





=

=



Evaluation et couvertures des Produits dérivées Européens et Américains

Optimisation des Algorithmes

Massyl Sadoudi

Sarnuja RAJAGOPAL

Abdou Salame Kebe

Supervisor: Miguel Martinez

Departement de mathématiques
Master de Mathématiques appliquées

June 2025

=

Contents

<i>List of Figures</i>	iv
<i>List of Tables</i>	vi
<i>Glossary</i>	viii
<i>Acronyms</i>	x
1 Introduction: Concepts de finance pure	1
1.1 Motivation Financière	1
1.2 Titres de base	3
1.3 Les contrats à terme	3
1.3.1 Caractéristiques principales	3
1.3.2 Exemple de couverture	4
1.3.3 Marché viable et complet	4
1.3.4 Conclusion	5
1.3.5 Parité Call/Put :	5
1.3.6 Contrats forwards et contrats futures	8
1.3.7 Les swaps	10
2 Le Modèle de Black-Scholes	11
2.1 Description du modèle	11
2.1.1 L'évolution des cours	11
2.1.2 Hypothèses du modèle	12
2.2 Le modèle de Black-Scholes : hypothèses, équation et solution analytique	12
2.2.1 Dérivation de l'équation de Black-Scholes	13
2.2.2 Résolution analytique de l'EDP	13
2.2.3 Black Scholes comme la limite de Cox-Ross-Rubinstein	15
2.3 La formule de Black-Scholes	18
2.3.1 L'équation différentielle de Black-Scholes	18
2.3.2 Évaluation d'un call européen sous Black-Scholes	18
3 Pricing et Couvertures des Options Euro/Amer	20
3.1 Représentation du prix du sous-jacents actualisés comme Martingales :	21
3.2 Options Européennes	22
3.2.1 Couverture des calls et des puts	24

3.3	Interprétation financière de la mesure risque-neutre	25
3.3.1	Limites de la modélisation	26
3.3.2	Principe de Monte-Carlo pour le Pricing des Options :	27
3.3.3	Monte Carlo Method	28
3.4	Méthode de stratification pour Monte Carlo	29
3.4.1	Modèle et simulateur de base	29
3.4.2	Principe de la stratification	30
3.4.3	Construction de l'estimateur stratifié	30
3.4.4	Propriétés	30
3.4.5	Application de Monte-Carlo aux Options Européennes	31
3.5	Options Américaines	34
3.5.1	Le cas du Call sans dividendes :	34
3.6	Longstaff.Shwartz	36
3.7	Applicaition et résultats numériques :	37
3.8	Couverture des Options	38
3.8.1	Introduction :	38
3.8.2	Options Euro : Cas faciles	39
3.8.3	Option Américaines :	40
3.9	Application nuumriques, Estimation des Greeks	43

List of Figures

3.1	Overall caption of the figure.	27
3.2	Overall caption of the figure.	27
3.3	Images montrant le sous jacents St simulés plusieurs fois	31
3.4	Résultats Monte-Carlo simple et stratification	32
3.5	Overall caption of the figure.	37
3.6	Overall caption of the figure.	38
3.7	Caption	44
3.8	Caption	45
3.9	Caption	46
3.10	Approximation via Nos méthodes numériques.	46

List of Tables

3.1	Paramètres du Call (A)	31
3.2	Paramètres du Call (B)	33
3.3	Paramètres du Call (C)	33
3.4	Paramètres du Call (A)	37
3.5	Prix des options américaines via la méthode LSM (sans dividendes)	37
3.6	Prix des options américaines via la méthode LSM (dividende continu $q = 0.07$)	38
3.7	Solution explicites de l'EDP de Black Scholes	40
3.8	Paramètres du Call (A)	44
3.9	Erreur en Norme L2	44

1

Introduction: Concepts de finance pure

Afin de mieux comprendre les mécanismes présentés dans ce mémoire, il est important de rappeler quelques concepts clés de la finance de marché.

Finance de marché : La *finance de marché* désigne l'ensemble des activités relatives à l'échange d'actifs financiers sur des marchés organisés ou en gré à gré. Elle a pour objectif de valoriser, transférer et couvrir les risques liés aux fluctuations de prix des actifs.

Produit dérivé : Un *produit dérivé* est un instrument financier dont la valeur dépend d'un actif sous-jacent (action, devise, taux d'intérêt, matière première, etc.). Il est utilisé principalement pour la couverture de risques, la spéculation ou l'arbitrage.

Option : Une *option* est un contrat financier donnant à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé (le strike), à une date future ou pendant une période donnée. Ce droit s'acquiert contre le paiement d'une prime.

1.1 Motivation Financière

Les mathématiques constituent l'outil majeur de la quantification de l'incertain, fondé dès le XVII^e siècle sur la théorie des probabilités puis enrichi au XX^e siècle par l'essor des modèles discrets et l'avènement des processus stochastiques. À partir des années 1970, la dérégulation progressive des marchés et leur ouverture internationale ont accentué la volatilité des taux d'intérêt et des devises, créant un besoin impérieux de dispositifs de couverture sophistiqués. En France, l'introduction du MATIF en 1985 a jeté les bases d'un marché à terme standardisé, bientôt complété en 1987 par le MONEP, premier lieu d'échange d'options négociables. Ces options, de par leur effet de levier, ont profondément transformé la finance : elles ont amplifié l'impact des fluctuations

de marché, multiplié les sources de gains et de pertes, et rendu obsolètes les méthodes de gestion statique du risque. Pour y répondre, la finance moderne a élaboré des stratégies de couverture dynamiques – notamment le delta-hedging – et mis au point des schémas d'évaluation passant de l'arbre binomial discret aux modèles continus de diffusion, garantissant cohérence, absence d'arbitrage et efficacité opérationnelle. Ce cadre mathématique rigoureux sert aujourd'hui de socle aux pratiques de valorisation, de gestion des sensibilités (« Greeks ») et de contrôle des risques dans un environnement financier toujours plus complexe et interconnecté.

Actif sous-jacent

Un *actif sous-jacent* est l'actif de référence sur lequel porte un produit dérivé. Il peut s'agir d'une action (ex. : TotalEnergies), d'un indice (ex. : CAC 40), d'un taux d'intérêt, d'une devise ou encore d'une matière première (ex. : pétrole, or).

Exemple : Une option sur action donne le droit d'acheter ou de vendre une action donnée à un prix prédéfini.

Valeur intrinsèque et valeur temps

La *valeur intrinsèque* d'une option est le gain immédiat qu'elle procurerait si elle était exercée à l'instant t .

La *valeur temps* correspond à la partie du prix liée à l'incertitude future (volatilité, temps restant).

Exemple : Un call avec un prix d'exercice de 100 € sur une action qui vaut 105 € a une valeur intrinsèque de 5 €.

Arbitrage

L'*arbitrage* désigne une opération sans risque, sans investissement initial net, qui conduit à un gain certain. Dans les marchés efficients, ces opportunités sont rares et rapidement corrigées.

Exemple : si une même action est cotée à deux prix différents sur deux places de marché, on peut acheter là où elle est moins chère et vendre là où elle est plus chère.

Marché sans arbitrage

Un *marché sans arbitrage* interdit la possibilité de profit sans risque.

Volatilité

La *volatilité* mesure l'ampleur des fluctuations d'un actif. C'est un paramètre central dans l'évaluation des options : plus un actif est volatil, plus la valeur d'une option sur cet actif est élevée.

Exemple : une action qui varie entre 95 € et 105 € est moins volatile qu'une autre oscillant entre 80 € et 120 €.

1.2 Titres de base

L'activité financière repose sur divers instruments tels que la circulation monétaire exprimée en multiples devises, les opérations de prêts et d'emprunts, ainsi que les titres financiers, notamment les actions, qui reflètent la capitalisation des entreprises. Pour faciliter l'analyse et le suivi de ces titres, des indices de marché, tels que le S&P 500 ou le CAC 40, ont été mis en place, fournissant aux investisseurs des informations claires et synthétiques.

La variabilité de ces titres et des paramètres financiers sous-jacents a conduit à un besoin croissant de gestion des risques. Les entreprises industrielles, les compagnies d'assurance et les banques ont ainsi développé des instruments permettant de transférer ces risques, donnant naissance aux produits dérivés. Ces derniers sont des outils financiers servant à gérer les fluctuations de marché et peuvent être employés à des fins de couverture ou de spéculation.

Historiquement, les contrats à terme, premières formes de produits dérivés, remontent à l'Antiquité, avec des traces dans le commerce du blé. Leur structuration en marchés organisés, notamment sur les métaux précieux à Amsterdam au XVIII^e siècle et les premières bourses de contrats à terme à Chicago en 1973, a favorisé leur accessibilité et leur développement.

Les produits dérivés se retrouvent sur divers marchés :

- Marché des changes : achat et vente de devises,
- Marché des matières premières : pétrole, métaux, denrées agroalimentaires,
- Marché des actions et indices boursiers,
- Marché des taux d'intérêt.

1.3 Les contrats à terme

Un *contrat à terme* est un engagement entre deux parties pour effectuer une transaction à une date future déterminée, avec des conditions fixées à l'avance. Ces contrats peuvent concerner divers sous-jacents, tels que des devises, des taux d'intérêt ou des matières premières.

1.3.1 Caractéristiques principales

1. Les conditions de l'échange sont fixées à la conclusion du contrat, mais la transaction effective a lieu à maturité.
2. La livraison peut être physique (*physical settlement*) ou compensée par différence (*cash settlement*).

3. Le risque de contrepartie est présent, pouvant conduire à l'utilisation de contrats *futures* pour renforcer la sécurité des transactions.
4. Ces contrats sont symétriques : chaque partie peut potentiellement gagner ou perdre.
5. Ils permettent la couverture du risque de prix ou de taux de change.
6. Ils peuvent être utilisés à des fins de spéculation.
7. Ils jouent un rôle essentiel dans la diffusion de l'information et l'anticipation des prix de marché.
8. Un risque de liquidité existe en cas de difficulté à trouver une contrepartie.
9. Ils assurent la cohérence des prix sur différents marchés via des mécanismes d'arbitrage.

Illustration Prenons l'exemple d'un contrat à terme sur le blé à Chicago : un agriculteur s'engage à vendre 5,000 boisseaux à 5\$ par boisseau dans trois mois. Ici, le symbole \$ indique des dollars américains. La fixation du prix aujourd'hui protège l'agriculteur contre une baisse éventuelle du cours du blé.

1.3.2 Exemple de couverture

Un industriel européen doit recevoir une somme importante en dollars dans trois mois. Pour se protéger contre une variation défavorable du taux de change, il achète un contrat à terme USD/EUR à trois mois. Si le taux de change lui est défavorable à l'échéance, son contrat compensera la perte.

1.3.3 Marché viable et complet

Un *marché viable* est l'existence d'au moins une mesure de probabilité risque-neutre équivalente permettant de valoriser sans arbitrage. Autrement dit, il est possible de transporter les probabilités réelles vers un « monde » où le taux sans risque actualise correctement les gains futurs, assurant que tout actif est correctement prix et qu'aucune forme d'arbitrage « gratuit » n'existe.

Exemple : Le marché des changes pour les devises majeures (EUR/USD, USD/JPY). On peut passer à une mesure risque-neutre en taux USD pour valoriser tous les contrats, sans opportunité d'arbitrage triangulaire, car les taux d'intérêt locaux et les taux de change forward s'ajustent automatiquement selon la parité taux d'intérêt/taux de change.

Un *marché complet*: Tout risque peut être intégralement couvert à l'aide d'instruments disponibles ; il existe autant d'actifs fondamentaux que de sources d'incertitude. Dans un tel marché, chaque flux de trésorerie contingent peut être répliqué par un portefeuille d'actifs de base.

Exemple : Le modèle théorique de Cox–Ross–Rubinstein avec un arbre binomial à deux périodes et deux états possibles à chaque nœud. À chaque étape, on dispose de

deux actifs (un stock et un actif sans risque), ce qui permet de couvrir entièrement le risque lié au mouvement du cours à chaque date .

Mesure risque-neutre

Une *mesure risque-neutre* (ou Q -probabilité) est une probabilité équivalente à la probabilité réelle P sous laquelle l'espérance des gains actualisés de tout actif est égale à son prix actuel. Concrètement, on modifie les probabilités des scénarios de marché pour intégrer le taux sans risque r , de sorte que tout actif rapporte le même rendement espéré, sans prime de risque :

$$S_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^Q[S_T]$$

- S_0 : prix spot aujourd'hui.
- S_T : valeur de l'actif à l'échéance.
- r : taux sans risque.
- $\mathbb{E}^Q[\cdot]$: espérance sous la mesure Q .

Cette mesure est essentielle pour la valorisation sans-arbitrage des dérivés : on calcule les prix en actualisant les flux futurs sous Q .

