Complex bash

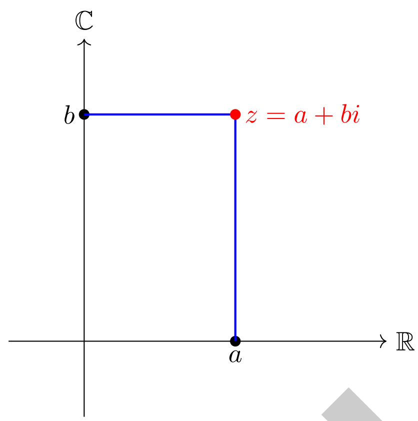
Master Humberto

Copia não comédia

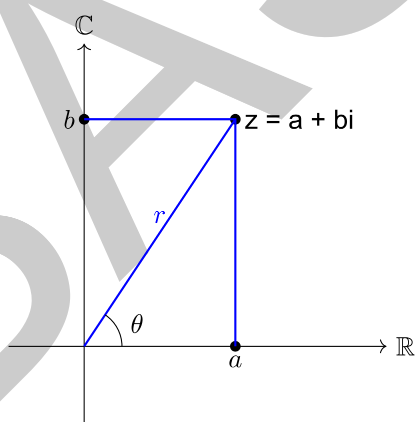
Summary

1 Introdução aos complexos

Os números complexos foram ”inventados” para satisfazer aquelas equações sem solução, por exemplo, equações do segundo grau em que o delta fosse menor que zero. Usa-se a unidade imaginária *i*, que é igual a $\sqrt{-1}$ multiplicada a um número real para se fazer a ”parte imaginária do número complexo”. Os números complexos são feitos da forma $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$. Mas como usar isso em geometria ? Existe um plano chamado de plano de Argand-Gauss em que o eixo x é substituido pela parte real do número complexo e o eixo y é substituído pela parte imaginária do número complexo. Sendo z = $a + bi$, tem-se representado esse número como na figura abaixo.

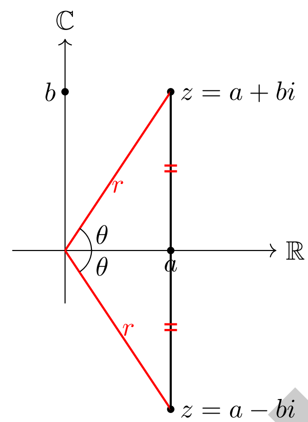


Os números completos também podem ser representados na sua forma polar, que, ao invés de ter um ”a” e ”b” como parâmetros, tem-se r e θ, com o número sendo escrito como $z = r \cdot e^{i\theta}$, sendo $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$(a prova disso pode ser feita analisando os polinômios de Taylor de $e^x, sen(x), cos(x)$, deixo como exercício para o leitor. Mas o que é ”r” e "θ" ? O ”r” é a magnitude do número complexo z, ou seja, a distância de z à origem do sistema de coordendas, ou seja, se $z = a + bi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ por Pitágoras. Já "θ" é o ângulo que o número complexo faz com o semi-eixo x positivo, medido em radianos. Para simplificar, vou fazer uma figura abaixo.



1.1 Conjugado complexo

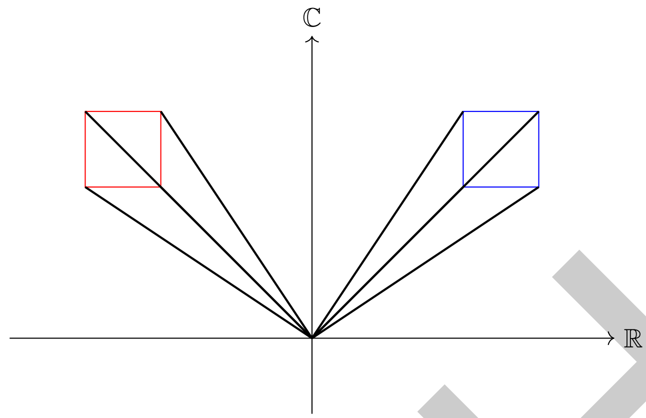
O conjugado complexo será bastante explorado aqui no material. Basicamente, se temos um número complexo $z = a + bi$, $\overline{z}$(conjugado)$= a - bi$. Isso representa, por exemplo, a reflexão de z sobre o eixo dos reais. Como representado na figura abaixo.



