

玻尔共振实验

共振是一种既重要又普遍的运动形式，在日常生活中，在物理学、无线电学和各种工程技术领域中都会见到。其中，受迫共振现象具有使用价值，许多仪器和装置都是利用共振原理设计制作的。例如，电磁共振是无线电技术的基础，机械共振产生声响，物质对电磁场的特征吸收和耗散吸收可用共振现象来描述，利用核磁共振和顺磁共振研究物质结构等。在利用共振现象的同时，也要防止共振现象引起的破坏，如共振引起建筑物的垮塌、电器元件的烧毁等。因此，研究受迫振动很有必要和具有重大意义。

本实验采用玻尔共振仪来定量研究物体在周期外力作用下作受迫振动的幅频特性和相频特性，并采用频闪法来测定动态的物理量——相位差。

实验目的

1. 探究玻尔共振仪中弹性摆轮受迫振动的幅频特性和相频特性，总结共振现象规律。
2. 研究不同阻尼力矩对受迫振动的影响。
3. 学习利用频闪法测定运动物体的相位差。
4. 掌握逐差法和极值取点的数据处理方法。

实验原理

物体在周期外力的持续作用下发生的振动称为受迫振动，这种周期性的外力称为强迫力。

本实验中，由纯铜圆形摆轮和蜗卷弹簧组成弹性摆轮，可绕转轴摆动。摆轮在摆动过程中受到与角位移 θ 成正比、方向指向平衡位置的弹性恢复力矩的作用；与角速度 $d\theta/dt$ 成正比、方向与摆轮运动方向相反的阻尼力矩的作用；以及按简谐规律变化的外力矩 $M_0 \cos \omega t$ 的作用。根据转动规律，可列出摆轮的运动方程：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -k\theta - b \frac{d\theta}{dt} + M_0 \cos \omega t \quad (1)$$

式中， J 为摆轮的转动惯量， $-k\theta$ 为弹性力矩， k 为弹性力矩系数， b 为电磁阻尼力矩系数， M_0 为强迫力矩的幅值， ω 为强迫力的圆频率。

令 $\omega_0^2 = \frac{k}{J}$ ， $2\beta = \frac{b}{J}$ ， $m = \frac{M_0}{J}$ ，则 (1) 式变为

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2\beta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = m \cos \omega t \quad (2)$$

当强迫外力为零，即 (2) 式等号右边为零时，方程 (2) 就变为了二阶常系数线性齐次微分方程，根据微分方程的相关理论，当 ω_0 远大于 β 时，其解为

$$\theta = \theta_{\text{tem}} e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3)$$

此时摆轮做阻尼振动，振幅 $\theta_{\text{tem}} e^{-\beta t}$ 随时间 t 衰减，振动频率为

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

式中， ω_0 称为系统的固有频率， β 为阻尼系数。当 β 也为零时，摆轮以 ω_0 作简谐振动。

当强迫外力不为零时，方程 (2) 为二阶常系数线性非齐次微分方程，其解为：

$$\theta = \theta_{\text{tem}} e^{-\beta t} \cos(\omega_t t + \alpha) + \theta_s \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

式中，第一部分表示阻尼振动，经过一段时间后衰减消失，设 $A = \theta_{\text{tem}} e^{-\beta t}$ 为阻尼振动振幅；第二部分为稳态解，说明振动系统在强迫力作用下，经过一段时间后即可达到稳定的振动状态。如果外力是按简谐振动规律变化，那么物体在稳定状态时的运动也是与强迫力同频率的简谐振动，具有稳定

的振幅 θ_s ，并与强迫力之间有一个确定的相位差 φ 。

将 $\theta = \theta_s \cos(\omega t + \varphi)$ 带入方程 (2)，要使方程在任何时间 t 恒成立， θ_s 与 φ 需满足一定的条件，由此解得稳定受迫振动的幅频特性及相频特性表达式为

$$\theta_s = \frac{m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (5)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)}\right) \quad (6)$$

