2 群的性质

{Z, +} 是否为群?若是,验证其满足群定义;若不是,说明理由。
{N, +} 是否为群?若是,验证其满足群定义;若不是,说明理由。

1. 封闭性：$\forall Z_1, Z_2 \in Z$, 满足 $Z_1 + Z_2 \in Z$
2. 结合性：$\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in Z$, 满足 $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$
3. 幺元：$\exists Z_0 = 0, \forall Z_1 \in Z$, 满足 $Z_1 + 0 = 0 + Z_1 = Z_1$
4. 逆：$\forall Z_1 \in Z, \exists -Z_1$, 满足 $Z_1 + (-Z_1) = 0$

Z 满足“封结幺逆”，为群；

{N,+}不为群，因为 N 为非负整数，故不满足逆的条件；

3 验证向量叉乘的李代数性质

验证向量叉乘的李代数性质 （验证 $g=(R^3, R, \times)$）

1) 封闭性

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in R^3$, $\vec{a} \times \vec{b} \in R^3$

2) 双线性

$\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{z} \in R^3$, $a, b \in R$.

$[a\vec{X} + b\vec{Y}, \vec{z}] = (a\vec{X} + b\vec{Y}) \times \vec{z} = a(\vec{X} \times \vec{z}) + b(\vec{Y} \times \vec{z})$
$= a[\vec{X}, \vec{z}] + b[\vec{Y}, \vec{z}]$

同理，$[\vec{z}, a\vec{X} + b\vec{Y}] = a[\vec{z}, \vec{X}] + b[\vec{z}, \vec{Y}]$ 也成立

3) 自反性

$\forall \vec{X} \in V$, $[\vec{X}, \vec{X}] = (\vec{a} \times \vec{a}) = 0$

4) 雅可比等价

$[\vec{X}, [\vec{Y}, \vec{z}]] + [\vec{Y}, [\vec{z}, \vec{X}]] + [\vec{z}, [\vec{X}, \vec{Y}]] = 0$

$\vec{X} \times (\vec{Y} \times \vec{z}) + \vec{Y} \times (\vec{z} \times \vec{X}) + \vec{z} \times (\vec{X} \times \vec{Y})$ 化简后为 0,

上式成立

4 推导 SE(3) 的指数映射

课上给出了 SO(3) 的指数映射推导,但对于 SE(3),仅介绍了结论,没有给出详细推导。请你完成 SE(3) 指数映射部分,有关左雅可比的详细推导。

3、推导SE(3)指数映射

设$\xi=[\rho,\phi]^T\in se(3)$，它的指数映射为：

$$\exp(\xi^\wedge)=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n\rho \\ 0^T & 1\end{bmatrix}$$

令$\rho=\theta a$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n=\frac{\sin\theta}{\theta}I+(I-\frac{\sin\theta}{\theta})aa^T+\frac{1-\cos\theta}{\theta}a^\wedge=J_l$

已知：$a^\wedge a^\wedge=aa^T-I \qquad a^\wedge a^\wedge a^\wedge=a^\wedge(aa^T-I)=-a^\wedge$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\phi^\wedge)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\theta a^\wedge)^n$$

$$=I+\frac{1}{2!}\theta a^\wedge+\frac{1}{3!}\theta^2a^\wedge a^\wedge+\frac{1}{4!}\theta^3a^\wedge a^\wedge a^\wedge+\frac{1}{5!}\theta^4a^\wedge a^\wedge a^\wedge a^\wedge$$

$$=aa^T-a^\wedge a^\wedge+\frac{1}{2!}\theta a^\wedge+\frac{1}{3!}\theta^2a^\wedge a^\wedge-\frac{1}{4!}\theta^3a^\wedge-\frac{1}{5!}\theta^4a^\wedge a^\wedge$$

$$=aa^T+(\frac{1}{2!}\theta-\frac{1}{4!}\theta^3\cdots)a^\wedge+(-1+\frac{1}{3!}\theta^2-\frac{1}{5!}\theta^4\cdots)(aa^T-I)$$

$$=aa^T+\frac{1-\cos\theta}{\theta}a^\wedge+(-\frac{\sin\theta}{\theta})(aa^T-I)$$

$$=\frac{\sin\theta}{\theta}I+(1-\frac{\sin\theta}{\theta})aa^T+\frac{1-\cos\theta}{\theta}a^\wedge$$