E, além de ser a reflexão, o conjugado complexo tem a prorpiedade de que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, com $|z|$ sendo o módulo de z ou ”r”.

2 Transformações geométricas com números complexos

Os números complexos, por serem parecidos com vetores, tem propriedades interessantes, como, por exemplo, a de que, se colocarmos m * z, com m sendo um número real, temos um novo número complexo de tamanho ”m vezes” o número complexo z, assim como na multiplicação de vetor po um escalar. Além disso, se multiplicarmos um número complexo $z = r \cdot e^{i\theta}$ por $w = r' \cdot e^{i\alpha}$, você tem um vetor de magnitude $r \cdot r'$ e argumento $e^{i(\theta+\alpha)}$, devido ao fato de que a multiplicação de potências de mesma base faz-se somar os expoentes. Dessa forma, temos que a rotação e translação, além da dilatação de um número complexo são bem simples. E, caso quisermos, podemos rotacionar e transladar toda a figura apenas multiplicando os vértices dela por um complexo w, criando uma figura semelhante à anterior.



Quadrado rotacionado em 90 graus no sentido anti-horário

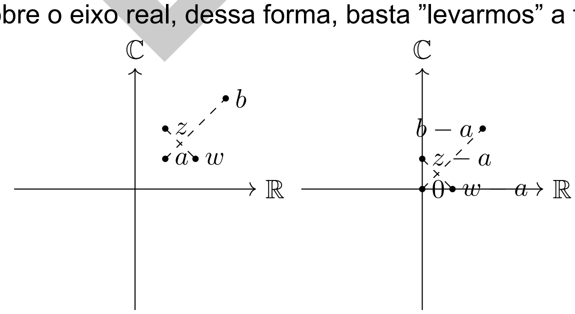
3 Algumas fórmulas e noções

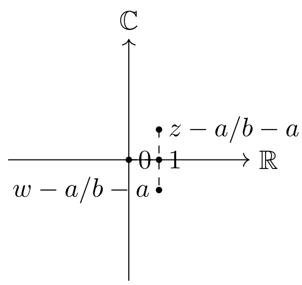
Uma das noções mais básicas de números complexos são algumas ”fórmulas” que são derivadas imediatamente do fato de que números complexos são como vetores. Disso, tem-se que :

1. Baricentro G do triângulo de vértices a,b,c é $\frac{a+b+c}{3}$
2. O ponto médio do segmento de vértices a,b e $\frac{a+b}{2}$
3. O paralelogramo ABCD de números complexos a,b,c,d respeita a relação a + c = b + d, com a volta sendo válida(ou seja, da equação, você prova que é um paralelogramo certo quadrilátero).

3.1 Reflexão Complexa

Outra fórmula que podemos enunciar é a fórmula da reflexão complexa, que podemos achá-la usando o fato de que o conjugado de z é a reflexão de z sobre o eixo real, dessa forma, basta ”levarmos” a figura ao eixo real.





Para isso, como na figura acima, primeiro subtrai-se a em todas as coordendas para levá-la à origem e depois as divide por b-a. Dessa forma, temos que $\overline{\frac{z-a}{b-a}} = \frac{w-a}{b-a}$. E, fazendo as continhas, obtém-se que :

Reflexão Complexa🤓

A reflexão de z sobre a reta AB, de coordendas a,b é dada por :

$$\frac{(a-b)\overline{z} + \overline{a}b - a\overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}}$$

Para calcular o pé da perpendicular complexa usando isso, basta usar o fato de que o ponto médio entre o ponto e a reflexão é esse ponto.

