APS de MatVar

Humberto Filho, João Palma, Pedro Garcia

Novembro de 2022

1 Integração por partes

Vamos começar com algo que sabemos, que é a derivada de um produto.

Fórmula da Derivada do Produto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) \cdot g(x)] = [\frac{d}{\mathrm{d}x}f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot [\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)]$$

Se integrarmos de ambos os lados, temos : $f(x) \cdot g(x) = \int \frac{d}{\mathrm{d}x}f(x) \cdot g(x)dx + \int f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)dx$.

que nos dá a magnífica fórmula da integração por partes:

Fórmula de integração por partes

$$\int f(x) \cdot \frac{d}{\mathrm{d}x}g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int \frac{d}{\mathrm{d}x}f(x) \cdot g(x)dx$$

Agora vamos para alguns exemplos para entendermos da fórmula.

Exemplo 1

$$\int x \cdot cos(x)dx$$

Vamos colocar cos(x) como g(x).Temos que sua integral é dada por sen(x). Assim, temos que :

$\int x \cdot cos(x)dx = x \cdot sen(x) - \int 1 \cdot sen(x)dx$,

o que nos dá, resolvendo a integral :

$\int x \cdot cos(x)dx = x \cdot sen(x) - [-cos(x)]$

$\int x \cdot cos(x)dx = x \cdot sen(x) + cos(x) + C$

Exemplo 2

$$\cdot \int x^2 \cdot e^x dx$$

Fazendo g(x) como e^x, temos que $G(x) = e^x$, e sendo f(x) = x^2, ficamos com:
$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx$
Agora, vamos resolver : $\int 2x \cdot e^x dx$.
Faremos integração por partes nessa integral agora :
$\int 2x \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx$
$\int 2x \cdot e^x dx = 2x \cdot e^x - 2 \cdot e^x$ Juntando isso, ficamos com:
$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$
E esse é o método da iintegração por partes. ☺

2 Frações Parciais

Na álgebra, a decomposição em frações parciais ou expansão em frações parciais é um algoritmo no qual você pode expandir uma razão de polinômios com coeficientes inteiros em um polinômio de coeficientes inteiros somado a outras razões de polinômios com coeficientes inteiros.

Simbologia das frações parciais

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \sum_j \frac{f_j(x)}{g_j(x)}$$

Em que p(x) é um polinômio tal que cada $g_j(x)$ é um potência de um polinômio irredutível e o termo $f_j(x)$ é um polinômio de grau menor do que o denominador.

Para isso, pega-se a razão entre os polinômios e faz o seguinte procedimento:
· Calculam-se as raízes do polinômio do denominador.
· Coloca a razão de polinômios original como a soma de razões de polinômios com os denominadores sendo da forma $(x - r)$ sendo r uma raíz do polinômio e repete-se como a soma de mais uma fração só que elevada à quantidade de vezes que ela aparece e o numerador como um polinômio de grau menor que o denominador (por exemplo, se temos uma fração parcial como $\frac{3}{(x^2-2x+1)(x-2)}$, você coloca $\frac{3}{(x^2-2x+1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)}$).
· Você multiplica os termos de baixo em cruz e compara os coeficientes do numerador do termo de cima como os do termo de baixo como se estivesse comparando uma igualdade polinomial.
· Você calcula o "A,B,C,..." a partir de um sistema de equações e finaliza a decomposição em frações parciais.
Você deve estar com essa carinha após ler isso : ☹ , mas, com alguns exemplos, tudo irá se esclarecer ☺.

Exemplo 3

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

Vamos começar descobrindo as raízes desse polinômio. Por soma e produto ou Bhaskara (cálculo omitido), o polinômio do denominador fica igual a : $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$. Assim , podemos separar o polinômio do exemplo como :

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

Multiplicando os termos, ficamos com :

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{B(x+3)}{(x+3)(x-1)} \iff \frac{Ax - A}{(x-1)(x+3)} + \frac{Bx + 3B}{(x-1)(x+3)}$$

, só que o termo de baixo é igual ao polinômio do denominador, então, você tem que :

$$\frac{(Ax - A) + (Bx + 3B)}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

. Só que os termos dos denominadores são iguais, então, você pode "cortar", ficando com :

$$Ax - A + Bx + 3B = 1 \iff Ax - A + Bx + 3B = 1 + 0 \cdot x$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + 3B = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Somando ambas as equações, ficamos com : $4B = 1 \to B = \frac{1}{4}$. Substituindo na primeira equação, imediatamente conseguimos que $A = -\frac{1}{4}$. Assim, conseguimos que :

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1},$$

resolvendo a fração parcial ☺

Exemplo 4

$$f(x) = \frac{3x + 5}{(1 - 2x)^2}$$

Fazendoo cálculo das raízes(ou se lembrando do famoso trinômio quadrado perfeito $(a+b)^2$), ficamos com : $x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$. Separando em frações parciais com numeradores indefinidos, ficamos com :

$$\frac{3x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)}$$

. Multiplicando os termos, ficamos com :

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B(x-1)}{(x-1)^2}$$

Ajeitando, isso se torna:

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2} = \frac{A+Bx-B}{(x-1)^2}$$

Agora, fazendo o sistema de equações, temos :

$$\begin{cases} A - B = 5 \\ B = 3 \end{cases} \tag{2}$$

O que nos dá, imediatamente, que $B = 3$ e, adicionando na primeira equação, que $A = 8$. Ficando com :

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2} = \frac{8}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)}$$

. Assim, terminamos o exemplo, e a apresentação, muito obrigado! ☺ ■