Práctica 3.
Geometría computacional

Luis María Costero Valero (lcostero@ucm.es)
Jesús Doménech Arellano (jdomenec@ucm.es)
Jennifer Hernández Bécares (jennhern@ucm.es)

Marzo 2015

Demuéstrese que el máximo de los polinomios de Bézier $B_i^n(t)$ con $t \in [0,1]$ se alcanza en $t = \frac{i}{n}$.

Comenzamos escribiendo la definición del polinomio de Bernstein i-ésimo de grado n:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Dicha ecuación se corresponde con una distribución binomial, que representa la probabilidad de obtener i caras al lanzar una moneda, siendo la probabilidad de cara igual a $t \in [0,1]$.

Para comprobar que el máximo se alcanza en $t = \frac{i}{n}$, derivamos el polinomio de Bernstein e igualamos a 0, con el objetivo de encontrar los extremos y posteriormente ver si son máximo y alguno de ellos es $\frac{i}{n}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta B_i^n(t)}{\delta t} &= \binom{n}{i}(it^{i-1}(1-t)^{n-i} - t^i(n-i)(1-t)^{n-i-1}) \\
&= \binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}(i(1-t) - t(n-i)) \\
&= \binom{n}{i} t^{i-1}(1-t)^{n-i-1}(i - tn) \\
&= n\left(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De la ecuación anterior se deduce que se puede tener un máximo en los puntos $t = 0$,

$t = 1$ o si $i(1-t) - t(n-i) = 0$. Esta última igualdad es equivalente a:

$$i(1-t) = t(n-i) \Longleftrightarrow i - it = tn - it \Longleftrightarrow t = \frac{i}{n}$$

1. Si $t = 0$: En este caso, $B_i^n(0) = \binom{n}{i} 0^i 1^{n-i}$. Tenemos dos casos dentro de este:
   - Si $i = 0$, entonces $B_0^n(0) = 1$, que es un máximo porque $B_i^n(t) \in [0,1]$ para $t \in (0,1)$. Además se verifica que $t = \frac{i}{n} = \frac{0}{n} = 0$, luego verifica el tercer caso (el máximo coincide con $t = \frac{i}{n}$).
   - Si $i \neq 0$, entonces $B_0^n(0) = 0$, que no es un máximo.
2. Si $t = 1$: En este caso, $B_i^n(1) = \binom{n}{i} 1^i 0^{n-i}$. Volvemos a tener dos casos:
   - Si $n = i$, se tiene que $B_n^n(1) = \binom{n}{n} 1^n 0^0 = 1$. Se trata de un máximo ya que $B_i^n(t) \in [0,1]$ para $t \in (0,1)$. Además se verifica que $t = \frac{i}{n} = \frac{n}{n} = 1$, luego verifica que el máximo coincide con $t = \frac{i}{n}$.
   - Por otro lado, si $n \neq i$, tenemos que $B_i^n(1) = 0$, que tampoco es máximo.
3. Por último, contemplamos el caso $t = \frac{i}{n}$. Sea $i \neq 0, i \neq n$, ya que los otros casos corresponden a los apartados anteriores. Los polinomios de Bernstein verifican que $B_i^n(t) > 0$, $\forall t \in [0,1]$, y que $B_i^n(0) = 0$, $B_i^n(1) = 0$. Luego B se anula en los extremos, y no tiene ningún otro punto crítico salvo $t = \frac{i}{n}$, por lo que es necesario que $t = \frac{i}{n}$, $t \neq 0$, $t \neq 1$ sea un máximo.