4 Colinearidade e Perpendicularidade

Para descobrir se duas retas são colineares, basta usar a fórmula do coeficiente angular complexo, que é dada por :

Coeficiente angular complexo🤓

O coeficiente angular da reta AB é dada por :

$$\frac{a-b}{\overline{a} - \overline{b}}$$

Você pode provar isso usando o fato de que isso é equivalente ao coeficiente angular da reta, que é aprendido no módulo de Coordbash. Dessa forma, para que três pontos sejam colineares, basta que :

$$\frac{z-a}{z-b} = \overline{\frac{z-a}{z-b}}$$

AB é perpendicular a CD se e somente se (usando que os coeficientes angulares são opostos) :

$$\frac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}}$$

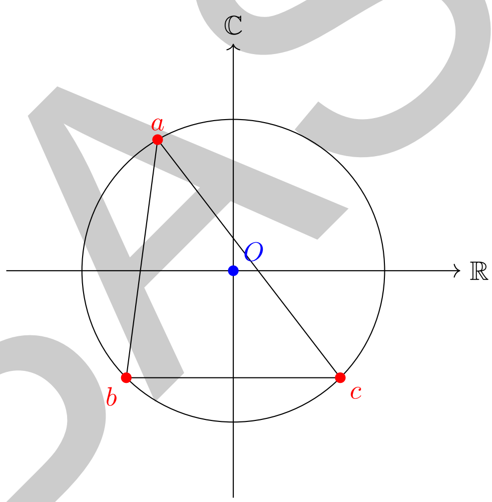
Área complexa🤓

A área do triângulo de vértices a,b,c é dada por :

$$\frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}$$

5 Círculo Unitário

O círculo unitário é uma das ferramentas mais poderosas na hora de se resolver problemas de geometria com complexos, pois, como $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, se o ponto fica no círculo unitário (centro no 0 e raio 1), o módulo dele é igual a 1 e, dessa forma, tem-se que $\overline{z} = \frac{1}{z}$, o que facilita bastante as contas em muitos casos.



Pé complexo(Círculo Unitário)🤓

O pé completo do ponto z a uma corda AB do círculo unitário é dada por :

$$\frac{1}{2} \cdot (z + a + b - ab\overline{z})$$

A prova disso se dá usando o teorema do pé complexo com os pontos a e b no círculo unitário, ficando como exercício para o leitor provar.

Ortocentro🤓

O ortocentro H com a,b,c estando no círculo unitário é dado por :

$$H = a + b + c$$

Em particular, se o é o circuncentro do $\triangle ABC$, a fórmula é dada por :

$$H = a + b + c - 2o$$

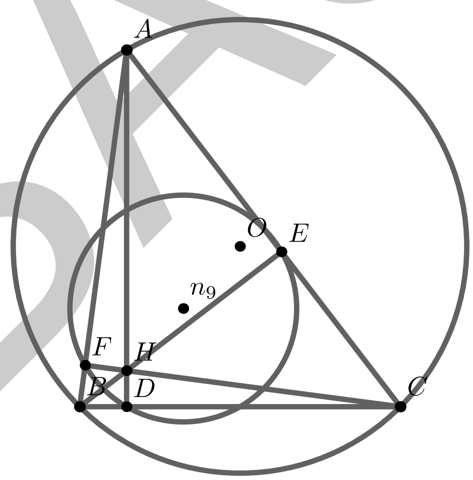
5.1 Círculo dos nove pontos

O círculo dos nove pontos tem o centro que é o ponto médio entre o circuncentro e o ortocentro de um triângulo é dado por :

Círculo dos nove pontos(círculo unitário)🤓

$$n_9 = \frac{a + b + c - o}{2}$$

Esse círculo contém os pontos médios dos lados do triângulo, seus pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro do triângulo.
Prova:



Primerio : que o centro do círculo dos nove pontos é o circuncentro do triângulo formado pelos pés das alturas.

$$\left|\frac{a+b+c}{2} - \frac{a+b+c-bc/a}{2}\right| = |-bc/2a| = 1/2$$

Como o problema é simétrico, pode-se dizer que está provado.

Segundo : que o centro do círculo dos nove pontos passa pelos pontos médios dos lados do triângulo.

$$|\frac{a+b+c}{2} - \frac{b+c}{2}| = |a/2| = 1/2$$

Terceiro : que o centro do círculo dos nove pontos passa pelos pontos médios dos segmetos que ligam os vértices ao ortocentro.
Dever de casa.

