- Clase No. 1-

Programación Lineal -Forma Canónica y Estándar-

Planteamiento de Modelos de PL

FORMA CANÓNICA

Las características de esta forma son:

1. Todas las variables de decisión son positivas.
2. Todas las restricciones son del tipo " ≤ "
3. La función objetivo es de "Maximizar"

Todo problema de programación lineal puede llevarse a la forma canónica utilizando algunas de las siguientes transformaciones elementales:

01 $\boldsymbol{Minimizar\ X_o = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n}$ es equivalente a
$Maximizar\ G_o = -C_1x_1 - C_2x_2 - \cdots - C_nx_n$ (y viceversa)

Una desigualdad del tipo "≥" puede cambiarse a una desigualdad del tipo "≤ " multiplicando ambos lados de la desigualdad por (-1):

02 $\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 \geq b}\ es\ equivalente\ \boldsymbol{a}: \boldsymbol{-a_1x_1 - a_2x_2 \leq -b}$

03

$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 = b}$ *es equivalente a*:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 \le b}$$

$$\boldsymbol{-a_1x_1 - a_2x_2 \le -b}$$

04

$\boldsymbol{|a_1x_1 + a_2x_2| \le b}$ *es equivalente a*:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 \le b}$$

$$\boldsymbol{-a_1x_1 - a_2x_2 \le b}$$

- Ejemplo-

Escribir en forma canónica el siguiente modelo de programación lineal:

$$\boldsymbol{Minimizar: X_o = 3X_1 - 6X_2 + 7X_3}$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 \le 40$$

$$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \ge 50$$

$$5X_1 + 3X_2 = 20$$

$$|5X_2 + 8X_3| \le 100$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Solución

$$\boldsymbol{Minimizar}: \ \boldsymbol{X_o = 3X_1 - 6X_2 + 7X_3}$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$$

$$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \geq 50$$

$$5X_1 + 3X_2 = 20$$

$$|5X_2 + 8X_3| \leq 100$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\boldsymbol{Maximizar}: \ \boldsymbol{G_o = -3X_1 + 6X_2 - 7X_3}$$

Sujeto a:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$$

$$-X_1 - 9X_2 + 7X_3 \leq -50$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 5X_1 + 3X_2 \leq 20 \\ -5X_1 - 3X_2 \leq -20 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 5X_2 + 8X_3 \leq 100 \\ -5X_2 - 8X_3 \leq 100 \end{array} \right.$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

FORMA ESTÁNDAR

Las características de esta forma son:

1. Todas las variables de decisión son positivas.

2.Todas las restricciones son del tipo “ = ” (igualdades).

3. Los elementos del lado derecho de cada ecuación son no negativos.

- Normalizar las restricciones-

Tipo de desigualdad	Tipo de variable que aparece
$\geq$	- exceso +artificial
=	+artificial
$\leq$	+holgura

Ejemplo

Tipo de desigualdad	Tipo de variable que aparece
$\geq$	- exceso +artificial
=	+artificial
$\leq$	+holgura

$$\boldsymbol{Maximizar}: \boldsymbol{X_o = 5X_1 - 6X_2}$$

Sujeto a:

$$X_1 - X_2 \geq -3$$
$$2X_1 - 9X_2 \leq 8$$
$$3X_1 + X_2 \geq 5$$
$$X_1 - X_2 = 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Restricciones positivas

$$-X_1 + X_2 \leq 3$$
$$2X_1 - 9X_2 \leq 8$$
$$3X_1 + X_2 \geq 5$$
$$X_1 - X_2 = 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\boldsymbol{Maximizar}: \boldsymbol{X_o = 5X_1 - 6X_2}$$

$$-X_1 + X_2 + \boldsymbol{S_1} = 3$$
$$2X_1 - 9X_2 + \boldsymbol{S_2} = 8$$
$$3X_1 + X_2 - \boldsymbol{S_3} + \boldsymbol{R_3} = 5$$
$$X_1 - X_2 + \boldsymbol{R_4} = 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\boldsymbol{X_o = 5X_1 - 6X_2 = 0}$$
$$\boldsymbol{X_o = 5X_1 - 6X_2 + 0S_1 + 0S_2 + R_3 + R_4 = 0}$$
$$\boldsymbol{X_o - 5X_1 + 6X_2 - 0S_1 - 0S_2 - R_3 - R_4 = 0}$$

Igualar a 0 la Función objetivo

Formulación y Planteo de modelos PL

EJEMPLO #1

Una empresa dedicada a la venta y diseño de diferentes tipos de piso reciclable, en especial se venden dos modelos, piso imitación madera y el piso imitación azulejo. Para su fabricación se necesita pasar por dos procesos, inyección de 20 minutos para el piso de imitación madera y de 30 minutos para el de imitación azulejo; y pasar por compresión de 20 minutos para el de imitación madera y de 10 minutos para imitación azulejo.

Se dispone de 100 horas al mes para utilizar la máquina de inyección y para la máquina de compresión 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad de piso es de Q15.00 y Q10.00 para imitación madera y azulejo, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio dentro de la empresa.

