Bary bash

Master Humberto

Copia não comédia

Summary

1 Introdução ao Bary Bash

Essa introdução será bem longa e espero que você pegue um papel com caneta durante essa leitura, pois ela é bastante densa e também vai exigir muita ”imaginação”.

1.1 Segmento Orientado

A medida dos segmentos orientados são definidos como $\overline{AB} = b - a$, sendo b a coordenada de b e a a coordenda de a. Eles se chamam orientados pois se tem uma reta l que tem algum sentido(convenciona-se que ela aponta para a direita e os pontos A e B estão nessa reta) como o valor de númerico de $b - a$. Se a e b estiverem na mesma

”ordem” em relação à reta ”l”, tem-se que $\overline{AB}$ = |AB| caso O segmento tenha a mesma orinetação da reta l e -|AB| caso contrário.

1.2 Divisão de um segmento orientado

Vamos adicionar à figura anterior um outro ponto P e vamos chamar a razão $\frac{AP}{PB} = k$, com k sendo um número real. Que representa a razão númerica dessa razão. Á partir disso, podemos concluir que :

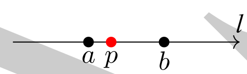
$$k = 0 \iff A = P$$

$$k = 1 \iff AP = PB$$

$$k \to \infty \iff P \to B$$

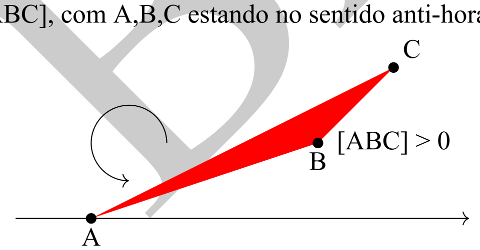
E, dado a e b fixos, existe um único ponto p tal que a razão seja exatamente igual a k, dessa forma, podemos enunciar acerca da unicidade do ponto divisor. Ou seja, tem-se que :

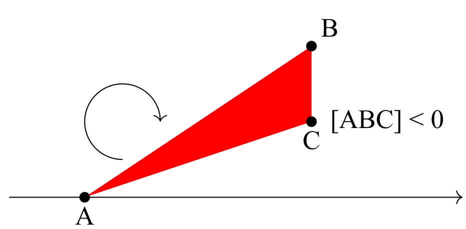
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \iff C = D.$$



1.3 Área com sinal do triângulo

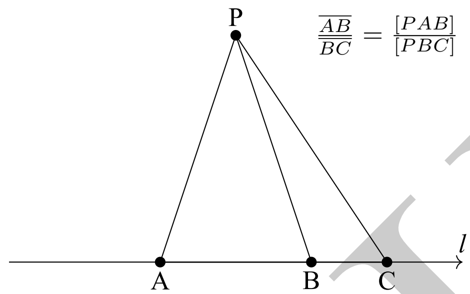
O convencionou que a área com sinal de um triângulo ABC é dada como positiva se A,B,C estão dispostos no sentido anti-horário e negativa caso estejam dispostas no sentido horário. Para a área, vamos definir que a área com sinal do triângulo é dada por [ABC], com A,B,C estando no sentido anti-horário.Dessa forma, tem-se que :





1.4 Razão de segmentos orientados e área com sinal

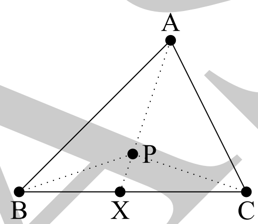
Sejam A,B,C pontos colineares e P um ponto qualquer que não pertence à reta na qual pertencem os pontos A,B,C, tem-se que a razão entre os segmentos AB e BC é igual à razão entre das áreas entre os triângulos PAB e PBC:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{[PAB]}{[PBC]}$$

A prova desse teorema é feita usando base vezes altura sobre 2, as alturas se cancelam e o ”sobre 2” também, sobrando apenas o valor da base.