1.3.4 Conclusion

Les contrats à terme sont des instruments financiers incontournables pour la gestion des risques et l'optimisation des stratégies d'investissement. Leur évolution a permis une meilleure stabilité des marchés et une meilleure transparence des prix.

1.3.5 Parité Call/Put :

Nous allons commencer par démontrer dans un premier temps que si la formule de Parité Call/Put est vérifiée alors l'hypothèse d'AOA sur le marché est vérifiée.

Parité call/put dans le modèle de Black-Scholes

Soit un sous-jacent qui ne verse pas de dividendes, et soit C_0 le prix d'un call de maturité T et de strike K , et P_0 le prix du put correspondant (même K , même T). Dans le cadre de l'hypothèse d'absence d'arbitrage (AOA), la *parité call/put* européenne s'écrit :

$$C_0 - P_0 = S_0 - K e^{-rT},$$

où S_0 est le prix du sous-jacent à la date initiale (aujourd'hui), et $K e^{-rT}$ est la valeur actualisée de K au taux sans risque r .

Remarque :

- Si l'actif sous-jacent verse des dividendes (ou un rendement continu au taux q), on obtient la version modifiée :

$$C_0 - P_0 = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}.$$

- Les démonstrations ci-dessous illustrent deux *façons distinctes* de prouver cette relation fondamentale.

Démonstration : Par argument d'arbitrage direct

On montre ici que *violer* la parité call/put conduit à la construction d'un arbitrage certain sans risque. Cela revient à prouver que la parité est *équivalente* à l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Cas 1 : $C_0 - P_0 > S_0 - K e^{-rT}$

Supposons que

$$C_0 - P_0 > S_0 - K e^{-rT}.$$

On construit alors un *portefeuille d'arbitrage* comme suit :

- Vendre un call : encaisser $+C_0$.
- Acheter un put : déboursier $-P_0$.
- Acheter l'action : déboursier $-S_0$.
- Emprunter $K e^{-rT}$: percevoir $+K e^{-rT}$.

Flux initial :

$$(+C_0) - (P_0) - (S_0) + (K e^{-rT}) = (C_0 - P_0 - S_0 + K e^{-rT}).$$

D'après l'inégalité, ce montant est *strictement positif*. On encaisse donc un gain initial.

Payoff final à l'échéance :

- Si $S_T \geq K$:
 - Le call vendu est exercé contre nous : nous livrons l'action et recevons K .
 - Le put acheté ne vaut rien.
 - Nous remboursons l'emprunt : K .
 - Résultat net : $K - K = 0$.
- Si $S_T < K$:
 - Le call vendu ne vaut rien.
 - Le put acheté est exercé : nous revendons l'action à K (ou équivalent payoff $K - S_T$).
 - Nous remboursons l'emprunt : K .
 - Résultat net : $K - K = 0$.

Le *payoff final* est donc toujours nul, tandis que le flux initial est *positif* : c'est un *arbitrage* (gain sans risque). Pour l'éviter, il faut donc que l'inégalité $C_0 - P_0 > S_0 - Ke^{-rT}$ soit impossible.

Cas 2 : $C_0 - P_0 < S_0 - Ke^{-rT}$

Supposons maintenant

$$C_0 - P_0 < S_0 - Ke^{-rT}.$$

On fait la stratégie *inverse* :

- Acheter un call : déboursier $-C_0$.
- Vendre un put : encaisser $+P_0$.
- Vendre à découvert l'action : encaisser $+S_0$.
- Placer Ke^{-rT} au taux sans risque.

Flux initial :

$$(-C_0) + P_0 + S_0 - Ke^{-rT} = (-C_0 + P_0 + S_0 - Ke^{-rT}).$$

D'après l'hypothèse, ce montant est strictement positif.

Payoff final :

- Si $S_T \geq K$:
 - Le call acheté peut être exercé : on achète l'action à K (au lieu de S_T).
 - Le put vendu ne vaut rien (non exercé).
 - On ferme la position short en rendant l'action, achetée à K .
 - Le placement initial fournit K à maturité.
 - Résultat net : $K - K = 0$.
- Si $S_T < K$:
 - Le call acheté ne vaut rien.
 - Le put vendu est exercé contre nous : nous payons K pour racheter l'action, mais on la rachète de toute façon au marché à S_T pour rendre l'action empruntée.
 - Le placement fournit K pour payer l'acheteur du put.
 - Résultat net : $K - K = 0$.

À nouveau, on réalise un *gain initial* strictement positif et on n'a *jamais* de perte possible à l'échéance. Donc c'est un arbitrage.

Conclusion générale

Les deux analyses montrent que *toute* violation de

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

permet de construire un portefeuille d'arbitrage *pur* (gain certain, sans risque, sans investissement initial net). *Inversement*, si on exclut les opportunités d'arbitrage, on *impose* que la parité call/put soit vérifiée.

1.3.6 Contrats forwards et contrats futures

Contrat forward

Un *contrat forward* est un dérivé financier simple consistant en un engagement ferme, pris aujourd'hui, d'acheter ou de vendre à une date ultérieure un sous-jacent (l'actif objet du contrat, par exemple une devise, une marchandise ou un titre) à un prix fixé d'avance. Contrairement à une opération spot (au comptant), où l'échange (livraison et paiement) se fait immédiatement, le règlement d'un forward n'intervient qu'à l'échéance prévue. Ces forwards sont négociés OTC (over-the-counter, c'est-à-dire de gré à gré, sans passage par une bourse centralisée), généralement entre deux institutions financières ou entre une banque et son client. La contrepartie qui s'engage à acquérir le sous-jacent détient une position longue, tandis que celle qui s'engage à le livrer prend une position courte. Très répandus sur le marché des changes, les forwards font souvent l'objet d'un service spécialisé au sein des départements de change des grandes banques.

Exemple : Imaginons qu'aujourd'hui vous conveniez avec un distributeur américain de céder 100 tonnes de maïs, la livraison devant intervenir dans soixante jours au prix ferme de 150 \$ la tonne.

À l'échéance, si vous choisissez la livraison physique, vous remettez les 100 tonnes et percevez 15 000 \$, quel que soit le cours spot du maïs à ce moment-là. Autrement dit, même si le prix spot a augmenté au-dessus de 150 \$, vous ne bénéficiez pas de cette hausse, et si le cours a baissé, vous restez protégé contre une diminution de vos revenus.

Si vous ou le distributeur préférez éviter la logistique de la livraison, vous pouvez opter pour un règlement en espèces : on calcule alors la différence entre le prix convenu (150 \$) et le prix du marché à l'échéance, et la partie dont la position est défavorable verse ce montant à l'autre.

Dans tous les cas, vous savez à l'avance que vous toucherez l'équivalent de 15 000 \$, ce qui vous garantit une visibilité parfaite sur votre trésorerie.

Contrat future

Un *contrat future* est, à l'instar d'un contrat forward, un accord entre deux parties pour acheter ou vendre un actif donné à une date future fixée et pour un prix convenu. Contrairement aux forwards négociés de gré à gré, les contrats futures sont échangés sur des marchés organisés, où les autorités de marché standardisent les caractéristiques des contrats (taille, échéance, qualité du sous-jacent) afin d'assurer la liquidité. Dans ce contexte d'anonymat entre les intervenants, une chambre de compensation intervient pour se placer entre acheteur et vendeur et garantir la bonne exécution des opérations.

Exemple : Imaginons que vous souhaitiez spéculer sur l'indice DAX, actuellement à 10 700 €. Vous anticipez qu'une fois le seuil des 10 750 € franchi, il poursuivra sa hausse. Vous prenez donc une position longue sur un contrat futures vous engageant à acquérir l'indice à 10 750 € dans deux mois.

À l'échéance, si le DAX cote 10 770 €, vous achetez au prix convenu de 10 750 €, ce qui génère un gain de 20 € par point, multiplié par la taille et le nombre de contrats souscrits. En revanche, si l'indice se situe en dessous de 10 750 €, vous êtes tenu d'acheter à ce même niveau, encaissant alors une perte égale à la différence entre 10 750 € et le cours spot.

Le montant total du gain ou de la perte est donc fonction de l'écart entre le prix fixé par le contrat et le cours de l'indice à l'échéance, pondéré par la taille de chaque contrat et le nombre de contrats détenus.

1.3.7 Les swaps

Un *swap* est un contrat de gré à gré par lequel deux contreparties conviennent, à des dates futures prédéterminées et sur un montant notionnel, d'échanger des flux financiers calculés selon des indices de taux ou de devises différents. Cet instrument permet, sans transfert de capital autre que le notionnel, de convertir un engagement à taux fixe en un engagement à taux variable (et inversement) ou de couvrir une exposition au risque de change.

Pour illustrer, on distingue notamment :

- Le *swap de taux ou swap d'intérêts* : Il consiste à contracter simultanément un prêt et un emprunt (dont seuls les intérêts seront échangés) portant sur la même devise mais sur des références de taux différentes.
- Le *swap de devises* : Il consiste à contracter simultanément un prêt et un emprunt portant sur 2 devises différentes et sur des taux fixes ou variables.
- Le *basis swap* : Il consiste en l'échange, à dates fixées et sur un même montant notionnel, de flux d'intérêts calculés selon deux références de taux variables différentes, sans transfert de capital.

Chaque partie trouve son compte dans l'opération : par exemple, un emprunteur à taux variable peut se couvrir contre une hausse des taux en payant un taux fixe, tandis qu'un investisseur à taux fixe peut bénéficier d'une éventuelle baisse en recevant un taux variable.

Exemple : Une entreprise emprunte 10 M€ à taux fixe de 2 % sur cinq ans, mais craint la baisse des taux. Elle entre en swap de taux d'intérêt avec une banque : elle paiera chaque semestre un coupon à taux variable (Euribor + 0,5 %) et recevra le coupon fixe de 2 %. Elle neutralise ainsi son risque de taux fixe contre un risque variable jugé plus favorable.

2

Le Modèle de Black-Scholes

2.1 Description du modèle

2.1.1 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad (2.1)$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets). On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que :

$$S_t^0 = e^{rt}, \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.2)$$

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad (2.3)$$

où μ et σ sont deux constantes et (B_t) un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ où T est la date d'échéance de l'option à étudier. Comme nous l'avons vu, l'équation 2.1 se résout explicitement :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right), \quad (2.4)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale (c'est-à-dire que son logarithme suit une

loi normale).

Plus précisément, on voit que le processus (S_t) vérifie une équation du type (4.2) et si seulement si le processus $(\log(S_t))$ est un mouvement brownien (non nécessairement standard). Compte tenu de la définition 2.1 du chapitre 3, cela signifie que le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements *relatifs* : si $u \leq t$, S_t/S_u ou (ce qui revient au même), l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu $\sigma(S_v, v \leq u)$,
- stationnarité des accroissements *relatifs* : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_t - S_0)/S_0$.

2.1.2 Hypothèses du modèle

2.2 Le modèle de Black-Scholes : hypothèses, équation et solution analytique

Le modèle de Black-Scholes, introduit en 1973 par Fischer Black et Myron Scholes, puis étendu par Robert Merton, constitue l'un des fondements de la théorie moderne de la finance. Il fournit une formule explicite pour le prix d'une option européenne, en s'appuyant sur des hypothèses mathématiques et économiques précises. Ce modèle repose sur une modélisation stochastique du prix de l'actif sous-jacent et sur un raisonnement d'arbitrage en absence de risque. Le modèle de Black-Scholes permet de valoriser rigoureusement des options européennes dans un cadre idéal. Malgré ses hypothèses parfois irréalistes (volatilité constante, absence de dividendes, etc.), il reste un outil fondamental de la finance quantitative. Il a aussi servi de base au développement de modèles plus complexes intégrant des réalités de marché, comme les modèles à volatilité locale ou

Le modèle est bâti sur les hypothèses suivantes :

- Le marché est **sans arbitrage** : il n'existe pas de stratégie permettant de générer un profit sans risque.
- Le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un **mouvement brownien géométrique**, défini par l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où μ est le taux de rendement attendu, σ la volatilité constante, et W_t un mouvement brownien standard.

- Le **taux d'intérêt sans risque** r est constant dans le temps.
- La **volatilité** σ de l'actif sous-jacent est constante et connue.
- L'actif ne verse **aucun dividende** pendant la durée de vie de l'option.

- Le marché est **parfaitement liquide** : pas de coûts de transaction, pas de taxes, et les actifs sont librement divisibles. La vente à découvert est permise sans restriction.
- L'option est **de type européen**, c'est-à-dire qu'elle ne peut être exercée qu'à l'échéance.

Ces hypothèses, bien que simplificatrices, permettent de dériver une équation différentielle partielle (EDP) satisfaisant au principe d'absence d'arbitrage.