Solución

Trabajar en las mismas dimensionales

Convertir los minutos en horas.

$$20\ minutos = \frac{1}{3} hora \qquad 30\ minutos = \frac{1}{2} hora \qquad 10\ minutos = \frac{1}{6} hora$$

01 Tablero Resumen

	Imitación madera	Imitación azulejo	Limitantes
Inyección	$\frac{1}{3}\ hora$	$\frac{1}{2}\ hora$	$100\ horas$
Compresión	$\frac{1}{3}\ hora$	$\frac{1}{6}\ hora$	$80\ horas$

	Imitación madera	Imitación azulejo	Limitantes
Inyección	$\frac{1}{3}\ hora$	$\frac{1}{2}\ hora$	$100\ horas$
Compresión	$\frac{1}{3}\ hora$	$\frac{1}{6}\ hora$	$80\ horas$

02 Identificar y definir variables de decisión

$$X_i = Cantidad\ de\ pisos\ de\ \acute{\imath} - esimo\ tipo\ a\ fabricar$$

$$X_1 = Cantidad\ de\ piso\ tipo\ imitación\ madera$$

$$X_2 = Cantidad\ de\ piso\ tipo\ imitación\ azulejo$$

03 Función objetivo

¿*Cuántas unidades de cada tipo de piso se debe de fabricar para obtener el* ***máximo*** *beneficio*?

$$\boldsymbol{Maximizar}\ X_o = Q15.00X_1 + Q10.00\ X_2$$

04 Limitaciones o Restricciones

$$R_1: \ \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq 100$$

$$R_2: \ \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 \leq 80$$

$$X_1 \geq 0 \qquad X_2 \geq 0$$

	Imitación madera	Imitación azulejo	Limitantes
Inyección	$\frac{1}{3}$ $hora$	$\frac{1}{2}$ $hora$	100 $horas$
Compresión	$\frac{1}{3}$ $hora$	$\frac{1}{6}$ $hora$	80 $horas$

Planteamiento del problema de PL

$$\boldsymbol{Maximizar}\ X_o = Q15.00X_1 + Q10.00\ X_2$$

$$R_1: \ \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq 100$$

$$R_2: \ \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 \leq 80$$

$$X_1 \geq 0 \qquad X_2 \geq 0$$

EJEMPLO #2

Una empresa vende tres tipos de productos (1, 2 y 3). El producto 1 está formado por los componentes A y B. El producto 2 consta de 2 unidades de A, 1 unidad de B y 2 unidades de C. Por último, el producto 3 está integrado por 2 unidades de A, 1 unidad de B y 1 unidad de C. Se dispone de 95.000 unidades del componente A, 80.000 del B y 60.000 del C. El coste de cada componente A es de Q20.00 , el coste de cada componente B es de Q30.00 y el coste de cada componente C es de Q10.00 . El precio de venta de los productos 1, 2 y 3, es respectivamente de Q60.00, Q120.00 y Q100.00. Formular el modelo de programación lineal que maximice el beneficio.

Solución

01 Tablero Resumen

	Componente A	Componente B	Componente C	Precio de venta
Producto 1	1	1	-	Q60.00
Producto 2	2	1	2	Q120.00
Producto 3	2	1	1	Q100.00
Disponibilidad (unidades)	95,000	80,000	60,000	
Costo por componente	Q20.00	Q30.00	Q10.00	

$$X_i = Cantidad\ de\ producto\ de\ í - esimo\ tipo$$

$$X_1 = Cantidad\ de\ producto\ 1$$

$$X_2 = Cantidad\ de\ producto\ 2$$

$$X_3 = Cantidad\ de\ producto\ 3$$

Beneficio= Ingreso Total-Costo Total

$$Beneficio\ Producto\ 1:\ 60X_1 - 20X_1 - 30X_1 = \boldsymbol{10X_1}$$

$$Beneficio\ Producto\ 2: 120X_2 - 40X_2 - 30X_2 - 20X_2 = \boldsymbol{30X_2}$$

$$Beneficio\ Producto\ 3: 100X_3 - 40X_3 - 30X_3 - 10X_3 = \boldsymbol{20X_3}$$

03 Función objetivo

$$\boldsymbol{Maximizar}\ X_o = Q10.00X_1 + Q30.00\ X_2 + Q20.00X_3$$

04

Limitaciones o Restricciones

R_1: $1X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 95{,}000$

R_2: $1X_1 + 1X_2 + 1X_3 \leq 80{,}000$

R_3: $2X_2 + 1X_3 \leq 60{,}000$

$X_1 \geq 0$ $X_2 \geq 0$ $X_3 \geq 0$

	Componente A	Componente B	Componente C	Precio de venta
Producto 1	1	1	-	Q60.00
Producto 2	2	1	2	Q120.00
Producto 3	2	1	1	Q100.00
Disponibilidad (unidades)	95,000	80,000	60,000	
Costo por componente	Q20.00	Q30.00	Q10.00	

Planteamiento del problema de PL

$$\boldsymbol{Maximizar}\ X_o = Q10.00X_1 + Q30.00\ X_2 + Q20.00X_3$$

R_1: $1X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 95{,}000$

R_2: $1X_1 + 1X_2 + 1X_3 \leq 80{,}000$

R_3: $2X_2 + 1X_3 \leq 60{,}000$

$X_1 \geq 0$ $X_2 \geq 0$ $X_3 \geq 0$