由 (5) 式和 (6) 式可以看出，在稳定状态时振幅和相位差保持恒定，振幅 θ_s 与相位差 φ 的数值取决于 β 、 ω_0 、 m 和 ω ，也取决于 J 、 b 、 k 、 M_0 和 ω ，而与振动的起始状态无关。当强迫力的频率 ω 与系统的固有频率 ω_0 相同时，相位差为 -90° 。

由于受到阻尼力的作用，受迫振动的相位总是滞后于强迫力的相位，即 (6) 式中的 φ 应为负值，而反正切函数的取值范围为 $(-90^\circ, 90^\circ)$ ，当由 (6) 式计算得出的角度数值为正时，应减去 180° 将其换算成负值。

由 (5) 式，将 θ_s 对 ω 求极值可得出：当强迫力的圆频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时， θ_s 有极大值，产生共振。若共振时圆频率和振幅分别用 ω_r 、 θ_r 表示，则有

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (7)$$

$$\theta_r = \frac{m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (8)$$

将 (7) 式代入 (6) 式，得到共振时的相位差为

$$\varphi_r = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}\right) \quad (9)$$

(7)、(8)、(9) 式表明，阻尼系数 β 越小，共振时的圆频率 ω_r 越接近系统的固有频率 ω_0 ，振幅 θ_r 越大，共振时的相位差越接近 -90° 。

图 1、图 2 分别表示了在不同 β 时稳定受迫振动的幅频特性和相频特性。

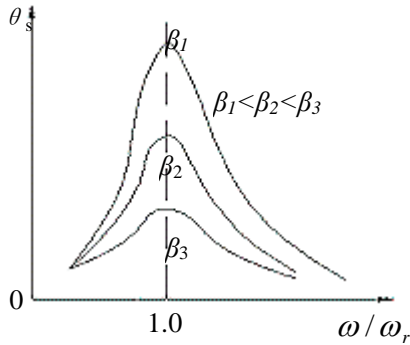


图 1

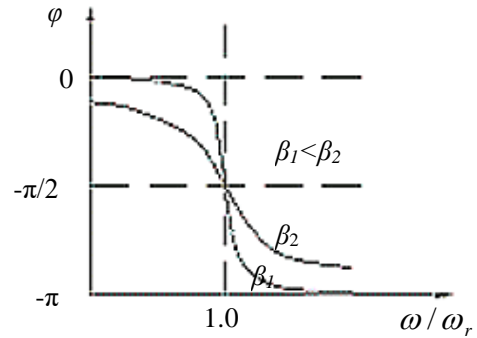


图 2

由图 1 可见， β 越小， θ_r 越大， θ_s 随 ω 偏离 ω_0 而衰减得越快，幅频特性曲线越陡峭。在峰值附近， $\omega \approx \omega_0$ ， $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ ，而 (5) 式可近似表达为

$$\theta_s \approx \frac{m}{2\omega_0\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} \quad (10)$$

由上式可见，当 $|\omega_0 - \omega| = \beta$ 时，振幅降为峰值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，根据幅频特性曲线的相应点可确定 β 的值。

仪器介绍

波尔共振仪由振动仪与电器控制箱两部分组成。

振动仪部分如图 3 所示，铜质圆形摆轮 A 安装在机架转轴上，可绕转轴转动。蜗卷弹簧 B 的一端与摆轮相联，另一端与摇杆 M 相联。自由振动时，摇杆不动，蜗卷弹簧对摆轮施加与角位移成正比的弹性恢复力矩。在摆轮下方装有阻尼线圈 K，电流通过线圈会产生磁场，铜质摆轮在磁场中运动，会在摆轮中形成局部的涡电流，涡电流磁场与线圈磁场相互作用，形成与运动速度成正比的电磁阻尼力矩。强迫振动时，电动机带动偏心轮及传动连杆 E 使摇杆摆动，通过蜗卷弹簧传递给摆轮，产生强迫外力矩，强迫摆轮作受迫振动。