1.5 Teorema do Co-Lado



O teorema do Co-Lado diz que $\frac{[ABC]}{[PBC]} = \frac{AX}{PX}$

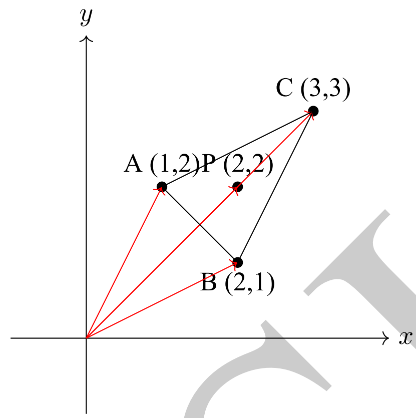
Esse teorema pode ser provado usando o teorema anterior fazendo que $\frac{BC}{BX} = \frac{ABC}{ABX}, \frac{ABX}{PBX} = \frac{AX}{PX}$ e $\frac{PBX}{PBC} = \frac{BX}{BC}$. Dessa forma, tem-se que :

$$\frac{ABC}{PBC} = \frac{ABC}{ABX} \cdot \frac{ABX}{PBX} \cdot \frac{PBX}{PBX} = \frac{BC}{BX} \cdot \frac{AX}{PX} \cdot \frac{BX}{BC} = \frac{AX}{PX}$$

$Esseoteoremamais"difcil"dedecorarnessaparteintrodutria, ento, normalterdificuldades.Oqueeurecomendo$

2 Coordenadas baricêntricas, definições e alguns teoremas

Como são definidas as coordenadas baricêntricas ? Existe uma relação delas com os eixos cartesianos que verás mais à frente, mas ela é definida como P = (x:y:z), sendo x,y,z as ”coordenadas baricêntricas” do ponto P. Sempre que for feito um problema de coordenadas baricêntricas, há um triângulo de referência e todas as outras coordendas são em relação à esse triângulo. Basicamente, x,y,z são "pesos" numa média ponderada que tem como elementos os vetores $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$, sendo esses os vetores que ligam a origem do sistema de coordendas no plano cartesiano aos vértices do triângulo.



O ponto P tem coordenadas (1:1:1), ou seja, quando fizermos o cálculo da sua coordenda cartesiana, teremos :

$$P = \frac{1 \cdot \overrightarrow{A} + 1 \cdot \overrightarrow{B} + 1 \cdot \overrightarrow{C}}{1+1+1} = \frac{1 \cdot (1,2) + 1 \cdot (2,1) + 1 \cdot (3,3)}{1+1+1} = (2,2)$$

Com base nessa definição, pode-se enunciar uma coisa muito importante que é o fato de que um ponto P pode ter infinitas representações por coordendas baricêntricas, basta que, por exemplo, no lugar de "1", seja k e, dessa forma, tem-se que :

$$P = \frac{k \cdot \overrightarrow{A} + k \cdot \overrightarrow{B} + k \cdot \overrightarrow{C}}{k+k+k} = \frac{k \cdot (1,2) + k \cdot (2,1) + k \cdot (3,3)}{k+k+k} = (2,2)$$

Dessa forma, pode-se haver a NORMALIZAÇÂo das coordendas, que ocorre quando a soma das coordendas baricêntrias de um ponto P é igual a 1, o que facilita que muitas fórmulas sejam escritas de forma a ficar algo "pequeno", e não uma fórmula gigante de difícil de ser "decorada". Para isso, basta que, por exemplo, dado um ponto P de coordendas (x:y:z), a sua normalização seria : $P = (\frac{x}{x+y+z} : \frac{y}{x+y+z} : \frac{z}{x+y+z})$, pois, assim, as coordendas são normalizadas.

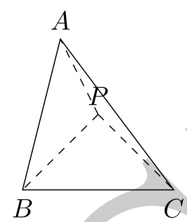
3 Coordendas baricêntricas ou "areais" ?

