Interpolación polinómica:

• $\tau = (\tau_i)_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, $\tau_i \neq \tau_j \ \forall i \neq j$.

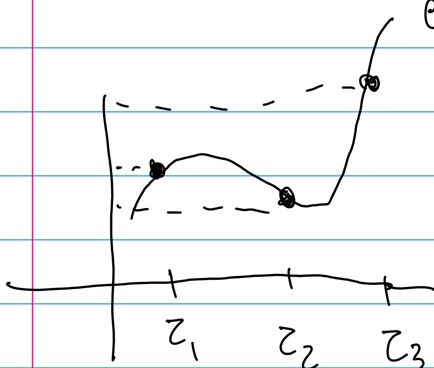
Queremos encontrar un polinomio p tal que

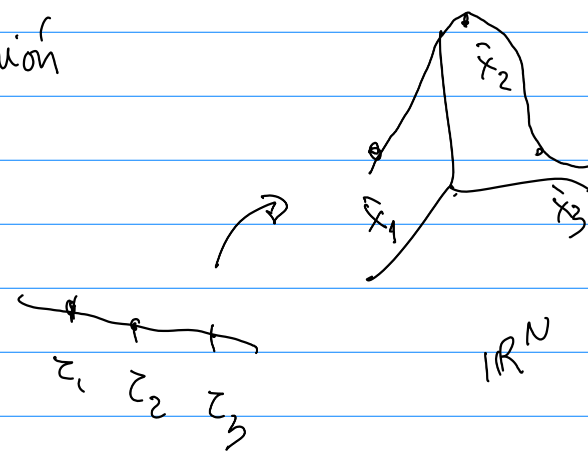
$\boxed{p(\tau_i) = x_i} = g(\tau_i)$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N(=1)}$

$\mathbb{R}^{N=1}$ (se hace coord. a coord.)

p polinomio de $\underbrace{\text{orden}}$ n := de grado $\leq n-1$.

e.v. de dimensión n





Estamos interesados en im p

$p(\tau_i) = x_i$ son n ecuaciones lineales

con n incógnitas = coef. de p.

$p(\tau) = a_0 + a_1\tau + \dots + a_{n-1}\tau^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 z_1 + \dots + a_{n-1} z_1^{n-1} = x_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 z_n + \dots + a_{n-1} z_n^{n-1} = x_n \end{array}\right\}$$ sistema de Vandermonde.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ \cdots & & & \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{det. de Vandermonde} \neq 0} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

det. de Vandermonde $\neq 0$.

$$\det = \prod_{i<j} (z_i - z_j)$$

<u>Polinomios de Lagrange</u>: L_i son pol. de orden n

tales que $L_i(z_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j L_j = P \quad ; \quad P(z_i) = x_i$$

se omite el factor

$$L_i(z) = \frac{(z-z_1)\dots\widehat{(z-z_i)}\dots(z-z_n)}{(z_i-z_1)\dots\widehat{(z_i-z_i)}\dots(z_i-z_n)}$$ satisface

$\rightarrow$ el problema de interp. queda resuelto.

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ \cdots & & & \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matriz cuadrada.

tiene solución para cualesquiera $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La matriz es regular, La solución es única.

Calcular así el pol. interpolador es costoso;

S = op. suma, M = multiplicación, D = división.

Evaluar L_i: $2(n-1)S + 2(n-1)M + (n-1)D$,

$\Rightarrow$ Mejor usar el método de Newton.

Polinomio de Newton: g función que deseamos interpolar en $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+k}$.

Def: k-ésima diferencia dividida de g en $z_i \ldots z_{i+k}$ = coef. del término principal del polinomio interp. de orden $k+1$ de g en $z_i \ldots z_{i+k}$.

$$p(z) = c_i z^k + \dots$$
c_i = k-ésima diferencia dividida = $[z_i \dots z_{i+k}]g = c_i$ notación.

