EVENTI INDIPENDENTI

$A \dot{\cup} B \iff A \cap B = \emptyset$ incompatibili oppure disgiunti

<u>Due eventi</u>, A e B, si dicono <u>indipendenti</u> se e solo se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

la probabilità dell'evento congiunto si fattorizza nel prodotto delle probabilità dei singoli eventi

$$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1) \cdot \mathbb{P}(T_2)$$

La verifica che due eventi sono indipendenti è facilitata da una particolare struttura dell'esperimento aleatorio;

ra dell' esperimento aleatorio

se si può determinare un insieme di due sotto esperimenti che sono *finitamente* indipendenti allora tutti gli eventi che sono generati dal primo di essi sono indipendenti da ciascun evento generato dal secondo sottoesperimento.

Inoltre sussistono i seguenti risultati.

PROPOSIZIONE

Siano $A, I \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(I) = 0$. Allora

$$\mathbb{P}(A \cap I) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(I).$$

DIM

$$A \cap I \subseteq I \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap I) \leq \mathbb{P}(I) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(A \cap I) = 0$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(I) = 0. \qquad \square$$

PROPOSIZIONE

Siano $A, C \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(C) = 1$. Allora

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C).$$

DIM

$$A = A \cap \Omega = A \cap (C \,\dot\cup\, C^c)$$

$$= (A \cap C) \,\dot\cup\, (A \cap C^c) \quad = 0$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap C) + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap C^c)}_{=0} \longrightarrow \text{evento q. t.}$$

$$\mathbb{P}(C) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(C^c) = 0$$

$$\underline{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap C)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C).$$

ESEMPIO

Lancio di un dado onesto.

$$A = \{2, 4, 6\} \quad , \quad B = \{1, 2\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}.$$

Se ne può concludere che A e B sono

eventi indipendenti.

$\square$

ESEMPIO

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathcal{G} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = \mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad C = \{1, 4\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2}{4} = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C).$$

Risulta:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = 1$$

$$\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B) = \frac{\;}{4} \quad \frac{\;}{4} = \frac{\;}{4}$$

e

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$$

e

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) = 1/4$$

ma

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{8}.$$

$\square$

Quindi, si può pensare di estendere la definizione di indipendenza di 3 eventi prendendo spunto dal precedente esempio:
si deve fattorizzare la probabilità del congiunto di due qualsiasi di es- e anche la probabilità dell'evento congiunto dei tre eventi considerati.

Si può anche dare la seguente più generale definizione di un insieme di eventi indipendenti.

DEFINIZIONE

n eventi sono indipendenti se si fattorizza la probabilità dell'intersezione di $k = (2, 3, \dots, n)$ di essi comunque scelti tra loro. $\square$

Ad esempio, nel caso di $n = 4$

$k = (2, 3, 4)$

$k = 2$

$$\underbrace{A_1 A_2}, \; A_1 A_3, \; A_1 A_4,$$
$$\underbrace{A_2 A_3}, \; A_2 A_4,$$
$$A_3 A_4,$$

$k = 3$

$$A_1 A_2 A_3, \; A_1 A_2 A_4, \; A_1 A_3 A_4,$$

$A_2 \ A_3 \ A_4,$

$K = 4$

$A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4$

ESEMPIO

$n = 5$, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 eventi collettivamente indipendenti

Allora, ad esempio, sussistono:

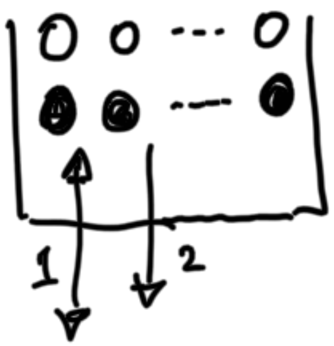
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_5) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_3)\,\mathbb{P}(A_5),$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3),$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \cdot \mathbb{P}(A_4) \cdot \mathbb{P}(A_5).$$

$\square$

ESEMPIO



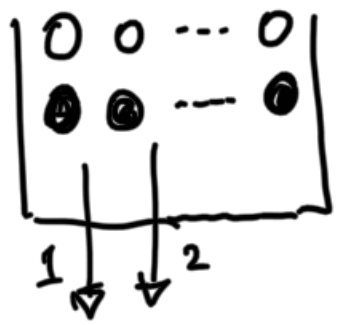
10 biglie bianche
10 " nere

la prima biglia estratta è reintrodotta nell'urna prima di estrarre la seconda

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(N_2)$$
$$= \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20}.$$

i due eventi B_1 e N_2 sono indipendenti in quanto sono indipendenti le due sotto-estrazioni

Nel caso in cui le due estrazioni avvengono senza reintroduzione della prima biglia, ovvero secondo lo schema



si ha:

$$\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) \neq \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(N_2) \quad ?$$

$$= \frac{10}{20} \cdot \frac{\quad}{19}$$

$\square$