Práctica 1.
Geometría computacional

Luis María Costero Valero (lcostero@ucm.es)
Jesús Doménech Arellano (jdomenec@ucm.es)
Jennifer Hernández Bécares (jennhern@ucm.es)

Febrero 2015

1. Estúdiese si las siguientes curvas son equivalentes utilizando el algoritmo o de manera directa.

   a) $\gamma(t) = (t-1, t), I = (0,1)$

   $\bar{\gamma}(t) = (2t-5, 3-t), \bar{I} = (-1,0)$

   Ambas signaturas son (0,0), por tanto podemos asegurar (a mano y mediante el algoritmo) que las curvas son equivalentes.

   b) $\gamma(t) = (2\cos t, 3\sin t), I = (0, 2\pi)$

   $\bar{\gamma}(t) = (3\cos t, 2\sin t), \bar{I} = (0, 2\pi)$

   Se trata de dos elipses una sobre el eje x y la otra sobre el eje y.

   Al ejecutar el programa obtenemos que las curvas son equivalentes, tal y como esperábamos.

   c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{2t}), I = (1/10, 10)$

   $\bar{\gamma}(t) = (\cosh t, \sinh t), \bar{I} = (0,1)$

   Aplicando el algoritmo obtenemos las siguientes signaturas:

   $sig_{\gamma}(t)) = \left(\frac{8}{t^3(4+t^{-4})^{\frac{3}{2}}}, \frac{t^4(-192t^4+48)}{(4t^4+1)^3} \right)$

   $sig_{\bar{\gamma}}(t) = \left(\frac{-1}{(\cosh 2t)^{\frac{3}{2}}}, \frac{12\sinh 2t}{3\cosh 2t + \cosh 6t} \right)$

Cuyas imágenes no coinciden en los intervalos I e $\bar{I}$. Tal y como indica el programa.

d) $\gamma(t) = (t, t^2), I = (-2, 2)$ $\bar{\gamma}(t) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}\log(t)^2 + \frac{1}{2}\log(t) + 1, \frac{1}{2}\log(t)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\log(t) - 1), \bar{I} = (1/10, 10)$

Igual que en el apartado anterior, aplicando el algoritmo obtenemos las siguientes signaturas:

$$sig_\gamma(t) = \left(\frac{2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-24t}{(4t^2+1)^3}\right)$$
$$sig_{\bar{\gamma}}(t) = \left(\frac{2}{t(\frac{4\log^2 t+1}{t^2})^{\frac{1}{2}}(4\log^2 t+1)}, \frac{-96\log t}{256\log^6 t+192\log^4 t+48\log^2 t+4}\right)$$

Cuyas imágenes no coinciden en los intervalos I e $\bar{I}$. Tal y como indica el programa.

2. Estúdiese si la signatura de una curva puede tener alguna de las siguientes gráficas, dando ejemplos o argumentando si no es posible:

   i. $sig(t) = (k_0, 0), k_0 \in \mathbb{R}$. Consideramos la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $I = (0, 2\pi)$, la signatura toma el valor $(1, 0)$, que tiene la forma que se pedía en el enunciado. Para cualquier otra circunferencia, también se verifica que la signatura toma la forma $(\text{cte}, 0)$.

   ii. $sig(t) = (k_0, k_s),\ k_0, k_s \in \mathbb{R},\ k_s \neq 0$.Vamos a comprobar que no es posible este caso. Sea $\gamma(t)$ una curva con curvatura $K = k_0$. Se tiene que $\frac{dK}{ds} = \frac{dK}{dt}\frac{1}{||\gamma'||} = \frac{dk_0}{dt}\frac{1}{||\gamma'||} = 0 * \frac{1}{||\gamma'||} = 0$. Luego $sig_\gamma(t) = (k_0, 0) \neq (k_0, k_s)$.

   iii. $sig(t) = (f(t), f(t))$. Sea γ una curva p.p.a. con signatura $sig_\gamma(t) = (f(t), f(t))$. Por la definición de signatura se tiene $K_\gamma = f$ y $\frac{dK_\gamma}{ds} = f$. Por estar parametrizada por la longitud del arco $\frac{1}{||\gamma'||} = 1$, luego $f = \frac{dK_\gamma}{ds} = \frac{dK_\gamma}{dt}\frac{1}{||\gamma'||} = \frac{dK_\gamma}{dt} = \frac{df}{dt}$. Resolviendo la ecuación $f = e^t = K_\gamma$, y por el teorema fundamental de curvas se sabe que va a existir una curva regular con esta curvatura, y por tanto con esta signatura.

iv. $sig(t) = (k_0, f(t)),\ k_0 \in \mathbb{R}$. Sea una curva γ tal que su survatura es $K_\gamma = k_0$. $\frac{dK_\gamma}{ds} = \frac{dK_\gamma}{dt}\frac{1}{||\gamma'||} = \frac{dk_0}{dt}\frac{1}{||\gamma'||} = 0$. Por lo que es imposible que exista una curva con signatura igual a la del enunciado.