2.2.1 Dérivation de l'équation de Black-Scholes

Considérons une option de valeur $V(S, t)$, dépendant du prix de l'actif S et du temps t . On construit un portefeuille Π en :

- prenant une position longue dans l'option (+1),
- prenant une position courte de Δ unités de l'actif sous-jacent ($-\Delta$).

La valeur du portefeuille est :

$$\Pi = V(S, t) - \Delta S.$$

Appliquons le lemme d'Itô à la fonction $V(S, t)$. On obtient :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt.$$

En utilisant la dynamique de S_t , soit $dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$, on écrit :

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

En choisissant $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, on élimine le terme en dW_t , ce qui rend le portefeuille **sans risque** sur un intervalle infinitésimal. Il doit donc rapporter le taux sans risque r , soit :

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

En développant et substituant $\Pi = V - \frac{\partial V}{\partial S} S$, on obtient l'EDP de Black-Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

2.2.2 Résolution analytique de l'EDP

Conditions terminales

Pour une option d'achat européenne (call) de prix d'exercice K et échéance T , la condition terminale est :

$$V(S, T) = \max(S - K, 0).$$

Changement de variables

Pour résoudre l'EDP, on effectue le changement de variables suivant :

$$\tau = T - t, \quad x = \ln \left(\frac{S}{K} \right).$$

On cherche alors une solution sous la forme :

$$V(S, t) = Ke^{-r\tau} u(x, \tau).$$

Ce changement permet de transformer l'équation de Black-Scholes en une équation de la chaleur classique :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cette équation admet une solution explicite connue, via des méthodes telles que la transformée de Fourier ou le noyau fondamental de la chaleur.

Formule de Black-Scholes

Après retour aux variables initiales, la solution finale pour le prix d'un call européen est donnée par la célèbre formule de Black-Scholes :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où :

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t},$$

et $N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

2.2.3 Black Scholes comme la limite de Cox-Ross-Rubinstein

Dans le modèle binomial de Cox–Ross–Rubinstein (CRR), on considère un horizon T découpé en N pas de durée $\Delta t = T/N$. À chaque pas $n = 1, \dots, N$, le prix du sous-jacent S évolue selon

$$S_n = S_{n-1} (1 + R_n),$$

avec

$$R_n \in \{a_N, b_N\}, \quad a_N < b_N, \quad r_N = e^{r\Delta t} - 1,$$

et sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q}^* ,

$$\mathbb{Q}^*(R_n = b_N) = p_N, \quad \mathbb{Q}^*(R_n = a_N) = 1 - p_N,$$

où p_N est choisi pour égaliser l'espérance au taux sans risque:

$$a_N (1 - p_N) + b_N p_N = r_N \implies p_N = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N}.$$

On fixe ensuite les paramètres binomiaux de façon à retrouver, en diffusion limite, un drift r et une volatilité σ par unité de temps :

$$\ln \frac{1 + a_N}{1 + r_N} = -\sigma \sqrt{\Delta t}, \quad \ln \frac{1 + b_N}{1 + r_N} = +\sigma \sqrt{\Delta t}.$$

Une expansion au premier ordre donne

$$p_N = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4} \sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}).$$

On définit

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1, & R_i = b_N, \\ -1, & R_i = a_N, \end{cases}$$

de sorte que

$$E[\varepsilon_i] = 1 - 2p_N \sim -\frac{\sigma^2}{2} \sqrt{\Delta t}, \quad [\varepsilon_i] \sim 1.$$

Le processus re-normalisé

$$X_t^N = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \varepsilon_i + \frac{\sigma^2}{2} t$$

converge en loi vers un mouvement brownien standard B_t (théorème de Donsker).

Enfin, on écrit pour $0 \leq t \leq T$:

$$S_t^N = S_0 \prod_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \exp\left(r \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_i\right) = S_0 \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B_t\right),$$

qui est précisément la solution du modèle Black–Scholes continu :

$$S_t = S_0 \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B_t\right).$$

Mise en place asymptotique. Pour relier le modèle binaire de Cox-Ross-Rubinstein (CCR) à Black-Scholes, on fait tendre le nombre de pas N vers l'infini tout en conservant un horizon fixe T . Ainsi, la durée de chaque intervalle vaut $\Delta t = T/N \rightarrow 0$. Dans le modèle CCR, on définit pour chaque pas :

$$r_N = e^{r \Delta t} - 1, \quad \log\left(\frac{1+a_N}{1+r_N}\right) = -\sigma\sqrt{\Delta t}, \quad \log\left(\frac{1+b_N}{1+r_N}\right) = +\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

On en déduit alors

$$1 + a_N = \exp(r \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}), \quad 1 + b_N = \exp(r \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}), \quad p_N = \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4}\sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}).$$

Le prix S_t^N au temps t s'écrit

$$S_t^N = S_0 \prod_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} (1 + R_i) = S_0 \exp\left(r t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \varepsilon_i\right),$$

où

$$\varepsilon_i = \mathbf{1}_{\{R_i=b_N\}} - \mathbf{1}_{\{R_i=a_N\}}, \quad \mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = 1 - p_N, \quad \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = p_N.$$

Passage à la limite. On calcule

$$\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 1 - 2p_N \sim -\frac{\sigma}{2}\sqrt{\Delta t}, \quad (\varepsilon_i) \sim 1,$$

et, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \varepsilon_i\right] \sim -\frac{\sigma}{2} t, \quad \left[\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \varepsilon_i\right] \sim t.$$

D'après le théorème de Donsker, le processus

$$X_t^N = \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} \varepsilon_i + \frac{\sigma}{2} t \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (B_t)_{0 \leq t \leq T},$$

où (B_t) est un mouvement brownien. En réinjectant dans l'expression de S_t^N , on obtient

$$S_t^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} S_0 \exp\left(r t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right),$$

ce qui est exactement le modèle de Black-Scholes (avec r jouant le rôle de μ sous la mesure risque-neutre).

On retrouve ainsi rigoureusement Black-Scholes comme limite continue du modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein.

2.3 La formule de Black-Scholes

2.3.1 L'équation différentielle de Black-Scholes

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui permet de déterminer la valeur d'une option européenne en fonction du temps et du prix de l'actif sous-jacent. Cette équation, connue sous le nom de modèle de Black-Scholes, s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles (EDP) du second ordre, de type parabolique. Sa résolution nécessite la définition d'une condition initiale (ou finale) en temps, ainsi que de conditions aux limites dans l'espace.

Notations:

- V : la valeur d'une option (on se limitera aux options européennes dans ce cours) ;
- σ : la volatilité du prix de l'action (c'est-à-dire l'ampleur de ses fluctuations) ;
- r : le taux d'intérêt sans risque.

On pourra faire la distinction entre un "call" C et un "put" P si besoin. Ce sont des fonctions du temps t , et de la valeur actuelle de l'action sous-jacente S . On note donc $V = V(S, t)$.

2.3.2 Évaluation d'un call européen sous Black-Scholes

Considérons une option d'achat (call) européenne portant sur un actif sous-jacent S , avec un prix d'exercice K et une maturité T . Le but est de déterminer le prix $C(S, t)$ de cette option à un instant $t < T$, en supposant que le prix du sous-jacent suit la dynamique stochastique imposée par le modèle de Black-Scholes.

Condition terminale

À l'échéance T , la valeur d'un call est donnée par sa valeur intrinsèque :

$$C(S, T) = \max(S - K, 0).$$

Il s'agit de la condition terminale imposée à la solution de l'équation de Black-Scholes.

Équation de Black-Scholes

Le prix $C(S, t)$ de l'option vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0.$$

Cette EDP est linéaire, parabolique, et doit être résolue sur le domaine $0 < S < \infty$, $0 \leq t < T$, avec la condition terminale ci-dessus.

Méthode de résolution

Pour résoudre analytiquement cette équation, on effectue un changement de variables pour transformer l'EDP en une équation de la chaleur classique. Soient :

$$\tau = T - t, \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right),$$

et on cherche une solution de la forme :

$$C(S, t) = Ke^{-r\tau}u(x, \tau).$$

Ce changement permet de ramener l'équation de Black-Scholes à l'équation de la chaleur standard en $u(x, \tau)$, dont la solution est bien connue.

Après calculs (omises ici pour concision), on parvient à l'expression fermée suivante, connue sous le nom de **formule de Black-Scholes** :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où $N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale standard, et :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Interprétation économique

La formule exprime le prix d'un call comme la différence entre deux termes :

- $SN(d_1)$ représente la valeur actuelle espérée de l'actif sous-jacent, pondérée par la probabilité (sous la mesure risque-neutre) que l'option soit dans la monnaie.
- $Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ est la valeur actualisée du prix d'exercice, pondérée par la probabilité (toujours sous mesure risque-neutre) que l'option soit exercée.

Cette formule repose fondamentalement sur l'idée d'**absence d'arbitrage** et sur une **réplication dynamique** du payoff de l'option.

3

Couverture des Options euro/Amer

Après avoir étudié le modèle de Black-Scholes, nous allons nous intéresser aux Pricing des Options, et nous allons commencer par définir pourquoi Pricer des Options de cette manière.

Nous allons commencer par reprendre la définition d'une options en finance. Ce sont des produits financiers dits « dérivés » donnant le droit d'acheter ou de vendre une quantité d'actifs sous-jacents (actions, devises, etc.) pendant une période et à un prix convenus à l'avance. Vous payez une prime (prix de l'option) pour acquérir ce droit. Il s'agit d'un droit d'acquérir la quantité d'actifs à un prix convenu à l'avance et non d'une obligation. Dans le cadre de notre mémoire nous allons traiter deux cas de produits dérivées : Le Call (Option D'achat) ainsi que le Put (Option de Vente).

Pour ce faire nous allons utiliser le formalisme mathématique du modèle de Black-Scholes, qui est un modèle en temps continu présenté au chapitre précédent.

Commençons par définir tout les paramètres du modèle qui seront utilisées afin de modéliser le prix du sous-jacents. En effet dans le modèle de Black-Scholes, un sous jacent S_t suit une EDS :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t)$$

et qui a pour unique solution :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma B_t\right).$$

3.1 Représentation du prix du sous-jacents actualisés comme Martingales :

On a par définition du prix du sous-jacents actualisés : $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$.

$$\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t \quad (3.1)$$

$$d\tilde{S}_t = \underbrace{d(e^{-rt})}_{=-r e^{-rt} dt} S_t + e^{-rt} \underbrace{dS_t}_{=S_t(\mu dt + \sigma dB_t)} + \underbrace{d\langle e^{-rt}, S_t \rangle}_{=0} \quad (3.2)$$

$$= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad (3.3)$$

$$= e^{-rt} S_t (\mu dt + \sigma dB_t) - r e^{-rt} S_t dt \quad (3.4)$$

$$= e^{-rt} S_t ((\mu - r) dt + \sigma dB_t) \quad (3.5)$$

$$= \tilde{S}_t ((\mu - r) dt + \sigma dB_t). \quad (3.6)$$

Nous posons ensuite la *candidature* à un nouveau mouvement brownien sous une mesure équivalente :

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t.$$

Alors

$$dW_t = dB_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt,$$

et en réinjectant dans la dernière ligne on obtient

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \underbrace{((\mu - r) dt + \sigma dB_t)}_{= \sigma dW_t} = \sigma \tilde{S}_t dW_t. \quad (4.5)$$

D'après le théorème de Girsanov, sous la probabilité \mathbb{P}^* qui rend (W_t) brownien, (\tilde{S}_t) est une martingale et s'écrit

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\right).$$

3.2 Options Européennes

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux options européennes. Une option européenne est définie par une variable aléatoire positive h , \mathcal{F}_T -mesurable. Le plus souvent, h s'écrit sous la forme

$$h = f(S_T),$$

avec

$$f(x) = (x - K)_+ \quad \text{pour un call}, \quad f(x) = (K - x)_+ \quad \text{pour un put}.$$

Comme dans le cas discret, nous allons définir la valeur de l'option par simulation. Pour des raisons techniques, nous limiterons la classe des stratégies admissibles de la façon suivante :

Définition 3.1 Une stratégie $\varphi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est dite *admissible* si elle satisfait :

1. *Autofinancement* : aucun apport/net retrait de capitaux en cours de vie.
2. $\tilde{V}_t(\varphi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t \geq 0$ pour tout t , où $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ et la valeur actualisée \tilde{V}_t est de carré intégrable sous \mathbb{P}^* .

On dit qu'une option est *simulable* si son payoff h à l'échéance peut se répliquer par la valeur finale d'une stratégie admissible. Pour qu'un payoff h soit simulable, il faut et suffit que $h \in L^2(\mathbb{P}^*)$. En particulier : - Pour un call $h = (S_T - K)_+$, $\mathbb{E}^*[S_T^2] < \infty$ garantit la condition. - Pour un put $h = (K - S_T)_+$, h est même borné.

