$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longrightarrow F_X(x)$$

DIMOSTRAZIONE DELLE PROPRIETÀ

a) F_X è non decrescente

$x_1 < x_2$

$$F_X(x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2) = \mathbb{P}\left[\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}\right]$$

$$\overset{\text{finita}}{\underset{\text{additività}}{=}} \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x_1)}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2)}_{\geq 0}$$

$$\geq \mathbb{P}(X \leq x_1) = F_X(x_1).$$

In definitiva,

$$x_1 < x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

$\square$

c) Risulta: $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Infatti,

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(n) = \lim_{n} \mathbb{P}(X \leq n)$$

$$(C_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad C_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq n\} \equiv \{X \leq n\}$$

è una successione crescente: $C_n \uparrow \Omega$

$$\underset{\text{di continuità}}{\overset{\text{proprietà}}{=}} \mathbb{P}\left(\lim_{n} \{X \leq n\}\right)$$

$$= \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Questo fatto insieme alla proprietà a) garantisce che (Teorema ponte)

$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

Inoltre, risulta $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 0$.

Infatti,

$$\lim_{n \to +\infty} F_X(-n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leq -n)$$

$$(D_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad D_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq -n\} \equiv \{X \leq -n\}$$

è una successione decrescente e

$D_n \downarrow \emptyset$ proprietà $\mathbb{P}\left(\lim_{n} \{X \leq -n\}\right)$

$=$

di continuità

$$= \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Questo fatto insieme alla proprietà a) garantisce che (Teorema ponte)

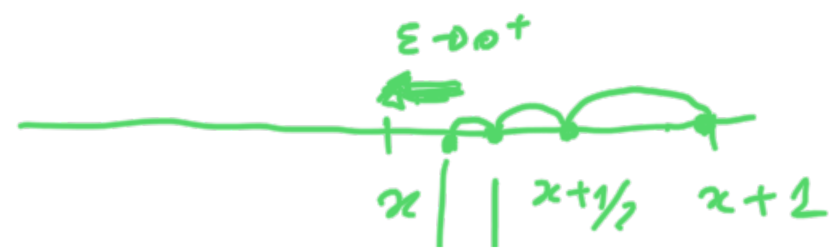
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0. \qquad \square$$

b) Risulta,

$$x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$$

Infatti,

$$\lim_{n \to \infty} F_X\left(x + \frac{1}{n}\right)$$



$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X \le x + \frac{1}{n}\right)$$

$x + 1/3$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{X \le x\} \,\dot{\cup}\, \left\{x < X \le x+\frac{1}{n}\right\}\right) \quad x + 1/4$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\mathbb{P}(X \le x) + \mathbb{P}\left(x < X \le x + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \le x) + \lim_{n} \mathbb{P}\left(x < X \le x + \frac{1}{n}\right)$$

$$= F_X(x) + \lim_{n} \mathbb{P}\Big(\underbrace{x < X \le x + \tfrac{1}{n}}_{E_n \downarrow \emptyset}\Big)$$

$$= F_X(x) + \mathbb{P}\left(\lim_{n} \left\{x < X \le x + \frac{1}{n}\right\}\right)$$

$$= F_X(x) + \mathbb{P}(\emptyset) = F_X(x).$$

Questo fatto insieme alla proprietà

a) garantisce che (teorema ponte)

$$x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x^+) = F_X(x).$$

$\square$

ESEMPIO (funzione di distribuzione geometrica)

$X \sim G(p)$, $p \in (0,1)$; $q = (1-p) \in (0,1)$.

$S_X = \mathbb{N}$,

$$k \in S_X, \quad \mathbb{P}(X=k) = p\, q^{k-1}.$$

$$k \in S_X, \quad F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X=i)$$

$$= p \sum_{i=1}^{k} q^{i-1} = p\,(1 + q + \dots + q^{k-1})$$

$$= p\,\frac{1-q^k}{\dots} = p\,\frac{1-q^k}{\dots} = 1 - q^k.$$

$1-q \qquad p$

$k \in S_X,$ $\qquad \mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - F_X(k)$

$$= 1 - (1 - q^k) = q^k. \qquad \square$$

Il complemento a 1 della funzione di distribuzione di un qualsiasi numero aleatorio X si designa con il simbolo $\overline{F}_X$ e si chiama funzione di sopravvivenza.

ESEMPIO (continuazione)

$X \sim G(p)$

$k \in S_X,$ $\quad \overline{F}_X(k) = 1 - F_X(k) = q^k = (1-p)^k.$

$\square$

ESEMPIO 4.1.a

$$X \sim B\left(3, 1/2\right)$$

$$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$k \in S_X \,, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}$$

$$= \binom{3}{k} \frac{1}{8}.$$

$\square$

ESEMPIO 4.1.b

G : "muore il più giovane" ; $\mathbb{P}(G) = 0{,}05$,

A : " " " anziano" ; $\mathbb{P}(A) = 0{,}10$.