3. ¿Qué sucede con la signatura de una curva si la curva es simétrica respecto de una recta?

Sea una curva cualquiera simétrica respecto a una recta. La curva se puede transformar en una curva $\gamma(t),\ t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, simétrica respecto al eje OX tal que verifica:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) & \text{si } t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \hat{\gamma}(t) = (\gamma_1(a+b-t), -\gamma_2(a+b-t)) & \text{si } t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

Puesto que la curva se ha transformado mediante movimientos rígidos directos, la imagen de la signatura de la curva original coincidirá con la imagen de la signatura de $\gamma(t)$, y además, se tiene que $img(sig_\gamma) = img(sig_{\bar{\gamma}}) \cup img(sig_{\hat{\gamma}})$.

$K_{\hat{\gamma}}(t) = \frac{det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t))}{||\hat{\gamma}'(t)||^3} = \begin{vmatrix} -\gamma_1'(a+b-t) & \gamma_1''(a+b-t) \\ \gamma_2'(a+b-t) & -\gamma_2''(a+b-t) \end{vmatrix} \frac{1}{||\gamma'(a+b-t)||^3} = K_\gamma(a+b-t)$.

Por otro lado, tenemos que:

$$\frac{dK_{\hat{\gamma}}(s)}{ds} = \frac{dK_{\hat{\gamma}}(t)}{dt}\frac{1}{||\hat{\gamma}'(t)||} = \frac{dK_\gamma(a+b-t)}{dt}\frac{1}{||\gamma'(a+b-t)||} = -\frac{dK_\gamma(s)}{ds}$$

Por lo que resulta que

$sig_\gamma([a,b]) = sig_\gamma([a, \frac{a+b}{2}]) \cup sig_{\hat{\gamma}}([\frac{a+b}{2}, b]) =$

$= (K_\gamma(t), \frac{dK_\gamma(s)}{ds})|_{t\in[a,\frac{a+b}{2}]} \cup (K_\gamma(a+b-t), -\frac{dK_\gamma(s)}{ds})|_{t\in[\frac{a+b}{2},b]} =$

$= (K_\gamma(t), \frac{dK_\gamma(s)}{ds}) \cup (K_\gamma(t), -\frac{dK_\gamma(s)}{ds}), t \in [a, \frac{a+b}{2}]$

Luego la signatura es simétrica respecto al eje OX.

4. Si se invierte la orientación de recorrido de una curva, ¿qué ocurre con su signatura?

   Sea la curva $\gamma(t),\ t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, con curvatura

$$K_\gamma(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{||\gamma(t)'||^3}; \quad \frac{dK_\gamma(s)}{ds} = \frac{dK_\gamma(t)}{dt}\frac{1}{||\gamma'(t)||} = K'_\gamma(t) * \frac{1}{||\gamma'||}$$

   Consideramos la misma curva recorrida en sentido contrario definida por

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t),\ t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$$

   Entonces $\bar{\gamma}'(t) = -\gamma'(a + b - t)$ y $\bar{\gamma}''(t) = \gamma''(a + b - t)$.

   Por la definición de curvatura

   $K_{\bar{\gamma}}(t) = \frac{det(\bar{\gamma}'(t), \bar{\gamma}''(t))}{||\gamma'(t)||^3} = \frac{det(-\gamma'(a+b-t), \gamma''(a+b-t))}{||\gamma'(a+b-t)||^3} =$

   $= \frac{-det(\gamma'(a+b-t), \gamma''(a+b-t))}{||\gamma'(a+b-t)||^3} = -K_\gamma(a + b - t)$.

   Además,

   $\frac{dK_{\bar{\gamma}}(s)}{ds} = \frac{dK_{\bar{\gamma}}(t)}{dt}\frac{1}{||\bar{\gamma}'(t)||} = \frac{d(-K_\gamma(a+b-t))}{dt}\frac{1}{||\gamma'(a+b-t)||} =$

   $= -\frac{dK_\gamma(a+b-t)}{dt}\frac{1}{||\gamma(a+b-t)'||} = K'_\gamma(b + a - t) * \frac{1}{||\gamma(a+b-t)'||}$.

   Luego las signaturas verifican que $sig_{\bar{\gamma}}(I) = (K_{\bar{\gamma}}(I), \frac{dK_{\bar{\gamma}}(I)}{ds}) = (-K_\gamma(I), \frac{dK_\gamma(I)}{ds})$, es decir, son simétricas respecto al eje OY.