Fecha de entrega: 20 de abril de 2015

Prof. Act. Benjamín Figueroa Solano. Ayud. Mat. Santiago Guzmán Pro.

Responde las preguntas a continuación usando código de R.

1. La regla o método de Simpson es un método de integración numérica que se utiliza para obtener la aproximación de una integral bajo el supuesto de que

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

para $b-a$ suficientemente pequeño. En el caso de que $[a,b]$ no sea lo suficientemente pequeño, éste se divide en n subintervalos (con n par), de manera que $x_i = a + hi$, donde $h = (b-a)/n$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Aplicando Simpson a cada subintervalo $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, $j = 1, 3, 5, ..., n-1$, tenemos

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)dx = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3}\left[f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1})\right]$$

sumando las integrales de todos los subintervalos, llegamos a

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right]$$

Implementa la regla de Simpson para calcular la integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde $f(x)$, a y b son parámetros la función y $h \leq 0.001$.

2. Suponga que se desea estudiar el número de éxitos X antes de un fracaso (rachas ganadoras) en el juego de volados, considere además que se pueden usar monedas cargadas con probabilidad de éxito (E) p y de fracaso (F) $q = 1-p$, Crea una función en R que produzca tal juego. La función "de rachas" recibirá de argumento el valor p y devolverá el número de éxitos antes de un fracaso. Contesta las preguntas: ¿si $p = 0.5$ cuál es la longitud promedio de una racha? ¿si $p = 0.7$ cuál es la longitud promedio de una racha? ¿si $p = 0.9$ cuál es la longitud promedio de una racha?

3. La simulación *Monte Carlo* es un método que emplea números aleatorios $U(0,1)$ para resolver ciertos problemas determinísticos donde el transcurrir del tiempo no juega un papel sustancial. Algunos autores definen la simulación *Monte Carlo* como cualquier simulación que involucra el uso de números aleatorios. El nombre de método o simulación *Monte Carlo* se originó durante la Segunda Guerra Mundial, cuando esta metodología fue aplicada a problemas relacionados al desarrollo de la bomba atómica. Suponga que queremos evaluar la integral

$$I = \int_a^b g(x)dx$$

donde $g(x)$ es una función que toma valores reales que no es analíticamente integrable. En la práctica, la simulación Monte Carlo podría probablemente no ser usada para evaluar una integral sencilla, dado que hay técnicas más eficientes de análisis numérico para este propósito. Es más probable que se use para problemas sobre integrales múltiples con un integrando mal comportado. Para ver como este problema determinístico puede ser enfocado por una simulación *Monte Carlo*, sea

$$Y = (b-a)g(X)$$

una variable aleatoria y X una variable aleatoria $U(a,b)$. Entonces el valor esperado de Y es

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[(b-a)g(X)] \\ &= (b-a)E[g(X)] \\ &= \int_a^b g(x)f_X(x)dx \\ &= (b-a)\frac{\int_a^b g(x)dx}{(b-a)} \\ &= I \end{aligned}$$

donde $f_X(x) = 1/(b-a)$ es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria $U(a,b)$.

Así pues, el problema de evaluar la integral se reduce al de estimar el valor esperado $E(Y)$.

En particular, estimaremos $E(Y) = I$ por la media muestral

$$\bar{Y}(n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i}{n} = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} g(X_i)}{n}$$

donde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a.i.i.d $U(a,b)$.

Utilice el método *Monte Carlo* para aproximar las siguientes integrales:

i) $b > a \geq 0$ calcule $\int_a^b \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$

ii) $\lambda > 0$, $k > 0$ y $b > a \geq 0$ calcule $\int_a^b \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} dx$

iii)$\int_{-3}^{3} \int_{-3}^{3} \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy$

4. Escribe un programa que calcule la factorización en números primos para $1 \leq n \leq 1000$ sí y sólo sí n no es número primo. Si el número proporcionado es primo, indicarlo en la salida. El programa deberá continuar ejecutándose hasta que el usuario indique lo contrario. Ejemplo de pantalla inicial:

```
****** BIENVENIDO *******
```

`Este programa calcula los factores primos de` $n \in [1, 1000]$

`Indíca un número entero entre 1 y 1000:  756`

`La descomposición en factores primos de 756 es:` $(2^2)(3^3)(7)$

5. Implementa en `R` un generador de números pseudoaleatorios utilizando el algoritmo propuesto por Wichman & Hill (1982).

1. Dar ix, iy, iz enteros mayores a cero y menores a 30,000
2. Calcular

$$\begin{aligned} ix &= \{(171ix) mod\, 177\} - \frac{2ix}{177} \\ iy &= \{(172iy) mod\, 176\} - \frac{35iy}{176} \\ iz &= \{(170iz) mod\, 178\} - \frac{63ix}{178} \end{aligned}$$

3. Evaluar:
   Si $ix \leq 0$ entonces $ix = ix + 30269$
   Si $iy \leq 0$ entonces $iy = iy + 30307$
   Si $iz \leq 0$ entonces $iz = iz + 30323$
4. Hacer $u = \left(\frac{ix}{30269} + \frac{iy}{30307} + \frac{iz}{30323}\right) mod\ 1$
5. Repetir pasos 2 a 4 n veces

Dependiendo de la máquina, u puede ser 0 ó 1 en alguna iteración; en tal caso, se redefine a u como $u \pm eps$, en donde eps es la precisión de la máquina. En R deberás utilizar el valor .Machine$double.eps para obtener el épsilon de la máquina.