



北京航空航天大学 实验报告

实验名称: 玻尔共振实验

学号: 20373864
 班级: 200613
 姓名: 谭立德
 同组者: _____
 日期: _____
 评分: _____

一、实验目的:

1. 探究玻尔共振仪中弹性摆轮受迫振动的幅频特性和相频特性, 总结共振现象规律
2. 研究不同阻尼力矩对受迫振动的影响
3. 学习利用频闪法测定运动物体的相位
4. 掌握逐差法和极值取点的数据处理方法

二、实验原理:

物体在周期外力的持续作用下发生的振动称为受迫振动, 这种周期性的外力称为强迫力

摆轮的运动方程: $J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos(\omega t)$

J 为摆轮的转动惯量, $-k\theta$ 为弹性力矩, k 为弹性力矩系数, b 为电磁阻尼力矩系数, M_0 为强迫力矩的幅值, ω 为强迫力的圆频率

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$, $2\beta = \frac{b}{J}$, $m = \frac{M_0}{J}$ 则: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos(\omega t)$

若强迫外力 $m=0$, 则摆轮做阻尼振动, 当 $\omega_0 \gg \beta$, $\theta = \theta_{item} e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha)$
 $\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

当强迫外力 $m \neq 0$, 则摆轮做受迫振动, $\theta = \theta_{item} e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha) + \theta_s \cos(\omega t + \varphi)$

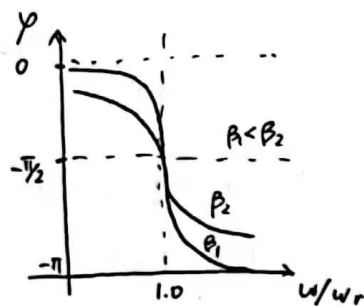
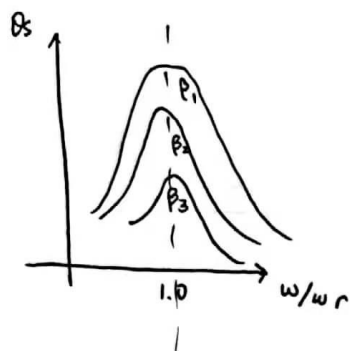
$$\theta_s = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)} \right)$$

当强迫力的圆频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时, θ_s 有极大值, 产生共振, $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, $\theta_r = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$

共振时相位差为 $\varphi_r = \tan^{-1} \left(\frac{-\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta} \right)$

阻尼系数 β 越小, 共振时的圆频率 ω_r 越接近系统的固有频率 ω_0 , 振动幅 θ_r 越大

不同 β 时 稳定受迫振动的幅频特性和相频特性



在峰值附近， $\omega \approx \omega_0$, $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ $\therefore A \approx \frac{m}{2k\omega_0(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}$

由上式可见，当 $|\omega_0 - \omega| = \beta$ 时，振幅降为峰值的 $\frac{1}{2}$ ，根据幅频特性曲线的相应点可确定 β 的值。

三、实验内容与步骤

1. 实验准备：三芯电源线须可靠接地 & 根据是否连接电脑选择单机模式

2. 自由振动——测量摆轮振幅 θ 与自由周期 T 的对应关系，

(1) 选中“自由振荡”。转动摆轮 160° 左右，有效振幅范围 $160^\circ - 50^\circ$ ，得记录振幅 θ_0 ，对应周期 T

(2) 可得振幅 θ 与周期 T 的对应表。

※ 由于此时阻尼很小，测出的周期非常接近摆轮的固有周期 T_0 。

3. 测定阻尼系数 β (阻尼2档)

(1) 选中“阻尼振荡”，选择阻尼2档

(2) 首先将角度盘指针 F 放在 0° 位置，用手转动摆轮 160° 左右，选取 θ_0 在 150° 左右，

开始测量数据，记录10组数据后测量自动关闭

(3) 回查读出摆轮作阻尼振动时振幅数据 A_1, A_2, \dots, A_n 。

(4) 由 $\ln \left(\frac{A_1}{A_{1+n}} \right) = \ln \left(\frac{\theta_0 e^{-\beta t}}{\theta_0 e^{-\beta(t+nT)}} \right) = n\beta \bar{T}$ 求出 β 的值

(n 为阻尼振动次数， A_n 为第 n 次振动振幅， \bar{T} 为阻尼振动周期平均值)。

4. 测定受迫振动的幅频特性和相频特性曲线.

