

# Práctica 1.

## Geometría computacional

Luis María Costero Valero (lcostero@ucm.es)  
Jesús Doménech Arellano (jdomenec@ucm.es)  
Jennifer Hernández Bécares (jennhern@ucm.es)

Febrero 2015

1. Estúdiense si las siguientes curvas son equivalentes utilizando el algoritmo o de manera directa.

a)  $\gamma(t) = (t - 1, t), I = (0, 1)$

$$\bar{\gamma}(t) = (2t - 5, 3 - t), \bar{I} = (-1, 0)$$

Ambas firmas son  $(0,0)$ , por tanto podemos asegurar (a mano y mediante el algoritmo) que las curvas son equivalentes.

b)  $\gamma(t) = (2 \cos t, 3 \sin t), I = (0, 2\pi)$

$$\bar{\gamma}(t) = (3 \cos t, 2 \sin t), \bar{I} = (0, 2\pi)$$

Se trata de dos elipses una sobre el eje  $x$  y la otra sobre el eje  $y$ .

Al ejecutar el programa obtenemos que las curvas son equivalentes, tal y como esperábamos.

c)  $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2t}), I = (1/10, 10)$

$$\bar{\gamma}(t) = (\cosh t, \sinh t), \bar{I} = (0, 1)$$

Aplicando el algoritmo obtenemos las siguientes firmas:

$$sig_{\gamma}(t) = \left( \frac{8}{t^3(4+t^{-4})^{\frac{3}{2}}}, \frac{t^4(-192t^4+48)}{(4t^4+1)^3} \right)$$

$$sig_{\bar{\gamma}}(t) = \left( \frac{-1}{(\cosh 2t)^{\frac{3}{2}}}, \frac{12 \sinh 2t}{3 \cosh 2t + \cosh 6t} \right)$$

Cuyas imágenes no coinciden en los intervalos  $I$  e  $\bar{I}$ . Tal y como indica el programa.

d)  $\gamma(t) = (t, t^2), I = (-2, 2)$   $\bar{\gamma}(t) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}\log(t)^2 + \frac{1}{2}\log(t) + 1, \frac{1}{2}\log(t)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\log(t) - 1), \bar{I} = (1/10, 10)$

Igual que en el apartado anterior, aplicando el algoritmo obtenemos las siguientes firmas:

$$\begin{aligned} \text{sig}_\gamma(t) &= \left( \frac{2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-24t}{(4t^2+1)^3} \right) \\ \text{sig}_{\bar{\gamma}}(t) &= \left( \frac{2}{t(\frac{4\log^2 t+1}{t^2})^{\frac{1}{2}}(4\log^2 t+1)}, \frac{-96\log t}{256\log^6 t+192\log^4 t+48\log^2 t+4} \right) \end{aligned}$$

Cuyas imágenes no coinciden en los intervalos  $I$  e  $\bar{I}$ . Tal y como indica el programa.

2. Estúdiese si la signatura de una curva puede tener alguna de las siguientes gráficas, dando ejemplos o argumentando si no es posible:

- i.  $\text{sig}(t) = (k_0, 0), k_0 \in \mathbb{R}$ . Consideramos la curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$   $I = (0, 2\pi)$ , la signatura toma el valor  $(1, 0)$ , que tiene la forma que se pedía en el enunciado. Para cualquier otra circunferencia, también se verifica que la signatura toma la forma  $(\text{cte}, 0)$ .
- ii.  $\text{sig}(t) = (k_0, k_s), k_0, k_s \in \mathbb{R}, k_s \neq 0$ . Vamos a comprobar que no es posible este caso. Sea  $\gamma(t)$  una curva con curvatura  $K = k_0$ . Se tiene que  $\frac{dK}{ds} = \frac{dK}{dt} \frac{1}{\|\gamma'\|} = \frac{dk_0}{dt} \frac{1}{\|\gamma'\|} = 0 * \frac{1}{\|\gamma'\|} = 0$ . Luego  $\text{sig}_\gamma(t) = (k_0, 0) \neq (k_0, k_s)$ .
- iii.  $\text{sig}(t) = (f(t), f(t))$ . Sea  $\gamma$  una curva p.p.a. con signatura  $\text{sig}_\gamma(t) = (f(t), f(t))$ . Por la definición de signatura se tiene  $K_\gamma = f$  y  $\frac{dK_\gamma}{ds} = f$ . Por estar parametrizada por la longitud del arco  $\frac{1}{\|\gamma'\|} = 1$ , luego  $f = \frac{dK_\gamma}{ds} = \frac{dK_\gamma}{dt} \frac{1}{\|\gamma'\|} = \frac{dK_\gamma}{dt} = \frac{df}{dt}$ . Resolviendo la ecuación  $f = e^t = K_\gamma$ , y por el teorema fundamental de curvas se sabe que va a existir una curva regular con esta curvatura, y por tanto con esta signatura.
- iv.  $\text{sig}(t) = (k_0, f(t)), k_0 \in \mathbb{R}$ . Sea una curva  $\gamma$  tal que su curvatura es  $K_\gamma = k_0$ .  $\frac{dK_\gamma}{ds} = \frac{dK_\gamma}{dt} \frac{1}{\|\gamma'\|} = \frac{dk_0}{dt} \frac{1}{\|\gamma'\|} = 0$ . Por lo que es imposible que exista una curva con signatura igual a la del enunciado.