As coordenadas baricêntricas podem ser escritas usando as áreas das figuras formadas pelo ponto P e um triângulo ABC, que será conhecido como o triângulo de referência. Esse triângulo é muito importante na escolha do **SETUP** do problema de geometria que você irá resolver, pois as suas coordendas são bastante simples. Temos que $A = (1:0:0), B = (0:1:0), C = (0:0:1)$, pois a coordenada do vértice é apenas

$1 \cdot \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$, ficando coordendas bem simples para se fazer as contas. Mas voltando ao assunto, as coordenadas são chamadas de aerais pois um ponto P tem coordendas iguais a :

$$P = (\frac{[PBC]}{[ABC]}, \frac{[PCA]}{[BCA]}, \frac{[PAB]}{[CAB]}) = (x : y : z)$$

Com essas sendo as áreas "com sinal" do ponto P(como explicado anteriormente). Por exemplo, se P está dentro do triângulo, tem-se que as áreas são como as dos triângulos dentro da figura.



Área complexa(coordenadas homogêneas)👺

⚠️ Válido apenas para coordendas normalizadas ou homogeneizadas(soma das coordendas igual a 1)
A árae complexa de pontos P_1, P_2, P_3 de coordendadas (x_i, y_i, z_i) com $i \in \{1, 2, 3\}$ é dada por :

$$\frac{[P_1 P_2 P_3]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Disso, se deriva a equação da reta, que determina todas as coordenadas $P = (x : y : z)$ e passam pelos pontos $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1), P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$. Que é dada pela equação da área com determinante nulo. Em particular, tem-se que :

$$ux + vy + wz = 0$$

, com u,v,w constantes reais e x,y,z os pontos na reta.

Inclusive, se tens duas retas, para achar a interseção delas, tu faz que :

$$\begin{cases} u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0 \\ u_2 x + v_1 y + w_2 z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

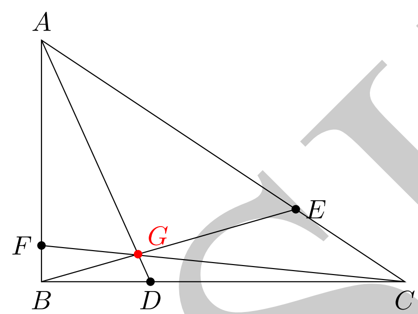
E resolve o sistema de equações, achando o ponto de interseção de duas retas.

Teorema de Ceva👺

Tem-se que pontos D,E,F estão sob os lados BC, AC e AB do triângulo ABC. As cevianas AD, BE e CF são concorrentes se e somente se :

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$$

Demonstração :



Considere as coordendas d = $d = \frac{BD}{BC}, 1-d = \frac{DC}{BC}$, daí, tem-se que $D = (0, d, 1-d), E = (1-e, 0, e) e F = (f, 1-f, 0)$ (defina as outras coordenadas de maneiras similar). Queremos provar, então, que $\frac{d}{1-d} \cdot \frac{e}{1-e} \cdot \frac{f}{1-f} = 1$
Para isso, vamos calcular a interseções das retas $AD \cap BE$ e $AD \cap CF$ e queremos que seja o mesmo ponto. Fazendo a equação da reta AD, tem-se que :

$$\begin{cases} dz = (1-d)y \\ ex = (1-e)z \\ fy = (1-f)x \end{cases}$$

$$Pois$$

A = (1:0:0), B = (0:1:0), C = (0:0:1).$Dessaforma, multiplicandoasequaes, tem-seque$:

$$def \cdot xyz = (1-d)(1-e)(1-f) \cdot xyz$$

Que dá soluções caso x,y,z sejam algum deles iguais a zero ou $def = (1-d)(1-e)(1-f)$. Mas, como o ponto de interseção não está sob nenhuma reta definida pelos segmentos do triâgulo (pois isso podia implicar que um ponto é igual ao vértice do triângulo), podemos dizer que $x, y, z \neq 0$, então, $def = (1-d)(1-e)(1-f)$.