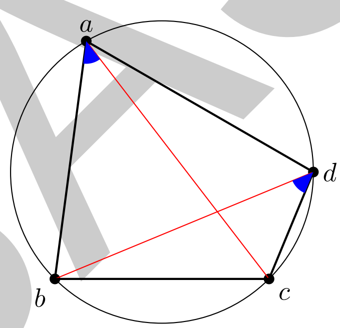
6 Mais fórmulas

Fórmula do quadrilátero cíclico🤓

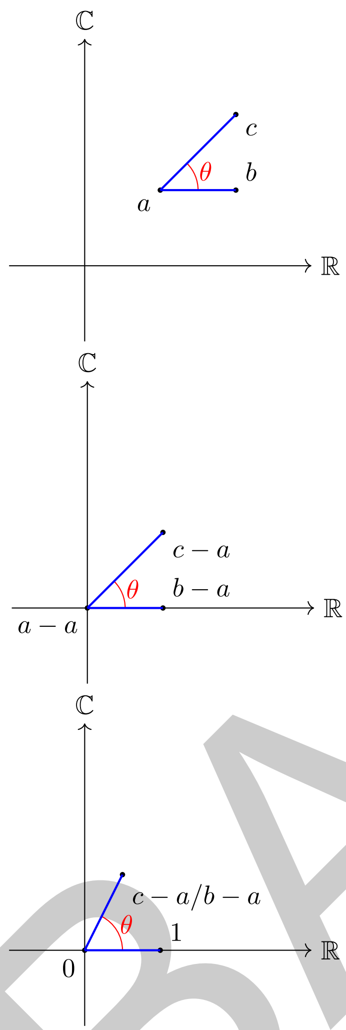
Os vértices ABCD de um quadrilátero estão numa mesma circunferência se e somente se:

$$\frac{b-a}{c-a} \div \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}$$

Pode-se provar isso usando de o fato de que queremos provar que os ângulos $\angle BAC = \angle BDC$, como na figura abaixo.



Para provar que os ângulos são iguais, pode-se usar argumentos e, caso esses argumentos sejam iguais, na hora da divisão o argumento final do número complexo será zero, ou seja, número real.



Então, com isso, obtemos que o número complexo $\frac{c-a}{b-a} = r \cdot e^{i\theta}$, sendo θ igual a $\angle BAC$. Fazendo o mesmo processo com $\angle DAC$, obtemos $r' \cdot (e^{i\theta}$. Dessa forma, ao se dividir um pelo outro, sobra-se $\frac{r}{r'}$, que é real.

Triângulos semelhantes complexos🤓

Dois triângulos ABC e XYZ são semelhantes(nessa orientação) se e somente se :

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{z-x}{y-x}$$

Isso pode ser provado provando que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{XZ}{XY} \iff |\frac{c-a}{b-a}| = |\frac{z-x}{y-x}| \iff \angle BAC = \angle ZXY$$

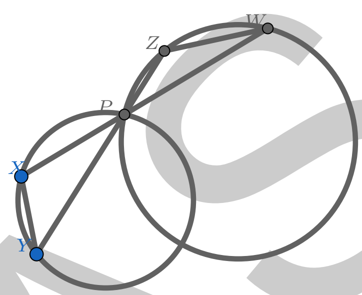
, implicando no resultado desejado.

Centro de roto-homotetia complexo🤓

O centro de roto-homotetia P que leva XY em ZW é dado por :

$$p = \frac{xw - yz}{x + w - y - z}$$

Prova : Aplique a fórmula da semelhança de triângulos e abre a conta(vai por mim, pode abrir a conta sem medo).



