

作业
深蓝学院

**基础题**

① 证明式(15)中, 取  $y = u_4$  是该问题的最优解。提示: 设  $y' = u_4 + v$ , 其中  $v$  正交于  $u_4$ , 证明

$$y'^T D^T D y' \geq y^T D^T D y$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

② 请依据本节课公式, 完成特征点三角化代码, 并通过仿真测试

**提升题**

① 请对测量值加上不同噪声 (增大测量噪声方差), 观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化, 并绘制比例值的变化曲线。

② 固定噪声方差参数, 将观测图像帧扩成多帧 (如 3, 4, 5 帧等), 观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化, 并绘制比例值的变化曲线。

## 1 基础题:题一

### 1.1 证明式(15)中,取 $y = u_4$ 是该问题的最优解

根据矩阵理论定义: 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $r(A) = r$ ,  $A^* A$  的大于零的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , 则  $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_r}$  称为  $A$  的奇异值。

对于齐次线性方程  $A * x = 0$  时, 当  $A$  的秩大于列数时, 就需要最小二乘解, 在  $\|x\| = 1$  的约束下, 其  $A^T A$  最小特征值所对应的特征向量。

证明: 本题中

$$\min_y \|Dy\|_2^2, s.t. \|y\| = 1 \quad (1)$$

其中  $D \in \mathbb{R}^{2n+4}$ , 观测次数大于等于 2 时, 即秩大于列数时, 需要最小二乘求解。

对于目标函数有:

$$\|Dy\|_2^2 = y^T D^T D y = y^T \lambda y = \lambda \|y\|^2 = \lambda \quad (2)$$

其中  $\lambda$  是  $D^T D$  的特征值。

对  $D^T D$  进行 SVD:

$$D^T D = \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 u_i v_i^T \quad (3)$$

其中  $\sigma_i$  为奇异值,  $\lambda_i = \sigma_i^2$  为特征值, 且降序排列,  $u_i, v_i$  正交。故最小目标函数值对应的特征值为  $\sigma_4^2$ 。特征值  $\sigma_4^2$  对应的  $y$  为  $u_4$ , 得证。

### 1.2 完成代码部分

```
monster@monster-Luo:/media/monster/学习资料/网课/手写VIO/course6_hw/build$ make
Scanning dependencies of target estimate_depth
[ 50%] Building CXX object CMakeFiles/estimate_depth.dir/triangulate.cpp.o
[100%] Linking CXX executable estimate_depth
[100%] Built target estimate_depth
monster@monster-Luo:/media/monster/学习资料/网课/手写VIO/course6_hw/build$ ./estimate_depth
DTD :
      7      0 -0.486169  24.7361
      0      7  5.90714 -47.5284
-0.486169  5.90714  5.6799 -47.4055
 24.7361 -47.5284 -47.4055  457.196
U :
0.0530721  0.846878  0.41558 -0.327528
-0.103079  0.431629 -0.895388 -0.0367562
-0.102585  0.309021  0.122288  0.937565
 0.987945  0.0316285 -0.103049  0.111113
S :
    468.406
    7.74642
    0.723255
5.30104e-16
V :
0.0530721  0.846878  0.41558  0.327528
-0.103079  0.431629 -0.895388  0.0367562
-0.102585  0.309021  0.122288 -0.937565
 0.987945  0.0316285 -0.103049 -0.111113
ground truth:
-2.9477 -0.330799  8.43792
your result:
-2.9477 -0.330799  8.43792
monster@monster-Luo:/media/monster/学习资料/网课/手写VIO/course6_hw/build$
```

其中  $U, V$  正交,  $S$  为特征值, 降序。

通过判断该解的有效性:  $\sigma_4 \ll \sigma_3, 7.758e-16 \ll 0.723$ , 故认为三角化有效。