Teorema da Ceviana

Os pontos que passam por A e também pelo ponto $P = (x_0 : y_0 : z_0)$ (a ceviana AP) são da forma :

$$(t : y_0 : z_0)$$

Para um t real

Prova : use a equação da reta.

Isogonais baricêtricos

O conjugado isogonal de $P = (x : y : z)$ em relação ao triângulo de referência é dado por :

$$P* = (\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z})$$

E o isotômico é dado por :

$$P^t = (\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z})$$

4 Centros Baricêtricos do Triângulo

Pontos Noáâveis	Coordenadas Baricêntricas
Baricentro	(1:1:1)
Incentro	(a:b:c)
Ex-incentro relativo a A	(-a:b:c)
Ponto Simediano	$(a^2 : b^2 : c^2)$
Ortocentro	$(tgA : tgB : tgC)$
Circuncentro	$(sin2A : sin2B : sin2C)$

Em particular, o Ortocentro e Circuncentro podem ser calculados usando a notação de Conway como : Sendo a notação de Conway definida como(posteriormente iremos enunciar essa notação com mais cautela) :

$$Sa = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$Sb = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$Sc = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

$$H = (SbSc : SaSc : SaSb)$$
$$O = (a^2Sa : b^2Sb : c^2Sc)$$

5 Colinearidade, Concorrência, Perpendicularidade e Retas Paralelas

Colinearidade baricêntrica(coordenadas homogêneas)👺

Os pontos $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1), P_2 = (x_2 : y_2 : z_2), P_3 = (x_3 : y_3 : z_3)$ são colineares se e somente se : $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

A prova disso se dá por você ter um ”triângulo” $P_1P_2P_3$ de área zero, o que determina que os três pontos são colineares. Pode-se usar isso para achar a equação da reta que passa por pontos P_1, P_2.

Duas retas são paralelas quando um ponto P, que é o ”ponto do infinito”, tem coordenadas que se somam 0, o que é determinando por retas $u_1xX + v_1y + w_1z = 0$ e $u_2x + v_2y + w_2z = 0$ e $x + y + z = 0$ tem uma solução não trivial, ocorrendo, de fato, quando

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

= 0, ou seja, possui uma solução não trivial.

Colinearidade baricêntrica(coordenadas homogêneas)👺

Três retas $u_ix+v_iy+w_iz = 0$, com $i \in \{1, 2, 3\}$ são concorrentes se e somente se :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

= 0

A prova disso se dá pelo fato de que isso implicaria que o sistema de equações :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \\ u_3x + v_3y + w_3z = 0 \end{cases}$$

possui uma solução não trivial, ou seja, seu determinante, como mostrado dentro da fórmula, igual a zero.

5.1 Vetores de Deslocamento

Antes de chegarmos na perpendicularidade, precisa-se passar por vetores deslocamento. Um "vetor" baricêntrico $\overrightarrow{PQ}$é dado por :

$$(q_1 - p_1 : q_2 - p_2 : q_3 - p_3)$$

com $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ e $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$.

Lembrando que os vetores são feitos com coordendas de P e Q normalizadas. Nessa seção, normalmente se leva o circunentro da figura para o vetor nulo quando feitos os cálculos. Como $x + y + z = 1$, as coordenadas dos pontos não mudam, ficando com :

$$\overrightarrow{P} - \overrightarrow{O} = x(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{O}) + y(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{O}) + z(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{O})$$

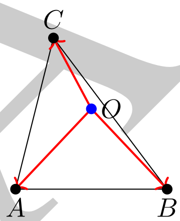
Distância baricêntrica👺

Os pontos do vetor $\overrightarrow{PQ} = (x : y : z)$ tem distância dada por :

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$$

Prova : a fórmula da distância de um vetor ao quadrado é dada por.

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = (x\overrightarrow{A} + y\overrightarrow{B} + z\overrightarrow{C})^2$$



Que, sabendo que $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = R^2$,(levamos o centro da figura para o circuncentro). Além disso, tem-se que : $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = R^2cos2C \rightarrow R^2(1 - 2sen^2C) = 1 - (\frac{c}{2R})^2 \rightarrow R^2 - \frac{1}{2}c^2$.

