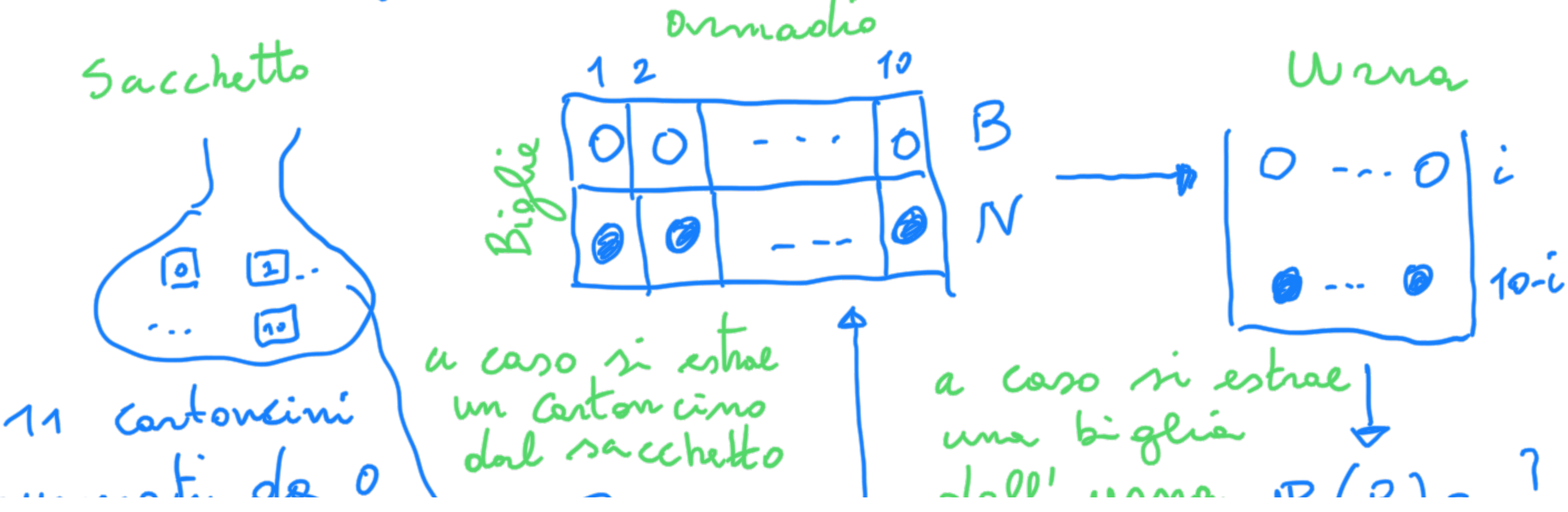
additività

1), Legge = probabilità congiunte $\qquad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}_{H_i}(B).$

$\square$

ESEMPIO

Un esperimento aleatorio è descritto nella seguente rappresentazione grafica.



numerati da
a 10

$\mathbb{P}(B) =$.

Svolgimento

$i = 0, 1, \dots, 10$, $\quad H_i :=$ "esce il dischetto con etichetta i"

$i \neq j$, $\quad H_i \cap H_j = \emptyset$

$$\bigcup_{i=0}^{10} H_i = \Omega$$

gli unici eventi $H_0, H_1, \dots, H_{10}$ costituiscono un s.c.a.

Inoltre,

$$\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{11} > 0,$$

$i = 0, 1, \dots, 10$, $\quad \mathbb{P}_{H_i}(B) = \frac{1}{10}$.

Applicando la formula delle alternative, si ha:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{10} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}_{H_i}(B)$$

$$= \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{11} \cdot \mathbb{P}_{H_i}(B) = \frac{1}{11} \sum_{i=0}^{10} \mathbb{P}_{H_i}(B)$$

$$= \frac{1}{11} \sum_{i=0}^{10} \frac{i}{10} = \frac{1}{11} \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{10} i$$

$$= \frac{1}{11} \frac{1}{10} \frac{11 \cdot 10}{2} = \frac{1}{2}.$$

Si osservi, infine, che dal sacchetto viene eliminato il cartoncino con l'etichetta 0, allora le alternative diventano 10 e si ha:

$$\sum^{10} \frac{1}{} \mathbb{P}_{H_i}(B) = \frac{1}{} \sum^{10} \frac{i}{}$$

$i=1 \qquad\qquad 10 \quad i=1$

$$= \frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} i = \frac{1}{10}\,\frac{1}{10}\,\frac{11\cdot 10}{2}$$

