ESEMPIO 5.5b

Si supponga che la durata di una telefonata sia una v.a. X con legge esponenziale di parametro $\lambda = 1/10$. La durata è espressa in minuti. Se qualcuno arriva immediatamente prima di voi alla cabina telefonica, si determini la probabilità di dover aspettare

(a) più di 10 minuti;

(b) tra 10 e 20 minuti.

Svolgimento

(a) $\mathbb{P}(X > 10) = \bar{F}_X(10)$

nel supporto, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow$

$\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x}$

$$= e^{-\lambda \cdot 10} \overset{\lambda = 1/10}{=} e^{-\frac{10}{10}}$$

$$= e^{-1} \approx 0{,}368 .$$

(b) $\mathbb{P}(10 < X < 20) = F_X(20) - F_X(10)$

$$= \left(1 - e^{-\lambda \cdot 20}\right) - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 10}\right)$$

$$= e^{-\lambda \cdot 10} - e^{-\lambda \cdot 20}$$

$$\overset{\lambda = 1/10}{=} e^{-1} - e^{-2} \approx 0{,}233$$

$\square$

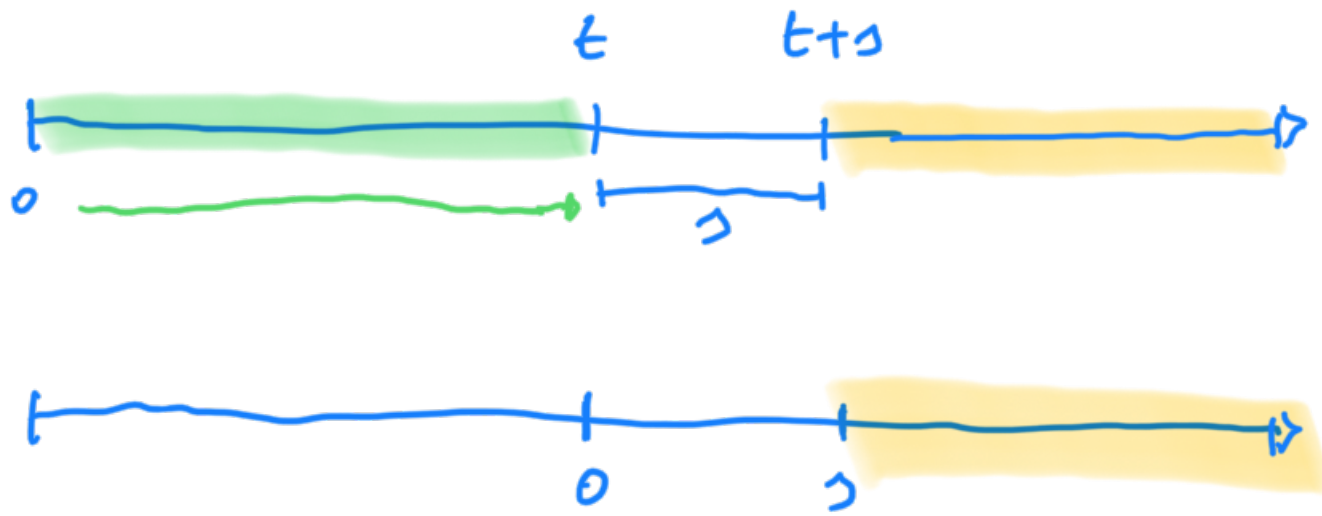
ASSENZA DI USURA

X è una v.a. aleatoria con legge esponenziale di parametro λ.

