Una osservazione sulle basi di una somma diretta

Questa nota si sofferma su un risultato che è stato proposto a lezione ma che non è esplicitato nello stesso modo nel testo consigliato per studiare.

Proposizione. *In uno spazio vettoriale V su un campo K, siano $W_1, \dots, W_p$ dei sottospazi vettoriali di V tali che la loro somma sia diretta. Siano inoltre $B_1 = \{e_{1,1}, \dots, e_{1,n_1}\}, \dots, B_p = \{e_{p,1}, \dots, e_{p,n_p}\}$ basi di $W_1, \dots, W_p$, rispettivamente. Allora $B_1 \cup \dots \cup B_p$ è una base di $W_1 \oplus \dots \oplus W_p$.*

Proof. Prima di tutto, ricordiamo che per definizione di spazio somma si ha $W_1 + \dots + W_p = \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) = \mathcal{L}(B_1 \cup \dots \cup B_p)$ (dove la seconda eguaglianza è stata assegnata come esercizio a lezione). Quindi, l'unione delle basi è un sistema di generatori dello spazio somma.

Inoltre, per definizione di somma diretta, si ha

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$$

per ogni $i \in \{1, \dots, p\}$. Questo implica che l'intersezione di due qualsiasi dei sottospazi vettoriali è nulla (attenzione: non vale il viceversa!). Quindi, in particolare, si ha che l'intersezione tra due qualsiasi delle basi è vuota.

Procediamo per induzione sul numero p di sottospazi. Consideriamo prima il caso $p = 2$.

Siano $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n_1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,n_2}$ scalari tali che

$$\alpha_{1,1}e_{1,1} + \dots + \alpha_{1,n_1}e_{1,n_1} + \alpha_{2,1}e_{2,1} + \dots + \alpha_{2,n_2}e_{2,n_2} = \{\underline{0}\}.$$

Da questa scrittura ricaviamo

$$u := \alpha_{1,1}e_{1,1} + \dots + \alpha_{1,n_1}e_{1,n_1} = -\alpha_{2,1}e_{2,1} + \dots - \alpha_{2,n_2}e_{2,n_2} \tag{1}$$

e osserviamo che il vettore ottenuto u si scrive in due modi, da cui si evince che u appartiene sia a W_1 sia a W_2. Siccome l'intersezione $W_1 \cap W_2$ è nulla per ipotesi, allora deve essere $u = \underline{0}$. Di conseguenza, data la lineare indipendenza delle basi B_1 e B_2, tutti gli scalari che compaiono in (1) sono nulli. Allora $B_1 \cup B_2$ è linearmente indipendente. Essendo $B_1 \cup B_2$ anche un sistema di generatori per $W_1 \oplus W_2$, abbiamo la tesi per $p = 2$.

Sia adesso $p > 2$ e supponiamo vero l'enunciato per $p-1$ sottospazi vettoriali. Siano $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,n_1}$, $\alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,n_2}, \dots,$ $\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,n_p}$ scalari tali che

$$\alpha_{1,1}e_{1,1} + \dots + \alpha_{1,n_1}e_{1,n_1} + \alpha_{2,1}e_{2,1} + \dots + \alpha_{2,n_2}e_{2,n_2} + \dots + \alpha_{p,1}e_{p,1} + \dots + \alpha_{p,n_p}e_{p,n_p} = \{\underline{0}\}.$$

Da questa scrittura ricaviamo

$$u := \alpha_{1,1}e_{1,1} + \dots + \alpha_{1,n_1}e_{1,n_1} = -\alpha_{2,1}e_{2,1} + \dots - \alpha_{2,n_2}e_{2,n_2} - \dots - \alpha_{p,1}e_{p,1} + \dots - \alpha_{p,n_p}e_{p,n_p} \tag{2}$$

e osserviamo che il vettore ottenuto u si scrive in due modi, da cui si evince che appartiene sia a W_1 sia a $W_2 + \dots + W_p$. Siccome l'intersezione $W_1 \cap (W_2 + \dots + W_p)$ è nulla per definizione di somma diretta, allora deve essere $u = \underline{0}$. Di conseguenza, data la lineare indipendenza di B_1 e dei vettori di $B_2 \cup \dots \cup B_p$ per ipotesi di induzione, tutti gli scalari che compaiono in (2) sono nulli. Allora $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$ è linearmente indipendente ed essendo un sistema di generatori di $W_1 + W_2 + \dots + W_p$, ne è anche una base.