Dans le modèle de Black & Scholes, toute option définie par une variable aléatoire positive h , \mathcal{F}_T -mesurable et de carré intégrable sous \mathbb{P}^* est simulable. Sa valeur à l'instant t de tout portefeuille répliquant est

$$V_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} h \mid \mathcal{F}_t).$$

Preuve détaillée Nous partons d'une stratégie admissible $\varphi = (H^0, H)$ qui réplique h , i.e. $V_T = h$. On note $S_t^0 = e^{rt}$ la numéraire sans risque et $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$.

1. *Expression non actualisée* :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

À l'échéance $t = T$, $V_T = h$.

2. *Actualisation* :

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t.$$

3. *Autofinancement* : aucun flux externe, donc la dynamique de \tilde{V} s'écrit

$$d\tilde{V}_t = H_t^0 d(1) + H_t d\tilde{S}_t = H_t d\tilde{S}_t,$$

puis, d'après l'EDS de \tilde{S}_t (équation (4.5)),

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t,$$

on obtient

$$d\tilde{V}_t = H_t \sigma \tilde{S}_t dW_t.$$

4. *Intégration stochastique* :

$$\tilde{V}_t - \tilde{V}_0 = \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u.$$

Donc

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u.$$

5. *Martingale* : sous \mathbb{P}^* , $\sup_{0 \leq u \leq T} \tilde{V}_u \in L^2$ garantit que l'intégrale stochastique est une martingale. Ainsi,

$$\tilde{V}_t = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_t \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(e^{-rT} h \mid \mathcal{F}_t).$$

6. *Retour à l'échelle originale* :

$$V_t = e^{rt} \tilde{V}_t = e^{rt} \mathbb{E}^*(e^{-rT} h \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} h \mid \mathcal{F}_t).$$

Ceci établit l'égalité (4.6) et achève la démonstration. ■

3.2.1 Couverture des calls et des puts

On cherche à construire explicitement la stratégie répliquante pour une option européenne de payoff $h = f(S_T)$. La valeur actualisée du portefeuille de réplication doit vérifier, pour tout t :

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t),$$

où F est la fonction donnée par (4.7). On définit

$$\tilde{F}(t, x) = e^{-rt} F(t, e^{rt} x).$$

Alors $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$.

Application de la formule d'Itô à $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) du \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) d\langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_u. \end{aligned}$$

Or $d\tilde{S}_u = \sigma \tilde{S}_u dW_u$ et $d\langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_u = \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du$. D'où

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) du + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du. \end{aligned}$$

Les termes en du s'annulent car \tilde{F} satisfait l'équation de Black-Scholes, i.e.

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2} = 0.$$

D'où, finalement,

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u.$$

Comme $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ est une martingale sous \mathbb{P}^* , l'intégrale en du disparaît, et on identifie le processus de couverture naturel :

$$H_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t).$$

En posant

$$H_t^0 = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - H_t \tilde{S}_t,$$

le portefeuille (H^0, H) est autofinancé et réplique h . ■

3.3 Interprétation financière de la mesure risque-neutre

Dans tout modèle d'évaluation d'options sans arbitrage, le passage de la mesure réelle \mathbb{P} à la mesure risque-neutre \mathbb{Q} traduit économiquement la façon dont le marché valorise la prime de risque. Nous détaillons ci-dessous, avec rigueur et quantificateurs, les principaux aspects financiers de cette opération.

Plusieurs définitions de rendement coexistent, qui coïncident en contexte déterministe mais divergent en présence d'incertitude. Nous mesurons ici le rendement entre deux dates par la différence des logarithmes de prix, conformément à la formule d'Itô.

Hypothèse. Soit $(S_t)_{t \in [0, T]}$ un processus de prix satisfaisant l'équation stochastique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

où (W_t) est un mouvement brownien et μ, σ sont des constantes.

Sous cette hypothèse, on obtient :

- $S_0 = x$ est la valeur initiale du titre.
- Les rendements logarithmiques

$$\log S_t - \log S_s$$

sont distribués selon une loi normale de moyenne

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - s)$$

et de variance $\sigma^2(t - s)$.

- Pour toute subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, les accroissements relatifs

$$\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} - 1, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

sont indépendants et de même loi.

Par conséquent, la solution explicite de l'équation de Black–Scholes s'écrit

$$S_t = x \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right). \quad (3.7)$$

En appliquant la formule d'Itô à $f(t, W_t) = \exp(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$, on vérifie facilement que les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f\sigma, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f\sigma^2,$$

d'où, après substitution, l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

[Transformée de Laplace d'une gaussienne] Soit U une variable aléatoire gaussienne de moyenne m et de variance γ^2 . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\left[e^{\lambda U} \right] = \exp\left(\lambda m + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right).$$

En particulier, si (W_t) est un mouvement brownien,

$$\left[e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \right] = 1.$$

Pas de bruit ($\sigma = 0$) Dans ce cas, μ coïncide avec le rendement *sans risque* du titre. En absence d'incertitude, un argument d'arbitrage impose que ce rendement soit identique à celui d'un placement au taux r ; si l'on note S_t^0 la capitalisation d'un euro à la banque, alors

$$\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r dt.$$

Typiquement : $r \approx [2\%, 12\%]$.

Titre risqué Lorsque $\sigma > 0$, μ devient le rendement annualisé *espéré* du titre. On le compare généralement au placement sans risque, de sorte que

$$\mu - r$$

joue le rôle de prime de référence.

Prime de risque et ratio de Sharpe Le *ratio de Sharpe* par unité de temps mesure les excès de rendement corrigés de la volatilité :

$$\lambda = \frac{\frac{1}{dt} \left[\frac{dS_t}{S_t} \right] - r}{\sqrt{\frac{1}{dt} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)}} = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

On en déduit immédiatement l'écriture modifiée de la dynamique sous la mesure réelle :

$$dS_t = S_t \left[r dt + \sigma (d\widehat{W}_t + \lambda dt) \right].$$

Ordres de grandeur de la volatilité Le paramètre σ varie fortement selon la classe d'actif :

- Actions : $\sigma \approx 30\%-70\%$,
- Devises : $\sigma \approx 10\%-30\%$,
- Taux d'intérêt : $\sigma \approx 8\%-30\%$.

3.3.1 Limites de la modélisation

Dans le cadre de Black-Scholes, tous les paramètres sont supposés constants. Cela s'éloigne de la réalité — par exemple pour le yen — et complique l'identification (cal-

ibration) sur les marchés. On peut introduire des modèles à volatilité stochastique ou à paramètres variables, mais cela soulève alors d'importants défis d'estimation et de tractabilité.

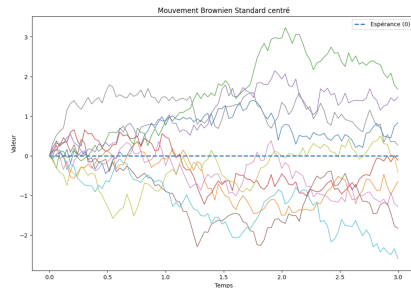
Conclusion

En pratique, passer à la mesure \mathbb{Q} permet : D'absorber la prime de risque ainsi que l'aversion au risque des investisseurs car μ est difficile à calibrer par et surtout car il est une tendance que chaque agents investisseurs fixent différemment.

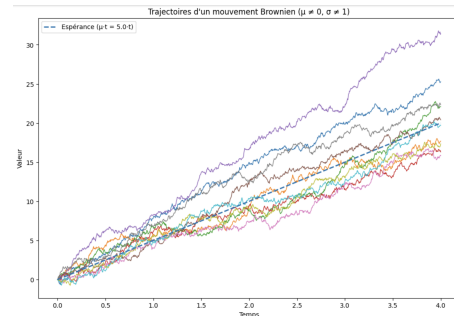
1. Passer à la mesure risque neutre \mathbb{Q} permettrait d'« absorber » la prime de risque $\lambda = \mu - r$ dans la densité de probabilité,
2. de pondérer les trajectoires selon l'aversion de marché aux pertes extrêmes, et aussi à l'aversion de la prime de risque de chaque agents.
3. d'obtenir un prix d'option *unique* et une stratégie de couverture Δ -neutre où $\forall t, e^{-rt}V_t$ est martingale.

3.3.2 Principe de Monte-Carlo pour le Pricing des Options :

Pour ce faire nous avons commencer à simuler des trajectoires du Mouvements Browniens standard, ainsi qu'un Mouvement Brownien non standard.

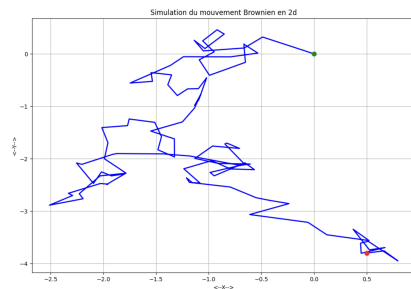


(a) Caption for figure 1.

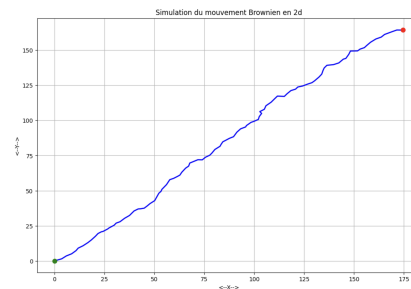


(b) Caption for figure 2.

Figure 3.1: Overall caption of the figure.



(a) Caption for figure 1.



(b) Caption for figure 2.

Figure 3.2: Overall caption of the figure.

3.3.3 Monte Carlo Method

Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le processus de Black–Scholes pour le prix du sous-jacent $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfait l'E.D.S.

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien sous \mathbb{Q} . — En intégrant cette E.D.S. de 0 à T , on obtient

$$\ln S_T - \ln S_0 = \int_0^T \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \int_0^T \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T^{\mathbb{Q}}.$$

— Puisque $W_T^{\mathbb{Q}} \sim \mathcal{N}(0, T)$, on peut écrire $W_T^{\mathbb{Q}} = \sqrt{T} Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. — D'où la formule fermée

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T} Z\right). \quad (3.8)$$

Le payoff actualisé d'un call européen est

$$X = e^{-rT} \max(S_T - K, 0), \quad \mu = \mathbb{E}[X], \quad V = \text{Var}[X].$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On fixe les paramètres :

- $S_0 > 0$ prix initial du sous-jacent,
- $K > 0$ strike de l'option,
- $T > 0$ maturité,
- $r \in \mathbb{R}$ taux sans risque,
- $\sigma > 0$ volatilité,
- $N \in \mathbb{N}$ nombre de simulations.

On note Φ la CDF de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Φ^{-1} son inverse. Sous la probabilité risque-neutre,

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T} Z\right), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1). \quad (3.9)$$

Le payoff actualisé d'un call européen est

$$X = e^{-rT} \max(S_T - K, 0), \quad \mu = \mathbb{E}[X], \quad V = \text{Var}[X]. \quad (3.10)$$

Dans le cadre du modèle de Black–Scholes, on suppose que le prix de l'actif sous-jacent S_t suit un mouvement brownien géométrique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où μ est le taux de rendement espéré, σ la volatilité et $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. En passant sous la mesure neutre au risque \mathbb{Q} (théorème de Girsanov), le

drift μ est remplacé par le taux sans risque r , d'où la dynamique

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

La solution explicite s'écrit alors

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right], \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Le prix théorique d'un call européen de strike K et maturité T est la valeur actualisée de l'espérance neutre au risque :

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+].$$

Lorsque l'intégrale n'admet pas de forme fermée (ou pour vérifier numériquement la formule de Black-Scholes), on l'approxime par Monte-Carlo : on génère N réalisations indépendantes $S_T^{(i)}$ via la formule ci-dessus, on calcule les payoffs $X_i = (S_T^{(i)} - K)^+$ puis l'estimateur

$$\hat{C}_N = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

D'après la loi forte des grands nombres, $\hat{C}_N \xrightarrow{\text{p.s.}} C_0$ quand $N \rightarrow \infty$, et le théorème central limite donne

$$\sqrt{N}(\hat{C}_N - C_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, e^{-2rT} \mathbb{V}[X_1]\right),$$

ce qui permet d'estimer un intervalle de confiance pour l'erreur statistique. Ainsi, la méthode de Monte-Carlo consiste à simuler le processus log-normal sous \mathbb{Q} , calculer les payoffs, les actualiser au taux r puis prendre leur moyenne, la précision s'améliorant en $O(N^{-1/2})$.

Nous allons par la suite expliquée d'avantage comment la méthode de Monte Basé sur la Loi des grands nombres peut nous permettre exactement dans le cas de notre sous-jacents de calculer le Payoff à l'échéance d'une option Européene. De plus nous expliquerons pourquoi réaliser une stratification afin de réduire l'intervalle de confiance et donc d'améliorer la précision de notre approximation .