3. ¿Qué sucede con la signatura de una curva si la curva es simétrica respecto de una recta?

---

**TODO: REVISAR:** El formato es un poco feo, habría que colocar las cosas para que queden bonitas. Igualmente hay algunos pasos de los que no estoy del todo convencido, habría que revisar estos. — Luisma —

---

Sea una curva cualquiera simétrica respecto a una recta. Mediante movimientos rígidos directos se puede transformar en una curva  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , simétrica respecto al eje OX. Puesto que la curva se ha transformado mediante movimientos rígidos, la imagen de la signatura de la curva original coincidirá con la imagen de la signatura de  $\gamma(t)$ .

Por ser  $\gamma(t)$  simétrica respecto al eje OX, se puede escribir como sigue:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \text{si } t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \hat{\gamma}(t) = (\gamma_1(a+b-t), -\gamma_2(a+b-t)) & \text{si } t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

y además, se tiene que  $\text{img}(\text{sig}_\gamma) = \text{img}(\text{sig}_{\bar{\gamma}}) \cup \text{img}(\text{sig}_{\hat{\gamma}})$ .

$$K_{\hat{\gamma}}(t) = \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t))}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3} = \begin{vmatrix} -\gamma'_1(a+b-t) & \gamma''_1(a+b-t) \\ \gamma'_2(a+b-t) & -\gamma''_2(a+b-t) \end{vmatrix} * \frac{1}{\|\gamma'(a+b-t)\|^3} =$$

$$= K_\gamma(a+b-t).$$

$$\text{Además, } \frac{dK_{\hat{\gamma}}(s)}{ds} = \frac{dK_{\hat{\gamma}}(t)}{dt} \frac{1}{\|\hat{\gamma}'(t)\|} = \frac{dK_\gamma(a+b-t)}{dt} \frac{1}{\|\gamma'(a+b-t)\|} = -\frac{dK_\gamma(s)}{ds}$$

Por lo que resulta que

$$\begin{aligned} \text{sig}_\gamma([a, b]) &= \text{sig}_\gamma([a, \frac{a+b}{2}]) \cup \text{sig}_{\hat{\gamma}}([\frac{a+b}{2}, b]) = \\ &= (K_\gamma(t), \frac{dK_\gamma(s)}{ds})|_{t \in [a, \frac{a+b}{2}]} \cup (K_\gamma(a+b-t), -\frac{dK_\gamma(s)}{ds})|_{t \in [\frac{a+b}{2}, b]} = \\ &= (K_\gamma(t), \frac{dK_\gamma(s)}{ds}) \cup (K_\gamma(t), -\frac{dK_\gamma(s)}{ds}), t \in [a, \frac{a+b}{2}] \end{aligned}$$

Luego la signatura es simétrica respecto al eje OX.

4. Si se invierte la orientación de recorrido de una curva, ¿qué ocurre con su signatura?

---

**TODO: REVISAR:** El formato es un poco feo, habría que colocar las cosas para que queden bonitas. Igualmente hay algunos pasos de los que no estoy del todo convencido, habría que revisar estos. — Luisma —

---

Sea la curva  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ , con curvatura

$$K_\gamma(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}; \quad \frac{dK_\gamma(s)}{ds} = \frac{dK_\gamma(t)}{dt} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} = K'_\gamma(t) * \frac{1}{\|\gamma'\|}$$

Consideramos la misma curva recorrida en sentido contrario definida por

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Entonces  $\bar{\gamma}'(t) = -\gamma'(a+b-t)$  y  $\bar{\gamma}''(t) = \gamma''(a+b-t)$ .

$$\text{Por la definición de curvatura, } K_{\bar{\gamma}}(t) = \frac{\det(\bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}''(t))}{\|\bar{\gamma}'(t)\|^3} = \frac{\det(-\gamma'(a+b-t), \gamma''(a+b-t))}{\|\gamma'(a+b-t)\|^3} =$$

$$\frac{-\det(\gamma'(a+b-t), \gamma''(a+b-t))}{\|\gamma'(a+b-t)\|^3} = -K_\gamma(a+b-t).$$

$$\text{Además, } \frac{dK_{\bar{\gamma}}(s)}{ds} = \frac{dK_{\bar{\gamma}}(t)}{dt} \frac{1}{\|\bar{\gamma}'(t)\|} = \frac{d(-K_\gamma(a+b-t))}{dt} \frac{1}{\|\gamma'(a+b-t)\|} = -\frac{dK_\gamma(a+b-t)}{dt} \frac{1}{\|\gamma(a+b-t)'\|} =$$

$$K'_\gamma(b+a-t) * \frac{1}{\|\gamma(a+b-t)'\|}.$$

Luego las signaturas verifican que  $sig_{\bar{\gamma}}(I) = (K_{\bar{\gamma}}(I), \frac{dK_{\bar{\gamma}}(I)}{ds}) = (-K_{\gamma}(I), \frac{dK_{\gamma}(I)}{ds})$ , es decir, son simétricas respecto al eje OY.