6.6.1

证明对任意 3×1 向量 u 和 v，都有 $\underset{3\times3}{u^\wedge}\,\underset{3\times1}{v} \equiv -\underset{3\times3}{v^\wedge}\,\underset{3\times1}{u}$ $=3\times1$

设 $u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$，$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$，展开 $u^\wedge=\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$ $v^\wedge=\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$

$$u^\wedge v=\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_3v_2+u_2v_3 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ -u_2v_1+u_1v_2 \end{bmatrix}$$

$$-v^\wedge u=-\begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -v_3u_2+v_2u_3 \\ v_3u_1-v_1u_3 \\ -v_2u_1+v_1u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_3v_2+u_2v_3 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ -u_2v_1+u_1v_2 \end{bmatrix}$$

显然相等

6.6.2 用罗德里格斯公式证明 $C^{-1}=C^T$：

$$C=\cos\theta I+(1-\cos\theta)aa^T+\sin\theta a^\wedge$$

思路：直接写出 C 和 C^T 相乘看结果是否得到单位阵.

$$C^T=\cos\theta I+(1-\cos\theta)(aa^T)^T+\sin\theta(a^\wedge)^T=\cos\theta I+(1-\cos\theta)aa^T+\sin\theta(-a^\wedge)$$

$$\begin{aligned} CC^T=&(\cos\theta)^2+(1-\cos\theta)\cos\theta\, aa^T+\sin\theta\cos\theta(-a^\wedge) \\ &+(1-\cos\theta)\cos\theta\, aa^T+(1-\cos\theta)^2(aa^T)^2+\boxed{\sin\theta(1-\cos\theta)aa^T(-a^\wedge)} \\ &+\sin\theta\cos\theta\, a^\wedge+\boxed{(1-\cos\theta)\sin\theta\, \underset{0}{a^\wedge(aa^T)}}+(\sin\theta)^2(-a^\wedge a^\wedge) \\ =&\cos^2\theta+2\cos\theta(1-\cos\theta)aa^T+(1-\cos\theta)^2aa^T-\sin^2\theta(aa^T-1) \\ =&1 \end{aligned}$$

$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)aa^T-\sin^2\theta$

$\Rightarrow$

~~$(2\cos\theta-2\cos^2\theta)aa^T+1$~~

这说明了旋转矩阵具有正交性.

$(\underset{0}{a^\wedge a}a^T)^T=0$

$a(a^Ta^\wedge)$

$a^\wedge[aa^T]$

$=-a^\wedge aa^T$

对于这两项可以抵消

因为 $aa^Ta^\wedge$ 和 $a^\wedge aa^T$ 相等

$-a^\wedge(aa^T)=(a^\wedge)^T(aa^T)$

$(aa^T)=(aa^T)^T$

故 $-a^\wedge(aa^T)=(a^\wedge)^T(aa^T)^T$

$=(aa^Ta^\wedge)^T$

$=-aa^Ta^\wedge$?

$=0.$

$\boxed{\text{且 } a^\wedge a=0}$

$a^\wedge a^\wedge=aa^T-1$

6.6.3 证明对于任意 3×1 向量 v 和旋转矩阵 C，都有 $(Cv)^\wedge = Cv^\wedge C^T$。

$(Ra)^\wedge = Ra^\wedge R^T$

这个题目眼熟，好像在哪里见过 $(Ra)^\wedge = Ra^\wedge R^T$ 形式

令 $C = [c_1, c_2, c_3]$ 写为列向量的形式，

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

则 $C^T(Cv)^\wedge C = C^T(v_1c_1 + v_2c_2 + v_3c_3)^\wedge C = C^Tv_1c_1^\wedge C + C^Tv_2c_2^\wedge C + C^Tv_3c_3^\wedge C$

其中

$$C^Tv_1c_1^\wedge C = v_1C^Tc_1^\wedge C = v_1\begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ c_3^T \end{bmatrix} c_1^\wedge [c_1\ c_2\ c_3]$$

$$= v_1\begin{bmatrix} c_1^Tc_1^\wedge c_1 & c_1^Tc_1^\wedge c_2 & c_1^Tc_1^\wedge c_3 \\ c_2^Tc_1^\wedge c_1 & c_2^Tc_1^\wedge c_2 & c_2^Tc_1^\wedge c_3 \\ c_3^Tc_1^\wedge c_1 & c_3^Tc_1^\wedge c_2 & c_3^Tc_1^\wedge c_3 \end{bmatrix} = v_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故 $$C^T(Cv)^\wedge C = v_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + v_2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + v_3\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = v^\wedge$$

