Práctica 6.
Geometría computacional

Luis María Costero Valero (lcostero@ucm.es)
Jesús Doménech Arellano (jdomenec@ucm.es)
Jennifer Hernández Bécares (jennhern@ucm.es)

Teoría

1. Dada la secuencia de nodos $t = \mathbb{Z}$, calcúlense las funciones B-spline B_{ik} correspondientes.

   Para calcular las funciones B-spline asociadas a la secuencia de nodos $t = \mathbb{Z}$, partimos de la recurrencia que define B_{ik} en el caso general

$$B_{ik} = \omega_{ik} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1} \tag{1}$$

   donde

$$\omega_{ik}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}, & \text{si } t_i \neq t_{i+k-1} \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{2}$$

   Veamos cómo se simplifica la recurrencia al tener en cuenta t. En primer lugar consideramos que $t_i = i$, ya que $t = \mathbb{Z}$. Además, nunca se va a dar que $t_i = t_{i+k-1}$, puesto que tenemos como requisito que $k > 1$ y nos encontramos en $\mathbb{Z}$. La fórmula anterior queda de la siguiente forma

$$B_{ik}(t) = \frac{t-i}{k-1} B_{i,k-1}(t) + (\frac{k-t+i}{k-1}) B_{i+1,k-1}(t) \tag{3}$$

   Por otro lado, queremos demostrar que los B-splines de este tipo son traslaciones unos de otros. Esto implica comprobar que

$$B_{ik}(t) = B_{0k}(t-i) \tag{4}$$

   Calcularemos B_{0k} y después demostraremos que la igualdad se cumple.

Tomando $i = 0$ tenemos

$$B_{0k} = \frac{t}{k-1} B_{0,k-1} + \frac{k-t}{k-1} B_{1,k-1} \tag{5}$$

Demostramos (4) por inducción:

- **k=2:**

  $$B_{i2} = (t-i)B_{i1} + (2-t+1)B_{i+1,1} = t-i+2-t+i = 2$$

  Por otro lado

  $$B_{02} = (t-i)B_{01} + (2-t+1)B_{1,1} = t+2-t = 2$$

  Por tanto, independientemente de dónde evaluemos vemos que coinciden B_{02} y B_{i2}.

- Supongamos ahora por hipótesis que es cierto para $k = k-1$, es decir, que $B_{i,k-1}(t) = B_{0,k-1}(t-i)$. En este caso, tendríamos también que $B_{i+1,k-1}(t) = B_{1,k-1}(t-i)$. Usaremos esto para continuar la demostración.

- Comprobamos que se cumple para B_{ik}:

$$\begin{array}{rcl} B_{ik}(t) & = & \frac{t-i}{k-1} B_{i,k-1}(t) + \frac{k-t-i}{k-1} B_{i+1,k-1}(t) \\ & \underset{(HI)}{=} & \frac{t-i}{k-1} B_{0,k-1}(t-i) + \frac{k-t-i}{k-1} B_{1,k-1}(t-i) \\ & = & B_{0k}(t-i) \end{array} \tag{6}$$

2. Dada una secuencia de nodos arbitraria t, demuéstrese que si p es un polinomio de grado 1 entonces

$$p = \sum_i B_{ik} p(t_i^*),$$

siendo

$$t_i^* = (t_{i+1} + ... + t_{i+k-1})/(k-1).$$

Consideramos la identidad de Marsden, dada por:

$$(x-t)^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \psi_{i,k}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t_k \leq t \leq t_{n+1}$$

$\psi_{i,k}(x) = (x - t_{i+1}) \dots (x - t_{i+k-1})$

Si dividimos entre $(k-1)!$ obtenemos:

$$\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \frac{\psi_{i,k}(x)}{(k-1)!}$$

Derivando una vez respeccto a x:

$$\frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} = \sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \frac{\psi'_{i,k}(x)}{(k-1)!}$$

, y en general derivando $m-1$ veces:

$$\frac{(x-t)^{k-m}}{(k-m)!} = \sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \frac{\psi_{i,k}^{(m-1)}(x)}{(k-1)!}$$

consideremos ahora el caso en el que $m = k-1$, sustituyendo m y aplicando la observación 1 se tiene que:

$$(x-t) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \left[x - \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{(k-1)} \right]$$

Lo que implica que para cualquier polinomio de la forma $p(t) = a \cdot t + b$, y siendo

$t_i^* = \frac{t_{i+1}+\cdots+t_{i+k-1}}{k-1}$ se tenga lo buscado:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,k}(t)p(t_i^*)$$

Observación 1. *Sea* $f = (x - t_1)\ldots(x - t_n)$*, entonces se verifica que*

$$f^{(n-1)} = x - ((n-1)! \cdot (t_1 + \cdots + t_n))$$

Operando f se tiene un polinomio de grado n que se puede expresar como $f = x^n - x^{n-1}(t_1 + \cdots + t_n) + q$ donde q es un polinomio de grado $n-1$.

Si se deriva $n-1$ veces, se obtiene el resutlado buscado:

$$f^{(n-1)} = x - ((n-1)! \cdot (t_1 + \cdots + t_n))$$