3.4 Méthode de stratification pour Monte Carlo

3.4.1 Modèle et simulateur de base

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ un espace filtré satisfaisant les conditions usuelles, et W un mouvement brownien standard adapté. Sous la mesure risque-neutre, le sous-jacent suit

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad S_0 > 0.$$

Pour $i = 1, \dots, N$, on simule

$$Z_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \quad S_T^{(i)} = S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} Z_i\right), \quad X_i = e^{-rT} \max(S_T^{(i)} - K, 0),$$

et on pose

$$\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i.$$

3.4.2 Principe de la stratification

On partitionne $(0, 1)$ en L strates

$$I_j = \left(\frac{j}{L}, \frac{j+1}{L}\right), \quad j = 0, \dots, L-1,$$

et on tire, pour chaque strate j , $n = N/L$ échantillons

$$U_{j,i} \sim \mathcal{U}(I_j), \quad Z_{j,i} = \Phi^{-1}(U_{j,i}), \quad i = 1, \dots, n.$$

3.4.3 Construction de l'estimateur stratifié

Pour chaque paire (j, i) , on définit

$$S_{T,j,i} = S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} Z_{j,i}\right), \quad X_{j,i} = e^{-rT} \max(S_{T,j,i} - K, 0).$$

On pose

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{j,i}, \quad s_j^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{j,i} - \bar{X}_j)^2,$$

et on définit

$$\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}} = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} \bar{X}_j.$$

3.4.4 Propriétés

- **Sans biais.** $\mathbb{E}[\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}}] = \mu.$
- **Réduction de variance.** $[\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}}] = \frac{1}{L^2} \sum_{j=0}^{L-1} \frac{[X \mid U \in I_j]}{n} \leq \frac{V}{N}.$
- **Estimateur de variance.** $\uparrow[\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}}] = \frac{1}{L^2} \sum_{j=0}^{L-1} \frac{s_j^2}{n}.$
- **Intervalle de confiance 95 %.** $\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}} \pm z_{0.975} \sqrt{[\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}}]}, \quad z_{0.975} = 1.96.$
- **Gain relatif de variance.** $\rho = 100\% \frac{V/N - [\hat{\mu}_{N,L}^{\text{strat}}]}{V/N}.$

Nous allons enfin finir par comparer les résultats des formules explicites fermés, retrouvé dans le chapitre deux, nous vérifierons si notre Algorithme de Monte Carlo est assez

optimisé afin de calculer avec un bon ratio d'erreur.

3.4.5 Application de Monte-Carlo aux Options Européennes

Table 3.1: Paramètres du Call (A)

Paramètres	Valeur
Strike	105
Valeur du sous jacent à $t=0$	100
Echéance (T)	T = 1 year
(μ)	0.02
Taux sans risque r	0.05

Nous allons commencer par étudier en premier lieu ces paramètres pour le Call, afin de vérifier si le Priceur via Monte-Carlo est juste et n'est pas trop bruité.

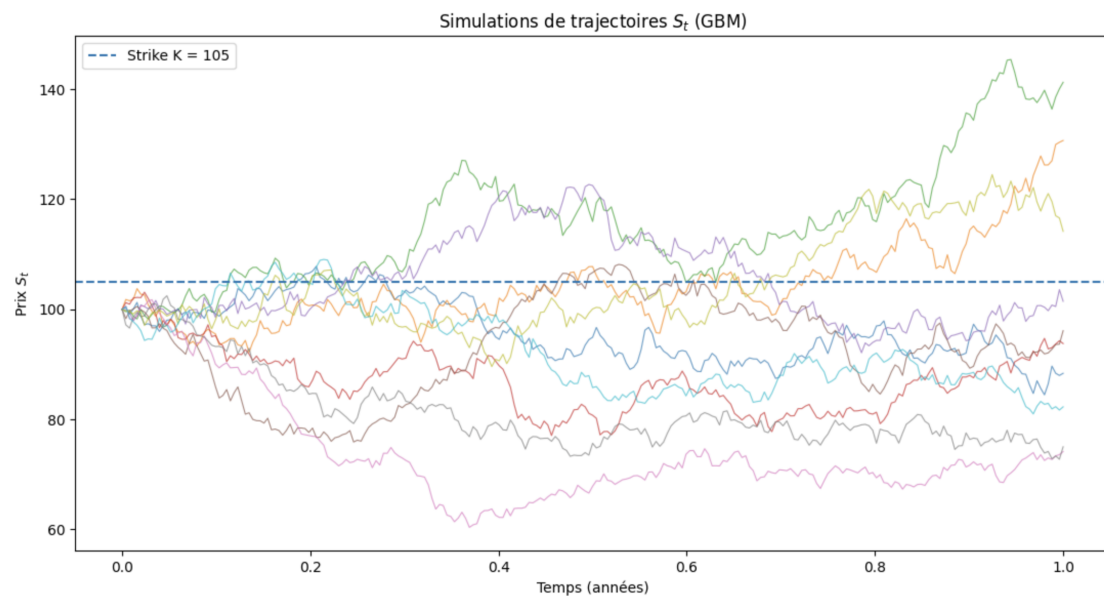


Figure 3.3: Illustration of the fungus *Dumontinia tuberosa* by physician, mycologist, and illustrator Charles Tulasne (1816–1884) in the book *Selecta Fungorum Carpologia* (1861–65). (Name of the original work: *Peziza tuberosa* parasite on *Anemone nemorosa*).

Ainsi, nous avons un intervalle de confiance à 95, que le prix du call est compris entre 7.995 et 8.15. Prenons maintenant le calcul analytique : et calculons le prix du Call du même contrat.

Dans le modèle de Black–Scholes, les prix d'un call C et d'un put P européens de sous-jacent S_0 , de strike K , de maturité T , de volatilité σ et de taux sans risque r s'expriment closed-form comme :

$$C(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2),$$

$$P(S_0, K, r, T, \sigma) = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2),$$

```

===== Monte-Carlo simple =====
Estimation      : 7.939750
Variance est.   : 1.754476e-02
IC 95 %        : [7.680135, 8.199365]

===== Stratification =====
L = 10 strates, 1000 tirages/strate
Estimation      : 8.077515
Variance est.   : 1.766783e-03
IC 95 %        : [7.995130, 8.159900]

Réduction relative de variance : 89.93 %

```

Figure 3.4: Résultats Monte-Carlo simple et stratification

où l'on définit

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

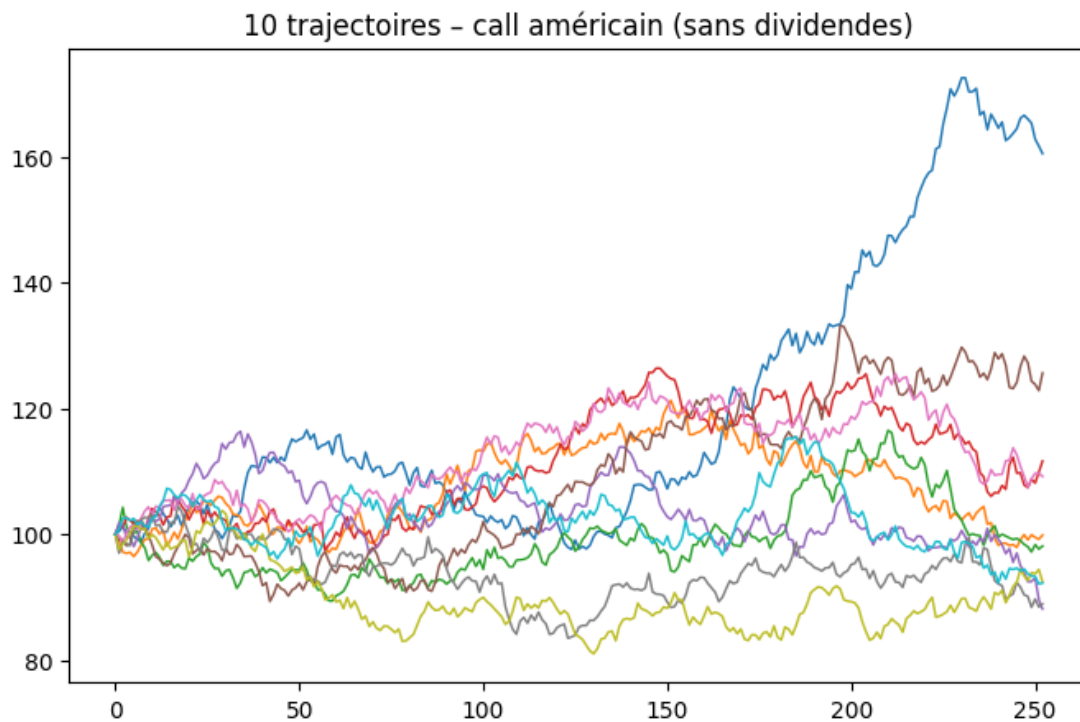
la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right], \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Avec cette formule nous obtenons donc le payoff exacte d'une option d'achat (Call) européenne qui est : 8.021352

Table 3.2: Paramètres du Call (B)

Paramètres	Valeur
Strike	20
Valeur du sous jacent à $t=0$	12
Echeance (T)	T = 1 year
(μ)	0.05
Taux sans risque r	0.02

**Table 3.3:** Paramètres du Call (C)

Paramètres	Valeur
Strike	12000
Valeur du sous jacent à $t=0$	1700
Echeance (T)	T = 1 year
(μ)	0.05
Taux sans risque r	0.02

Ici pour le Call B, nous voyons que le prix de l'option est d'environ 0.0117, tandis qu'avec le résultat analytique de l'EDP de Black Scholes, nous trouvons 0.010887

3.5 Options Américaines

Pour un call américain sans dividendes, la valeur de marché C_t à tout instant $t < T$ satisfait toujours $C_t \geq S_t - K$, où S_t est le prix du sous-jacent et K le strike. En effet, si l'on exerceait immédiatement, on obtiendrait un gain instantané $h(S_t) = \max(S_t - K, 0) = S_t - K$ (dans le cas *in-the-money*), que l'on pourrait comparer à la stratégie alternative consistant à vendre le call sur le marché pour la prime C_t . Or, l'inégalité $C_t \geq S_t - K$ implique que cette revente procure un gain au moins aussi grand que l'exercice immédiat. Comme il n'existe aucun flux de dividendes à capter en détenant l'actif, la conservation ou la revente du call domine systématiquement l'exercice anticipé. Par conséquent, pour tout $t < T$, exercer le call ne maximise pas la richesse du détenteur, et l'option ne sera jamais exercée avant maturité.

3.5.1 Le cas du Call sans dividendes :

Soit S_t le prix d'un actif sans dividendes sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , et K un prix d'exercice fixe. Pour tout instant t strictement inférieur à la maturité T , la valeur V_t d'un call américain de payoff $h(S) = \max(S - K, 0)$ satisfait

$$V_t > S_t - K,$$

ce qui implique qu'il n'est jamais rationnel d'exercer avant T .

Nous allons comparer, pour un détenteur de call à l'instant $t < T$, la valeur qu'il obtient s'il exerce immédiatement et la valeur qu'il obtient s'il conserve son option jusqu'à maturité.

1. Valeur de l'exercice immédiat.

- Si l'on exerce le call à l'instant t , le détenteur vend l'option et reçoit immédiatement le payoff

$$h(S_t) = \max(S_t - K, 0).$$

- Supposons pour la suite que $S_t > K$, autrement dit le call est *in-the-money*, sinon l'exercice immédiat vaudrait zéro et la comparaison suivante est encore plus favorable à la conservation.
- En réinvestissant ce montant $(S_t - K)$ au taux sans risque r de t jusqu'à l'échéance T , ce capital croît selon le facteur $e^{r(T-t)}$. Ainsi, à l'échéance, l'exercice immédiat vaut

$$(S_t - K) e^{r(T-t)}.$$

2. Valeur de conservation du call jusqu'à maturité.

- Si l'on conserve le call, sa valeur actualisée au temps T est, sous la mesure risque-

neutre,

$$V_t e^{r(T-t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0) \mid S_t].$$

- Nous comparons donc deux quantités qui sont toutes deux actualisées jusqu'à T :

$$\underbrace{(S_t - K) e^{r(T-t)}}_{\text{exercice immédiat}} \quad \text{et} \quad \underbrace{V_t e^{r(T-t)}}_{\text{conservation du call}}.$$

3. Application de l'inégalité de Jensen.

1. La fonction $x \mapsto \max(x - K, 0)$ est convexe sur \mathbb{R} .
2. Par l'inégalité de Jensen conditionnelle, pour toute variable aléatoire X et toute fonction convexe ϕ ,

$$\mathbb{E}[\phi(X) \mid S_t] \geq \phi(\mathbb{E}[X \mid S_t]).$$

3. En posant $X = S_T$ et $\phi(x) = \max(x - K, 0)$, on obtient

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0) \mid S_t] \geq \max(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mid S_t] - K, 0).$$

4. Calcul de l'espérance conditionnelle sous \mathbb{Q} .

- Sous la mesure risque-neutre et en l'absence de dividendes, la dynamique de S est telle que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mid S_t] = S_t e^{r(T-t)}.$$

- D'où, en substituant dans l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0) \mid S_t] \geq \max(S_t e^{r(T-t)} - K, 0).$$

- Or, puisque nous avons supposé $S_t > K$, le terme intérieur est positif, donc

$$\max(S_t e^{r(T-t)} - K, 0) = (S_t - K) e^{r(T-t)}.$$

5. Conclusion.

- Nous avons obtenu

$$V_t e^{r(T-t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(S_T - K, 0) \mid S_t] \geq (S_t - K) e^{r(T-t)}.$$

- En divisant par $e^{r(T-t)} > 0$, on en déduit

$$V_t \geq S_t - K.$$

- Cette inégalité tient *strictement* chaque fois qu'il existe une probabilité non nulle que le call termine in-the-money à T .

