UNIVERSITÉ PARIS - CERGY

CY Tech. Département Mathématiques

Option INGÉNIERIE FINANCIÈRE. Option ACTUARIAT.

Irina Kortchemski

MODEL CALIBRATION AND SIMULATION

TP2 Simulation du Delta-Hedging dans le marché complet et incomplet.

On étudie la pérformence de la stratégie de delta-couverture dans le modèle de Black et Scholes et celui de volatilité stochastique. Dans les deux cas le trading a lieu uniquement aux dates discrètes t_i et le portefeuille n'est rebalancé que dans le nombre finis de points temporels pendant la vie de l'option.

On applique une stratégie de portefeuille autofinancante qui représente une stratégie dynamique d'achat ou de vente d'actions et de prêts ou d'emprunts à la banque, dont la valeur du portefeuille n'est pas modifié par l'ajout ou retrait du cash.

P& L (profit and loss) de la stratégie de delta-couverture est mesuré par la différence entre la valeur terminale du portefeuille de la couverture et le prix de l'option á la maturité

Partie I. Construction d'un portefeuille pour éliminer le risque

On construit un portefeuille de couverture de facon à éliminer une partie aléatoire dans la différence entre les valeurs du portefeuille et l'option.

1. **Simulation d'évolution du prix d'une action**

   L'actif sous-jacent S est un processus stochastique $S(t),\ t \in [0, T]$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(t=0) = S_0 \tag{1}$$

   On note σ la volatilité de l'action, r est le taut d'interêt.

   La solution de cette équation est donnée par la formule:

$$S(t) = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t))$$

   Réaliser le graphe de l'évolution du prix de l'actif S_t: $\quad t_i -> S_{t_i}$ en partant de S_0.

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma N(0,1))$$

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ r = 0.05 \\ \sigma = 0.5 \\ T = 5 \\ N = 100 \\ K = 1.5 \end{cases} \tag{2}$$

Simulation N_{mc} chemins d'évolution du prix de l'action

   a) Simuler N_{mc} chemins correspondants du prix de l'actif en partant toujours de S_0.

   b) Faire une estimation de la moyenne $E(S_T)$ et de la variance $Var(S_T)$.

   c) Comparer avec les valeurs théoriques.

2. **Simulation du portefeuille de couverture**

   La valeur théorique de l'option Call européene est

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_1(S_i, t_i)) - Ke^{-r\,(T-t_i)} N(d_2(S_i, t_i))$$

$$d_1(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}} \qquad d_2(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}$$

   1.

   a) Calcule la quantité initial des actions (ou le nombre de parts du sous-jacent) :

$$A_0 = \frac{\partial V_0^{BS}}{\partial S} = N(d_1(S_0, 0))$$

   ;

b) Poser la valeur du cash: $B_0 = 1$ (choisir arbitrairement)

c) Portefeuille du depart: $P_0 = A_0\, S_0 + B_0$

d) Calculer le portefeuille actualisé du depart: $P_0^{actualise} = V_0$

2. Pour chaque date t_i calculer le prix de l'action

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma\, N(0,1))$$

3. Récalculer et simuler la valeur du portefeuille

$$P_{i+1} = A_i\, S_{i+1} + (1 + r\Delta t) B_i$$

4. Rébalancer le portefeuille, c'est-à -dire recalculer et simuler la quantité d'actions qu'il faut avoir pour couvrir une option

$$A_{i+1} = \frac{\partial V_{i+1}^{BS}}{\partial S_{i+1}} = N(d_1(S_{i+1}, t_{i+1}))$$

5. Récalculer et simuler la valeur du cash:

$$B_{i+1} = P_{i+1} - A_{i+1}\, S_{i+1}$$

6. Simuler l'evolution du portefeuille de couverture actualisé:

$$P^{actualise}(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S_0, 0) - P(S_0, 0)) e^{r\, t_i}$$

7. Simuler l'evolution de l'option calculée à l'aide de la formule de BS:

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_1(S_i, t_i)) - K e^{-r\,(T - t_i)} N(d2(S_i, t_i))$$

8. Tracer sur le même système de coordonées les graphes de l'evolution de l'option et du portefeuille de couverture actualisé.

$$t_i \to V(S_i, t_i) \qquad t_i \to P^{actualise}(S_i, t_i).$$

Observer la replication (la couverture).

9. Tracer sur le même système de coordonées les graphes de l'evolution de ratio A_i et du cash B_i.

10. Tracer le graphe d'erreur

$$P^{actualise}(S_i, t_i) - V^{BS}(S_i, t_i)$$

en fonction de i.