4. 证明：

$$\dot{T}_{iv} = T_{iv}\begin{bmatrix} 0 & -v\kappa & 0 & v \\ v\kappa & 0 & -v\tau & 0 \\ 0 & v\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这一题就是将 Frenet 参考系下状态变换的过程推导一遍，书上给了 $\dot{T}_{vi}$ 的推导过程，此处要我推导 $\dot{T}_{iv}$ 的过程；可以照着书上写一遍。~~最后 T_{iv} ……~~

这个题要先写出 T_{iv}，由公式 (6.86) 来看，可以知道 $T_{iv} = \begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{vi} & -\sin\theta_{vi} & 0 & x \\ \sin\theta_{vi} & \cos\theta_{vi} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

这里 r_i^{vi} 的上标与 T_{iv}, C_{iv} 不一致让我一度不适应，

但是想了一下 T 相当于对 Pose x 作了 $Rx+t$ 的作用，所以位置 t 的参考系要和 R 变换后一致，才能相加，所以 t 的下标为 i，既然以 i 为参考系原点，所以方向当然是 $i \to v$，记为 r_i^{vi}

$\frac{d}{dt}(T_{iv}) = \begin{bmatrix} \dot{C}_{iv} & \dot{r}_i^{vi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，再进一步看 $\dot{C}_{iv}$ 和 $\dot{r}_i^{vi}$ 是什么样的.

1) $\dot{C}_{iv}$

由公式(6.3) $C_{iv} = \underrightarrow{F}_i \underrightarrow{F}_v^T$ $\quad (C_{21} = \underrightarrow{F}_2 \cdot \underrightarrow{F}_1^T)$

由公式(6.91)(6.92)(6.93)(6.94)

$$\cancel{\underrightarrow{F}_i = \begin{bmatrix} \underrightarrow{t} \\ \underrightarrow{n} \\ \underrightarrow{b} \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{ds}\underrightarrow{F}_i = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \underrightarrow{F}_i}$$

~~，两边同时乘以运动速度 $v = ds/dt$，然后右乘 $\underrightarrow{F}_v^T$~~

$$\cancel{\frac{d}{dt}(\underbrace{\underrightarrow{F}_i \cdot \underrightarrow{F}_v^T}_{\dot{C}_{iv}}) = \begin{bmatrix} 0 & vk & 0 \\ vk & 0 & v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{bmatrix} (\underbrace{\underrightarrow{F}_i \cdot \underrightarrow{F}_v^T}_{C_{iv}})}$$

$\underrightarrow{F}_i$ 是假设的静止全局参考系，
$\underrightarrow{F}_v$ 是运动系，不能照书上直接改下标

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\underrightarrow{F}_i \cdot \underrightarrow{F}_v^T}_{\dot{C}_{iv}}) = \underbrace{\dot{\underrightarrow{F}}_i}_{0} \cdot \underrightarrow{F}_v^T + \underrightarrow{F}_i \cdot \dot{\underrightarrow{F}}_v^T = \underrightarrow{F}_i \cdot \dot{\underrightarrow{F}}_v^T$$

对于 $\dot{\underrightarrow{F}}_v^T$，由公式(6.93)可知 $\frac{d}{ds}\underrightarrow{F}_v = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \underrightarrow{F}_v$，两边同时乘以运动速度 v

$v = ds/dt$.

由链式法则

$$\frac{d}{dt}\underrightarrow{F}_v = \begin{bmatrix} 0 & vk & 0 \\ -vk & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{bmatrix} \underrightarrow{F}_v \Rightarrow \dot{\underrightarrow{F}}_v^T = \underrightarrow{F}_v^T \begin{bmatrix} 0 & -vk & 0 \\ vk & 0 & -v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (ab)^T = b^T a^T$$

即 $\dot{C}_{iv} = \underrightarrow{F}_i \cdot \dot{\underrightarrow{F}}_v^T = \underrightarrow{F}_i \cdot \underrightarrow{F}_v^T \begin{bmatrix} 0 & -vk & 0 \\ vk & 0 & -v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{bmatrix} = C_{iv} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -vk & 0 \\ vk & 0 & -v\tau \\ 0 & v\tau & 0 \end{bmatrix}}_{\omega_v^{vi\wedge}}$

2) $\dot{r}_i^{vi}$ 由公式(6.96)

$\dot{r}_i^{vi} = C_{vi}^T \nu_v^{vi}$，$\nu_v^{vi} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dot{r}_i^{vi} = C_{iv} \nu_v^{vi}$.

$$\dot{T}_{iv} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{iv} \omega_v^{vi\wedge} & C_{iv} \nu_v^{vi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{iv} & r_i^{vi} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_v^{vi\wedge} & \nu_v^{vi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T_{iv} \begin{bmatrix} 0 & -vk & 0 & v \\ vk & 0 & -v\tau & 0 \\ 0 & v\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得证