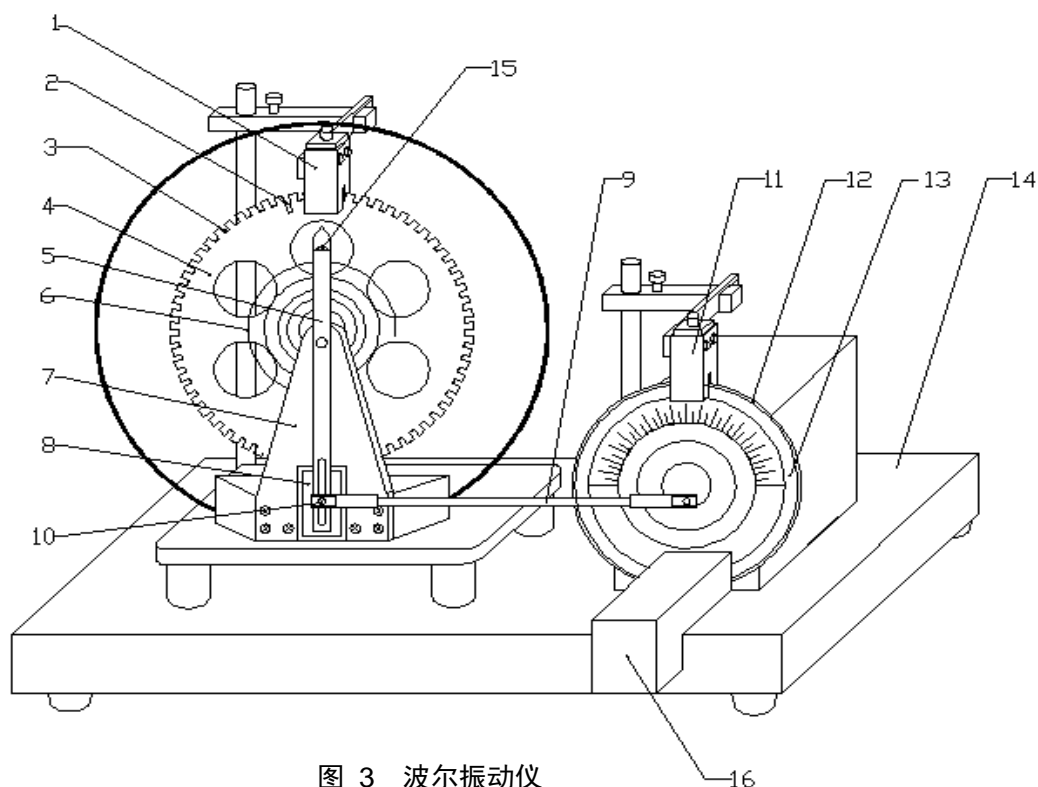


图 3 波尔振动仪

1. 光电门 H; 2. 长凹槽 C; 3. 短凹槽 D; 4. 铜质摆轮 A; 5. 摇杆 M; 6. 蜗卷弹簧 B;
7. 支承架; 8. 阻尼线圈 K; 9. 连杆 E; 10. 摇杆调节螺丝; 11. 光电门 I; 12. 角度盘
G; 13. 有机玻璃转盘 F; 14. 底座; 15. 弹簧夹持螺钉 L; 16. 闪光灯

在摆轮的圆周上每隔 2° 开有许多凹槽，其中一个凹槽（用白漆线标志）比其他凹槽长许多。摆轮正上方的光电门架 H 上装有两个光电门：一个对准长型凹槽，在一个振动周期中长型凹槽两次通过该光电门，光电测控箱由该光电门的开关时间来测量摆轮的周期，并予以显示；另一个对准短凹槽，由一个周期中通过该光电门的凹槽的个数，即可得出摆轮振幅并予以显示。光电门的测量精度为 2° 。