- Par conséquent, pour tout $t < T$, la valeur de conservation du call dépasse toujours le gain d'exercice immédiat :

$$\forall t \in [0, T), \quad V_t - (S_t - K) \geq 0,$$

ce qui démontre qu'il n'y a *jamais* d'incitation économique à exercer le call avant l'échéance.

Nous allons commencer par définir un algorithme présente par Longstaff et Schwartz afin de Pricer une Option américaine.

3.6 Longstaff.Shwartz

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ satisfaisant les hypothèses usuelles (complétude, droite-continuité). On considère un processus de prix sous-jacent $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté à (\mathcal{F}_t) et une option américaine de maturité T dont le payoff instantané est donné par $H_t = h(t, S_t)$, où $h : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est mesurable et bornée par une constante M . On note \mathcal{T} l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T\}$ pour $\Delta t = T/N$, et l'on cherche à résoudre le problème d'optimal stopping discret

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}[H_\tau \mid \mathcal{F}_0].$$

Pour tout $n = N - 1, \dots, 0$, on définit la valeur de continuation théorique

$$C_n = \mathbb{E}[V_{n+1} \mid \mathcal{F}_{t_n}],$$

puis la valeur optimale

$$V_n = \max\{H_{t_n}, C_n\},$$

avec condition terminale $V_N = H_{t_N}$. En pratique, C_n est approchée par régression sur un espace de fonctions tests $\mathcal{H} = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_K\}$ (par exemple des polynômes de degré $\leq K$) : on simule M trajectoires indépendantes $\{S_{t_n}^{(i)}\}$, on initialise $V_N^{(i)} = H_{t_N}(S_{t_N}^{(i)})$ pour $i = 1, \dots, M$, puis, pour $n = N - 1$ à 0 , on pose $Y_n^{(i)} = V_{n+1}^{(i)}$ et l'on détermine

$$(\hat{a}_{0,n}, \dots, \hat{a}_{K,n}) = \arg \min_{(a_0, \dots, a_K) \in \mathbb{R}^{K+1}} \sum_{i=1}^M \left[Y_n^{(i)} - \sum_{k=0}^K a_k \varphi_k(S_{t_n}^{(i)}) \right]^2,$$

d'où l'approximation $\widehat{C}_n^{(i)} = \sum_{k=0}^K \hat{a}_{k,n} \varphi_k(S_{t_n}^{(i)})$, et la règle d'exercice

$$V_n^{(i)} = \begin{cases} H_{t_n}(S_{t_n}^{(i)}) & \text{si } H_{t_n}(S_{t_n}^{(i)}) \geq \widehat{C}_n^{(i)}, \\ V_{n+1}^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, l'estimation de la valeur à t_0 est donnée par

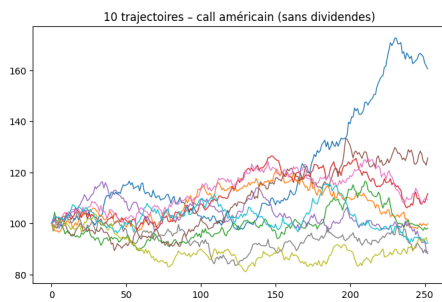
$$\widehat{V}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_0^{(i)}.$$

3.7 Application et résultats numériques :

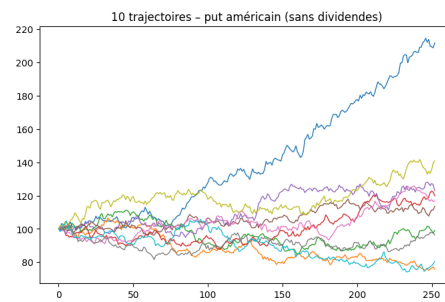
Rappelons les paramètres de notre Portefeuille A contenant une option de type Call.

Table 3.4: Paramètres du Call (A)

Paramètres	Valeur
Strike	105
Valeur du sous jacent à $t=0$	100
Echéance (T)	T = 1 year
(μ)	0.02
Taux sans risque r	0.05



(a) Caption for figure 1.



(b) Caption for figure 2.

Figure 3.5: Overall caption of the figure.

Les résultats numériques de la méthode par Longstaff Shwartz donnent :

Option	Estimation	IC 95%
Call américain (LSM, sans dividendes)	7.9268	[7.7456, 8.1080]
Put américain (LSM, sans dividendes)	8.7129	[8.6005, 8.8253]

Table 3.5: Prix des options américaines via la méthode LSM (sans dividendes)

On peut remarquer ainsi que pour les mêmes paramètres de contrat le Call Américain et le Call européen ont les mêmes prix +/- un bruit engendré par la prédiction du Modèle linéaire généralisée pour vérifier si l'exercice avant est encourageant.

Sur les mêmes paramètres les dividendes impactent d'une manière assez importante le prix d'une option. Plus la dividende est élevée, plus le put sera cher, et moins le call le sera. Et inversement.

Ainsi pour résumer, nous avons pu voir que l'échéance T est un obligatoirement un des temps d'arrêts optimaux mais pas forcément le plus avantageux. Dans le cas du modèle de Black Scholes.

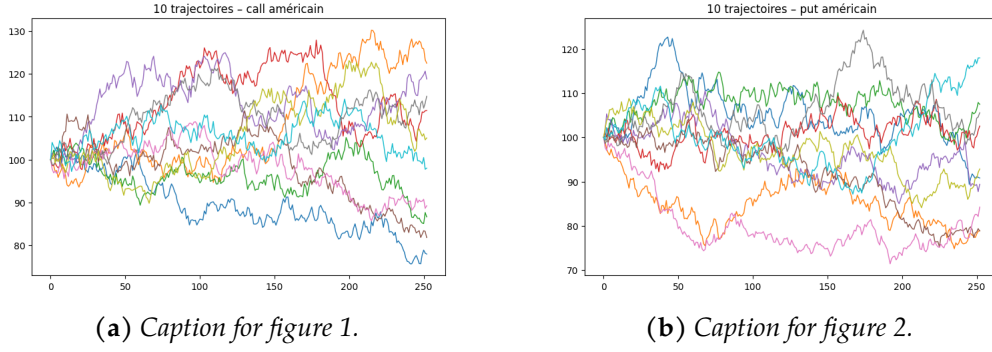


Figure 3.6: Overall caption of the figure.

Option	Estimation	IC 95%
Call américain (LSM, $q = 0.07$)	5.0206	[4.9079, 5.1333]
Put américain (LSM, $q = 0.07$)	11.4070	[11.2569, 11.5572]

Table 3.6: Prix des options américaines via la méthode LSM (dividende continu $q = 0.07$)

3.8 Couverture des Options

3.8.1 Introduction :

Dérivation de l'EDP de Black–Scholes et rôle des grecques Dans un cadre risque-neutre \mathbb{Q} , le sous-jacent satisfait

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

où r est le taux sans risque, q le taux de dividende continu et σ la volatilité. On cherche la valorisation $V = V(t, S)$ d'une option européenne (ou d'un produit dérivé lisse) telle que, pour tout (t, S) dans le domaine de définition, V soit suffisamment régulière ($C^{1,2}$).

En considérant un portefeuille autofinancé $\Pi(t) = V(t, S_t) - \Delta(t, S_t) S_t$ et en appliquant la formule d'Itô à $V(t, S_t)$, on obtient

$$dV = \left(\partial_t V + (r - q) S \partial_S V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 V \right) dt + \sigma S \partial_S V dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Choissant $\Delta = \partial_S V$, le terme en $dW^{\mathbb{Q}}$ disparaît, et l'évolution de Π devient

$$d\Pi = \left(\partial_t V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 V \right) dt.$$

Comme ce portefeuille ne comporte plus de risque, il doit croître au taux r , d'où

$$d\Pi = r \Pi dt = r(V - S \partial_S V) dt.$$

En identifiant les termes en dt , on arrive à l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{SS}^2 V + (r - q) S \partial_S V - r V = 0,$$

sous les conditions terminale $V(T, S) = \Phi(S)$ et, le cas échéant, des conditions aux frontières (croissance au plus linéaire en S et régularité aux bornes).

Les **grecques** sont les sensibilités partielles de V vis-à-vis des variables de marché et paramétriques :

$$\begin{aligned} \Delta &= \partial_S V, & (\text{exposition instantanée au sous-jacent}) \\ \Gamma &= \partial_{SS}^2 V, & (\text{convexité, ajustements de couverture}) \\ \Theta &= \partial_t V, & (\text{dépréciation temporelle ou « time decay »}) \\ \mathcal{V} &= \partial_\sigma V, & (\text{sensibilité à la volatilité}) \\ \rho &= \partial_r V, & (\text{sensibilité aux taux d'intérêt}). \end{aligned}$$

Ces indicateurs permettent aux traders de :

- *Delta-hedging* : neutraliser le risque directionnel en adaptant Δ via des transactions sur le sous-jacent.
- *Gamma management* : contrôler l'exposition non linéaire, en particulier sur des portefeuilles à fort effet de levier où Γ est élevé.
- *Vega hedging* : couvrir le risque de volatilité implicite, essentiel lors de la négociation de volatilité (straddles, strangles).
- *Time decay analytics* : mesurer la perte de valeur au fil du temps (Θ), cruciale pour la gestion de positions courtes en options.
- *Rho sensitivity* : ajuster les positions face aux variations de la courbe des taux, notamment pour les produits à longue maturité.

En combinant ces outils, un desk d'options peut construire des stratégies dynamiques de couverture et d'arbitrage, optimiser ses flux de trésorerie et limiter l'impact des mouvements de marché sur la valorisation de ses portefeuilles dérivés.

3.8.2 Options Euro : Cas faciles

Définitions communes :

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q + \frac{1}{2} \sigma^2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}, \quad \tau = T - t,$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du, \quad n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Dérivée	sans dividendes	Avec dividendes q
Δ_{Call}	$N(d_1)$	$e^{-qT} N(d_1)$
Δ_{Put}	$N(d_1) - 1$	$e^{-qT} (N(d_1) - 1)$
Γ	$\frac{\varphi(d_1)}{S \sigma \sqrt{T}}$	$e^{-qT} \frac{\varphi(d_1)}{S \sigma \sqrt{T}}$
	$S \sqrt{T} \varphi(d_1)$	$S e^{-qT} \sqrt{T} \varphi(d_1)$
Θ_{Call}	$-\frac{S \sigma \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} N(d_2)$	$-\frac{S e^{-qT} \sigma \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} - rK e^{-rT} N(d_2) + qS e^{-qT} N(d_1)$
Θ_{Put}	$-\frac{S \sigma \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rK e^{-rT} N(-d_2)$	$-\frac{S e^{-qT} \sigma \varphi(d_1)}{2\sqrt{T}} + rK e^{-rT} N(-d_2) - qS e^{-qT} N(-d_1)$
ρ_{Call}	$K T e^{-rT} N(d_2)$	même formule
ρ_{Put}	$-K T e^{-rT} N(-d_2)$	même formule
$\kappa = \frac{\partial C}{\partial q}$	0	$-T S e^{-qT} N(d_1)$

Table 3.7: Solution explicites de l'EDP de Black Scholes

3.8.3 Option Américaines :

Il existe plusieurs méthode de résolution numérique afin d'estimer ou approximer les grecques. Dans ce qui suit, soit $(\Theta, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité porteuse des trajectoires $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ sous la mesure risque-neutre, et soit $\theta \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ un paramètre d'intérêt. On note $f_\theta : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de payoff telle que

$$V(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_\theta(X)].$$

1. Méthode Monte Carlo aux différences finies , Bump and revalue On choisit un pas $\varepsilon > 0$ et un nombre de trajectoires $M \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall i \in \{1, \dots, M\}, \exists X^{(i)} \sim \mathbb{Q} \text{ indépendantes,}$$

et l'on pose

$$\hat{V}_M(\theta \pm \varepsilon) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f_{\theta \pm \varepsilon}(X^{(i)}).$$

Alors l'estimateur centré

$$D_{M, \varepsilon}^{\text{FD}} = \frac{\hat{V}_M(\theta + \varepsilon) - \hat{V}_M(\theta - \varepsilon)}{2\varepsilon}$$

vérifie

$$\forall \theta \in \Lambda, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_{M, \varepsilon}^{\text{FD}}] = \partial_\theta V(\theta) + O(\varepsilon^2), \quad \text{Var}_{\mathbb{Q}}[D_{M, \varepsilon}^{\text{FD}}] = O\left(\frac{1}{M\varepsilon^2}\right).$$

De plus,

$$\exists C_1, C_2 > 0, \forall M \geq 1, \forall \varepsilon > 0, \quad \text{EQM}(D_{M, \varepsilon}^{\text{FD}}) \leq C_1 \varepsilon^4 + \frac{C_2}{M\varepsilon^2},$$

et l'on minimise cet ÉQM en choisissant $\varepsilon \asymp M^{-1/6}$.

