Un' applicazione X di Ω in $\mathbb{R}$

$\mathcal{E}, \mathcal{G}$

$(\Omega, \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}), \mathbb{P}) \quad \Big| \quad (\mathbb{R}, \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}), \mathbb{P}_X)$

aleatorio

$$X : \Omega \xrightarrow{\text{misurabile}} \mathbb{R}$$

$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

per la quale

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \quad \{X \in B\} \in \mathcal{F}$$

$$\Updownarrow \qquad = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \subseteq \Omega$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $B =]-\infty, x]$, $\{X \le x\} \in \mathcal{F}$

$$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$$

si dice "misurabile.

Dopo di ciò, si può porre

$$\mathbb{P}_X \quad \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$B \longrightarrow \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$$

Un'applicazione X tra Ω e $\mathbb{R}$ che sia misurabile è detta "variabile aleatoria" oppure "numero aleatorio".

Nello schema delle prove ripetute di Bernoulli

$$\Omega = \{T, C\}^{\mathbb{N}} \; ; \; \mathcal{G} = \{ (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \}$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}) \qquad A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A)$$

si dice "prova" di ordine n l'applicazione

$$n \in \mathbb{N}, \quad X_n : \Omega \xrightarrow{\text{misurabile}} \mathbb{R}$$

$$\underline{\omega} \longrightarrow X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_n = T \\ 0, & \omega_n = C \end{cases}$$

L'applicazione è misurabile.

$]-\infty, x] \subseteq \mathbb{R} \qquad \{X_n \leq x\} \subseteq \Omega \qquad e$

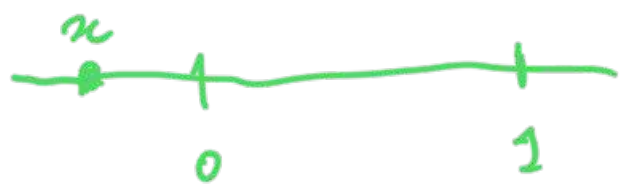
1) $x \geq 1$

$$\{\underline{\omega} \in \Omega : X_n \leq x\} = \Omega \in \mathcal{F}$$

2) $0 \leq x < 1$

$$\{\underline{\omega} \in \Omega : X_n \leq x\} = C_n = T_n^e \in \mathcal{F}$$

3) $x < 0$



$$\{\omega \in \Omega : X_n \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}$$

Si scrive

$$n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{X_n \sim B(1, p)}, \quad \underset{\text{nota}}{p} := \mathbb{P}(T) \in (0,1)$$

volendo intendere che X_n è una variabile aleatoria con

$$S_{X_n} = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{P}(X_n=0)=1-p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(X_n=1)=p.$$

TEOREMA

La somma di variabili aleatorie è una variabile aleatoria. □

Applicando il teorema alle prime n prove, si ottiene la variabile aleatoria "BINOMIALE"

$$n\in\mathbb{N},\quad S_n = X_1+X_2+\dots+X_n \sim B(\underbrace{n,p}_{\text{noti}})$$

per la quale

$$S_{S_n}=\{0,1,2,\dots,n\}$$

e

$$k\in S_{S_n},\quad \mathbb{P}_{S_n}(\{k\})=\mathbb{P}(S_n=k)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Infatti

$$\binom{n}{k} \begin{cases} - \ \mathbb{P}(\underbrace{T_1 T_2 \cdots T_k}\ \underbrace{C_{k+1} C_{k+2} \cdots C_n}) = p^n (1-p)^{n-k} \\ - \ \mathbb{P}(\underbrace{T_1 T_2 \cdots T_k}\ \underbrace{C_{k+1} C_{k+2} \cdots C_n}) = p^n (1-p)^{n-k} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad k \\ - \ \mathbb{P}(C_1 T_2 \cdots T_k C_{k+1} C_{k+2} \cdots C_{n-1} T_n) = p^n (1-p)^{n-} \end{cases}$$

PROBLEMA DEL CAVALIERE DE MÈRÈ

GIOCO 1	GIOCO 2
4 lanci di un dado onesto	24 lanci del doppio dado onesto
"almeno un 6"	"almeno un doppio 6"

$$n = 4 \;;\; p = \frac{1}{6}$$

$$\{S_4 \geq 1\} = \{S_4 = 0\}^c$$

$$\mathbb{P}(S_4 = 0) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$\mathbb{P}(S_4 \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 > 0{,}5 .$$

" almeno una doppia 6

$$n = 24 ,\; p = \frac{1}{36}$$

$$\{S_{24} \geq 1\} = \{S_{24} = 0\}^c$$

$$\mathbb{P}(S_{24} = 0) = \binom{24}{0} p^0 (1-p)^{24}$$

$$= \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

$$\mathbb{P}(S_{24} \geq 1) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} < 0{,}5 .$$

$$\mathbb{P}(S_{24} \geq 1) = \mathbb{P}(S_{24} = 1) + \mathbb{P}(S_{24} = 2) + \cdots + \mathbb{P}(S_{24} = 24)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(S_{24} = 0) .$$

TEOREMA DEL BINOMIO DI NEWTON

TEOREMA DEL BINOMIO

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

DIM

$$[p + (1-p)]^n = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$$

$$= \mathbb{P}\left(\{S_n = 0\} \cup \{S_n = 1\} \cup \dots \cup \{S_n = n\}\right)$$

$$= \mathbb{P}(S_n = 0) + \mathbb{P}(S_n = 1) + \dots + \mathbb{P}(S_n = n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k)$$

$$= \sum^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$\square$

$k=0$

Un'altra variabile aleatoria nello schema di Bernoulli è la variabile aleatoria "GEOMETRICA"

$$T_1 = \inf\{ n \in \mathbb{N} : X_n = 1 \} \sim G(p)$$

$$C \; C \; C \; C \; C \; \overset{6}{T} \; C \; C \; \overset{9}{T} \; C \; C \; C \; T \; T \; T$$

$$\downarrow$$

$$T_1$$

ovvero, il numero di prove necessarie per osservare la prima T.

Risulta

$$S_{T_1} = \{ 1, 2, \dots \} = \mathbb{N}$$

e

$k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_{T_1}(\{k\}) = \mathbb{P}(T_1 = k) = p(1-p)^{k-1}.$

$p \in (0,1) \Rightarrow q \in (0,1)$

Si ha:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} p\, q^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} q^m}_{\text{serie geometrica di ragione } q}$$

($\overset{q=1-p}{=} p\, q^{k-1}$)

$$= p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$