电动机轴上装有固定的角度盘 G 和随电机一起转动的有机玻璃角度指针盘 F，角度指针上方有挡光片。调节控制箱上的十圈电机转速调节旋钮，可以精确改变加于电机上的电压，使电机的转速在实验范围（30-45 转/分）内连续可调，由于电路中采用特殊稳速装置、电动机采用惯性很小的带有测速发电机的特种电机，所以转速极为稳定。在角度盘正上方装有光电门 I，有机玻璃转盘的转动使挡光片通过该光电门，光电检测箱记录光电门的开关时间，测量强迫力的周期。

受迫振动时，摆轮与外力矩的相位差是利用小型闪光灯来测量的。置于角度盘下方的闪光灯受摆轮长型凹槽光电门的控制，每当摆轮上长型凹槽 C 通过平衡位置时，光电门 H 接受光，引起闪光，这一现象称为频闪现象。在受迫振动达到稳定状态时，在闪光灯的照射下可以看到角度指针好像一直“停在”某一刻度处（实际上，角度指针一直在匀速转动）。所以，从角度盘上直接读出摇杆相位

超前于摆轮相位的数值，其负值为相位差 φ 。

波尔共振仪电器控制箱的前面板和后面板分别如图 4 和图 5 所示。

电机转速调节旋钮，可改变强迫力矩的周期。

可以通过软件控制阻尼线圈内直流电流的大小，达到改变摆轮系统的阻尼系数的目的。阻尼档位的选择通过软件控制，共分 3 档，分别是“阻尼 1”、“阻尼 2”、“阻尼 3”。阻尼电流由恒流源提供，实验时根据不同情况进行选择（可先选择在“阻尼 2”处，若共振时振幅太小则可改用“阻尼 1”），振幅在 150° 左右。

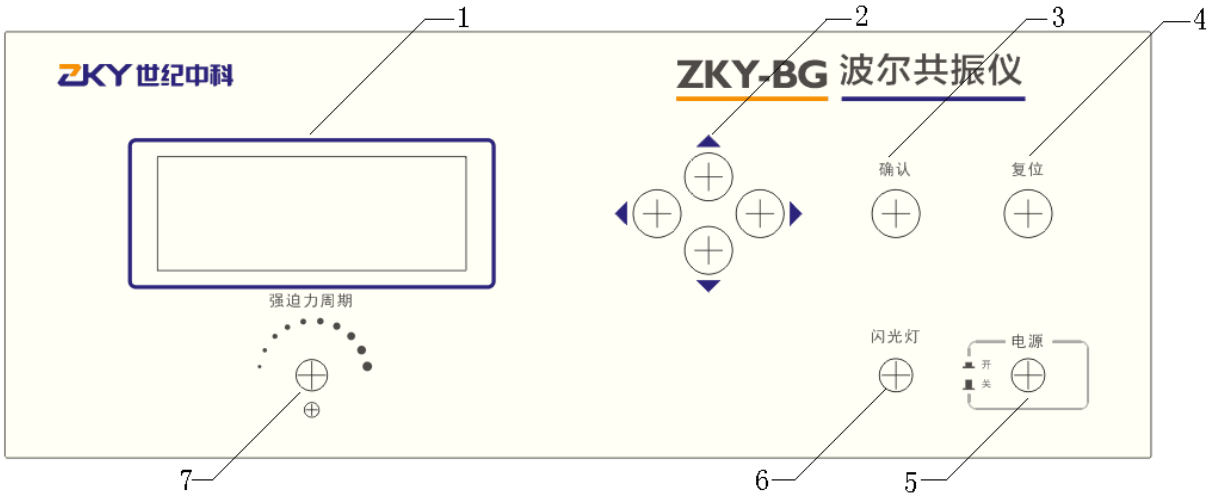


图 4 波尔共振仪前面板示意图

- 1、液晶显示屏幕 2、方向控制键 3、确认按键 4、复位按键
5、电源开关 6、闪光灯开关 7、强迫力周期调节电位器

闪光灯开关用来控制闪光与否，当按住闪光按钮、摆轮长缺口通过平衡位置时便产生闪光，由于频闪现象，可从相位差读盘上看到刻度线似乎静止不动的读数（实际有机玻璃 F 上的刻度线一直在匀速转动），从而读出相位差数值。为使闪光灯管不易损坏，采用按钮开关，仅在测量相位差时才按下按钮。

