OUDIHAT Massinas
CHABANE Massinissa

Projet Des polynômes aux fractions rationnelles Outils pour le Calcul

2. Q(i) sous corps de C :

L'ensemble des rationnels de Gauss est un sous-corps commutatif du corps C des nombres complexes parce que :

1. **Commutativité** : Les opérations d'addition et de multiplication sont commutatives dans Q(i), Q et C.
2. **Éléments neutres** : $0=0+0i$ pour l'addition et $1=1+0i$ pour la multiplication sont présents dans $Q(i)$.
3. **Inverses** : Tout élément non nul $p+qi$ de a un inverse multiplicatif $\frac{p-qi}{p^2+q^2}$, qui est aussi dans $Q(i)$.
4. **Associativité et distributivité** : Les opérations d'addition et de multiplication sont associatives et la multiplication est distributive par rapport à l'addition, comme dans Q et C.

Ainsi, Q(i) des rationnels de Gauss est un sous-corps commutatif du corps commutatif C des nombres complexes.

6. Modification de l'algorithme d'Euclide étendu pour les polynômes :

Modifier l'algorithme de sorte que, lorsque le PGCD est un polynôme de degré 0, on renvoie le polynôme 1 et on multiplie les coefficients u et v par l'inverse du polynôme obtenu. Adapter les valeurs initiales des coefficients de Bézout à des polynômes 1 et 0.

7. la justesse de l'algorithme d'Euclide étendu appliqué à deux polynômes :

Preuve : On veut le PGCD des polynômes A, B ∈ E[X] et les coefficients de Bézout B non nul

Raisonnons par récurrence sur le reste de la division R = A%B

Initialisation:

Si R = 0 , le résultat est immédiat .

Hérédité:

On applique l'algorithme de Bézout sur A et B et avec les coefficients $a_0=1, a_1=0, b_0=0, b_1=1$

et $r=A/B$ ce qui donne le résultat attendu (PGCD(A, B), u, v).

9. Division suivant les puissances croissantes :

• Appliquons la division euclidienne à A par B : il existe Q et R tels que $A=BQ+R$ avec

$deg(R) < deg(B)$.

• Posons maintenant R sous la forme $R = X^{n+1} R'$, où R′ est un polynôme dans E[X]. Cela permet d'écrire $A = QB + X^{n+1} R$.

10. Vérifier la Justesse de l'Algorithme

Preuve :

On veut diviser le polynôme A ∈ E[X] par le polynôme B ∈ E[X] non nul.Raisonnons par récurrence sur n.

Initialisation:

Si n = 0, le résultat est immédiat .

Hérédité:

On commence par diviser le coefficient constant de A par le coefficient constant de B . On soustrait ce terme de A pour obtenir un nouveau polynôme. On répète le processus pour les termes successifs jusqu'à X^n .

Complexité:

La complexité en temps de l'algorithme est en O(n²).

Preuve:

On majore le nombre d'opérations ⊥ et ⊤ par $\frac{n(n+1)}{2} + n - m + 1$.

11. Inversion de Newton

Soit $1 = BQ + X^{n+1} R$ donc $BQ \equiv 1 [X^{n+1}]$ ce qui reviens a calculer l'inverse de B modulo X^{n+1} pour trouver le quotient.

12. Nouvel Algorithme de Division : Inversion de Newton

En entrée : A,B et n
En sortie : (Q, R)
Début
1. P ← inverse_newton $(B, n+1)$
2. Q← $A \times P [X^{n+1}]$
3. R ← $A - Q \times B$
4. R ← R / X^{n+1}
5. retourner Q, R

fin

Justesse:

Preuve : On veut diviser le polynôme $A \in E[X]$ par le polynôme $B \in E[X]$ non nul.
Raisonnons par récurrence sur **n**.

Initialisation:
calcule l'inverse de B modulo X^{n+1} . Le produit AB^{-1} modulo X^{n+1} donne le quotient Q.Le reste est calculé en soustrayant le produit B · Q de A, ce qui donne R=A−BQ et on factorisant par X^{n+1}

Complexité*:*La complexité globale de l'algorithme est dominée par l'inversion de Newton, donc la complexité totale est $O(n^{lb(3)})$.

13. Condition sur le Coefficient Constant de B dans un Corps Commutatif :
Condition:
• Le coefficient constant de B doit être non nul pour assurer la divisibilité.

Déduction:
• Dans un corps commutatif, la condition sur le coefficient constant de B est simplement qu'il doit être non nul. Cela garantit que la division est possible et que l'algorithme fonctionne.