Fazendo os produtos, tem-se que :

$$\sum_{cyc} x^2\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} + 2 \cdot \sum_{cyc} xy\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$$

Fazendo umas contas, tem-se que $R^2(x + y + z)^2 - a^2yz - b^2xz - c^2xy$. Como $x + y + z = 0$, conseguimos a fórmula.

Circuncírculo baricêntrico👹

O círcucírculo baricêntrico é definido por :

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

para reais u,v,w.

Demonstração, fica a cargo do leitor. Usa a fórmula da distância com um centro em (l, m, n) e isola os termos que multiplicam x, y, z, colocando eles como as constantes do problema.

Perpendiculares Baricêntricas(coordenadas homogêneas)👹

Os vetores $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ são perpendiculares, com $\overrightarrow{=}(x_1 : y_1 : z_1)$, $\overrightarrow{CD} = (x_2 : y_2 : z_2)$ são perpendiculares se e somente se :

$$0 = a^2(y_1z_2 + y_2z_1) + b^2(x_1z_2 + x_2z_1) + c^2(x_1y_2 = x_2y_1)$$

A prova disso se resume a provar que :

$$(x_1\overrightarrow{A} + y_1\overrightarrow{B} + z_1\overrightarrow{C}) \cdot (x_2\overrightarrow{A} + y_2\overrightarrow{B} + z_2\overrightarrow{C}) = 0$$

expandindo, tem-se que :

$$R^2(x_1 + y_1 + z_1)(x_2 + y_2 + z_2) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{cyc}((x_1y_2 + x_2y_1) \cdot c^2)$$

e, como as coordenadas se somam zero, tem-se que o lado da esquerda é zero, nos dando a fórmula desejada.

6 Identidades de Conway e mais fórmulas

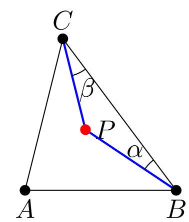
Seja S o dobro da área do triângulo, tem-se que (usando $S_{BC} = S_BS_C$:

$$S^2 = Sab{+}Sac{+}sbcS^2 = Sbc{+}a^2SaS^2 = \frac{1}{2}\cdot(a^2Sa{+}b^2Sb{+}c^2Sc)S^2 = (bc)^2{-}Sa^2$$

Podemos também definir(usando o fato de que S é o dobra da área do triângulo) :

$$S_\theta = S \cdot cotg(\theta)$$

Além disso, pode-se derivar a seguinte fórmula para um ponto P tal que $\angle PBC = \alpha$ e $\angle PCB = \beta$



O ponto P é dado por :

$$(-a^2 : Sc + S\beta : Sb + S\alpha)$$

Potência de ponto baricêntrico(coordenadas homogêneas)👺

Dado um círculo :

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz) = 0$$

A sua potência de ponto de um ponto de coordendada (x:y:z) é dada por :

$$Pot_P = -a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wz)$$

Derivado disso , tem-se que o eixo radical baricêntrico dos círculos:

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x+y+z)(u_1x+v_1y+w_1z) = 0 - a^2yz - b^2xz - c^2xy + (x+y+z)(u_2x+v_2y+w_2z) = 0$$

É dada por :

$$(u_1 - u_2)x + (v_1 - v_2)y + (w_1 - w_2)z = 0$$

Subtraindo as duas equações, conseguimos esse magnífico resultado 😀.

