Práctica 2.
Geometría computacional

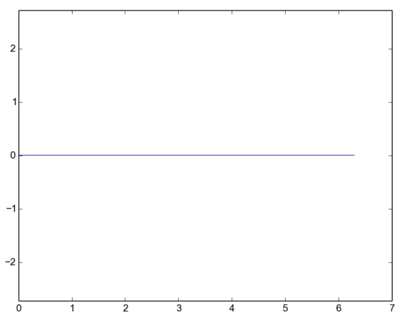
Luis María Costero Valero (lcostero@ucm.es)
Jesús Doménech Arellano (jdomenec@ucm.es)
Jennifer Hernández Bécares (jennhern@ucm.es)

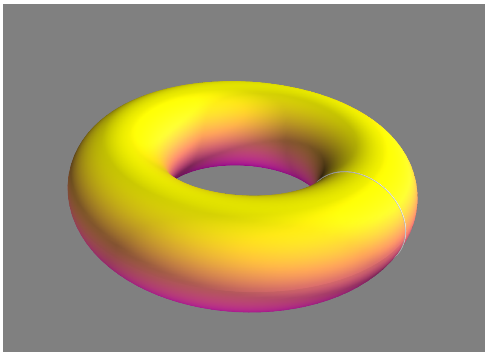
Marzo 2015

En esta práctica entregamos dos versiones del código, la primera en el archivo `P2.py` y la segunda en `P2_interactivo.py`. La diferencia es que la segunda versión permite meter las condiciones iniciales de la geodésica pinchando en la ventana gráfica. Dado que el código se complica, entregamos la versión sin esta mejora para facilitar la corrección de la práctica.

1. Dado el toro de revolución usual, dibújese sobre el mismo una geodésica cuya traza sea uno de los dos círculos generadores.
   Dibujamos el toro con $r = 2.0$ y $a = 5.0$
   Para el círculo generador tomamos de condiciones iniciales:

   - $(u_0, v_0) = (0, 0)$
   - $(u'_0, v'_0) = (0, 1)$

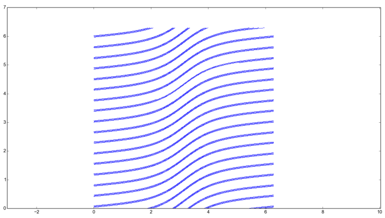


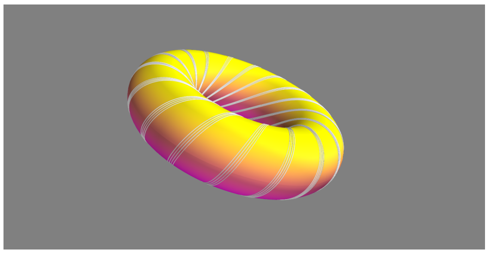


   El otro cículo generador se obtiene al establecer las derivadas iniciales como $(u'_0, v'_0) = (1, 0)$

2. Dibújese sobre el toro una geodésica periódica. Dibújese sobre el toro una geodésica no periódica. Opcional: ¿Sabrías obtenener una geodésica que sea densa sobre todo el toro?

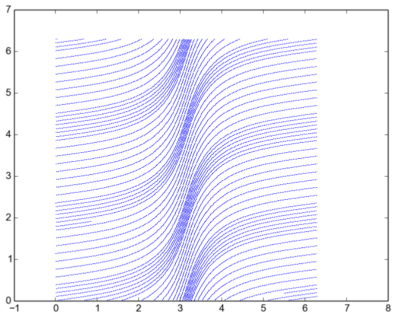
   a) Periódica:

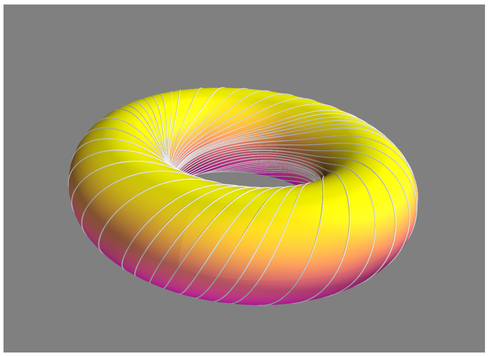
   

   b) No periódica:

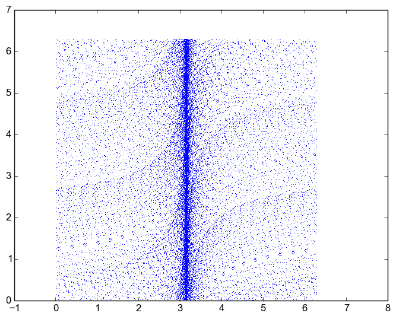
   - $(u_0, v_0) = (\pi, 0)$
   - $(u_0', v_0') = (1, \pi)$

