# 第三章

# 函 数 逼 近

## —— 正交多项式

# 内容提要

## ■ 正交多项式

- 正交函数族与正交多项式
- Legendre 正交多项式
- Chebyshev 正交多项式
- Chebyshev 零点插值

- 第二类 Chebyshev 正交多项式（了解）
- Laguerre 正交多项式（了解）
- Hermite 正交多项式（了解）

# 正交函数族

## 函数的正交

**定义：** 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$， $\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上 **带权 $\rho(x)$ 正交**

# 正交函数族

**定义：** 设函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \in C[a, b]$，$\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ A_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称 $\{\varphi_k(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上 **带权 $\rho(x)$ 的正交函数族**

- 若所有 $A_i = 1$，则称为 **标准正交函数族**

# 正交函数举例

**例：** 三角函数系

$$1,\quad \cos x,\quad \sin x,\quad \cos 2x,\quad \sin 2x,\quad \ldots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上是带权 $\rho(x)=1$ 的正交函数族

**证：**

$$(1,\ 1) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \ \mathrm{d}x = \pi \cdot \delta_{nm}$$

$$(\cos nx, \cos mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \ \mathrm{d}x = \pi \cdot \delta_{nm}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(\cos nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \ \mathrm{d}x = 0$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

# 正交多项式

**定义：** 设 $\varphi_n(x)$ 是首项系数不为 $0$ 的 $n$ 次多项式，$\rho(x)$ 是 $[a, b]$ 上的权函数，若

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & i\neq j\\ A_i\neq 0, & i=j\end{cases}$$

则称 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上**带权 $\rho(x)$ 正交**，称 $\varphi_n(x)$ 为 **$n$ 次正交多项式。**

# 正交多项式

**性质 1：** 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式，$H_n$ 为所有次数不超过 $n$ 的多项式组成的线性空间，则

$$\{\ \varphi_0(x),\ \ \varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x)\ ,\ \cdots,\ \ \varphi_n(x)\ \}$$

构成 $H_n$ 的一组基

**性质 2：** 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式，则对 $\forall\, p(x) \in H_{n-1}$，有

$$\left(p(x), \varphi_n(x)\right) = \int_a^b \rho(x)\, p(x)\, \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

# 正交多项式

**性质 3：** 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式，且首项系数均为 1，则

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n \varphi_{n-1}(x)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi_{-1} = 0, \quad \varphi_0 = 1, \quad \alpha_n = \frac{(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, \quad \beta_n = \frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}$$

证明：板书

这就是正交多项式的三项递推公式！即所有首项系数为 1 的正交多项式族都满足这个公式，该公式也给出了正交多项式的一个计算方法。

# 正交多项式

**性质 4：** 设 $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交多项式，则 $\varphi_n(x)$ 在 $(a, b)$ 内有 $n$ 个不同的零点

证明：板书

# 几类重要的正交多项式

- **Legendre 多项式**
- **Chebyshev 多项式**
- **第二类 Chebyshev 多项式（了解）**
- **Laguerre 多项式（了解）**
- **Hermite 多项式（了解）**

# 勒让德（Legendre）多项式

在 [-1, 1] 上带权 $\rho(x)=1$ 的正交多项式称为 **勒让德多项式**

记为：$P_0, P_1, P_2, \ldots$

$$\boxed{P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}\qquad x\in[-1,1],\quad n=1,2,\ldots$$

- $P_n(x)$ 的首项 $x^n$ 的系数为：$\dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n n!}=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$

- 令 $\boxed{\tilde{P}_n(x)=\dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$

  则 $\tilde{P}_n(x)$ 是**首项系数为 1** 的勒让德多项式

# Legendre 多项式

- **勒让德多项式的性质**

**(1) 正交性：** $\boxed{(\mathrm{P}_n,\mathrm{P}_m)=\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_n(x)\mathrm{P}_m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}}$