2. Méthode Pathwise Supposons que :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \theta \in \Lambda, \quad \theta' \mapsto f_{\theta'}(x) \quad \text{est de classe } C^1,$$

et que

$$\exists g \in L^1(\mathbb{Q}), \forall \theta \in \Lambda, \forall x, \quad |\partial_{\theta} f_{\theta}(x)| \leq g(x).$$

Alors, par dérivation sous l'espérance,

$$\forall \theta \in \Lambda, \quad \partial_{\theta} V(\theta) = \partial_{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_{\theta}(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\partial_{\theta} f_{\theta}(X)].$$

On définit l'estimateur

$$D_M^{\text{PW}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \partial_{\theta} f_{\theta}(X^{(i)}),$$

tel que

$$\forall \theta \in \Lambda, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D_M^{\text{PW}}] = \partial_{\theta} V(\theta), \quad \text{Var}_{\mathbb{Q}}(D_M^{\text{PW}}) = \frac{1}{M} \text{Var}_{\mathbb{Q}}[\partial_{\theta} f_{\theta}(X)].$$

En particulier, D_M^{PW} est sans biais et converge en L^2 vers $\partial_{\theta} V(\theta)$ dès que $M \rightarrow \infty$.

Comparaison formelle

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \quad \begin{cases} D_{M,\varepsilon}^{\text{FD}} \text{ présente un biais } O(\varepsilon^2) \text{ et une variance } O(1/(M\varepsilon^2)), \\ D_M^{\text{PW}} \text{ est sans biais et a variance } O(1/M). \end{cases}$$

Le choix entre \exists FD ou Pathwise dépend de \exists régularité de f_{θ} et de la tolérance au biais/variance.

1. Biais et variance de l'estimateur aux différences finies. Soit $\theta \in \Lambda$ fixé. Supposons que la fonction $\theta' \mapsto V(\theta')$ soit de classe C^3 sur un voisinage de θ .

Par développement de Taylor à l'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \xi_+ \in (\theta, \theta + \varepsilon), \exists \xi_- \in (\theta - \varepsilon, \theta),$$

tel que

$$V(\theta + \varepsilon) = V(\theta) + \varepsilon V'(\theta) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 V''(\theta) + \frac{1}{6} \varepsilon^3 V^{(3)}(\xi_+),$$

$$V(\theta - \varepsilon) = V(\theta) - \varepsilon V'(\theta) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 V''(\theta) - \frac{1}{6} \varepsilon^3 V^{(3)}(\xi_-).$$

En soustrayant et divisant par 2ε , on obtient

$$\frac{V(\theta + \varepsilon) - V(\theta - \varepsilon)}{2\varepsilon} = V'(\theta) + \frac{\varepsilon^2}{12} (V^{(3)}(\xi_+) + V^{(3)}(\xi_-)) = V'(\theta) + O(\varepsilon^2),$$

d'où, en passant à l'espérance sur les simulations,

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{E}[D_{M,\varepsilon}^{\text{FD}}] = V'(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

Par ailleurs, puisque

$$\text{Var}(\hat{V}_M(\theta \pm \varepsilon)) = \frac{1}{M} \text{Var}(f_{\theta \pm \varepsilon}(X)),$$

et en notant

$$\sigma_{\pm}^2 = \text{Var}(f_{\theta \pm \varepsilon}(X)),$$

on a

$$\text{Var}(D_{M,\varepsilon}^{\text{FD}}) = \frac{1}{4\varepsilon^2} \left(\frac{\sigma_+^2}{M} + \frac{\sigma_-^2}{M} \right) = O\left(\frac{1}{M\varepsilon^2}\right).$$

Justification détaillée de la méthode pathwise Soit $(\Theta, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$ un espace de probabilité et $\theta \in \Lambda \subset \mathbb{R}$ un paramètre d'intérêt. Pour $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ de loi \mathbb{Q} et pour tout $x \in \mathcal{X}$, soit $f_{\theta}(x)$ le payoff, de sorte que

$$V(\theta) = \mathbb{Q}[f_{\theta}(X)].$$

Supposons que :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \forall \theta \in \Lambda, \quad \theta' \mapsto f_{\theta'}(x) \text{ est de classe } C^1,$$

et qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{Q})$ tel que

$$\forall (\theta, x) \in \Lambda \times \mathcal{X}, \quad |\partial_{\theta} f_{\theta}(x)| \leq g(x).$$

Alors, par le théorème de dérivation sous le signe d'espérance (théorème de la convergence dominée) :

$$\forall \theta \in \Lambda, \quad \partial_{\theta} V(\theta) = \partial_{\theta} \mathbb{Q}[f_{\theta}(X)] = \mathbb{Q}[\partial_{\theta} f_{\theta}(X)].$$

Pour $M \in \mathbb{N}^*$, considérons $X^{(1)}, \dots, X^{(M)}$ i.i.d. de loi \mathbb{Q} et définissons l'estimateur pathwise

$$D_M^{\text{PW}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \partial_{\theta} f_{\theta}(X^{(i)}).$$

Alors, d'une part, par linéarité de l'espérance,

$$\forall M \in \mathbb{N}^*, \forall \theta \in \Lambda, \quad \mathbb{Q}[D_M^{\text{PW}}] = \mathbb{Q}[\partial_{\theta} f_{\theta}(X)] = \partial_{\theta} V(\theta),$$

ce qui montre que D_M^{PW} est sans biais.

D'autre part, puisque $\partial_{\theta} f_{\theta}(X) \in L^2(\mathbb{Q})$ (car $|\partial_{\theta} f_{\theta}| \leq g \in L^1$ et \mathcal{X} est de mesure finie sur

l'hypothèse usuelle de maturité finie), la variance de D_M^{PW} satisfait

$$\forall M \in^*, \quad \mathbb{Q}(D_M^{\text{PW}}) = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M \mathbb{Q}(\partial_\theta f_\theta(X^{(i)})) = \frac{1}{M} \mathbb{Q}(\partial_\theta f_\theta(X)) = O\left(\frac{1}{M}\right).$$

Enfin, par la loi forte des grands nombres,

$$\mathbb{Q}\text{-p.s.}, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} D_M^{\text{PW}} =_{\mathbb{Q}} [\partial_\theta f_\theta(X)] = \partial_\theta V(\theta),$$

ce qui assure la *consistance* de l'estimateur en L^2 et presque sûrement.

Résumé formel :

$$\forall \theta \in \Lambda : D_M^{\text{PW}} \begin{cases} \text{sans biais :} & [D_M^{\text{PW}}] = \partial_\theta V(\theta), \\ \text{variance } O(1/M) : & (D_M^{\text{PW}}) = \frac{1}{M} (\partial_\theta f_\theta(X)), \\ \text{converge p.s. et en } L^2 : & D_M^{\text{PW}} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \partial_\theta V(\theta). \end{cases}$$

3. Choix du pas optimal en différences finies. Pour tout (M, ε) , l'erreur quadratique moyenne (EQM) s'écrit

$$\text{EQM}(D_{M,\varepsilon}^{\text{FD}}) = \underbrace{(\mathbb{E}[D_{M,\varepsilon}^{\text{FD}}] - V'(\theta))^2}_{O(\varepsilon^4)} + \underbrace{\text{Var}(D_{M,\varepsilon}^{\text{FD}})}_{O(1/(M\varepsilon^2))}.$$

Il existe donc

$$\varepsilon^* \asymp M^{-1/6} \quad \text{tel que} \quad \text{EQM}_{\min} = O(M^{-2/3}).$$

Ainsi, parmi tous les estimateurs FD, le pas ε^* équilibre la contribution du biais et de la variance. Maintenant que nous avons présentés rapidement ces méthodes nous allons vous montrer déjà quelques comparaisons. Prenons toujours un Call américain ne reversant pas de dividendes, qui est donc en réalité égal à un Call européen. Nous avons comparé toutes ces méthodes afin de savoir laquelle était la plus optimisée pour le calcul de chaque Greek.

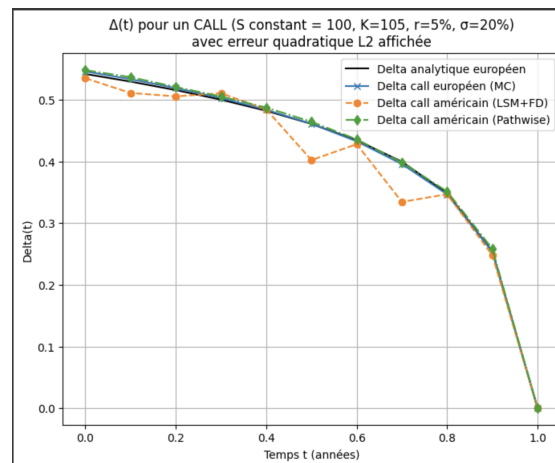
3.9 Application numriques, Estimation des Greeks

Prenons toujours le portefeuille contenant l'option A. Nous allons essayer de calculer ces Greeks avec 4 méthodes différentes. Commençons par rappeler le contrat fait sur le portefeuille A.

D'abord nous avons commencé par donc vérifier quel algorithme était le plus efficace et nous remarquons vite que : plus le Delta est grand plus la variation due variation donc du sous-jacent de sous-jacent seront plus grands. Ainsi posséder un portefeuille avec un Delta $\Delta = 0$ permettrait donc de se couvrir totalement des variations du cours du sous-jacent.

Table 3.8: Paramètres du Call (A)

Paramètres	Valeur
Strike	105
Valeur du sous jacent à $t=0$	100
Echeance (T)	T = 1 year
(μ)	0.02
Taux sans risque r	0.05

**Figure 3.7:** Caption

Prenons le Porte-monnaie A : et analysons déjà pour un premier temps quelle méthode est la plus optimisée. Cependant, il ne faut pas oublier les hypothèses de régularité. Au vu de ce graphique, nous pourrions dire que la méthode Pathwise est plus efficace que Longstaff Schwartz à une différence finie est plus Cependant, regardons un peu les erreurs L2:

Table 3.9: Erreur en Norme L2

Méthode	Erreur RSE
Amer LSM+FD :	0.091557
Amer Pathwise :	0.014479

Ainsi on remarque que la précision des algorithmes est quasiment la même pour un même nombre de simulation de Monte Carlo, de trajectoires. De plus nous pouvons en considérant toujours le même portefeuille A d'option, que l'erreur en Norme L2 se réduisait.