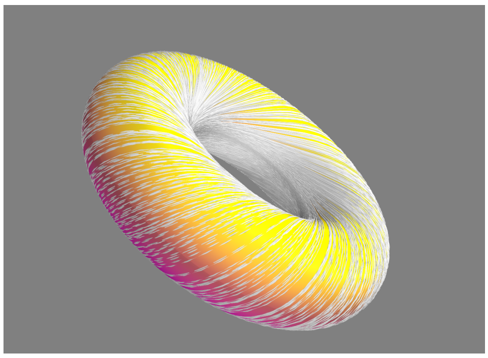
   

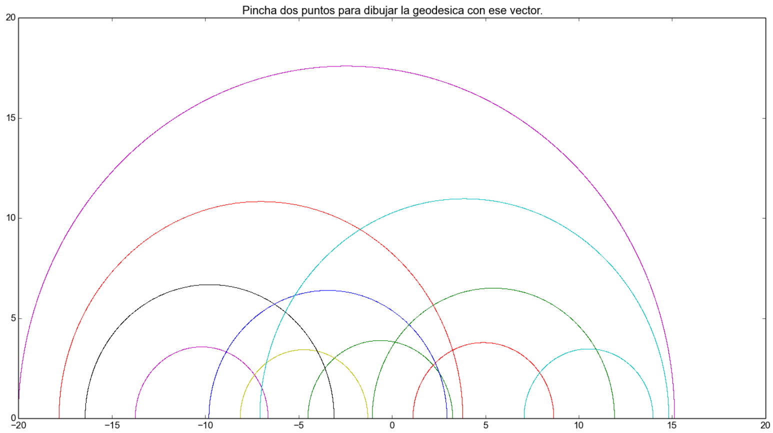
   c) Densa: Se propone las siguientes condiciones iniciales sobre una pendiente irracional para obtener una geodésica densa:

   - $(u_0, v_0) = (\pi, 0)$
   - $(u_0', v_0') = (1, 15\pi)$

3. Modelo de plano hiperbólico dado por el semiplano de Poincaré. Considérese la primera forma fundamental en el semiplano $v > 0$ dada por $E = G = \frac{1}{v^2}$ y $G = 0$. Dibújense sus geodésicas. Opcional: ¿Sabrías encontrar expresiones analíticas de las mismas?



- Opcional: Partiremos del sistema de ecuaciones obtenido en clase:

$$U''^T = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} U'^T I_u U' \\ U'^T I_v U' \end{pmatrix}^T - U'^T \left(I_u u' + I_v v' \right) \right] I^{-1}$$

$$(u''v'') = \left[\frac{1}{2} \left((u'v') \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad (u'v') \begin{pmatrix} \frac{-2}{v^3} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{v^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right) - (u'v') \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u' \right. \right.$$

$$(u''v'') = \left(\frac{2u'v'}{v} \quad \frac{v'^2 - u'^2}{v} \right)$$

Tenemos, por tanto, las siguientes ecuaciones:

$$u'' = 2u'v' \tag{1}$$

$$v'' = \frac{v'^2 - u'^2}{v} \tag{2}$$

Supongamos primero que $u' = 0$. En este caso, la primera de las ecuaciones se satisface ($u'' = 0$) y las geodésicas tendrán la forma $u = cte$.

Supongamos ahora que $u' \neq 0$. Resolvemos para ello la segunda de las ecuaciones. Definimos $x = \frac{du}{dv}$. Así, $u' = xv'$. Derivando esta nueva ecuación mediante la regla de la cadena tenemos:

$$u'' = \frac{dx}{dv}v'^2 + xv'' \tag{3}$$

Sustituimos ahora (1) y (2) en la recién obtenida ecuación (3):

$$\frac{2u'v'}{v} = \frac{dx}{dv}v'^2 + x\frac{v'^2 - u'^2}{v}$$

Sustituimos el valor de u' en la ecuación:

$$\frac{dx}{dv}v'^2 = \frac{2u'v'}{v} - x\frac{v'^2 - x^2v'^2}{v}$$

Operando, tenemos finalmente:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{x + x^3}{v}$$

Despejando e integrando, sustituyendo la x por su valor (u'/v') y volviendo a integrar, llegamos a la siguiente ecuación de la geodésica:

$$(u-a)^2 + v^2 = (\frac{1}{b})^2$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ son constantes. Así, y teniendo en cuenta que $v > 0$, las geodésicas serán semicírculos centrados en el punto $(a, 0)$ y de radio $\frac{1}{b}$.