- (1) 选中“强迫振荡”，按默认状态选中电机，启动电机
 - (2) 待摆轮和电机的周期相同，特别是振幅已稳定后，方可开始测量 ($\leq 1^\circ$)
 - (3) 测量前把周期改为10，再打开测量
 - (4) 一次测量完成，显示测量完后，读取摆轮的振幅值，并利用闪光灯测定受迫位移和强迫力之间相位差
 - (5) 改变电机转速，即改变强迫外力矩频率 ω ，进行多次测量。
($\omega \approx 10$)
- * 建议在不同 ω 时均记录下电机转速旋钮上读数 Δp
- * 测量相位时应把闪光灯放在电机转轴前下方，按下闪光灯按钮，根据频闪现象来测量，仔细观察相位位置。

四. 数据记录和处理

1. 自由振动 — 测量摆轮振幅 θ 与自由周期 T 的关系,

振幅 $\theta (^\circ)$	固有周期 $T_0 (s)$	振幅 $\theta (^\circ)$	固有周期 $T_0 (s)$	振幅 $\theta (^\circ)$	固有周期 $T_0 (s)$
158	1.557	134	1.562	110	1.566
156	1.557	133	1.562	109	1.566
155	1.558	131	1.562	106	1.567
153	1.558	130	1.562	104	1.567
152	1.558	129	1.562	102	1.567
		127	1.563	100	1.567
149	1.559			97	1.568
		126	1.563	95	1.568
148	1.559			93	1.568
146	1.559	122	1.564	92	1.569
144	1.560	120	1.564	90	1.569
		118	1.565	88	1.569
142	1.560			86	1.569
141	1.560	116	1.565	83	1.570
		114	1.565	80	1.570
139	1.561			78	1.570
136	1.561	112	1.566		

9.277

振幅 $\theta(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$	振幅 $\alpha(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$	振幅 $\theta(^{\circ})$	固有周期 $T_0(s)$
77	1.571	68	1.572	59	1.573
76	1.571	66	1.572	56	1.573
75	1.571	65	1.572	54	1.573
74	1.571	64	1.572	51	1.574
72	1.572	62	1.572	50	1.574
70	1.572	60	1.573		

2. 阻尼振荡 — 测量阻尼系数 β

序号 i	1	2	3	4	5
振幅 $A_i(^{\circ})$	136	124	112	102	92
序号 $i+5$	6	7	8	9	10
振幅 $A_{i+5}(^{\circ})$	84	76	68	62	56
$\ln A_i$	4.9127	4.8203	4.7185	4.6250	4.5218
$\ln A_{i+5}$	4.4308	4.3307	4.2195	4.1271	4.0234

阻尼档位: 2 档

$$10T = 15.686 s$$

$$\bar{T} = 1.5686 s$$

9.277
18

$$A_i = \theta_{item} e^{-\beta i \bar{T}} \rightarrow \ln A_i = \ln \theta_{item} - i \beta \bar{T} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 10)$$

$$y = a + bx$$

$$\overline{\Delta \ln y} = \left(\sum_{i=1}^5 \ln(A_{i+5}) - \ln(A_i) \right) / 5 = -0.4929 \quad \Delta \ln x = 5$$

$$\because \text{等间隔测量: } \Delta \ln x = x_{mi} - x_i \quad \Delta \ln y_i = y_{mi} - y_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\therefore \bar{b} = \frac{1}{n \Delta \ln x} \sum_{i=1}^n (y_{mi} - y_i) \quad \text{即: } \bar{b} = \frac{\overline{\Delta \ln y}}{\Delta \ln x} = -0.0986$$

$$\text{再由 } \bar{b} = -\beta \bar{T} \quad \text{得} \quad \beta = \frac{-\bar{b}}{\bar{T}} = 0.0628$$