电器控制箱与闪光灯和波尔共振仪之间通过各种专业电缆相连接。不会产生接线错误之弊病。

实验内容与步骤

1. 实验准备

按下电源开关后，屏幕上出现欢迎界面，其中 NO.0000X 为电器控制箱与电脑主机相连的编号。过几秒钟后屏幕上显示如图一“按键说明”字样。符号“◀”为向左移动；“▶”为向右移动；“▲”为向上移动；“▼”向下移动。下文中的符号不再重新介绍。

注意：为保证使用安全，三芯电源线须可靠接地。

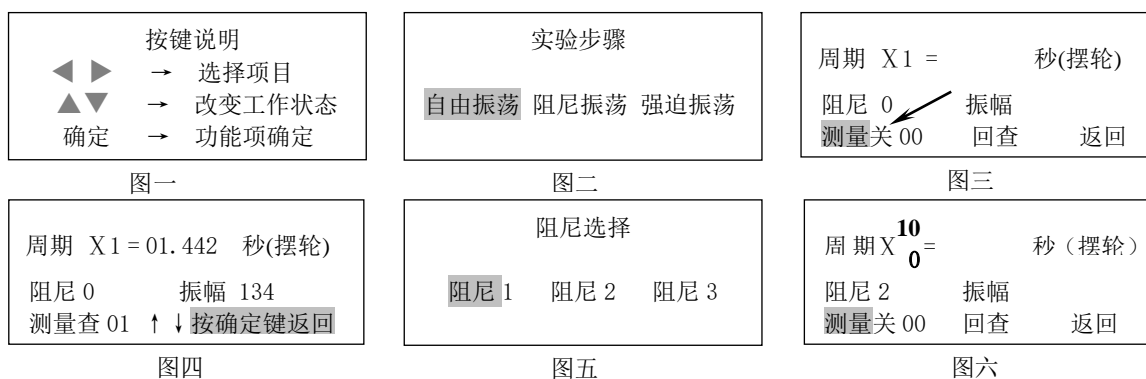
2. 选择实验方式

根据是否连接电脑选择**单机模式**。

3. 自由振动——测量摆轮振幅 θ 与自由振动周期 T 的对应关系

自由振动实验的目的，是为了测量摆轮的振幅 θ 与自由振动周期 T 的关系。

在图一状态按确认键，显示图二所示的实验类型，默认选中项为**自由振荡**，字体反白为选中。再按确认键显示:如图三



用手转动摆轮 160° 左右，放开手后按“▲”或“▼”键，测量状态由“关”变为“开”，控制箱开始记录实验数据，振幅的有效数值范围为： $160^\circ \sim 50^\circ$ (振幅小于 160° 测量开，小于 50° 测量自动关闭)。测量显示关时，此时数据已保存并发送主机。

查询实验数据，可按“◀”或“▶”键，选中回查，再按确认键如图四所示，表示第一次记录的振幅 $\theta_0 = 134^\circ$ ，对应的周期 $T = 1.442$ 秒，然后按“▲”或“▼”键查看所有记录的数据，该数据为每次测量振幅相对应的周期数值，回查完毕，按确认键，返回到图三状态。此法可得到振幅 θ 与周期 T 的对应表，该对应表将在稍后的“幅频特性和相频特性”数据处理过程中使用。由于此时阻尼很小，测出的周期非常接近摆轮的固有周期 T_0 。

