⊗ Recuperación de una curva plana a partir de su curvatura.

T. Fund. de la teoría de curvas: Una curva $c: I \to \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ param. por el arco $(\|c'(s)\|=1\ \forall s)$ está determinada únicamente (salvo mov. rígidos) por sus curvaturas (κ si $n=2$, κ, τ si $n=3$)
$\kappa > 0$

$c=c(s)$ p.p.a. plana ; $c(s)=(x(s), y(s))$

$c'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s)) = (x'(s), y'(s)) = \vec{t}(s)$

Vector de curvatura $\vec{k}(s) = c''(s) = (-\theta'\cos\theta, \theta'\operatorname{sen}\theta)$

$= \theta'(\underset{-y'}{-\cos\theta}, \underset{x'}{\operatorname{sen}\theta}) = \theta' \cdot \underbrace{\vec{n}(s)}_{\text{vector normal a la curva}}$; $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ diedro de Frenet.

$\det(\vec{t}, \vec{n}) = 1 > 0$

$\vec{n} \perp \vec{t}$, $\|\vec{n}\|=1$.

$\underset{\vec{t}'(s)}{\vec{k}(s)} = \underbrace{\theta'(s)}_{\kappa(s)} \cdot \vec{n}(s)$

$\kappa(s)$ función curvatura de la curva.

$$\vec{t}\,'(s) = \kappa(s)\cdot \vec{n}(s) \quad \text{1ª ecuación de Frenet.}$$

$\vec{n}(s) = (-y', x')$

$$\vec{n}\,'(s) = -\kappa(s)\,\vec{t}(s) \quad \text{2da " " "}$$

tiene solución única para cada cond. inicial en todo el intervalo donde está def. κ

$$\begin{cases} x'' = -\kappa y' \\ y'' = \kappa x' \end{cases}$$

sistema lineal de 2 ecuaciones de 2do orden diferenciales ordinarias con 2 incógnitas.

$$\begin{cases} x'(s_0) = x'_0 \\ y'(s_0) = y'_0 \end{cases}$$

lo reducimos a un sistema de EDO de 1er orden.

Introducimos variables auxiliares dx, dy

Variables: $\boxed{x, y, dx, dy} = Y$

$$\begin{cases} x' = dx \\ y' = dy \\ dx' = -\kappa\, dy \\ dy' = \kappa\, dx \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} x(s_0) = x_0 \\ y(s_0) = y_0 \\ dx(s_0) = x'_0 \\ dy(s_0) = y'_0 \end{array}\right\} \text{cond. iniciales.}$$

rhs-eqs.