5 伴随 (2 分,约 1 小时)

5 伴随（2 分，约 1 小时）

在 SO(3) 和 SE(3) 上，有一个东西称为伴随（Adjoint）。下面请你证明 SO(3) 伴随的性质。

对于 SO(3)，有：

$$\boldsymbol{R}\exp(\boldsymbol{p}^\wedge)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\exp\left((\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge\right). \tag{4}$$

此时称 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}$。

提示：首先你需要证明 $\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3, \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})^\wedge$，页面`https://math.stackexchange.com/questions/2190603/derivation-of-adjoint-for-so3`提示了一种简洁的途径。

对于 SE(3)，有：

$$\boldsymbol{T}\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\boldsymbol{T}^{-1}=\exp\left((\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{\xi})^\wedge\right) \tag{5}$$

其中 $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})$ 定义为：

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t}^\wedge\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

这个性质将在后文的 Pose Graph 优化中用到。但是 SE(3) 的证明较为复杂，不作要求。

完整的 SO(3) 和 SE(3) 性质见[1]和[2]。

SO(3)和SE(3)上，有个东西叫伴随(Adjoint)

证明SO(3)伴随性质。

$$R\exp(p^\wedge)R^T=\exp((Rp)^\wedge)$$

此时称 $Ad(R)=R$

① 先证明 $Rp^\wedge R^T=(Rp)^\wedge$

首先假设：

$$R=[\vec{r_1}\ \vec{r_2}\ \vec{r_3}]\in\mathbb{R}^{3\times3},\quad p=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

首先在等式两侧同时左乘 R^{-1} 和同时右乘 R，等式变为证明：$p^\wedge=R^T(Rp)^\wedge R$

对于 $p^\wedge=R^T(Rp)^\wedge R$，对右侧展开

$$R^T(Rp)^\wedge R=R^T(\vec{r_1}p_1+\vec{r_2}p_2+\vec{r_3}p_3)^\wedge R$$

，又 p_1,p_2,p_3 为一维标量，$\vec{r_1},\vec{r_2},\vec{r_3}$ 间为加法

故，上式等价于

$$R^T(\vec{r_1}^\wedge p_1+\vec{r_2}^\wedge p_2+\vec{r_3}^\wedge p_3)R$$
$$=p_1R^T\vec{r_1}^\wedge R+p_2R^T\vec{r_2}^\wedge R+p_3R^T\vec{r_3}^\wedge R$$

这里单独观察第一部分，$p_1R^T\vec{r_1}^\wedge R=p_1\begin{bmatrix}\vec{r_1}\\\vec{r_2}\\\vec{r_3}\end{bmatrix}\vec{r_1}^\wedge[\vec{r_1}\ \vec{r_2}\ \vec{r_3}]$

展开，旋转矩阵三向量正交，故

$$p_1\begin{bmatrix}\vec{r_1}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_1} & \vec{r_1}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_2} & \vec{r_1}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_3}\\ \vec{r_2}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_1} & \vec{r_2}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_2} & \vec{r_2}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_3}\\ \vec{r_3}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_1} & \vec{r_3}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_2} & \vec{r_3}\vec{r_1}^\wedge\vec{r_3}\end{bmatrix}=p_1\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\Longrightarrow$$

同理，~~故乘~~下两项为

$$\begin{bmatrix}0&0&p_2\\0&0&0\\-p_2&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0&-p_3&0\\p_3&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$R^T(Rp)^\wedge R=\begin{bmatrix}0&-p_3&p_2\\p_3&0&-p_1\\-p_2&p_1&0\end{bmatrix}=p^\wedge$$