A tangente a (ABC) por A é dada por 👺

$$b^2z + c^2y = 0$$

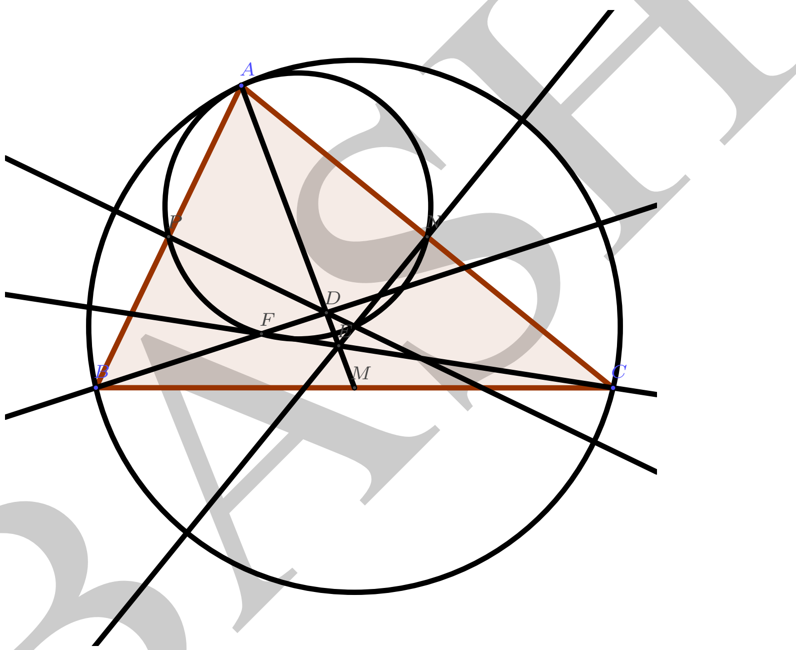
Prova disso se dá transladando por zero e usando a fórmula da perpendicularidade, com $AO \perp AP$, com P sendo um ponto qualquer na tangente com coordendas $(x : y : z)$.

7 Problemas para aprender

Problema para aprender👺

Seja ABC um triângulo agudo e escaleno, e sejam M, N e P os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente. Que as mediatrizes de AB e AC intersectem a ceviana AM nos pontos D e E, respectivamente, e que as linhas BD e CE se intersectem no ponto F, dentro do triângulo ABC. Prove que os pontos A, N, F e P estão todos situados em uma mesma circunferência.

Solução :



Para começar, seja $A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 0 : 1)$. Daí, tem-se que $M = (0 : 1/2 : 1/2), N = (1/2 : 0 : 1/2), P = (1/2 : 1/2 : 0)$. Ceviana AM é dada pelos pontos $(t : 1/2 : 1/2)$ usando o teorema da ceviana. Agora, vamos calcular as mediatrizes de AB e AC. Os pontos W na mediatriz de AB são dados por $(x : y : z)$ e queremos que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PW} \rightarrow (1, -1, 0) \perp (x - 1/2, y - 1/2, z)$. E, usando a equação das perpendiculares, tem-se que :

$$0 = a^2(y_1z_2 + y_2z_1) + b^2(x_1z_2 + x_2z_1) + c^2(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$0 = a^2(-z + 0) + b^2(z) + c^2(y - 1/2 - (x - 1/2))$$
$$0 = z(b^2 - a^2) + c^2(y - x)$$

Agora, fazendo para a mediatriz de AC : $\overrightarrow{AC} = (1 : 0 : -1), \overrightarrow{NW} = (x - 1/2 : y : z - 1/2)$

$$0 = a^2(0 + y(-1)) + b^2(1(z - 1/2) - (x - 1/2)) + c^2(y + (z - 1/2)(0))$$

$$0 = y(c^2 - a^2) + b^2(z - x)$$

Agora, calcular-se-a os pontos D e E usando essas equações e que $\overline{AM} = (t : 1/2 : 1/2)$:

$$0 = 1/2(b^2 - a^2) + c^2(1/2 - t) \iff 0 = b^2 - a^2 + c^2 - 2tc^2 \iff t = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2}$$

Para E :

$$0 = 1/2(c^2 - a^2) + b^2(1/2 - t) \iff 0 = c^2 - a^2 + b^2 - 2tb^2 \iff t = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2}$$

Agora, vamos usar o teorema da ceviana baricêntrica e, com isso, tem-se que os pontos em BD e CE são da forma :

$$\overline{BD} = (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c^2} : t : 1/2)$$

$$\overline{CE} = (\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2} : 1/2 : t)$$

Multiplicando todas as coordenadas de BD por $2c^2$ e a de CE por $2b^2$:

$$(b^2 + c^2 - a^2 : t : c^2)$$

$$(b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : t)$$

Nos dando que o ponto F é $(b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2)$.

