

1 Méthodes de Résolution Itérative (Exercices 7, 8, 9)

Après avoir étudié les méthodes directes, nous nous intéressons aux méthodes itératives stationnaires pour résoudre $Ax = b$. Ces méthodes construisent une suite de vecteurs $x^{(k)}$ convergeant vers la solution x , définie par la récurrence :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - Ax^{(k)}) \quad (1)$$

Où M est une matrice de préconditionnement facile à inverser. La convergence est assurée si le rayon spectral $\rho(I - M^{-1}A) < 1$.

1.1 Implémentation des Algorithmes

Nous avons implémenté trois variantes classiques dans la bibliothèque `lib_poisson1D_richardson.c` :

1. **Richardson (α optimal)** : Ici $M = \frac{1}{\alpha}I$. Le paramètre de relaxation optimal a été calculé dynamiquement via les valeurs propres extrêmes du Laplacien discret : $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$. Pour notre problème, $\alpha_{opt} \approx 0.5$.
2. **Jacobi** : $M = D$ (diagonale de A). On extrait la diagonale de la matrice tridiagonale. L'inverse est trivial ($1/a_{ii}$). Pour la matrice de Poisson 1D, la diagonale est constante et vaut 2, ce qui revient à multiplier le résidu par 0.5.
3. **Gauss-Seidel** : $M = D - E$ (partie triangulaire inférieure de A). Nous avons extrait la partie inférieure de la matrice bande et résolu le système triangulaire à chaque étape par une méthode de descente.

1.2 Analyse de la Convergence

Nous avons comparé la vitesse de décroissance de la norme du résidu relatif $\|r^{(k)}\|/\|b\|$ pour les trois méthodes.

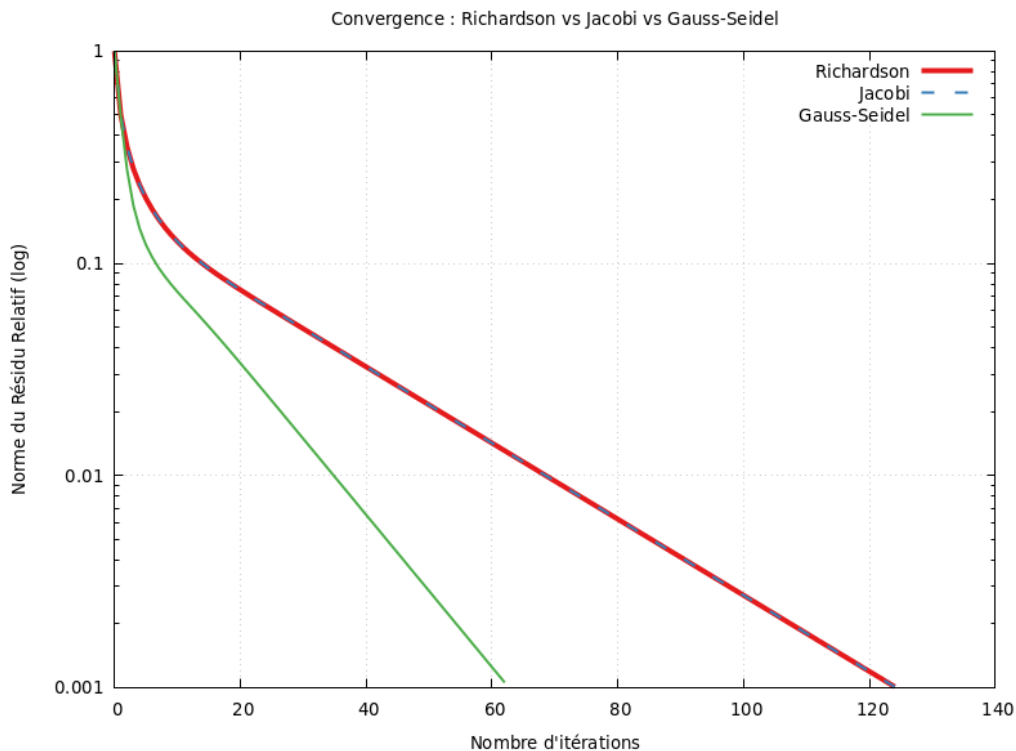


Figure 1: Comparaison de la convergence : Richardson, Jacobi et Gauss-Seidel

Interprétation des résultats :

- **Gauss-Seidel (Courbe Verte) :** C'est la méthode la plus performante. Elle converge environ deux fois plus vite que les autres, ce qui est conforme à la théorie ($\rho_{GS} \approx \rho_{Jac}^2$).
- **Jacobi (Bleu) et Richardson (Rouge) :** On observe une superposition quasi-parfaite des deux courbes. *Explication :* Pour la matrice du Laplacien 1D, la diagonale est constante ($D = 2I$). La méthode de Jacobi revient donc à multiplier le résidu par $D^{-1} = 0.5I$. Or, le paramètre optimal de Richardson calculé est également $\alpha \approx 0.5$. Les deux méthodes effectuent donc mathématiquement la même opération à chaque itération.
- **Comportement global :** La convergence est linéaire (droites en échelle semi-logarithmique), caractéristique des méthodes du premier ordre.