Circuncentro complexo🤓

O centro complexo X de um triângulo ABC é dado por :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a\bar{a} & 1 \\ b & b\bar{b} & 1 \\ c & c\bar{c} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}$$

A prova desse teorema se dá por pegar um círculo de raio r equidistante a a,b,c, fazer um sistema de equações e o centro será a solução do sistema de equações por regra de Cramer. Em particular, se c = 0 (circunferência que passa pelo centro, tem-se que :

$$x = \frac{ab(\bar{a} - \bar{b})}{\bar{a}b - a\bar{b}}$$

Equação da corda(círculo unitário)🤓

Aplicando a fórmula da colinearidade para um ponto z sob a conta AB, tem-se que :

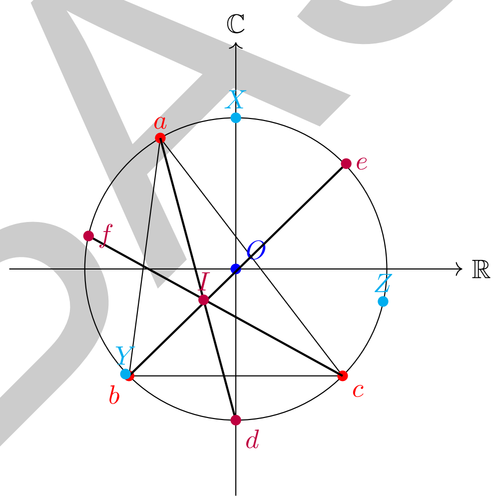
$$z + ab\overline{z} = a + b$$

Em particular, se colocarmos as tangentes por a e b(substituindo a=a e b=a), tem-se que o encontro das tangentes saindo do círculo unitário é dada por :

$$p = \frac{2ab}{a+b}$$

7 Incentro

Quando se tem o incentro na figura, o $A = a^2$, $B = b^2$ e $C = C^2$, isso se deve pois as fórmulas do incentro usam inversão raíz de bc(um material de inversão com raíz de bc está disponível na internet através desse link) e, para se calcular e tirar a raiz quadrada de um número complexo não funciona muito bem pois começam a ocorrer alguns problemas. Dessa forma, se chama os números complexos dessa forma quando se há um incentro na figura.



Tem-se que os pontos $D = -bc, E = -ac, F = -ab$, com D,E,F sendo os pontos médios dos arcos menores BC, AC e AB do triângulo ABC (com A,B,C no círculo unitário). Em particular, caso você queira o ponto médio do arco maior, basta pegar a antípoda, obtendo $X = bc$, $Y = ac$ e $Z = ab$.

Incentro (círculo unitário)🤓

O incentro I do triângulo ABC, com os vértices no círculo unitário, é dado por :

$$I = -ab - ac - bc$$

Os ex-incentros relativos aos vértices A,B,C são dados por :

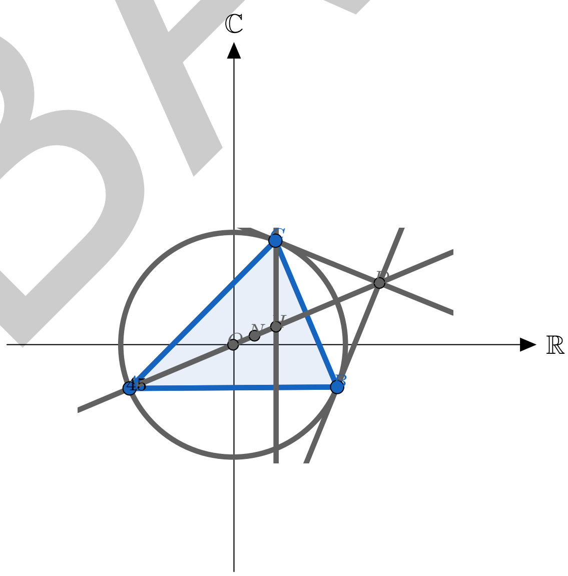
$$I_a = -bc + ac + ab$$
$$I_b = -ac + bc + ab$$
$$I_c = -ab + ac + bc$$

(isso pode ser provado intersectando duas retas que saem de um vértice é são perpendiculares à bissetriz interna do ângulo).

8 Vamos aprender com problemas ?

(OBM 2015 P1 N3)🤓

Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$



Para começar a atacar esse problema, podemos criar uma configuração tal que A reta AB seja paralela ao eixo real. Dessa forma, obtem-se que o número (a-b) é real e, assim, tem-se que ele é igual a seu conjugado.