计算不确定度:

$$\frac{u(b)}{\bar{b}} = \sqrt{\left(\frac{u(\overline{\Delta \ln y})}{\overline{\Delta \ln y}} \right)^2 + \left(\frac{u(\Delta \ln x)}{\Delta \ln x} \right)^2}, \quad \frac{u(\beta)}{\beta} = \sqrt{\left(\frac{u(\bar{b})}{\bar{b}} \right)^2 + \left(\frac{u(\bar{T})}{\bar{T}} \right)^2}$$

$$\text{对 } u(\overline{\Delta \ln y}): \quad u_a(\overline{\Delta \ln y}) = \sqrt{\frac{\sum (\Delta \ln y_i - \overline{\Delta \ln y})^2}{k(k-1)}} \quad (k=n) = 0.0032$$

$$u_b(\overline{\Delta \ln y}) = \frac{\Delta \ln y}{\sqrt{3}}, \quad \text{直接取 } u_b(\overline{\Delta \ln y}) = 0$$

$$\text{对 } u(\Delta \ln x): \quad u_a(\Delta \ln x) = 0$$

$$u_b(\Delta \ln x) = \frac{\Delta \ln x}{\sqrt{3}}, \quad \text{直接取 } u_b(\Delta \ln x) = 0$$

$$\therefore \frac{u(b)}{\bar{b}} = \sqrt{\left(\frac{u_a(\overline{\Delta \ln y})}{\overline{\Delta \ln y}} \right)^2 + 0^2} = 0.0065$$

对 $u(\bar{T})$: $u_a(\bar{T}) = 0$

$$u_b(\bar{T}) = \frac{\Delta W(T)}{J_3} = \frac{0.001}{J_3} = 5.7735 \times 10^{-4}$$

故 $\frac{u(\beta)}{\beta} = \sqrt{0.0065^2 + \left(\frac{u_b(\bar{T})}{\bar{T}}\right)^2} = 0.0065$

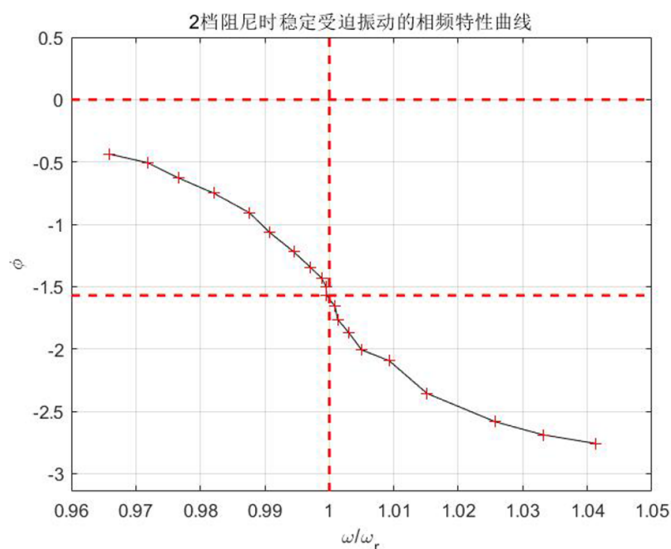
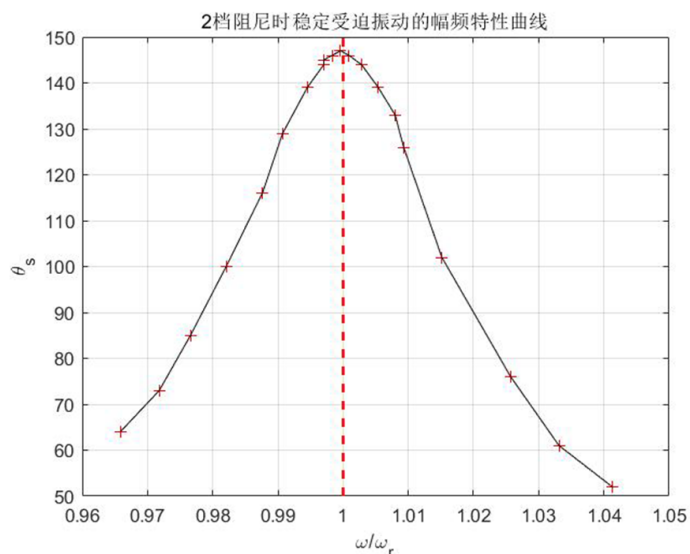
$$\therefore u(\beta) = 0.0004$$