15.Définition de l'Opérateur :

Définition de l'Opérateur: $\frac{d}{dx}X=1$

Identité de Leibniz :
Pour $P(X)=\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ et $Q(X)=\sum_{j=0}^{e} b_j X^j$ on l'applique sur un terme des deux polynômes et c'est la même chose pour les autres.

$$\frac{d}{dx}PQ(X)=\frac{d}{dx}(a_i X^i \times b_j X^j)=a_i \times b_j \frac{d}{dx}(X^{j+i})=a_i \times b_j \times (i+j) \times X^{i+j-1}$$

D'autre part:

$$P(X)\frac{d}{dx}Q(X)+Q(X)\frac{d}{dx}P(X)=a_i X^i \times b_j X^{j-1} \times (j)+b_j X^j \times a_i X^{i-1} \times (i)=a_i b_j X^{i+j-1} \times (i+j)$$

donc les deux sont égaux ce qui implique que l'identité de Leibniz est vérifiée.

18. Parallèle entre et la Différence Finie Δ et l'Interpolation de Newton et la Formule de Taylor :
A. Parallèle entre et la Différence Finie Δ :
• Nature de l'opération :
◦ $\frac{d}{dx}$ est un opérateur différentiel continu, alors que Δ est une opération discrète.

◦ Les deux mesurent des changements, mais $\frac{d}{dx}$ mesure le changement instantané tandis que Δ mesure le changement sur un intervalle fini.

- ***Lien Mathématique :***
  - Pour un polynôme $P(X)$, si h est petit, $\Delta P(X) \approx \hbar \frac{d}{dx} P(X)$

<u>B. Parallèle entre l'Interpolation de Newton et la Formule de Taylor :</u>

- ***But :***
  - Les deux méthodes visent à représenter un polynôme de manière simplifiée en termes de points de référence (Newton) ou de dérivées (Taylor).
- ***Construction :***
  - La formule de Taylor utilise les dérivées du polynôme en un point pour construire la série.
  - L'interpolation de Newton utilise les différences finies et les valeurs des points de données pour construire le polynôme.
- ***Forme :***
  - La série de Taylor se base sur les dérivées successives et leurs contributions aux coefficients de Xi
  - Le polynôme de Newton est basé sur les termes successifs en $(X-xi)$

<u>*19. Preuve par récurrence de l'égalité suivante*</u>

Initialisation: on prends n = 0

$\frac{1-X^{0+1}}{1-X}=1$ et $\sum_{i=0}^{n=0} X^n=1$ donc la propriété est vraie pour n = 0.

Hérédité: on suppose que la propriété est vraie pour un $n \in N$

on a $\frac{1-X^{n+1}}{1-X}+X^{n+1}=\frac{1-X^{n+2}}{1-X}$ par HDR on a donc $\sum_{i=0}^{n} X^n+X^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1} X^n=\frac{1-X^{n+2}}{1-X}$ on a alors la propriété est valide pour tout $n \in N$

<u>*20. Montrer que (1-X)S = 1 :*</u>

Calcul de $S-XS$ ***:***

Définissons S comme suit : $S=\sum_{i=0}^{n} X^n$

Maintenant, calculons XS : $XS=X\sum_{i=0}^{n} X^n=\sum_{i=0}^{n} X^{(n+1)}$

En changeant l'indice de sommation (en posant m=n+1), on obtient : $XS=\sum_{i=0}^{m} X^m$

Remarquons que : $S=\sum_{i=0}^{n} X^n=1+\sum^{n>0} X^n$

Donc : $S-XS=1+\sum^{n>0} X^n-\sum^{m>0} X^m$

Ainsi, S -XS = 1.

a. Déduction :
À partir de ce résultat, nous avons: (1- X)S = 1

b. Écriture de 1 / 1−X:
À partir de la relation obtenue, nous savons que S est l'inverse de 1-X dans l'anneau des séries formelles E[[X]]. Donc : $\frac{1}{1-X} = \sum_{i=0}^{n} X^n$

c. Est-ce un polynôme :
La série $\sum_{i=0}^{n} X^n$ n'est pas un polynôme, car elle a un nombre infini de termes. Un polynôme a un nombre fini de termes de la forme $a^n X^n$, où a^n sont des coefficients dans E.

21. Montrer que le coefficient de X^m ***dans la série*** $\sum_{i=0}^{n} R^n$ ***est le même que dans le polynôme*** $1+\cdots+R^m$

La série $\sum_{i=0}^{n} R^n$ se comporte comme une série géométrique lorsque *R* a un coefficient nul. Le coefficient de X^m dans $\sum_{i=0}^{n} R^n$ est égal au coefficient de X^m dans $1+.....+R^m$
Cela implique que le coefficient de X^m est déterminé par une somme finie des termes jusqu'à R^m , ce qui prouve que cette série est bien définie et ne nécessite qu'un nombre fini d'opérations.

22. Montrer que $\sum_{i=0}^{n} R^n = \frac{1}{1-R}$

On pose $S=\sum_{i=0}^{n} R^n$ comme R est un polynôme de E[X] de la question (20) on a $(1-R)S=1$ donc $S=\frac{1}{1-R}$ donc on a : $\sum_{i=0}^{n} R^n = \frac{1}{1-R}$