X : l'importo pagato dall'assicurazione (durante l'anno di copertura) per le due persone

$$S_X = \{ 0, \ 100'000, \ 200'000 \};$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(G^c A^c) = \mathbb{P}(G^c) \, \mathbb{P}_{G^c}(A^c)$$
$$= \mathbb{P}(G^c) \cdot \mathbb{P}(A^c) = [1-\mathbb{P}(G)][1-\mathbb{P}(A)]$$
$$= 0,95 \cdot 0,90 = 0,855.$$

$$\mathbb{P}(X=200'000) = \mathbb{P}(G A) = \mathbb{P}(G) \, \mathbb{P}(A)$$
$$= 0,05 \cdot 0,10 = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1}$$
$$= 5 \cdot 10^{-3} = 0,005.$$

$$\mathbb{P}(X=100'000) = 1 - (0,855 + 0,005)$$
$$= 1 - 0,860 = 0,14.$$

$\square$

ESEMPIO 4.1.e

Si estraggono 4 biglie a caso (senza reinserimento) da una scatola contenente 20 biglie numerate da a 1 a 20. Sia X il numero più grande tra i 4 estratti.

$$X = \max\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$S_X = \{4, 5, \dots, 20\},$$

$$k \in S_X, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{1}{1}\binom{k-1}{3}}{\binom{20}{4}}.$$

$\{X = k\}$ significa che uno dei quattro numeri è fissato (uguale a k) e gli altri 3 sono scelti nell'insieme $\{1, 2, \dots, k-1\}$

Si vuole, inoltre, determinare

$$\mathbb{P}(X > 10) = \sum_{k=11}^{20} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \left[\binom{20}{4}\right]^{-1} \sum_{k=11}^{20} \binom{k-1}{3}.$$

$$\bar{F}_X(10) = \mathbb{P}(X > 10) = 1 - F_X(10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10)$$

$$= 1 - \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}}.$$

$\{X \leq 10\}$ significa che qualsiasi quaterna

$\{X \leq 10\}$ significa che qualsiasi quaterna costituita con gli elementi dell'insieme

$$\{1, 2, \ldots, 10\}$$

ovvero il massimo non maggiore di 10.

$\square$

ESEMPIO 4.1.d

Si lancia una moneta, per la quale $\mathbb{P}(T) = p \in (0,1)$, fino a un massimo di n volte, e X conta il numero dei lanci effettuati per osservare la T per la prima volta (ovviamente la sequenza $(C_1 C_2 \ldots C_n)$ arresta i lanci senza fare osservare la T e $X = n$.

Risulta

$$S_X = \{1, 2, \dots, n\}$$

$q = 1 - p$

$$k < n, \quad \mathbb{P}(X = k) = \underbrace{p\, q^{k-1}}$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}\Big(\{(C\,C \cdots C\,T)\} \cup \{(C\,C \cdots C)\}\Big)$$

$$= \mathbb{P}\big(\{(C\,C \cdots C\,T)\}\big) + \mathbb{P}\big(\{(C\,C \cdots C)\}\big)$$

$$= p\, q^{n-1} + q^n$$

$$= q^{n-1}(p + q) = q^{n-1}.$$

In definitiva:

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} p\, q^{k-1}, & \text{se } k < n, \end{cases}$$

$$\Big\lfloor\; q^{n-1}, \quad \text{se } k = n,$$

e

$$1 = F_X(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= p\left(1 + q + \cdots + q^{n-2}\right) + q^{n-1}$$

$$= p\,\frac{1 - q^{n-1}}{(1-q)} + q^{n-1}$$

$$= 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$$

$$\square$$

<u>PROPOSIZIONE 4.6.1</u>

$$X \sim B(n, p), \quad p \in (0,1), \quad q = (1-p) \in (0,1)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$S_X = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

$$k \in S_X, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

In più,

$$k = 0, \qquad \mathbb{P}(X = 0) = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = q^n$$

e

$$k = (1, 2, \dots, n), \qquad \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} \cdot q^{n-k+1}}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!\,(n-k+1)!}{n!} \, \frac{p}{q} = \frac{(n-k+1)}{k} \, \frac{p}{q}.$$

Quindi,

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X=k-1)\,\frac{p}{q}\,\frac{n-k+1}{k}.$$

Ad esempio,

$$\mathbb{P}(X=0) = q^n,$$

$$\mathbb{P}(X=1) = q^n\,\frac{p}{q}\,n = n\,q^{n-1}p,$$

$$\mathbb{P}(X=2) = n\,q^{n-1}p\,\frac{n-1}{2}.$$

$\square$