$s, t > 0$

primo dispositivo

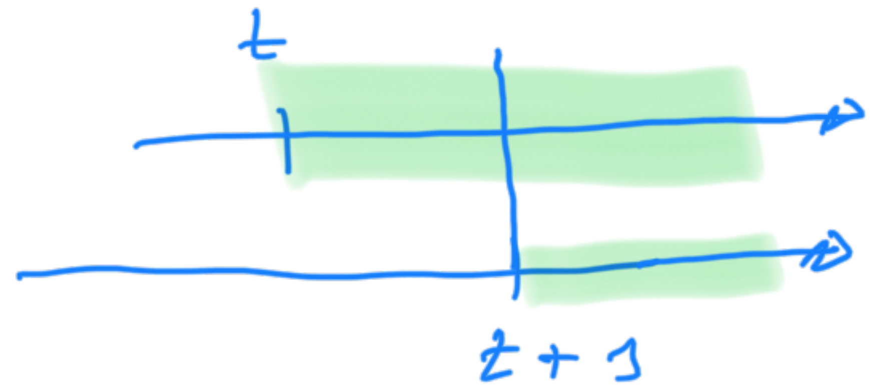
secondo dispositivo



$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t,\ X > t)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\quad}$$

$$\bar{F}_X(t)$$



$$= \frac{\bar{F}_X(t+s)}{\bar{F}_X(t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}\cdot e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

$$= \bar{F}_X(s) = \mathbb{P}(X > s).$$

In altri termini

$$\bar{F}_X(s+t) = \bar{F}_X(s)\cdot \bar{F}_X(t).$$

$\square$

Tale proprietà è verificata solo per le v.a. con legge esponenziale.

ESEMPIO 5.5e

Un ufficio postale ha due sportelli per una certa operazione. Supponiamo che quando il Sig. Rossi entra nell'ufficio egli veda il Sig. Bruni e la Sig.ra Vianello agli sportelli. Inoltre, il Sig. Rossi accederà al servizio quando si libera uno dei due sportelli. Se il tempo che un impiegato dedica ad un cliente è una v.a. con legge esponenziale con parametro $\lambda > 0$, qual è la probabilità che fra i tre clienti, il Sig. Rossi sia tà, tra i tre clienti, il Sig. Rossi sia l'ultimo a lasciare l'ufficio?

Svolgimento

Quando uno dei due utenti allo sportello termina l'operazione subentra il Sig. Rossi. La durata della sua operazione è una v. a. X con legge esponenziale di parametro λ. D'altra parte, per la proprietà di assenza di usura, la durata residua Y dell'operazione del cliente non uscito dal servizio è una v. a. con legge esponenziale di parametro λ. Per simmetria, la probabilità che la persona rimasta nel servizio termini l'operazione prima del Sig. Rossi vale 1/2:

$$\left.\begin{aligned} X \sim Y, \qquad & \mathbb{P}(Y < X) = \mathbb{P}(X < Y) \\ 1 = \mathbb{P}_X(\mathbb{R}) &= \mathbb{P}(\{Y < X\} \,\dot\cup\, \{X < Y\} \,\dot\cup\, \{X = Y\}) \\ &= \mathbb{P}(Y<X) + \mathbb{P}(X<Y) + \mathbb{P}(X=Y) \\ &= \mathbb{P}(Y<X) + \mathbb{P}(X<Y). \end{aligned}\right\}$$

$\square$

<u>ESEMPIO 5.5d</u>

Lasciato allo studente.

$\square$

<u>ASSENZA DI MEMORIA</u>

Sia X una v. a. con legge geometrica

di parametro $p \in (0,1)$.

$m \in \mathbb{N}$, $q = 1-p$

$$\mathbb{P}(X \le m) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \dots + \mathbb{P}(X=m)$$

$$= p + pq + pq^2 + \dots + pq^{m-1}$$

$$= p\,(1 + q + q^2 + \dots + q^{m-1})$$

$$= p\,\frac{1-q^m}{1-q} = 1 - q^m \implies$$

$m \in \mathbb{N}$, $F_X(m) = 1 - q^m$ e $\bar{F}_X = q^m$.

Dopo di ciò, risulta

$m, n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{P}(X > n+m)$ $\bar{F}(n+m)$

$$\mathbb{P}(X > n+m \mid X > n) = \frac{\qquad}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{\qquad}{\overline{F}_X(n)}$$

$$= \frac{q^n \cdot q^m}{q^n} = q^m$$

$$= \overline{F}_X(m).$$

$\square$

ESEMPIO (relazione tra la legge esponenziale e quella geometrica) di trasformazione di variabile aleatoria.