Agora, vamos achar as constantes u, v, w da equação da circunferêcia qualquer e provar que F está nessa circunferência.

Lembrando que a equação da circunferência é dada por :

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (ux + vy + wz)(x + y + z) = 0$$

Ponto A : Usando o ponto A, há muitos chain tomes e sobra que $u = 0$.

Ponto P: Usando o ponto P, de coordenadas $(1/2 : 1/2 : 0)$:

$$-c^2(1/2)(1/2) + (0 + v/2 + 0)(1) = 0$$

$$c^2/2 = v$$

Ponto N: Usando o ponto N, de coordenadas $(1/2 : 0 : 1/2)$:

$$-b^2(1/2)(1/2) + (0 + 0 + w/2)(1) = 0$$

$$b^2/2 = w$$

Logo, tem-se que a equação do círculo baricêntrico APN é dada por :

$$-a^2yz - b^2xz - c^2xy + (-b^2/2 + c^2/2)(x + y + z) = 0$$

Sabendo que $F = (b^2 + c^2 - a^2 : b^2 : c^2)$, vamos fazer só mais umas continhas :

$$-a^2b^2c^2-b^2(b^2+c^2-a^2)c^2-c^2(b^2+c^2-a^2)b^2+(-b^2/2-c^2/2)(2b^2+2c^2-a^2) = 0$$

$$-a^2b^2c^2-(b^4c^2+b^2c^4-a^2b^2c^2)-(b^4c^2+b^2c^4-a^2b^2c^2)+(c^2/2b^2+c^2b^2/2)(2b^2+2c^2-a^2) = 0$$

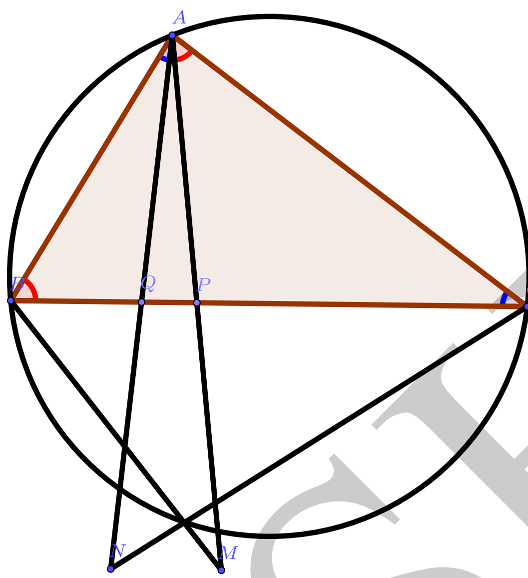
$$a^2b^2C+2-2b^4c^2-2b^2c^4+(+b^4c^2+b^2c^4-a^2b^2c^2/2+b^2c^4+b^4c^2-a^2b^2c^2) = 0$$

$$0 = 0$$

Logo, os quatro pontos são cíclicos.

Problema para aprender

Sejam P e Q pontos no segmento BC de um triângulo acutângulo ABC tal que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Sejam M e N pontos em AP e AQ, respectivamente, tal que P é o ponto médio de AM e Q é o ponto médio de AN. Prove que a interseção de BM e CN está no circuncírculo de ABC.