Dessa forma, $a - b = \overline{a} - \overline{b} \iff -ab = 1$ E, usando o coeficiente ângulo da reta AC com AB, obtemos que :

$$\frac{a-c}{\overline{a}-\overline{c}} = -1 \iff ac = 1$$

Pela fórmula da colinearidade, queremos que o número complexo abaixo seja real :

$$\frac{a - \frac{a+b+c}{2}}{a - \frac{2bc}{b+c}} = \frac{ab + ac - b^2 - c^2 - 2bc}{2ab + 2ac - 4bc}$$

Que tem conjugado igual a

$$\frac{abc^2 + ab^2c - a^2c^2 - a^2b^2 - 2a^2bc}{2abc^2 + 2ab^2 - 4a^2bc}$$

Que não são iguais.

Mas, fazendo que $\angle BAC = 45°$, obtemeos que :

$$\frac{a - \frac{a+b+c}{2}}{a - \frac{2bc}{b+c}} = \frac{ab + ac - b^2 - c^2 - 2bc}{2ab + 2ac - 4bc} = \frac{-1 + 1 - b^2 - c^2 - 2bc}{-2 + 2 - 4bc} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{4bc}$$

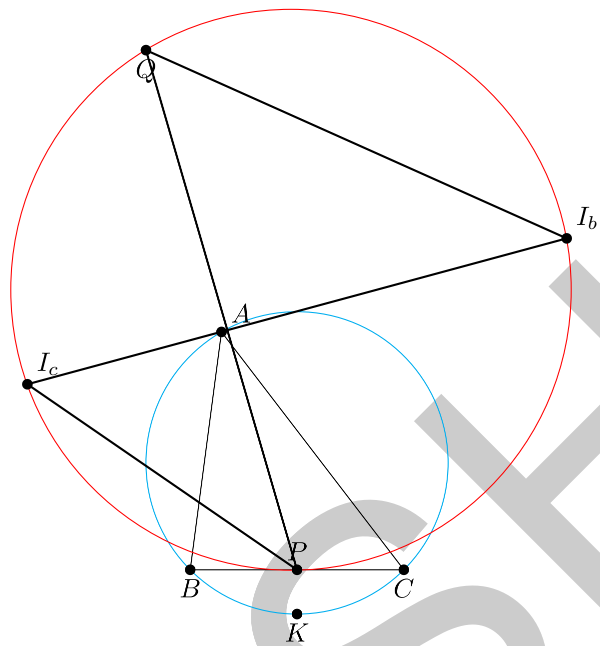
Que possuí conjugado igual a :

$$\frac{\frac{1}{b^2} + \frac{2}{bc} + \frac{1}{c^2}}{\frac{4}{bc}} = \frac{c^2 + 2bc + b^2}{4bc}$$

. Que são iguais. Dessa forma, A,D,N são colineares se e somente se $\angle BAC = 45°$.

OBM N3 P2 2022🤓

Seja ABC um triângulo acutângulo, com AB < AC. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C. são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente. Seja Q a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, Q, I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.



Para resolver esse problema, precisamos calcular os pontos P, I_b, I_c, K e colocá-los na fórmula do quadrilátero cíclico. $P = \frac{b^2+c^2}{2}$, $I_b = -ac + ab + bc$ e $I_c = -ab + ac + bc$. O ponto Q será :

$$Q = 2A - K \iff Q = 2a^2 + bc$$

.

Agora, vamos jogar na fórmula da colinearidade (simples assim, 💩).

$$\frac{\frac{b^2+c^2}{2} + ab - ac - bc}{-ac + ab + bc + ab - ac - bc} \div \frac{\frac{b^2+c^2}{2} - 2a^2 - bc}{-ac + ab + bc - 2a^2 - bc} \in \mathbb{R}$$

$$\iff$$

$$\frac{b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc}{-4ac + 4ab} \div \frac{b^2 + c^2 - 4a^2 - 2bc}{-2ac + 2ab - 4a^2}$$

$$\iff$$

$$\frac{(b-c)^2 + 2a(b-c)}{4a(b-c)} \div \frac{(b-c+2a)(b-c-2a)}{2a(-c+b-2a)}$$

$$\iff$$

$$(\frac{b-c}{4a} + 1/2) \div (\frac{c-b+2a}{2a}) = (\frac{b-c}{4a} + 1/2) \cdot (\frac{2a}{-c+b+2a})$$

$$\iff$$

$$\frac{b-c+2a}{4a} \cdot \frac{2a}{-c+b-2a} = \frac{1}{2}$$

Que é um número real. Logo, os quatro pontos são cíclicos.