Sia $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ e sia

$$Y = \lfloor X \rfloor + 1$$

Risulta

$$S_Y = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}$$

e

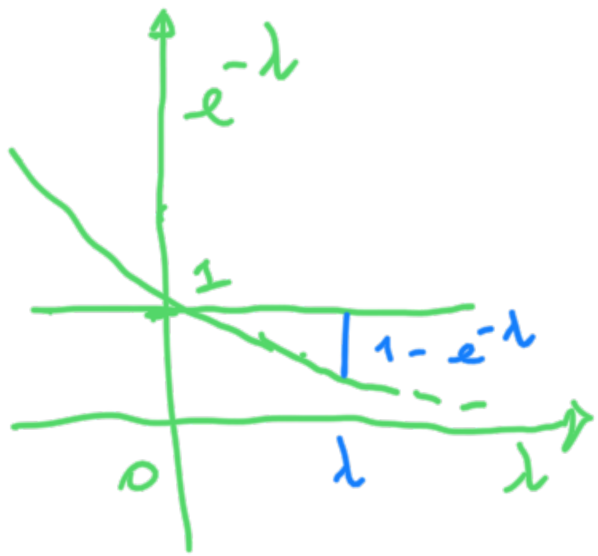
$$n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor + 1 = n)$$

$$= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = n - 1)$$

$$= \mathbb{P}(n - 1 \leq X < n)$$

$$= F_X(n) - F_X(n-1)$$

$$= 1 - e^{-\lambda n} - \left[1 - e^{-\lambda(n-1)}\right] = e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n}$$



$$= e^{-\lambda(n-1)}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

$$= \underbrace{\left(1 - e^{-\lambda}\right)}_{p} \cdot \left(\underbrace{e^{-\lambda}}_{q}\right)^{n-1}$$

$$= p\, q^{n-1}.$$

Ne segue che $Y \sim G(1 - e^{-\lambda})$.

Se viene fissato p, quale valore di λ bisogna utilizzare?

$$1 - e^{-t} = p \iff 1 - p = e^{-t}$$

$$\iff -t = \ln(1-p)$$

$$\iff t = \ln \frac{1}{1-p}.$$

In particolare, se $p = 1/18$

$$t = \ln \frac{1}{17/18} = \ln\left(\frac{18}{17}\right).$$

$\square$

CENTRI (dati quantitativi)

Sia $\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ una rilevazione dati da un carattere quantitativo.

Si ponga

$x \in \mathbb{R}$,

$r \in \mathbb{N}_0$

$$d_r(x, \underline{y}) = \begin{cases} \sqrt[r]{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^r}, & r > 0, \\ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^0, & r = 0. \end{cases}$$

$i = (1, 2, \dots, n)$, $r \geq 1$, $|x - y_i|^r$ rappresenta la discrepanza di x dal dato i-imo; l'argomento della radice r-imo è quindi la media aritmetica di tutte le discrepanze e la funzione $d_r(x, \underline{y})$ la distanza (di ordine r) di x da $\underline{y}$.

Lo stesso si può dire per $r = 0$.

DEFINIZIONE

Il centro di ordine r è quel numero reale ξ_r che rende minima la funzione $d_r(x, \underline{y})$:

$$\xi_r := \underset{x \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}}\, d_r(x, \underline{y}).$$

<u>TEOREMA</u> (dati quantitativi)

Il centro di ordine 0 è la moda di $\underline{y}$.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

$$x \notin \underline{y}, \qquad d_0(x, \underline{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |\underbrace{x - y_i}| ^0 = 1.$$

$$x \in y \qquad d_0(x, y) = \frac{1}{n}\left(n - n_x\right)$$

$x \; \underline{y}$, $\quad (\;, \underline{\;}) = \frac{}{n} (\quad x)$

quanti elementi di $\underline{y}$ sono uguali ad x

Per avere il minimo valore di $d_0(x, \underline{y})$ il valore x deve essere uguale al dato che si è presentato il maggior numero delle volte, ovvero la moda di $\underline{y}$.

$\square$

TEOREMA

Il centro di ordine 1 è la mediana di $\underline{y}$.

$\square$