若进行多次测量可重复操作，自由振荡完成后，选中返回，按确认键回到前面图二进行其它实验。

因电器控制箱只记录每次摆轮周期变化时所对应的振幅值，因此有时转盘转过光电门几次，测量才记录一次（其间能看到振幅变化）。当回查数据时，有的振幅数值被自动剔除了（当摆轮周期的第 5 位有效数字发生变化时，控制箱记录对应的振幅值。控制箱上只显示 4 位有效数字，故学生无法看到第 5 位有效数字的变化情况）。

4. 测定阻尼系数 β

在图二状态下，根据实验要求，按“▶”键，选中阻尼振荡，按确认键显示阻尼：如图五。阻尼分三个档次，阻尼 1 最小，选择阻尼 2 档，按确认键显示：如图六。

首先将角度盘指针 F 放在 0° 位置，用手转动摆轮 160° 左右，选取 θ_0 在 150° 左右，按“▲”或“▼”键，测量由“关”变为“开”并记录数据，仪器记录十组数据后，测量自动关闭，此时振幅大小还在变化，但仪器已经停止记数。

阻尼振荡的回查同自由振动类似，请参照上面操作。

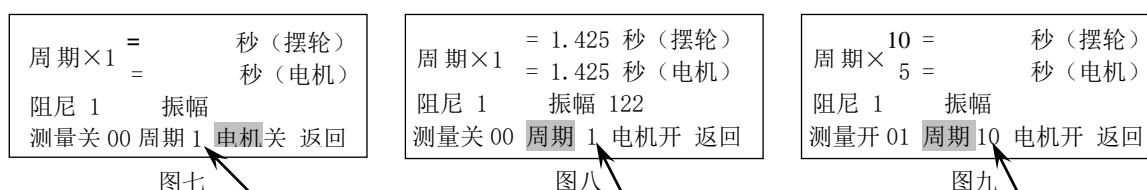
从液晶窗口读出摆轮作阻尼振动时的振幅数值 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ，利用公式

$$\ln \frac{A_i}{A_{i+n}} = \ln \frac{\theta_i e^{-\beta t}}{\theta_i e^{-\beta(t+nT)}} = n\beta T \quad (11)$$

求出 β 值，式中 n 为阻尼振动的周期次数， A_n 为第 n 次振动时的振幅， \bar{T} 为阻尼振动周期的平均值。此值可以测出 10 个摆轮振动周期值，然后取其平均值。

5. 测定受迫振动的幅度特性和相频特性曲线

在进行强迫振动前必须先做阻尼振荡，否则无法实验。



仪器在图二状态下，选中强迫振荡，按确认键显示：如图七默认状态选中电机。

按“▲”或“▼”键，让电机启动。此时保持周期为 1，待摆轮和电机的周期相同，特别是振

幅已稳定，变化不大于 1，表明两者已经稳定了(如图八)，方可开始测量。

测量前应先选中周期，按“▲”或“▼”键把周期由 1(如图七)改为 10(如图九)，(目的是为了减少误差，若不改周期，测量无法打开)。再选中测量，按下“▲”或“▼”键，测量打开并记录数据(如图九)。

一次测量完成，显示测量关后，读取摆轮的振幅值，并利用闪光灯测定受迫振动位移与强迫力间的相位差。

调节强迫力矩周期电位器，改变电机的转速，即改变强迫外力矩频率 ω ，从而改变电机转动周期。电机转速的改变可按照 $\Delta\varphi$ 控制在 10° 左右来定，可进行多次这样的测量。

每次改变了强迫力矩的周期，都需要等待系统稳定，约需两分钟，即返回到图八状态，等待摆轮和电机的周期相同，然后再进行测量。

在共振点附近由于曲线变化较大，因此测量数据相对密集些，此时电机转速极小变化会引起 $\Delta\varphi$ 很大改变。电机转速旋钮上的读数(例 5.50)是一参考数值，建议在不同 ω 时都记下此值，以便实验中快速寻找要重新测量时参考。

