Lemma di Steinitz. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K. Se n è la cardinalità di un sistema di generatori finito di V, ogni sottoinsieme di V contenente $m > n$ vettori è linearmente dipendente.*

Dim. Per ipotesi, esiste un sistema di generatori di V composto da n vettori. Sia $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un tale sistema di generatori.

Dobbiamo dimostrare che, preso comunque un insieme $X = \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ di vettori di V, se $m > n$ allora X è linearmente dipendente.

Possiamo supporre che X non contenga il vettore nullo. Infatti, se X contiene il vettore nullo, allora la tesi segue immediatamente.

Siccome v_1 appartiene a $V = \mathcal{L}(S)$, allora v_1 si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S mediante scalari che non sono tutti nulli, in quanto stiamo supponendo che v_1 sia diverso dal vettore nullo:

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K :\ v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

con, per esempio, $\lambda_1 \neq 0$. Quindi, esiste $\lambda_1^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri della precedente uguaglianza per λ_1^{-1}, ottenendo:

$$\lambda_1^{-1} v_1 = \lambda_1^{-1}\lambda_1 u_1 + \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n$$

e di conseguenza:

$$u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Adesso possiamo osservare che l'insieme S è contenuto nella chiusura lineare $\mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n)$, per cui

$$V = \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n) \subseteq V$$

e quindi si ha $V = \mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n)$, ossia l'insieme $S' = \{v_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori di V ottenuto sostituendo in S il vettore u_1 con il vettore v_1 di X.

Siccome v_2 è un vettore di $V = \mathcal{L}(S')$, allora v_2 si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di S' mediante scalari che non sono tutti nulli, in quanto stiamo supponendo che v_2 sia diverso dal vettore nullo

$$\exists\ \beta_1, \ldots, \beta_n \in K :\ v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Se $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, allora $\beta_1 \neq 0$ e $v_2 = \beta_1 v_1$, così che l'insieme X risulta essere linearmente dipendente $(\star)$.

Altrimenti, possiamo per esempio supporre che sia $\beta_2 \neq 0$, per cui esiste $\beta_2^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri della precedente uguaglianza per β_2^{-1}, ottenendo:

$$\beta_2^{-1} v_2 = \beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1}\beta_2 u_2 + \cdots + \beta_2^{-1}\beta_n u_n$$

e di conseguenza

$$u_2 = -\beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1} v_2 + \cdots - \beta_2^{-1}\beta_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n).$$

Analogamente a prima, possiamo osservare che S' è contenuto in $\mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$, per cui

$$V = \mathcal{L}(S') \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n) \subseteq V$$

e quindi si ha $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$, ossia l'insieme $S'' = \{v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori di V ottenuto sostituendo in S' il vettore u_2 con il vettore v_2 di X.

Se $m > n$ possiamo ripetere questo procedimanto fino a trovare che X è linearmente dipendente come nel punto indicato con $(\star)$ oppure trovando che l'insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è un sistema di generatori di V. Quindi, il vettore $v_{n+1} \in X \subset V$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, la qual cosa implica che l'insieme X è linearmente dipendente.