Si l'option est dans la monnaie ($S_T > K$) quelle est la valeur de delta (A_T)?

Si l'option est hors la monnaie ($S_T < K$) quelle est la valeur de delta (A_T) dans ce cas?

Comment vous expliquer ces faites à l'aide des arguments financiers?

3. Calcul de la moyenne et de la variance de P& L final

La pérformence de la stratégie de delta-couverture, l'indice de P& L final est donné par

$$P\&L(S_0,T) = \mathbb{E}[P^{actualise}(S_T,T) - V^{BS}(S_T,T)/S(t=0) = S_0]$$

1. Simuler un grand nombre N_{mc} de chemins d'évolution des prix $P^{actualise}(S_T,T)$ et $V^{BS}(S_T,t_T)$ sur l'intervalle de temps $[0,T]$ en partant toujours de S_0. Pour chaque chemin n on cherche la valeur finale.

2. Calculer l'espérance du P& L, c'est -à - dire la moyenne arithméthique de Profit et Loss.

$$\sum_{n=1}^{N_{mc}} (P^{actualise(n)}(S_T,T) - V^{BS}(S_T,T))/N_{mc}$$

3. Tracer les fonctions de distribution et de répartition du P& L.

4. L'influence de la fréquence du trading sur la moyenne et de la variance du P & L final

On vous propose de montrer que si le rébalancement de portefeuille de couverture a lieu aux instants discrétes l'erreur de couverture est proportionnelle à Gamma de l'option:

$$P^{actualise}(S_T,T) - V(S_T,T) = \sqrt{\frac{T}{2N_{trading}}} \int_0^t \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S_\tau^2 dW_\tau$$

et que pour diviser l'erreur de la couverture par 2 il faut rébalancer le portefeuille 4 fois plus souvent.

1. Choisir (et **fixer**) le nombre de discrétisation $N = 100$ et calculer la moyenne et la variance de P& L final pour la quantité d'intervention du trading égale à

$$N_{trading} = 100, 50, 25, 20, 5, 2, 1$$

C'est-à- dire si ($N_{trading} = 100$) vous rébalancez le portefeuille à chaque t_i, puis une fois sur 2 ($N_{trading} = 50$), puis une fois sur 4 ($N_{trading} = 25$), puis une fois sur 20, puis une fois sur 50 et puis l'option n'est pas couvert. Èvidement que le prix de l'action S_i change à chaque instant t_i.

2. Soit ($N_{trading} = 10$). Cela signifie que vous rébalancez le portefeuille une fois sur 10 et vous recalculez le nombre de parts A_i une fois sur 10.

Tracer le graphe de l'évolution du nombre de parts (ratio de la couverture) : $t_i \to A_i$.

3. Ètudier l'influence de la longueur de l'intervalle entre les deux trading sur la moyenne et la variance de P& L final et sur les fonctions de densité et de répartition.

Tracer les graphes des fonctions de densité et de répartition.

5. Var : Value at Risk

La VaR répond à l'affirmation suivante : " Nous sommes certains qu'avec la probabilité $1-\alpha$ % nous n'allons pas perdre plus de γ=Var euros. "

$$P(P\&L < \gamma) = \alpha$$

En utilisant les graphes de fonction de repartition calculer

• si on hedge chaque Δt $\quad Var_{\sim 10\%} =?$,

par contre

• si on hedge une fois sur 10 $\quad Var_{\sim 10\%} =?$

Calculer les VAR visualement et par Algorithme d'ordonnement (voir Annexe)

6. Modèle à la volatilité stochastique

1. Réaliser le graphe de l'évolution du prix de l'action S_t dans les modéles à volatilité stochastique.

Dans le modèle 1 la volatilité implicite ne peut prendre que deux valeurs avec les probabilités différentes:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0.3 & p = 0.8 \\ \sigma_2 = 0.5 & p = 0.2 \end{cases}$$

Dans le modèle 2 les probabilités de transition à chaque t_i d'une volatilité implicite vers une autre sont les suivantes:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 0.3 \\ \sigma_2 = 0.5 \\ P(\sigma_1 -> \sigma_2) = 0.05 \\ P(\sigma_2 -> \sigma_1) = 0.05 \end{cases}$$

Qu'est-ce que vous observez?