证明SO(3)的伴随性质 $R\exp(p^\wedge)R^T=\exp((Rp)^\wedge)$

~~在上一步的基础上：~~

$$\cancel{R\exp(p^\wedge)R^T=R\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(p^\wedge)^n}{n!}R^T}$$

$$\left(R^T(Rp)^\wedge R\right)^n$$

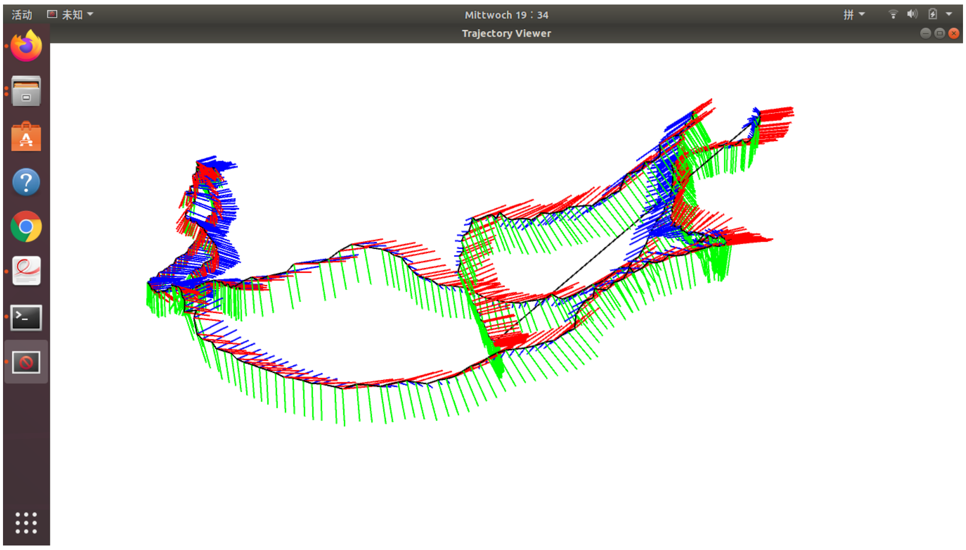
$$e^{p^\wedge}=e^{\theta a^\wedge}=\cos\theta I+(1-\cos\theta)aa^T+\sin\theta a^\wedge$$

$$Re^{p^\wedge}R^T=R(\cos\theta I+(1-\cos\theta)aa^T+\sin\theta a^\wedge)R^T$$
$$=\cos\theta RR^T+(1-\cos\theta)Raa^TR^T+\sin\theta Ra^\wedge R^T$$
$$=\cos\theta I+(1-\cos\theta)Ra(Ra)^T+\sin\theta(Ra)^\wedge$$

之前已证明 $Rp^\wedge R^T=(Rp)^\wedge$

$$e^{(\theta Ra)^\wedge}=e^{(R\theta a)^\wedge}=e^{(Rp)^\wedge}$$

6 轨迹的描绘



描述机器人在世界当中的运动轨迹，准确的说就是在描述机器人坐标系原点 O_c 在世界坐标系 O_w 下的坐标。

事实上, T_{wc} 的平移部分正好表达了这一信息.下面这个公式就告诉了我们为何画出 T_{wc} 的平移 部分就得到了机器人的轨迹.

$$O_w = T_{wc}O_c = t_{wc}$$

这里 T_{wc} 是4x4矩阵，所以要把 O_c 也齐次化，此时原点 O_c 实际上为[0，0，0，1]T 这样一个4x1的列向量，所以最后得到平移向量 $t_{wc} = [t_x, t_y, t_z, 1]$ T, 前3项就是我们需要的，它就是变换矩阵 T_{wc} 的平移部分.

7 * 轨迹的误差