9 Problemas Olímpicos 💣

1. (EGMO 2023 P2) É dado um triângulo acutângulo ABC. Seja D o ponto no seu circuncírculo tal que AD é um diâmetro. Suponha que os pontos K e L estão nos segmentos AB e AC, respectivamente, e que DK e DL são tangentes a AKL. Mostre que a reta KL passa pelo ortocentro do triângulo ABC. *Convém usar o círculo de AKL como círculo unitário*

2. (OBM 2017 P5 N3) No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$. Defina r_B e r_C similarmente. Seja H e I o ortocentro e incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo.Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

3. (IMO 2012) Dado um triângulo ABC, o ponto J é o centro da circunferência ex-inscrita oposta ao vértice A. Esta circunferência ex-inscrita é tangente ao lado BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ intersectam-se em F, e as retas KM e CJ intersectam-se em G. Seja S o ponto de interseção das retas AF e BC, e seja T o ponto de interseção das retas AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.

4. (OMCPLP/2019) Seja ABC um triângulo com $AC \neq BC$. No triângulo ABC, sejam G seu baricentro (encontro das medianas), I seu incentro (encontro das bissetrizes internas) e O seu circuncentro (centro da circunferência que passa pelos vértices). Prove que IG é paralelo a AB se, e somente se, CI é perpendicular a IO

5. Dado um quadrilátero cíclico ABCD, as diagonais AC e BD se encontram em E e as retas AD e BC se encontram em F. Os pontos médios de AB e CD são G e H, respectivamente. Mostre que EF é tangente à circunferência que passa pelos pontos E, G e H.

ELMO SL 2013 G7 🔥

6. Seja ABC um triângulo inscrito em um círculo ω, e as medianas de B e C intersectam ω em D e E respectivamente. Seja O_1 o centro do círculo passando por D tangente a AC em C, e seja O_2 o centro do círculo por E E tangente a AB em B. Prove que O_1, O_2, e o centro do círculo de nove pontos de ABC são colineares.

7. (RMM 2019) Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com $AB \parallel CD$. E seja E o ponto médio de AC. Denote por ω e Ω os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE, respectivamente. Seja P a interseção da tangente por ω em A com a tangente em Ω por D.Prove que PE é tangente a Ω.

8. (EGMO/2017) Seja ABC um triângulo acutângulo sem dois lados com o mesmo tamanho. A reflexão do baricentro G e do circuncentro O do

ABC pelos lados BC, CA, AB são G1, G2, G3 e O1, O2, O3, respectivamente. Mostre que os circunírculos dos triângulos G1G2C, G1G3B, G2G3A, O1O2C, O1O3B, O2O3A e ABC têm um ponto em comum.

References

[1] Chen, Evan. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.

[2] Paiva, Gabriel. Complex Bash. Disponível em : https://www.obm.org.br/content/uploads/2021/11/Complex$_{Bash_{G}abriel_{R}ibeiro_{P}aiva_{S}O2021.pdf}$

[3] Andreescu, Titu. Lemmas in Olympiad Geometry.

[4] Shine, Carlos Yuzo. A inversão $\sqrt{bc}$ que não muda bc. Disponível em : https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/A$_{inversao_{q}ue_{n}ao_{m}uda_{A}BC_{C}arlos_{S}hine-1.pdf}$

[5] Miyazaki, Rafael. Geometria com Complexos. Disponível em https://www.obm.org.br/content/uploads/2020/02/23$_{S}O_{R}afael_{M}iyazaki_{N}ivel_{3C}omplexos_{c}ompressed.pdf$