测量相位时应把闪光灯放在电动机转盘前下方，按下闪光灯按钮，根据频闪现象来测量，仔细观察相位位置。

强迫振荡测量完毕，按“◀”或“▶”键，选中返回，按确定键，重新回到图二状态。

6. 关机

在图二状态下，按住复位按钮保持不动，几秒钟后仪器自动复位，此时所做实验数据全部清除，然后按下电源按钮，结束实验。

注意事项

1. 强迫振荡实验时，调节仪器面板〔强迫力周期〕旋钮，从而改变不同电机转动周期，该实验必须做 10 次以上，其中必须包括电机转动周期与自由振荡实验时的自由振荡周期相同的数值。
2. 在作强迫振荡实验时，须待电机与摆轮的周期相同(末位数差异不大于 2)即系统稳定后，方可记录实验数据。且每次改变了变强迫力矩的周期，都需要重新等待系统稳定。
3. 因为闪光灯的高压电路及强光会干扰光电门采集数据，因此须待一次测量完成，显示测量关后(参看“波尔共振电器控制箱使用方法”中图八)，才可使用闪光灯读取相位差。

数据记录和处理

1. 测量摆轮自由振动振幅 θ 与周期 T 关系

注意：在列出方程(2)时假定恢复力矩与角位移成正比，方程(3)表明在此条件下振动周期(频率)与振幅无关，实际由于各种因素的影响，蜗卷弹簧的弹性力矩系数 k 随角度不同而有微小变化，导致不同振幅时周期略有变化。

2. 阻尼系数 β 及其不确定度的计算

利用公式(11)对所测数据(表 2)按逐差法处理，求出 β 值，并计算相应不确定度。

$$5\beta\bar{T} = \ln \frac{A_i}{A_{i+5}} \quad (12)$$

i 为阻尼振动的周期次数， A_i 为第 i 次振动时的振幅。

3. 测定受迫振动的幅频特性和相频特性

- 1) 系统到达稳态后，记录实验数据，依据测量数据画出振动幅频和相频曲线并做数据分析，验证共振规律；

- 2) 在阻尼系数较小 (满足 $\beta^2 \ll \omega_0^2$) 和共振位置附近 ($\omega = \omega_0$), 由于 $\omega_0 + \omega = 2\omega_0$, 从式 (5) 和 (8) 可得出:

$$\left(\frac{\theta_s}{\theta_r}\right)^2 = \frac{4\beta^2\omega_0^2}{4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2 + 4\beta^2\omega_0^2} = \frac{\beta^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2} \quad (13)$$

据此可由幅频特性曲线求 β 值:

当 $\theta_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_r$, 即 $\left(\frac{\theta_s}{\theta_r}\right)^2 = \frac{1}{2}$, 由上式可得

$$\omega - \omega_0 = \pm\beta$$

此 ω 对应于图 $\left(\frac{\theta_s}{\theta_r}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 处两个值 ω_1, ω_2 , 由此得出:

$$\beta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

将此法与逐差法求得 β 值作比较并讨论。

- 3) 探究不同阻尼系数 β 下的幅频特性和相频特性 (选做)

误差分析

因为本仪器中采用石英晶体作为计时部件, 所以测量周期 (圆频率) 的误差可以忽略不计, 误差主要来自阻尼系数 β 的测定和无阻尼振动时系统的固有振动频率 ω_0 的确定。且后者对实验结果影响较大。

在前面的原理部分中我们认为弹簧的弹性系数 k 为常数, 它与扭转的角度无关。实际上由于制造工艺及材料性能的影响, k 值随着角度的改变而略有微小的变化 (3% 左右), 因而造成在不同振幅时系统的固有频率 ω_0 有变化。如果取 ω_0 的平均值, 则将在共振点附近使相位差的理论值与实验值相差很大。为此可测出振幅与固有频率 ω_0 的对应数值, 在公式 $\varphi = \tan^{-1} \frac{-\beta T_0^2 T}{\pi(T^2 - T_0^2)}$ 中 T_0 采用对应于