2. Est-ce que l'option est couverte dans chaque modèle?

3. Tracer les fonctions de dénsité et de répartition du P& L.

7. Delta-hedging avec la volatilité implicite

Supposons que le prix de l'option V est calculé par la formule de Black et Sholes avec la volatilité implicite:

$$V^{BS}(S,t) = SN(d_1(S,t)) - Ke^{-r\,(T-t)}N(d_2(S,t))$$

$$d_1(S,t) = \frac{ln(S/K) + (r + \sigma^2_{implicite}/2)(T-t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T-t}} \qquad d_2(S,t) = \frac{ln(S/K) + (r - \sigma^2_{implicite}/2)(T-t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T-t}}$$

Supposons que le prix de l'action varie avec une autre volatilité - volatilité historique σ_h.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_h S_t dW_t$$

Effectuer la couverture avec la volatilité implicite:

$$A(S) = N(d_1(\sigma_{implicite})), \quad d_1(S_t, t) = \frac{ln(S_t/K) + (r + \sigma^2_{implicite}/2)(T-t)}{\sigma_{implicite}\sqrt{T-t}}.$$

a) $\sigma_{implicite} = 0.5, \quad \sigma_h = 0.3$

b) $\sigma_{implicite} = 0.3, \quad \sigma_h = 0.5$

c) $\sigma_{implicite} = 0.4, \quad \sigma_h$ est stochastique, gouvernée pas le modèle 1.

$$\begin{cases} \sigma_h = 0.3 & avec \quad p = 0.5 \\ \sigma_h = 0.5 & avec \quad p = 0.5 \end{cases}$$

Tracer dans trois cas la fonction de densité de $P\&L$.

Partie II. Construction d'un portefeuille qui réplique l'option

Reprendre le paragraphe: "Simulation du portefeuille de la couverture"

a) Calcule le nombre initiale d'actions: $A_0 = \frac{\partial V_0^{BS}}{\partial S} = N(d_1(S_0, 0))$;

Par contre

b) La valeur du cash on ne choisit pas choisir arbitrairement, on la calcule:

$$B_0 = V_0 - A_0 S_0.$$

Dans ce cas le portefeuille de couverture est égale à la valeur de l'option à $t = 0$:

$$P_0 = V_0$$

Montrer par les simulations que cette egalité est maintenue jusquà la maturité de l'option, c'est-à dire l'option est bien couverte.

Partie III. Gamma hedging

1. Simulation de la couverture d'une option $V(S,t)$ à l'aide des options du type $C(S,t)$, des actions A_i et du cash B_i.

Gamma d'une option est égale à

$$\Gamma_V(S,i) = \frac{\partial^2 V^{BS}(S,t)}{\partial S^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{S\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

$$\begin{cases} S_0 = 1 \\ r = 0.05 \\ \sigma = 0.5 \\ N = 100 \\ T_1 = 5 \quad \mathit{Maturit\ du\ Call\ a\ couvrir} \\ T_2 = 10 \quad \mathit{Maturit\ du\ Call\ de\ l'instrument\ de\ couverture} \\ \Delta t = T_1/N = 0.05 \\ K_1 = K_2 = 1.5 \end{cases} \tag{3}$$

1.

a) Calculer la quantité initiale des options du type C:

$$G_0 = \Gamma_V(S_0,0)/\Gamma_C(S_0,0)$$

b) Calculer la quantité initiale des actions:

$$A_0 = \frac{\partial V_0^{BS}}{\partial S} - G_0\,\frac{\partial C_0^{BS}}{\partial S} = N(d_{11}(S_0,0)) - G_0\,N(d_{12}(S_0,0))$$

c) Poser la valeur du cash: $\quad B_0 = 1$ (choisir arbitrairement)

d) Calculer le portefeuille du depart:

$$P_0 = A_0\,S_0 + G_0\,C^{BS}(S_0,0)\; + B_0$$

2. Pour chaque date t_i calculer le prix de l'action

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,\Delta t + \sqrt{\Delta t}\,\sigma\,N(0,1))$$

3. Récalculer et simuler la valeur du portefeuille

$$P_{i+1} = A_i\,S_{i+1} + G_i C(S_{i+1},t_{i+1}) + B_i(1+rdt)$$

4. Rébalancer le portefeuille, c'est- à -dire

a) récalculer et simuler la quantité des options qu'il faut avoir pour couvrir l'option V.

$$G_{i+1} = \frac{\partial^2 V^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})}{\partial S_{i+1}^2} \Big/ \frac{\partial^2 C^{BS}(S_{i+1},t_{i+1})}{\partial S_{i+1}^2}$$

b) récalculer et simuler la quantité des actions qu'il faut avoir pour couvrir une option

$$A_{i+1} = \frac{\partial V^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}} - G_{i+1}\frac{\partial C^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})}{\partial S_{i+1}}$$

