FORMULA INCLUSIONE - ESCLUSIONE

PROBLEMA delle CONCORDANZE

Ci sono n cartoncini numerati sul fronte che vengono mischiati. Poi, il mazzetto viene posto su un tavolo presentando il retro di quello che si trova più in alto. Poi, una persona prende tale cartoncino pronunciando "uno" e lo presenta con il fronte appoggiandolo sul tavolo accanto al primo mazzetto.

Se il cartoncino presenta il numero "1" allora si dice che si è presentata "una concordanza". Il procedimento si ripete con la persona che pronuncia "due" e rovescia la carta attualmente più in alto del mazzetto. C'è concordanza se il cartoncino presenta "2". E così via fino all'ultimo cartoncino.

Se $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ determinare la probabilità dell'evento

$E_{k,n}$: "esattamente k concordanze su n chiamate" nelle n chiamate

SOLUZIONE

Sia M_n il numero aleatorio che rappresenta il numero delle concordanze nelle n-chiamate.

$k = 0, 1, \ldots, n, \quad E_{k,n} = \{M_n = k\}$

$k = 0, \quad \{M_n = 0\}$

$$C = \{M_n = 0\}^c = \{M_n \geq 1\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \{M_n = i\}$$

$i = 1, \ldots, n, \quad A_i$: "concordanze nell'i-ma chiamata

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right] - \left[\sum_{i<j}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\right]$$

$$+ \left[\sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)\right] + \qquad (*)$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\right]$$

(1) $\mathbb{P}(A_1) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $\ldots$ $\mathbb{P}(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!}$

un cartoncino è bloccato e gli altri permutano in tutti i modi possibili

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} \sum_{i=1}^{n} 1 = \binom{n}{1}$$

$$= \frac{n\,(n-1)!}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(2) $\mathbb{P}(A_1 A_2) = \frac{(n-2)!}{n!}$ non dipende dai pedici

$$\mathbb{P}(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

due cartoncini sono bloccati e gli altri permutano in tutti i modi possibili

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}}$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} 1$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)!}{2\, n!} = \frac{1}{2}$$

(3) $\quad \mathbb{P}(A_1 A_2 A_3) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$ non dipende dagli indici

tre cartoncini sono bloccati e gli altri permutano in tutti i modi possibili iano in tutti i modi p

$$\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} \mathbb{P}(A_i A_j A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} \underbrace{\boxed{\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} 1}}_{\binom{n}{3}}$$

$$= \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} = \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(n-3)!}}{3!\,\cancel{(n-3)!}\,\cancel{n!}} = \frac{1}{3!}$$

In definitiva, per il generico addendo al secondo membro della $(*)$ vale

$$\binom{n}{\ell}\frac{(n-\ell)!}{n!} = \frac{1}{\ell!}$$

che fornisce

$$\Big({}^{n} \qquad \Big) \qquad \sum^{n} \qquad {}^{k-1}$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} (-1) \quad \frac{1}{i!}$$

$$\left(\bigcup A_i\right)^c = \{M_n = 0\}$$

$$\mathbb{P}(M_n = 0) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i} \frac{1}{i!} .$$

Risulta

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(M_n = 0) = \frac{1}{e} = e^{-1} ,$$

Infatti,

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{} + \frac{x^{2}}{} + \frac{x^{3}}{} + \dots$$

$1! \quad 2! \quad 3!$

$$e^{-1} = \underbrace{\left[1 + \frac{(-1)}{1!}\right]}^{0} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$

$k = 0, 1, \ldots, n$

$$\mathbb{P}(M_n = k) = ?$$