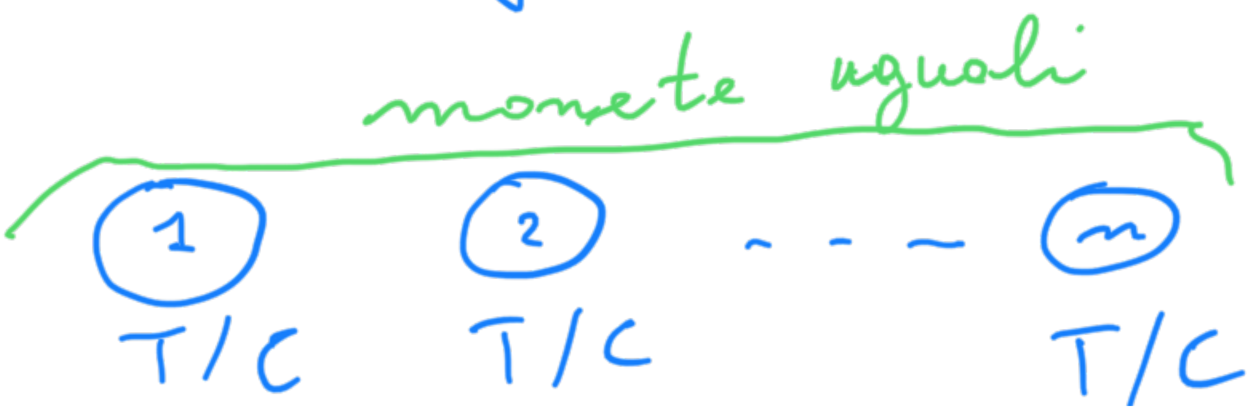
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{10} > \frac{1}{2}.$$

$$= 0{,}55.$$

$\square$

ESEMPIO

Un esperimento aleatorio è descritto nella seguente rappresentazione grafica e dal susseguente elenco.



1) Si lanciano le n monete e si determina il numero X delle T:

$$X \sim B(n, p) \sim S_n .$$

2) Si escludono le monete che hanno presentato C e si lanciano di nuovo le rimanenti. Si determina il numero Y delle T.

Bisogna determinare la legge di Y.

Svolgimento

a) $S_Y = \{0, 1, \dots, n\}$

b) $y \in S_Y$, $\{Y=y\}$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \; ?$$

$H_0 = \{X=0\}$, $H_1 = \{X=1\}$, $\dots$, $H_n = \{X=n\}$ costituisce un sistema completo di alternative

$$\begin{cases} k=(0,\dots,n), & \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} > 0, \\ k_1, k_2 = (0,1,\dots,n), & \{X=k_1\} \cap \{X=k_2) = \phi, \\ \Omega = \{X=0\} \,\dot\cup\, \{X=1\} \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, \{X=n\}. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(H_k)\, \mathbb{P}_{H_k}(Y=y)$$

$$\sum^{n} \mathbb{P}(X=k)\, \mathbb{P}_{H_k}(Y=y)$$

$$= \sum_{K=0} \dots$$

$$= \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} p^{K} (1-p)^{n-K} \cdot \mathbb{P}_{H_K}(Y=y)$$

($Y=y \iff$ ci sono state y monete che hanno presentato la T
Quindi bisogna che siano state lanciate almeno y monete.)

$$= \sum_{K=y}^{n} \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} \mathbb{P}_{H_k}(Y=y)$$

(avendolo saputo che $X=K$ allora:

$$Y \mid \{X=k\} \sim B(k, p).)$$

$$= \sum^{n} \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} \cdot \binom{K}{y} p^{y} (1-p)^{k-y}$$

$k=y$

$$\vdots$$

$$= \binom{n}{y} (p^2)^y (1-p^2)^{n-y}$$

da cui si evince che

$$Y \sim B(n, p^2).$$

Il risultato ottenuto può essere interpretato al seguente modo: si tratta di un esperimento di prove ripetute alla Bernoulli nel quale l'evento successo è $T_1 \cap T_2$ (per la stessa moneta "testa" al primo lancio e testa al secondo lancio) la cui probabilità è:

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1)\,\mathbb{P}_{T_1}(T_2) = p\,\mathbb{P}(T_2)$$
$$= p \cdot p = p^2.$$

$\square$

LEGGE DISCRETA UNIFORME

Se $n \in \mathbb{N}$, la legge discreta uniforme ha spettro

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\},$$

con relative probabilità

$$i = 1, \dots, n, \quad \mathbb{P}(S = e_i) = \frac{1}{n}.$$

ad esempio, in Excel la formula casuale.tra$(1;5) \sim U_d(1,2,3,4,5)$.

$\square$

ESEMPIO

P : numero aleatorio che rappresenta il punteggio nel lancio di un dado "onesto"

allora

$$S_P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$n = 6$

$$\mathbb{P}(P=1)=\mathbb{P}(P=2)=\mathbb{P}(P=3)=\mathbb{P}(P=4)$$

$$=\mathbb{P}(P=5)=\mathbb{P}(P=6)$$

$$=\frac{1}{6}. \qquad \square$$