5. Récalculer et simuler la valeur du cash:

$$B_{i+1} = P_{i+1} - A_{i+1}\, S_{i+1} - G_{i+1} C^{BS}(S_{i+1}, t_{i+1})$$

6. Simuler l'evolution du portefeuille de couverture actualisé):

$$P^{actualise}(S_i, t_i) = P(S_i, t_i) + (V(S_0, 0) - P(S_0, 0))e^{r\, t_i}$$

7. Simuler l'évolution des l'option V et C calculée à l'aide de la formule de BS:

$$V^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_{11}(S_i, t_i)) - K_1 e^{-r\,(T_1 - t_i)} N(d_{21}(S_i, t_i))$$

$$C^{BS}(S_i, t_i) = S_i N(d_{12}(S_i, t_i)) - K_2 e^{-r\,(T_2 - t_i)} N(d22(S_i, t_i))$$

$$d_{11}(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K_1) + (r + \sigma^2/2)(T_1 - t_i)}{\sigma\sqrt{T_1 - t_i}} \qquad d_{21}(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K_1) + (r - \sigma^2/2)(T_1 - t_i)}{\sigma\sqrt{T_1 - t_i}}$$

$$d_{12}(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K_2) + (r + \sigma^2/2)(T_2 - t_i)}{\sigma\sqrt{T_2 - t_i}} \qquad d_{22}(S_i, t_i) = \frac{ln(S_i/K_2) + (r - \sigma^2/2)(T_2 - t_i)}{\sigma\sqrt{T_2 - t_i}}$$

8. Tracer le graphe d'erreur

$$P^{actualise}(S_i, t_i) - V^{BS}(S_i, t_i)$$

en fonction de i.

Annexe. Quantile

En finance la quantile répresente "Value at Risk (VAR)". Notont VAR$= x_\alpha$ De plus

$$\mathbb{P}(X < Var) = \alpha \quad \Longrightarrow F_X(VaR) = \alpha \quad \Longrightarrow \quad VaR = F_X^{-1}(\alpha)$$

La VaR répond à l'affirmation suivante : "Nous sommes certains à la probabilité $1 - \alpha$ que nous n'allons pas perdre plus de VAR euros sur T prochains jours"

Lorsque le portefeuille ou la richesse est constituée d'instruments nombreux et complexes, il n'est généralement pas possible de connaître analytiquement la densité de la valeur du portefeuille à un instant futur donné. On peut alors procéder par simulation. Dans d'autres cas, l'estimation d'un quantile se fait par échantillonnage.

Notons le quantille par x_α. Si la fonction de répartition est strictement croissante alors $F_X(x_\alpha) = \alpha$. Dans ce qui suit,

$$X_1, X_2, ..., X_{N_{mc}}$$

représente un échantillon constitué de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à la variable aléatoire X de fonction de répartition F_X. De plus, $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ désigne le même échantillon ordonné, c'est-à-dire que

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq ... \leq X_{(N_{mc})}$$

La fonction de répartition empirique construite à partir de l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ de taille N_{mc} est

$$\forall x \in R \qquad F_X(x) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} 1_{X_i \leq x}$$

Soit un nombre k

$$\frac{k-1}{N_{mc}} < \alpha \leq \frac{k}{N_{mc}}, \quad k = \{1, 2, ...N_{mc}\}$$

Nous cherchons x_α t.q

$$F_X(x_\alpha) = \mathbb{P}[X \leq x_\alpha] = \alpha = \frac{k}{N_{mc}}$$

En effet pour un nombre réel x_α la fonction de repartition $F_X(x_\alpha)$ est la proportion des observations de l'échantillon

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(k)} \leq X_{(k+1)} \leq ... \leq X_{N_{mc}}$$

qui sont inférieures ou égales à x_α. Donc

$$F_X(x_\alpha) = \mathbb{P}[X \leq X_{(k)}].$$

On en déduit que $VaR = X_{(k)}$.

Par conséquent, puisque $k - 1 < N_{mc} \cdot \alpha \leq k$

$$VAR = X_{(k)} = X_{[N_{mc} \cdot \alpha]}.$$

où $[N_{mc} \cdot \alpha]$ est un nombre entier.

• Algorithme d'ordonnement pour trouver le quantille

• function [x_α]= Quantille(α)

○ Simuler un échantillon X

○ Ordonner l'échantillon

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \leq, ..., \leq X_{(n)}$$

○ Calculer l'indice $k = Int[N_{mc} \cdot \alpha]$

○ Calculer $x_\alpha = X_k$ pour

• endfunction