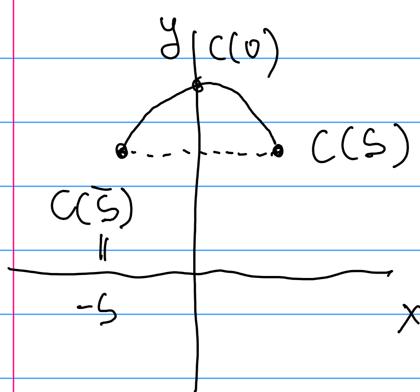
(c) ¿Qué sucede con la signatura de una curva si la curva es simétrica respecto de una recta?

(d) Si se invierte la orientación de recorrido de una curva, ¿qué ocurre con su signatura?

(c) Cambiando de coordenadas euclídeas, suponemos que la recta es el eje OY.



$c=c(s)$ p.p.a.; $c: I \to \mathbb{R}^2$

$\forall s\in I \ \exists \bar{s} \in I /$

$c(s)=(x(s),y(s)) \Rightarrow$

$c(\bar{s})=(x(\bar{s}),y(\bar{s}))=(-x(s),y(s))$

$\exists s_0 / c(s_0)\in OY$. Haciendo una traslación del parámetro, podemos suponer $s_0=0$.

$\bar{s}=\bar{s}(s)$

$\bar{c}(s)=c(\bar{s}(s))$ es p.p.a.

$\bar{c}'(s)=\underbrace{c'(\bar{s}(s))}_{\text{unitario}}\underbrace{\bar{s}'(s)}$ es unitario.

$\Downarrow$

$\bar{s}'(s)=\pm 1 \Rightarrow \bar{s}(s)=\pm s+\alpha$

$\bar{s}(0)=0$

$\Rightarrow \bar{s}(s)=\pm s$. Si $\bar{s}(s)=s \Rightarrow c(I)\subset OY$.

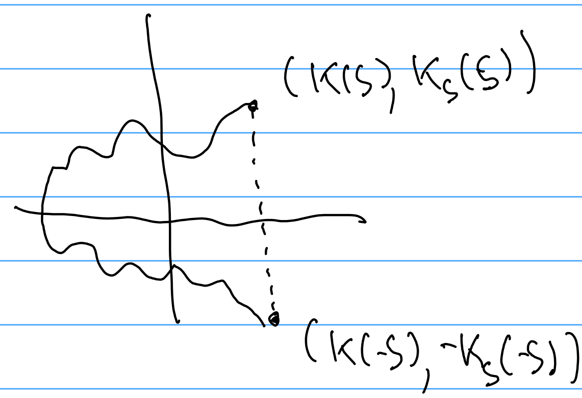
Si $\bar{s}(s) = -s$

$$\bar{c}(s) = c(-s) = (x(-s), y(-s)) \overset{\text{hip.}}{=} (-x(s), y(s)).$$

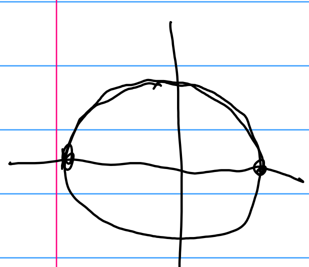
$$\begin{cases} x(s) = -x(-s) \\ y(s) = y(-s) \end{cases}$$

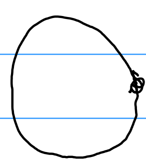
$$\kappa(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'(-s) & -x''(-s) \\ -y'(-s) & y''(-s) \end{vmatrix} = \kappa(-s)$$

$$\frac{d\kappa}{ds}(s) = -\frac{d\kappa}{ds}(-s)$$



$\Rightarrow$ la rig. es simétrica resp. al eje OX.





Cálculo de geodésicas en superficies:

Superficies parametrizadas:

Son aplicaciones C^∞

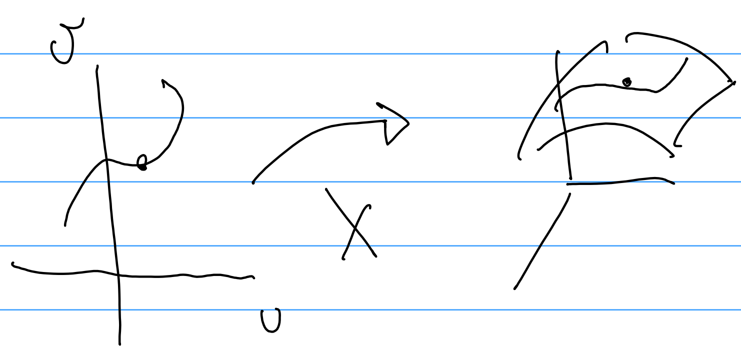
$$X : \underset{abto.}{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$X = X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

que suponemos regular: X_u y X_v son l.i. $\forall (u,v) \in U$

$$\iff \|X_u \wedge X_v\| \neq 0.$$

⊗ Curvas sobre la superficie:



Dada $\begin{matrix} u = u(t) \\ v = v(t) \end{matrix}$ curva $\subset U \subset \mathbb{R}^2$, tenemos la

curva $c(t) = X(u(t), v(t))$

Geodésicas:

Def 1: Es una curva de la superficie cuya aceleración es siempre perpendicular a la superficie.

$c''(t) \equiv$ aceleración.

$$\left.\begin{array}{l} \langle c''(t), X_u(u(t),v(t)) \rangle = 0 \\ \langle c''(t), X_v(u(t),v(t)) \rangle = 0 \end{array}\right\} \text{ecuaciones de las geodésicas.}$$

generan el espacio tangente.

Def 2: Las geodésicas son curvas que minimizan (localmente) la energía

$$E = \frac{1}{2}\int_a^b \|c'(t)\|^2 \, dt$$

Def 3: Las geodésicas son curvas que minimizan localmente la longitud. parametrizadas a vel. cte.

$$L = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt$$

Cálculo de geodésicas como mínimos de la energía:

$$\mathcal{E} = \int_a^b \|c'(t)\|^2 dt$$

$$\|c'(t)\|^2 = \langle c'(t), c'(t) \rangle =$$

$$c(t) = X(u(t), v(t))$$

$$c' = X_u \cdot u' + X_v v'$$

$$= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle =$$

$$= \underbrace{\langle X_u, X_u \rangle}_{\substack{\parallel \\ E}} (u')^2 + 2 \underbrace{\langle X_u, X_v \rangle}_{\substack{\parallel \\ F}} u' v' + \underbrace{\langle X_v, X_v \rangle}_{\substack{\parallel \\ G}} (v')^2$$

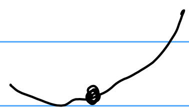
$$= E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2$$

$\parallel$

$E(u(t), v(t))$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_a^b \left(E u'^2 + 2F u' v' + G u'^2 \right) dt$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



curva $\gamma = \gamma(t)$

(x_0, y_0) es extremo,

$f(\gamma(t))$ tiene un mínimo en $t = t_0$

$\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$.