1.熟悉 Eigen 矩阵运算，了解一些有关线性方程组数值解法的原理。
设线性方程 Ax = b,在 A 为方阵的前提下,请回答以下问题:

1. 在什么条件下,x 有解且唯一?

a)齐次线性方程组，就是方程组的等式右边是 0 的方程组
对于$Ax=0$的齐次线性方程组，列出其系数矩阵（不需要增广矩阵），使用高斯消元法化简，化为阶梯形矩阵，化简后，判断有效方程组个数是否小于未知数个数。
如果有效方程组个数小于未知数个数，叫做**有非零解（多个解）;** 如果相等，叫做只有**零解（唯一解）。**

b) 非齐次线性方程组，就是方程组的等式右边不为 0 的方程组，系数加上方程等式右边的矩阵，叫做**增广矩阵。**
通过高斯消元法，化简，化成阶梯行方程组
1. 先看看是否出现不相容方程，如果出现，无解。
2. 有解的情况下，再看看有效方程个数是否小于未知数个数，如果是，则有无穷多个解。如果正好相等，则有唯一解

2. 高斯消元法的原理是什么?

它通过逐步消除未知数来将原始线性系统转化为另一个更简单的等价的系统。它的实质是通过初等行变化，将线性方程组的增广矩阵转化为行阶梯矩阵**(row echelon form).**

原线性方程组⟶高斯消元法⟶下三角或上三角形式的线性方程组⟶前向或向后替换算法求解

3. QR 分解的原理是什么?

QR 分解定义：
对于 n 阶方阵 A，若存在正交矩阵 Q 和上三角矩阵 R，使得 A = QR，则该式称为矩阵 A 的完全 QR 分解或正交三角分解。(对于可逆矩阵 A 存在完全 QR 分解)

4. Cholesky 分解的原理是什么?

Cholesky 分解是一种分解矩阵的方法, 在线形代数中有重要的应用。Cholesky 分解把矩阵分解为一个下三角矩阵以及它的共轭转置矩阵的乘积（那实数界来类比的话，此分解就好像求平方根）。与一般的矩阵分解求解方程的方法比较，Cholesky 分解效率很高。

Cholesky 分解的条件

Hermitianmatrix：矩阵中的元素共轭对称（复数域的定义，类比于实数对称矩阵），Hermitiank 意味着对于任意向量 x 和 y，(x*)Ay 共轭相等
Positive-definite：正定（矩阵域，类比于正实数的一种定义）。正定矩阵 A 意味着，对于任何向量 x，(x^T)Ax 总是大于零(复数域是(x*)Ax>0)

Cholesky 分解的形式

可记作 A = L L*。其中 L 是下三角矩阵。L*是 L 的共轭转置矩阵。
可以证明，只要 A 满足以上两个条件，L 是唯一确定的，而且 L 的对角元素肯定是正数。反过来也对，即存在 L 把 A 分解的话，A 满足以上两个条件；
如果 A 是半正定的（semi-definite），也可以分解，不过这时候 L 就不唯一了。
特别的，如果 A 是实数对称矩阵，那么 L 的元素肯定也是实数。

另外，满足以上两个条件意味着 A 矩阵的特征值都为正实数，因为 Ax = lamda * x,
(x*)Ax = lamda * (x*)x > 0, lamda > 0

$$A = LL^T = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^2 & & (symmetric) \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{A_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{A_{21}}{L_{11}} & \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} & 0 \\ \frac{A_{31}}{L_{11}} & \frac{A_{32} - L_{31}L_{21}}{L_{22}} & \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \end{bmatrix}$$

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2}$$

$$L_{i,j} = \frac{\left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k}\right)}{L_{j,j}} for\, i > j$$

5. 编程实现 A 为 100×100 随机矩阵时,用 QR 和 Cholesky 分解求 x 的程序。你可以参考本次课用到的 useEigen 例程。
提示:你可能需要参考相关的数学书籍或文章。请善用搜索引擎。Eigen 固定大小矩阵最大支持到 50,所以会用到动态大小的矩阵。

4 旋转的表达 (2 分,约 1 小时)
课程中提到了旋转可以用旋转矩阵、旋转向量与四元数表达,其中旋转矩阵与四元数是日常应用中常见的表达方式。请根据课件知识,完成下述内容的证明。
1. 设有旋转矩阵 R,证明 R T R = I 且 det R = +1

证明：假设有两组正交集(e_1, e_2, e_3)与(e_1', e_2', e_3')，以及在这两组正交集下的坐标$a = (a_1, a_2, a_3)$与$a' = (a_1', a_2', a_3')$;

根据坐标系的定义：

$$[e_1, e_2, e_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [e_1', e_2', e_3']\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_1^T e_2' & e_1^T e_3' \\ e_2^T e_1' & e_2^T e_2' & e_2^T e_3' \\ e_3^T e_1' & e_3^T e_2' & e_3^T e_3' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} \doteq Ra' \tag{1}$$

其中R为旋转矩阵，$R^T R$为：

$$R^T R = \begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_2^T e_1' & e_3^T e_1' \\ e_1^T e_2' & e_2^T e_2' & e_3^T e_2' \\ e_1^T e_3' & e_2^T e_3' & e_3^T e_3' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1^T e_1' & e_1^T e_2' & e_1^T e_3' \\ e_2^T e_1' & e_2^T e_2' & e_2^T e_3' \\ e_3^T e_1' & e_3^T e_2' & e_3^T e_3' \end{bmatrix} = I \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(e_1^T e_1') \times (e_1^T e_1') + (e_2^T e_1') \times (e_2^T e_1') + (e_3^T e_1') \times (e_3^T e_1') \\ = (e_1')^T (e_1 e_1^T + e_2 e_2^T + e_3 e_3^T) e_1' = (e_1')^T e_1' = 1\end{aligned}$$

由于$1 = det(I) = det(R^T R) = det(R^T)det(R) = (det(R))^2$,所以$det(R) = \pm 1$.