Ejemplo: ① z_i, $k=0$.

$$[z_i]g = g(z_i) = p.$$

② z_i, z_{i+1}:

$$p(z) = g(z_i) + \boxed{\frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}\left(g(z_{i+1}) - g(z_i)\right)}$$

$$p(z_i) = g(z_i)$$

$$p(z_{i+1}) = g(z_i) + \left(g(z_{i+1}) - g(z_i)\right) = g(z_{i+1})$$

$$[z_i z_{i+1}]g = \frac{g(z_{i+1}) - g(z_i)}{z_{i+1} - z_i} = \frac{[z_{i+1}]g - [z_i]g}{z_{i+1} - z_i}$$

Veremos que, en general, si $z_k \neq z_l$

$$[z_i \dots z_{i+k}]g = \frac{[z_i \dots \hat{z}_k \dots z_{i+k}]g - [z_i \dots \hat{z}_l \dots z_{i+k}]g}{z_l - z_k}$$

(errata corregida)

Propiedades de $[z_i \ldots z_{i+k}]g$:

1) Si $p_i = p_i(z)$ coincide con g en $z_1 \ldots z_i$

$\underbrace{\Pi_{<i}}_{\text{grado}<i} =$ polinomios de orden $i+1$.

entonces

$$\underbrace{p_{k+1}(z)}_{\substack{\text{coincide}\\ \text{con } g \text{ en}\\ z_1 \ldots z_{k+1}}} = \underbrace{p_k(z)}_{\substack{\text{coincide}\\ \text{con } g\\ \text{en } z_1 \ldots z_k}} + (z-z_1)\ldots(z-z_k)[z_1 \ldots z_k]g.$$

$p_{k+1}(z) - p_k(z)$ se anula en $z_1 \ldots z_k$.

$$\Rightarrow p_{k+1}(z) - p_k(z) = G(z-z_1)\ldots(z-z_k)$$

$$p_{k+1}(z) = p_k(z) + \boxed{G}(z-z_1)\ldots(z-z_k)$$

$\underset{\text{coef ppal.}}{\parallel} \Rightarrow G = [z_1 \ldots z_k]g.$

$\Rightarrow$ se pueden construir los polinomios interpoladores añadiendo un z_i cada vez.

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= P_1(x) + (P_2(x) - P_1(x)) + \dots + (P_n(x) - P_{n-1}(x)) \\ &= [z_1]g + (x-z_1)[z_1,z_2]g + \dots + (x-z_1)\dots(x-z_{n-1})[z_1 \dots z_n]g. \end{aligned}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x-z_1)\dots(x-z_{i-1})[z_1 \dots z_i]g =$$ forma de Newton del polinomio interp.

$\underbrace{(x-z_1)(x-z_0)}_{\nexists}$ = prod. de 0 términos := 1.

<u>Práctica 5</u>: Cálculo del polinomio interpolador mediante el método de Newton + interp. por mínimos cuadrados.

Dados ptos. del plano $p_0 \dots p_n$ y nodos $z_0 \dots z_n$, calcular el polinomio p de grado n que cumple $p(z_i) = p_i$ y, en el caso de que tengamos + puntos y el mismo grado, resolver el problema $p(z_i) = p_i$, $i = 1 \dots m$ por mínimos cuadrados.

ii) $[z_i \dots z_{i+k}]g$ es simétrico en $z_i \dots z_{i+k}$.
(porque el pol. interp. es el mismo si se reordena)

iii) $[z_i \dots z_{i+k}]g$ es lineal en g.

$$[z_i \dots z_{i+k}](g_1+g_2) = [z_i \dots z_{i+k}]g_1 + [z_i \dots z_{i+k}]g_2$$

iv) Fórmula de Leibniz: $f = g \cdot h$

$$[z_i \dots z_{i+k}]f = \sum_{r=i}^{i+k} \left([z_i \dots z_r]g\right)\left([z_r \dots z_{i+k}]h\right)$$