$$\therefore \beta = (0.0628 \pm 0.0004)$$

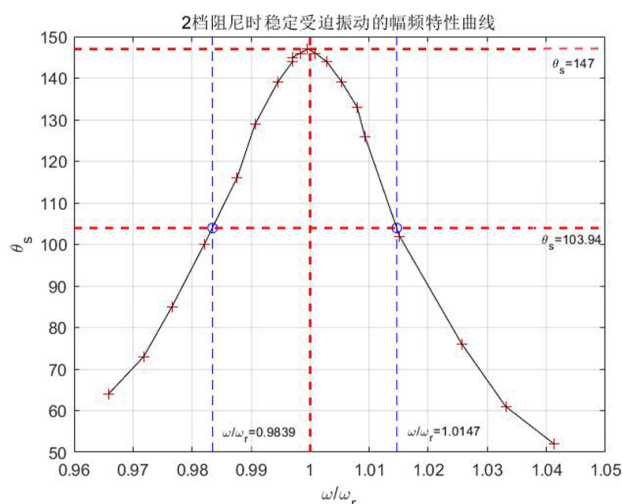
3. 受迫振荡 — 测量幅频特性和相频特性曲线.

转速指示值 (参考值)	摆轮周期 $10T(s)$	振幅 a (°)	电机周期 $10T(s)$	查表1得弹簧对应 固有周期 $T_0(s)$	频闪法测相 位差 $\rho(°)$
3.50	15.111	52	15.111	1.573	158
4.00	15.225	61	15.225	1.572	154
4.50	15.332	76	15.332	1.571	148
5.00	15.441	102	15.441	1.567	135
5.30	15.490	126	15.490	1.563	120
5.50	15.533	139	15.533	1.561	107
5.60	15.569	144	15.569	1.560	101
5.70	15.588	146	15.588	1.559	95
5.80	15.605	147	15.605	1.559	90
5.90	15.624	146	15.624	1.559	86
6.00	15.646	145	15.646	1.559	82
6.10	15.657	144	15.657	1.560	77
6.30	15.703	139	15.703	1.561	70
6.60	15.771	129	15.771	1.562	61
7.00	15.850	116	15.850	1.565	52
7.50	15.962	100	15.962	1.567	43
8.00	16.072	85	16.072	1.569	36
8.50	16.189	73	16.189	1.572	29
9.00	16.287	64	16.287	1.572	25
5.40	15.507	133	15.507	1.562	115
			100	9.27 F	

1) 依据测量数据画出振幅频和相频曲线:



- 数据分析:
- 在 $\omega = \omega_r$ 时, 受迫振动的幅频达到极值, 且为相频曲线图的拐点.
 - 物体在稳定状态时的运动也是与强迫力同频率的简谐振动, 具有稳定的振幅 θ_s , 并与强迫力之间有一个确定的相位差 φ
 - 当强迫频率与系统固有频率相同时, 相位差为 -90°



由图读出 $\theta_r \approx 141$

取 $\theta_s = \frac{1}{2} \theta_r = 103.94^\circ$, 对应图上的横坐标 $\omega/\omega_r = 0.9839$ 和 $\omega/\omega_r = 1.0147$

$$\therefore \text{令 } \omega_1 = 0.9839 \omega_r = 3.9454$$

$$\omega_2 = 1.0147 \omega_r = 4.0689$$

$$\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 0.0618$$

根据幅频特性曲线所推出的 $\beta = 0.0618$, 与根据阻尼振动所求得的 $\beta = 0.0628$ 相差不大,

又考虑到画图所得的误差, 两者误差在可以接受的范围之内.