2. 设有四元数 q,我们把虚部记为 ε,实部记为 η,那么 q = (ε, η)。请说明 ε 和 η 的维度。

实部 1 维；虚部 3 维

3. 运算证明

设四元数表示为$q = (\varepsilon, \eta)$,其中ε为虚部，η为实部。
定义元算$+$和$\oplus$为:

$$q^+ = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} + \varepsilon^\times & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \eta \end{bmatrix}, q^\oplus = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} - \varepsilon^\times & \varepsilon \\ -\varepsilon^T & \eta \end{bmatrix}$$

则：

$$\begin{aligned} q_1^+ q_2 &= \begin{bmatrix} \eta_1 \mathbf{1} + \varepsilon_1^\times & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1^T & \eta_1 \end{bmatrix} [\varepsilon_2, \eta_2]^T \\ &= [\eta_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1^\times \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \eta_2, -\varepsilon_1^T \varepsilon_2 + \eta_1 \eta_2]^T \\ &= q_1 q_2 \end{aligned}$$

5 罗德里格斯公式的证明

罗德里格斯公式描述了从旋转向量到旋转矩阵的转换关系。设旋转向量长度为 θ,方向为 n,那么旋转矩阵 R 为:

R = cos θI + (1 − cos θ)nn T + sin θn ∧ .

我们在课程中仅指出了该式成立,但没有给出证明。请你证明此式

$$\vec{v}=\vec{v}_{\parallel}+\vec{v}_{\perp}(Eq.1)$$

$$\vec{v}'=\vec{v}'_{\parallel}+\vec{v}'_{\perp}(Eq.2)$$

$$\vec{v}_{\parallel}=\vec{v}'_{\parallel}=(\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}=(\vec{n}\vec{n}')\vec{v}(Eq.3)$$

$$\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}=\vec{n}\times(\vec{v}-\vec{v}_{\parallel})=\vec{n}\times\vec{v}(Eq.4)$$

$$\left|\vec{n}\right|=1(Eq.5)$$

公式一和公式二为向量的正交分解，分解为平行转轴的方向和垂直转轴的方向，公式三表明了旋转前后的平行分量没有变化，并且可以表示成为原向量经法向量矩阵变换后的向量。公式四表明了法向量与垂直分量的叉积和法向量与原始向量的叉积是相同的，公式五显而易见是因为此处为单位法向量

$$\vec{v}'_{\perp}=x\cdot\vec{v}_{\perp}+y\cdot\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}=\cos\theta\cdot\vec{v}_{\perp}+\sin\theta\cdot\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}$$

$$(x=\frac{\left|\vec{v}'_{\perp}\cos\theta\right|}{\left|\vec{v}_{\perp}\right|}=\cos\theta,y=\frac{\left|\vec{v}'_{\perp}\sin\theta\right|}{\left|\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}\right|}=\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{v}'&=\vec{v}_{\parallel}+\cos\theta\cdot\vec{v}_{\perp}+\sin\theta\cdot\vec{n}\times\vec{v}_{\perp}\\&=\vec{v}_{\parallel}+\cos\theta\cdot(\vec{v}-\vec{v}_{\parallel})+\sin\theta\cdot\vec{n}\times\vec{v}\\&=(1-\cos\theta)\cdot\vec{v}_{\parallel}+\cos\theta\cdot\vec{v}+\sin\theta\cdot\vec{n}\times\vec{v}\\&=(1-\cos\theta)\cdot(\vec{n}\vec{n}')\vec{v}+\cos\theta\cdot\vec{v}+\sin\theta\cdot\vec{n}\times\vec{v}\\&=\boxed{[(1-\cos\theta)\vec{n}\vec{n}'+\cos\theta\cdot I+\sin\theta\cdot\vec{n}\hat{}]}\vec{v}\end{aligned}$$

6.四元数运算性质的验证

课程中介绍了单位四元数可以表达旋转。其中,在谈论用四元数 q 旋转点 p 时,结果为:

p ′ = qpq −1 .

我们说,此时 p ′ 必定为虚四元数(实部为零)。请你验证上述说法。

此外,上式亦可写成矩阵运算:p ′ = Qp。请根据你的推导,给出矩阵 Q。注意此时 p 和 p ′ 都是四元数形式的变量,所以 Q 为 4 × 4 的矩阵。

提示:如果使用第 4 题结果,那么有:

p ′ = qpq −1 = q + p + q −1

$\oplus$

$= q + q^{-1} p.$

(6)

从而可以导出四元数至旋转矩阵的转换方式:

$\oplus$

$R = Im(q + q^{-1}).$

其中 Im 指取出虚部的内容。

请说明该程序中哪些地方用到了 C++11 标准的内容。提示:请关注范围 for 循环、自动类型推导、lambda 表达式等内容。

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

class A {
public:
        A(const int& i ) : index(i) {}
        int index = 0;
};

int main() {
        A a1(3), a2(5), a3(9);
        vector<A> avec{a1, a2, a3};
     std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index<a2.index;});
//lambda 表达式，[]表达可以从 main（）函数外部获取其他变量信息，这里为空，表示没有获取；
//(const A&a1, const A&a2)表示()内的参数是每次调用函数时传入的参数
//最后加上的是 Lambda 表达式返回函数体

        for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" ";
//auto 推导 a 的类型，遍历向量 avec 中的元素，& 启用了引用，如果没有则对 avec 中的元素只能读取不能修改
        cout<<endl;
        return 0;
}
```