**(2) 奇偶性：** $\mathrm{P}_{2n}(x)$ 只含偶次幂，$\mathrm{P}_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂，故

$$\boxed{\mathrm{P}_n(-x)=(-1)^n\mathrm{P}_n(x)}$$

**(3) 递推公式：** $\boxed{(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x)=(2n+1)x\,\mathrm{P}_n(x)-n\mathrm{P}_{n-1}(x)}$

其中 $\mathrm{P}_0(x)=1,\ \mathrm{P}_1(x)=x$，$n=1,2,\ldots$

**(4) $\mathrm{P}_n(x)$ 在 (-1,1) 内有 $n$ 个不同的零点**

# Legendre 多项式

- **勒让德多项式的表达式**

ex31.m

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

$$\vdots$$

# 切比雪夫（Chebyshev）多项式

在 $[-1, 1]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式称为**切比雪夫多项式**，其中

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- **Chebyshev 多项式的表达式**

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \arccos x)}$$

$x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

# Chebyshev 多项式

- **Chebyshev多项式的性质**

$\boxed{x = \cos\theta}$

**(1) 正交性：** $(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$

**(2) 奇偶性：** $T_{2n}(x)$ 只含偶次幂，$T_{2n+1}(x)$ 只含奇次幂，故

$$\boxed{T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)}$$

**(3) 递推公式：**

$$\boxed{T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)}$$

其中 $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,\ \ n = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta}$$

# Chebyshev 多项式

(4) $T_n(x)$ 在 (-1,1) 内有 $n$ 个不同的零点:

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(5) $T_n(x)$ 在 [-1, 1] 上有 n+1 个极值点:

$$\tilde{x}_k = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

(6) $T_n(x)$ 的首项系数为 $2^{n-1}$，且 $|T_n(x)| \le 1$

# 首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式

(7) 令 $\tilde{T}_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$

则 $\left\{\tilde{T}_n(x)\right\}$ 为首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式。

**定理：** 记 $\tilde{H}_n$ 为所有首项系数为 1 的 $n$ 次多项式组成的集合，则对 $\forall\, p(x) \in \tilde{H}_n$ 有

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| \le \max_{-1\le x\le 1}\left|p(x)\right|$$

且 $\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|\tilde{T}_n(x)\right| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

证明：略

**等价描述：** $\left\|\tilde{T}_n(x)\right\|_\infty \le \left\|p(x)\right\|_\infty \quad \forall\, p(x) \in \tilde{H}_n$

即 $\tilde{T}_n(x)$ 在集合 $\tilde{H}_n$ 中无穷范数最小。

# 首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式

**几点注记：**

① 这里的无穷范数是指 C[-1, 1] 上的无穷范数。

② 定理中的结论可推广为"在所有次数不超过 $n$ 的首项系数为 1 的多项式中，$\tilde{T}_n(x)$ 的无穷范数最小"

③ 该结论可用于计算 $n$ 次多项式在 [-1,1] 上的 $n$-1 次最佳一致逼近多项式。

**性质：** 设 $f(x)\in H_n$，且首项系数为 $a_n\neq 0$，则 $f(x)$ 在 [-1,1] 上的 $n$-1 次最佳一致逼近多项式为

$$f(x)-a_n\tilde{T}_n(x)$$

证明：留作练习

# Chebyshev 多项式

**例：** 求 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 在 $[-1,1]$上的二次最佳一致逼近多项式。

**解：** 设 $p(x)$ 是 $f(x)$在 $[-1,1]$上的二次最佳一致逼近多项式，则由前面的性质可知

$$
\begin{aligned}
p(x) &= f(x) - a_3\tilde{T}_3(x) \\
&= 2x^3 + x^2 + 2x - 1 - 2\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) \\
&= x^2 + \frac{7}{2}x - 1
\end{aligned}
$$