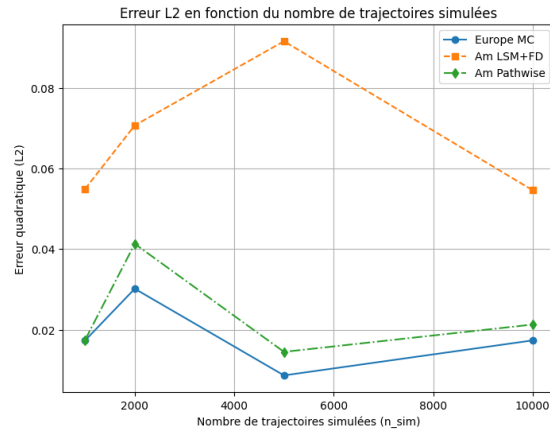
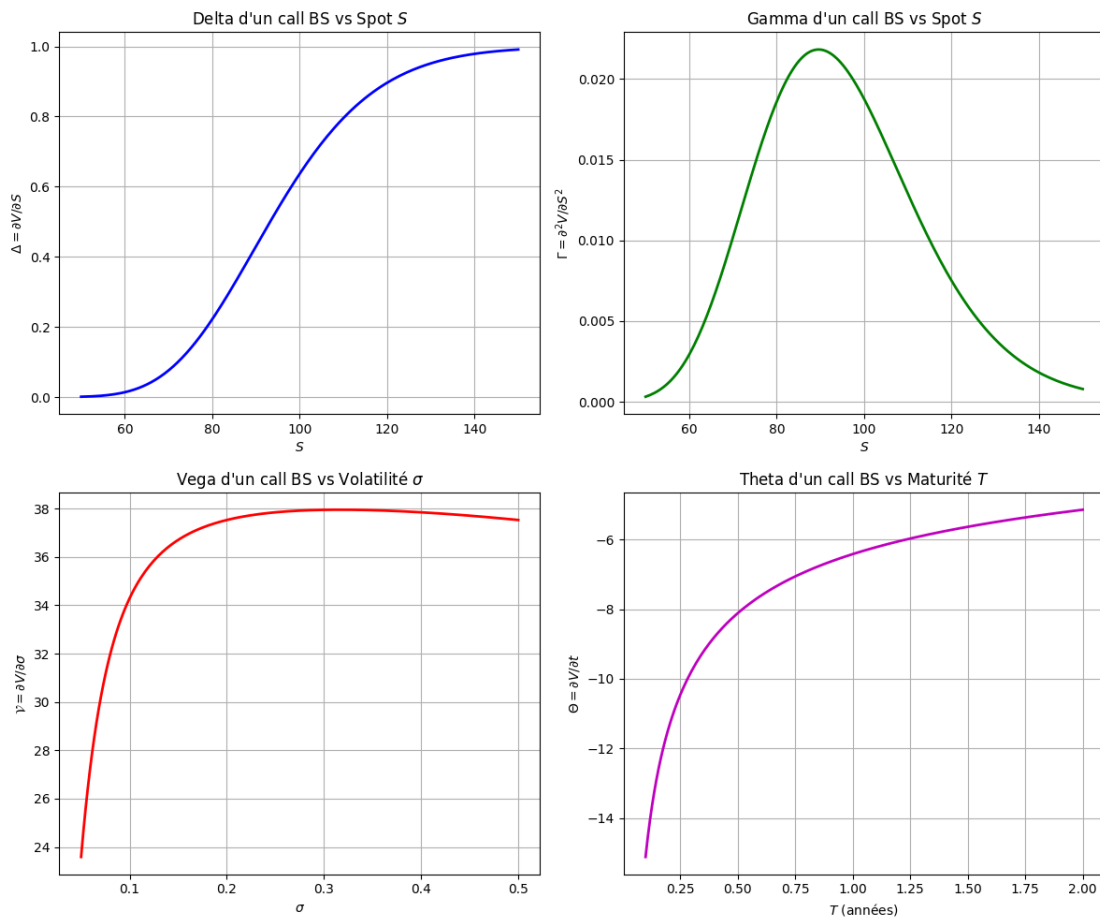


Figure 3.8: Caption

Commençons par avoir un aperçu globale des solutions analytique des Greeks CALL notre PORTEFEUILLE A de Black-Scholes :



Par Approximation via nos méthodes nous retrouvons :

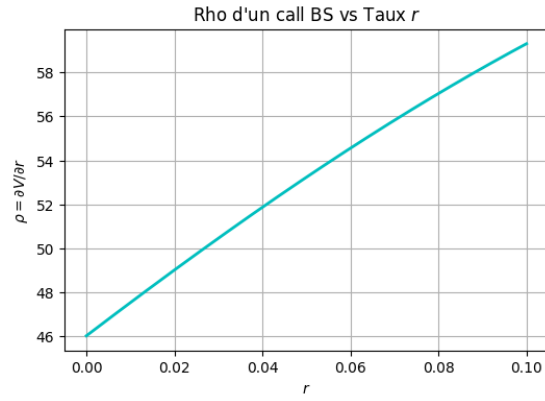


Figure 3.9: Caption

Comparaison des Grecs du Call en fonction de leur variable principale

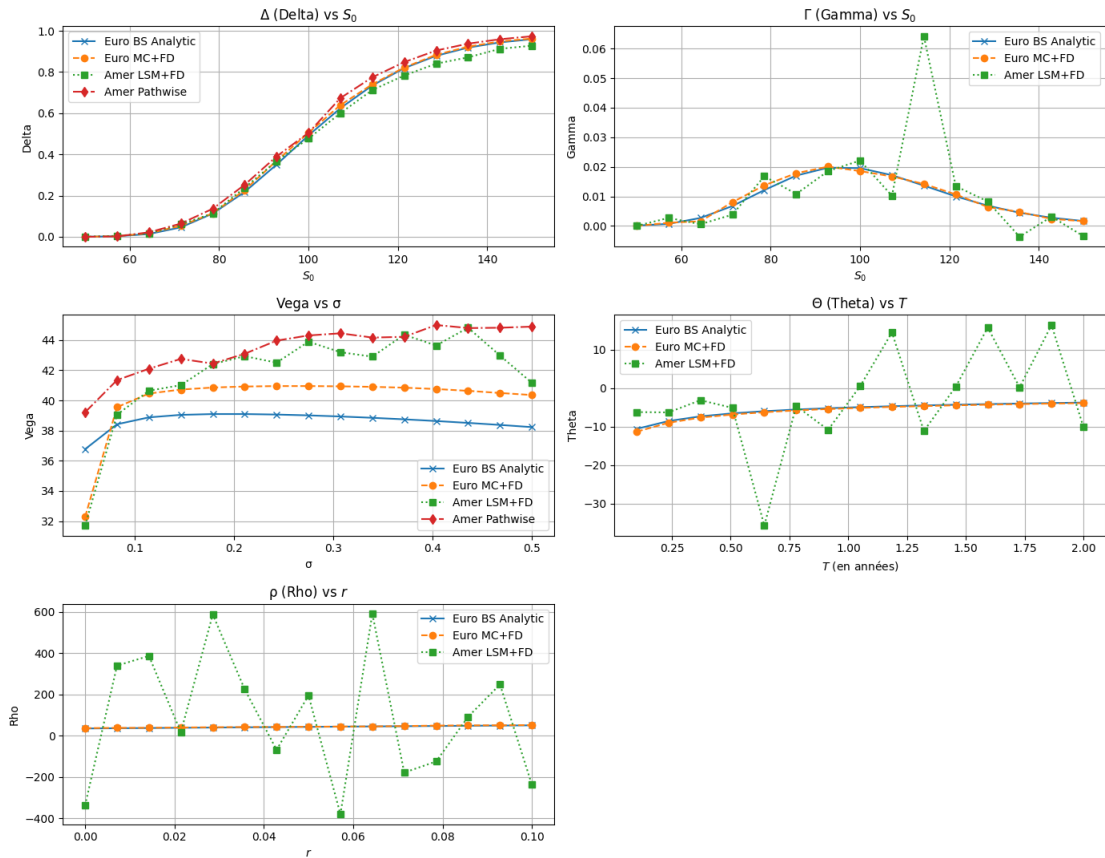


Figure 3.10: Approximation via Nos méthodes numériques.

Nous voyons ainsi que notre méthode est bonne pour approcher le Delta, à moindre cout le vega via la Pathwise methode, ou le gamma à moindre cout selon la méthode Least Squared Monte Carlo + Difference Fini

Bibliography

- [1] Black, F., & Scholes, M. (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81(3), 637–654.
- [2] Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). *Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices*. Journal of Business, 51(4), 621–651.
- [3] Carmona, R., & Delarue, F. (2017). *Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I–II*. Springer-Verlag.
- [4] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 7(3), 229–263.
- [5] Desai, V., Farias, V. F., & Moallemi, C. C. (2012). On the Sample Complexity of the Least Squares Monte Carlo Method. *Mathematics of Operations Research*, 37(3), 676–694.
- [6] Donsker, M. D. (1951). *An Invariance Principle for Certain Probability Limit Theorems*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 6.
- [7] El Karoui, N. (2008). *Cours de mathématiques financières et calcul stochastique* [PDF]. Disponible en ligne (cours NASA/UPMC).
- [8] El Karoui, N., Mazliak, L., & Nualart, D. (éds.). (2003). *Séminaire de Probabilités XXXVII—Seminar in Probability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1832. Springer-Verlag.
- [9] El Karoui, N., & Quenez, M.-C. (1997). *Nonlinear Pricing Theory and Backward Stochastic Differential Equations*. Financial Mathematics: Lectures in Mathematical Finance, CRM Proceedings Lecture Notes, 9, 162–213.
- [10] Fournié, E., Lasry, J.-M., Lebuchoux, J., Lions, P.-L., & Touzi, N. (1999). Applications of Malliavin Calculus to Monte Carlo Methods in Finance. *Finance and Stochastics*, 3(4), 391–412.
- [11] Giles, M., & Glasserman, P. (2006). Smoking Adjoints: Fast Monte Carlo Greeks. *Risk*, 19(1), 88–92.

- [12] Gobet, E., Lemor, J.-P., & Warin, X. (2002). Rates of Convergence for the Longstaff–Schwartz Algorithm. *Annals of Applied Probability*, 15(3), 2172–2202.
- [13] Gobet, E., Lemor, J.-P., & Warin, X. (2005). A Regression-Based Monte Carlo Method to Solve Backward Stochastic Differential Equations. *Annals of Applied Probability*, 15(3), 2172–2202.
- [14] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag.
- [15] Broadie, M., & Glasserman, P. (1996). Estimating Option Sensitivities Using Simulation. *Management Science*, 42(2), 269–285.
- [16] Broadie, M., & Glasserman, P. (2007). Bounded Monte Carlo Convergence Rates for American Options Under Continuous Diffusion Dynamics. *Mathematics of Operations Research*, 32(2), 266–299.
- [17] Glasserman, P., & Jain, A. (2014). A Value of Information Framework for Optimal Stopping Problems. *Operations Research*, 62(3), 522–533.
- [18] Glasserman, P., & Yao, D. D. (2006). Broadie–Glasserman Approach vs Malliavin Calculus for Estimating Greeks. *Journal of Computational Finance*, 9(2), 1–27.
- [19] Hull, J. C. (2003). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 5th ed., Prentice Hall.
- [20] Jacod, J., & Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. 2nd ed., Springer-Verlag.
- [21] Jourdain, B. (2008). American Options in High Dimensions: Regression Methods and Greeks. *RIAO–ROA 2008 Conference Proceedings*.
- [22] Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed., Springer-Verlag.
- [23] Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag.
- [24] Lamberton, D., & Lapeyre, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman Hall.
- [25] Lemieux, C. (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer-Verlag.
- [26] Longstaff, F. A., & Schwartz, E. S. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies*, 14(1), 113–147.
- [27] Musiela, M., & Rutkowski, M. (2005). *Martingale Methods in Financial Modelling*. 2nd ed., Springer-Verlag.
- [28] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag.

- [29] Andersen, L., & Broadie, M. (2004). Primal–Dual Simulation Algorithms for Pricing Multidimensional American Options. *Management Science*, 50(9), 1222–1234.
- [30] Broadie, M., Glasserman, P., & Kou, S. G. (1997). A Continuity Correction for Discrete Barrier Options. *Mathematical Finance*, 7(4), 325–345.
- [31] Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. 3rd ed., Oxford University Press.
- [32] Broadie, M., & Glasserman, P. (1996). Estimating Option Sensitivities Using Simulation. *Management Science*, 42(2), 269–285.
- [33] El Karoui, N., & Quenez, M.-C. (1997). *Nonlinear Pricing Theory and Backward Stochastic Differential Equations*. Financial Mathematics: Lectures in Mathematical Finance, CRM Proceedings Lecture Notes, 9, 162–213.
- [34] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag.
- [35] Glasserman, P., & Yao, D. D. (2006). Broadie–Glasserman Approach vs Malliavin Calculus for Estimating Greeks. *Journal of Computational Finance*, 9(2), 1–27.
- [36] Hull, J. C. (2003). *Options, Futures, and Other Derivatives*. 5th ed., Prentice Hall.
- [37] José Areia. (2024). *IPLeiria-Thesis: A LaTeX template for thesis at Polytechnic University of Leiria*. GitHub repository. Disponible sur <https://github.com/joseareia/ipleiria-thesis>.
- [38] Jacod, J., & Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*. 2nd ed., Springer-Verlag.
- [39] Jourdain, B. (2008). American Options in High Dimensions: Regression Methods and Greeks. *RIAO–ROA 2008 Conference Proceedings*.
- [40] Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed., Springer-Verlag.
- [41] Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1998). *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag.
- [42] Lamberton, D., & Lapeyre, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman Hall.
- [43] Lemieux, C. (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer-Verlag.
- [44] Longstaff, F. A., & Schwartz, E. S. (2001). Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *Review of Financial Studies*, 14(1), 113–147.
- [45] Musiela, M., & Rutkowski, M. (2005). *Martingale Methods in Financial Modelling*. 2nd ed., Springer-Verlag.

-
- [46] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer-Verlag.

