3.6.1

$$H=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -A_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -A_{k-1} & 1 \\ \hline C_0 & & & \\ & C_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k \end{bmatrix} \quad W=\left[\begin{array}{cccc|cccc} \check{P}_0 & & & & & & & \\ & Q_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & Q_k & & & & \\ \hline & & & & R_0 & & & \\ & & & & & R_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & R_k \end{array}\right] \quad z=\begin{bmatrix} \check{x}_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ \hline y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

$k=5$ (有先验时)

$$H=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & & -1 & 1 \\ \hline C_0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}_{12\times 6}$$

C_0

$A=I$

$C=I$

$$W=\left[\begin{array}{ccc|ccc} Q & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & Q & & & \\ \hline & & & R & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R \end{array}\right]_{12\times 12}$$

$$(H^TW^{-1}H)\hat{x}=H^TW^{-1}z$$

$\check{x}_0$ 初始状态未知,可以有两种处理方式:

1. 去掉含有初始状态的行/列.
2. 如果存在观测信息 y_0,所以可以近似的给出一个 $\check{x}_0$,如果认为可信度不高,可以给一个较大的 $\check{P}_0$. 认为可信度高,可以给 Q_1 的值作为 $\check{P}_0$.

$k=5$ 没有先验

$$H=\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{9\times 5} \quad W=\left[\begin{array}{cccc|ccccc} Q & & & & & & & & \\ & Q & & & & & & & \\ & & Q & & & & & & \\ & & & Q & & & & & \\ \hline & & & & R & & & & \\ & & & & & R & & & \\ & & & & & & R & & \\ & & & & & & & R & \\ & & & & & & & & R \end{array}\right]_{9\times 9} \quad z=\begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_5 \\ \hline y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_5 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

是否存在唯一解:

$$\hat{x}=(\underline{H^TW^{-1}H})^{-1}H^TW^{-1}z$$

是否满秩,满秩则有唯一解.

这里关于 H 的维度,如果状态转移方程是写到 A_{k-1}、H 就应该是 12×6 维,如果要去掉初始状态的行/列,即行去掉 $[1 \ \cdots]$ $[-A_0 \ 1 \ \cdots]$ $[C_0 \ \cdots]$ 这三行. 列去掉 $\begin{bmatrix} 1 \\ -A_0 \\ \vdots \\ C_0 \\ \vdots \end{bmatrix}$ 这一列,就变成了 9×5 的矩阵.

状态转移 如果是写到 A_k,那么会变成 10×6 的矩阵,所以下一题会有 $\begin{matrix} 5\times 5 \\ 6\times 6 \end{matrix}$ 两种写法?

3.6.2 ，令 $Q=R=1$，证明

$H^TW^{-1}H$，$W^{-1}=I$，故 $H^TW^{-1}H=H^TH$

$$
\underset{5\times 9}{H^TH}=\begin{bmatrix}
-1 & & & & 1 & & & & \\
1 & -1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & -1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & -1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & & 1
\end{bmatrix}
\underset{9\times 5}{\begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & \\
 & -1 & 1 & & \\
 & & -1 & 1 & \\
 & & & -1 & 1 \\
1 & & & & \\
 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & 1
\end{bmatrix}}
$$

$$
\underset{5\times 5}{=}\begin{bmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{bmatrix}
\quad 可以设 L=\begin{bmatrix}
L_0 & & & & \\
L_{10} & L_1 & & & \\
 & L_{21} & L_2 & & \\
 & & L_{32} & L_3 & \\
 & & & L_{43} & L_4
\end{bmatrix}
$$

$$
LL^T=\begin{bmatrix}
l_0l_0 & l_0l_{10} & & & \\
l_0l_{10} & l_{10}l_{10}+l_1l_1 & l_{21}l_1 & & \\
 & l_{21}l_1 & l_{21}l_{21}+l_2l_2 & l_{32}l_2 & \\
 & & l_{32}l_3 & l_{32}l_{32}+l_3l_3 & l_{43}l_3 \\
 & & & l_{43}l_3 & l_{43}l_{43}+l_4l_4
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
2 & -1 & & & \\
-1 & 3 & -1 & & \\
 & -1 & 3 & -1 & \\
 & & -1 & 3 & -1 \\
 & & & -1 & 2
\end{bmatrix}
$$

对应项相等:

$l_0^2=2 \quad l_0l_{10}=-1 \Rightarrow l_0=\sqrt{2}$，$l_{10}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$l_{10}^2+l_1^2=3$，$l_{21}l_1=-1 \Rightarrow l_1=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$l_{21}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$

$l_{21}^2+l_2^2=3$，$l_{32}l_2=-1 \Rightarrow l_2=\sqrt{\frac{13}{5}}$，$l_{32}=-\sqrt{\frac{5}{13}}$

$l_{32}^2+l_3^2=3$，$l_{43}l_3=-1 \Rightarrow l_3=\sqrt{\frac{34}{13}}$，$l_{43}=-\sqrt{\frac{13}{34}}$

$l_{43}^2+l_4^2=2 \Rightarrow l_4=\sqrt{\frac{55}{34}}$

3.6.6

答案参考某乎.

设辅助矩阵 H:

$$H=\begin{bmatrix}0&&&&&\\1&0&&&&\\0&1&0&&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&&\\0&0&\cdots&1&0&\\0&0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}$$

，则 $C=E+AH+A^2H^2+A^3H^3+\cdots A^kH^k$

$$C(E-AH)=E-A^{k+1}H^{k+1}$$

$$=(E+AH+A^2H^2+A^3H^3+\cdots+A^kH^k)(E-AH)$$

$$=E-AH+AH-A^2H^2+A^2H^2-\cdots-A^{k+1}H^{k+1}$$

$$=E-A^{k+1}H^{k+1}$$

$$H^2=\begin{bmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\1&0&\ddots&&&\\\vdots&1&\ddots&\ddots&&\\0&0&\cdots&1&0&0\end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$H^k=\begin{bmatrix}0&&&\\0&\ddots&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&\\1&0&\cdots&0\;0\end{bmatrix}$$

$H_{k+1}=0$

故 $C(E-AH)=E-A^{k+1}H^{k+1}=E$

$$C^{-1}=E-AH=\begin{bmatrix}1&&&&\\-A&1&&&\\&-A&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-A&1\end{bmatrix}$$