**思考：**

如何计算 $n$ 次多项式在 $[a, b]$ 上的 $n$-1 次最佳一致逼近多项式？

# Chebyshev多项式

- **Chebyshev多项式的表达式**

ex32.m

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$\vdots$$

# Chebyshev零点插值

**用 Chebyshev 多项式的零点插值**

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right)$$

以 Chebyshev 多项式的**零点**作为**插值节点**进行插值

**好处：所有插值多项式中, 总体插值误差最小**

**定理：** 设 $f(x)\in C^{n+1}[-1, 1]$，插值节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为 $T_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个零点，则

$$\left\| f(x) - L_n(x) \right\|_\infty \le \frac{1}{2^n (n+1)!} \left\| f^{(n+1)}(x) \right\|_\infty$$

# Chebyshev零点插值

若 $f(x)\in C^{n+1}[a, b]$，怎么办？

作变量替换 $\boxed{x=\dfrac{b-a}{2}t+\dfrac{b+a}{2}}$

插值节点

$$\boxed{x_k=\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi+\frac{b+a}{2}} \quad (k=0, 1, \ldots, n)$$

插值误差

$$\left\|f(x)-L_n(x)\right\|_\infty \le \frac{1}{2^n(n+1)!}\times\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\left\|f^{(n+1)}(x)\right\|_\infty$$

# 举例

**例：(教材64页，例 4)** 求 $f(x)=e^x$ 在 [0, 1]，上的四次 Chebyshev 插值多项式 $L_4(x)$，并估计误差。

**解：板书**

**例：(教材65页，例 5，上机)** 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ，插值区间 [-5, 5]，试分别用等距节点和 Chebyshev 节点作10次多项式插值，画图比较两种插值的数值效果。

**ex33.m**

# 其他正交多项式

- **其他正交多项式（了解）**
  - **第二类 Chebyshev 多项式**
  - **Laguerre 多项式**
  - **Hermite 多项式**

# 第二类 Chebyshev

- **第二类 Chebyshev 多项式**

$$\boxed{U_n(x)=\frac{\sin\left((n+1)\arccos x\right)}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$x\in$ [-1, 1]， $n$ = 0, 1, 2, …

- 在 [-1, 1] 上带权 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 正交，即

$$(U_n,U_m)=\int_{-1}^{1}\rho(x)T_n(x)T_m(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi/2, & m=n\end{cases}$$

- 递推公式： $U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)$

其中 $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$， $n=1, 2, \ldots$

# Laguerre 多项式

- **拉盖尔（Laguerre） 多项式**

$$\boxed{L_n(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})}$$

$x \in [0, \infty]$， $n = 0, 1, 2, \ldots$

- **在 [0, ∞] 上带权 $\rho(x) = e^{-x}$ 正交，即**

$$(L_n, L_m) = \int_0^\infty \rho(x) L_n(x) L_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ (n!)^2, & m = n \end{cases}$$

- **递推公式：** $L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$

其中 $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$， $n = 1, 2, \ldots$

# Hermite 多项式

- **埃尔米特（Hermite）多项式**

$$\boxed{H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}}$$

$x \in (-\infty, +\infty)$，$n = 0, 1, 2, \ldots$

- 在 $(-\infty,+\infty)$ 上带权 $\rho(x) = e^{-x^2}$ 正交，即

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) H_n(x) H_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{n}, & m = n \end{cases}$$

- 递推公式：$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

其中 $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$，$n = 1, 2, \ldots$

# 作业

1. 教材第 94 页：7，8，11

2. 补充题：证明下面的结论

**性质：** 设 $f(x)\in H_n$，且首项系数为 $a_n\neq 0$，则 $f(x)$ 在 [-1,1] 上的 $n$-1 次最佳一致逼近多项式为

$$f(x)-a_n\tilde{T}_n(x)$$

**提示：**

- 第 8 题可利用正交多项式的递推公式
  (P. 58, 定理4, 注: 该定理只对首项系数为 1 时成立)

**注：** 教材 P. 63 例 3 指的是二次最佳一致逼近多项式。