某个振幅的数值代入 (可查看自由振荡实验中作出 $|\theta|$ 与 T_0 的对应表, 找出该振幅在自由振荡实验时对应的摆轮固有周期。若此 $|\theta|$ 值在表中查不到, 则可根据对应表中摆轮的运动趋势, 用内查法, 估计一个 T_0 值), 这样可使系统误差明显减小。振幅与共振频率 ω_0 相对应值可按照 “实验内容与步骤” 2 的方法来确定。

研究拓展

1. 设计实验, 测量包含暂态过程的幅频、相频曲线并分析其特性
2. 自行设计实验, 测量其他振动特性。

附录 1: 波尔共振仪调整方法

波尔共振仪各部分经校正, 请勿随意拆装改动, 电器控制箱与主机有专门电缆相接, 不会混淆, 在使用前请务必清楚各开关与旋钮功能。

经过运输或实验后若发现仪器工作不正常可行调整, 具体步骤如下:

1. 将角度盘指针 F 放在 “0” 处。
2. 松连杆上锁紧螺母, 然后转动连杆 E, 使摇杆 M 处于垂直位置, 然后再将锁紧螺母固定。
3. 此时摆轮上一条长形槽口 (用白漆线标志) 应基本上与指针对齐, 若发现明显偏差, 可将摆轮后面三只固定螺丝略松动, 用手握住蜗卷弹簧 B 的内端固定处, 另一手即可将摆轮转动, 使白漆线对准尖头, 然后再将三只螺丝旋紧: 一般情况下, 只要不改变弹簧 B 的长度, 此项调整极少进行。

4. 若弹簧 B 与摇杆 M 相连接处的外端夹紧螺钉 L 放松，此时弹簧 B 外圈即可任意移动（可缩短、放长）缩短距离不宜少于 6 cm。在旋紧处端夹拧螺钉时，务必保持弹簧处于垂直面内，否则将明显影响实验结果。

将光电门 H 中心对准摆轮上白漆线（即长狭缝），并保持摆轮在光电门中间狭缝中自由摆动，此时可选择阻尼档为“1”或“2”，打开电机，此时摆轮将作受迫振动，待达到稳定状态时，打开闪光灯开关，此时将看到指针 F 在相位差度盘中有一似乎固定读数，两次读数值在调整良好时差 1° 以内（在不大于 2° 时实验即可进行）若发现相差较大，则可调整光电门位置。若相差超过 5° 以上，必须重复上述步骤重新调整。

由于弹簧制作过程中问题，在相位差测量过程中可能会出现指针 F 在相位差读数盘上两端重合较好，中间较差，或中间较好、二端较差现象。

附录 2：简单故障排除

故障现象	原因及处理办法
“强迫振荡”实验无法进行，一直无测量值显示。	检查刻度盘上的光电门 I 指示灯是否闪烁。 1. 若此指示灯不亮，左右移动光电门，会看到指示灯亮，再将其调整到合适的不阻碍转盘运动的位置； 2. 指示灯长亮，不闪烁。说明光电门 I 位置偏高，使有机玻璃转盘 F 上的白线无法档光，实验不能进行。调整光电门 I 的高度，直到合适位置即可； 若以上情况都不是，则“周期输入”小五芯电缆有断点或有粘连，拆开接上断点或排除粘连即可。
“强迫振荡”实验进行时，按住闪光灯，电机周期会变。	有 2 个原因： 1. 闪光灯的强光会干扰光电门 H 及光电门 I 采集数据； 2. 闪光灯的高压电路会对数据采集造成干扰； 因此必须待一次测量完成，显示“测量关”后，才可使用闪光灯读取相位差。
幅频和相频特性曲线数据点非常密集。	在做“强迫振荡”实验时，未调节强迫力矩周期电位器来改变电机的转速。每记录一组数据后，应该调节强迫力矩周期电位器来改变电机的转速，再进行测量。
“自由振荡”实验时无测量值显示。	连接“振幅输入”的大五芯线内有断点或有粘连，拆开接上断点或排除粘连即可