Solução : Sabendo que $\angle BCA = \angle C$ e $\angle CBA = \angle B$, tem-se que, pela fórmula dos ângulos baricêntricos, que :

Sabendo que $\angle BCA = \angle PAB$ e $\angle CBA = \angle QAC$, concluí-se que $\triangle PBA \sim \triangle QAC \sim \triangle ABC$. Fazendo com que $AB = c, BC = a, AC = b$, tem-se que :

Pela definição das áreas, podemos calcular o ponto P como :

$\frac{PB}{AB} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{PB}{=}\frac{c^2}{a}$. Como P é da forma $(0 : 1-p : p)$, com $p = \frac{PB}{BC}$ e, sabendo que $PB = \frac{c^2}{a}$, tem-se que : $P = (0 : 1 - \frac{c^2}{a^2} : \frac{c^2}{a^2}) \iff P = (0 : a^2 - c^2 : c^2)$. Similarmente, tem-se que $Q = (0 : 1-q : q)$ e que $\frac{QC}{AC} = \frac{AC}{BC} \iff QC = \frac{b^2}{a}$, obtendo que $Q = (0 : b^2 : a^2 - b^2)$.

Tem-se que $M = (-a^2 : 2a^2 - 2c^2 : c^2)$ e $N = (-a^2 : b^2 : a^2 - b^2)$.

Seja $X = BM \cap CN$, tem-se que, pelo fato de $BM = (-a^2 : t : 2c^2)$ e $CN = (-a^2 : 2b^2 : t)$, obtem-se que $X = (-a^2 : 2b^2 : 2c^2)$. Que está no circuncírculo se e somente se :

$$a^2yz + b^2xz + c^2xy = 0 \iff a^2 2b^2 2c^2 + b^2(-a^2)(2c^2) + c^2(-a^2)(2b^2) = 0$$

$$\iff 4a^2b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 = 0 \iff 0 = 0$$

Logo, esse ponto está sim, em (ABC).

8 Problemas olímpicos

1. (IMO 2012)Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro do círculo ex-inscrito oposto ao vértice A. O ex-incírculo é tangente ao lado BC em M, e os lados AB e AC em K e L, respectivamentee. As retas LM e BJ se encontram em F e as retas KM e CJ se encontram em G. Seha S o ponto de interseção de AF e BC e T o ponto de interseção de AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.

2. (MOP 2006) O triângulo ABC está inscrito em uma circunferência γ. O ponto P está na reta BC tal que PA é tangente a γ. A bissetriz interna de $\angle APB$ corta os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente. Os segmentos BE e CD se encontram no ponto Q. Dado que a reta PQ passa pelo centro de γ, calcule o ângulo $\angle BAC$.

3. (EGMO 2013) O lado BC do triãngulo ABC é extendido além de C a D tal que CD = BC. O lado CA é extendido além de A até E tal que AE = 2CA. Prove que, se AD = BE, então ABC é um triângulo retângulo.

4. (USA TST) Seja ABC um triângulo. Escolha um ponto D no seu interior. Seja γ_1 um círculo que passa por B e D e γ_2 um círculo que passa por C e D tal que o outro ponto de interseção dos dois círculos está em AD. Sejam γ_1 e γ_2 intersectamse em BC em E e F, respectivamente. Seja X a interseção de DF e AB e Y a interseção de DE e AC. Mostre que $XY||BC$.

5. (CHINA TST) Dado um triângulo escaleno ABC. Seu incírculo tangencia os lados BC, AC e AB nos pontos D,E,F, respectivamente. Sejam L,M,N os simétricos de D em relação a EF, de E em relação a FD e de F em relação a DE, respectivamente. Sabe-se que AL intersecta BC em P, a reta BM intersecta CA em Q e a reta CN intersecta AB em R. Prove que P, Q,R são colineares.

References

[1] Minicurso Coloquio de Matemática da Região Sudeste . Coordenadas Baricêntricas: Uma Introdução com Ênfase na Geometria Moderna do Triâangulo.

[2] Chen, Evan. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.

[3] Prado, Regis. Nível 3 : Coordenadas baricêntricas. Disponível em : https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/coordenadas$_baricentricas.pdf$