$$(*) \quad [\tau_i \dots \tau_{i+k}]g = \frac{[\tau_i \dots \hat{\tau}_r \dots \tau_{i+k}]g - [\tau_i \dots \hat{\tau}_s \dots \tau_{i+k}]g}{\tau_r - \tau_s}$$

$\tau_r \neq \tau_s$

<u>Demostración</u>: $[\tau_i \dots \tau_{i+k}]g :=$ coef. ppal. del polinomio de orden k

que coincide con g en $\tau_i \dots \tau_{i+k}$

Por la simetría de los coef., supongamos $\tau_i = \tau_r$

$\tau_{i+k} = \tau_s$

$p \equiv$ polinomio interp. de g en $\tau_{i+1} \dots \tau_{i+k}$; q: pol. interp. de g $\tau_i \dots \tau_{i+k-1}$

$$P(x) = \frac{\tau_{i+k} - x}{\tau_{i+k} - \tau_i} p(x) + \frac{x - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} q(x) \equiv \text{pol. que}$$

interpola g en $\tau_i \; \tau_{i+1} \dots \tau_{i+k-1} \; \tau_{i+k}$

En τ_i, $P(\tau_i) = \frac{\tau_{i+k} - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} p(\tau_i) + 0 = p(\tau_i) = g(\tau_i)$

$P(\tau_{i+k}) = q(\tau_{i+k}) = g(\tau_{i+k})$

en τ_j, $i < j < i+k$

$$P(z_j) = \frac{z_{i+k}-z_j}{z_{i+k}-z_i}\, \underset{g(z_j)}{\underset{\shortparallel}{p(z_j)}} + \frac{z_j - z_{i+k}}{z_{i+k}-z_i}\, \underset{g(z_j)}{\underset{\shortparallel}{q(z_j)}} = g(z_j).$$

P = es el polin. interp. en $z_i \dots z_{i+k}$.

y su coef. ppal.

$$P(x) = \frac{z_{i+k}-x}{z_{i+k}-z_i}\, p(x) + \frac{x - z_i}{z_{i+k}-z_i}\, q(x)$$

$$\frac{-[z_{i+1} \dots z_{i+k}]g}{z_{i+k}-z_i} + \frac{[z_i \dots z_{i+k-1}]g}{z_{i+k}-z_i} =$$

$$= \frac{[z_{i+1} \dots z_{i+k}]g - [z_i \dots z_{i+k-1}]g}{z_i - z_{i+k}} \quad \blacksquare$$

(x) Ajuste de un polinomio por mínimos cuadrados

$C_1(x) \dots C_k(x)$ k funciones

Queremos $f(x) = a_1 C_1(x) + \dots + a_k C_k(x)$

que ajuste lo mejor posible (en el sentido de mínimos cuadrados) la función g en $z_1 \dots z_m$

$$f(z_1) = a_1 G_1(z_1) + \dots + a_k G_k(z_1) - \underbrace{g(z_1)}_{=b_1} = \varepsilon_1$$

$$\dots$$

$$f(z_m) = a_1 G_1(z_m) + \dots + a_k G_k(z_m) - \underbrace{g(z_m)}_{=b_m} = \varepsilon_m$$

$$\min_{a_1 \dots a_k} \left(\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_m^2 \right)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1(z_1) & \dots & G_k(z_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_1(z_m) & \dots & G_k(z_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = G \cdot a + b$$

$$\min_a \left(\|\varepsilon\|^2 = \langle G \cdot a - b, G \cdot a - b \rangle \right)$$

$$\|$$

$$(G \cdot a - b)^T \cdot (G \cdot a - b) = F(a)$$

$$F(a) = (a^T G^T - b^T)(G \cdot a - b) =$$

$$= a^T G^T G a - \underbrace{a^T G^T b}_{} - \underbrace{b^T G a}_{}$$

$$= \underbrace{a^T C^T C a}\, - 2a^T C^T b = F(a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 2\underbrace{(0 \dots 1 \dots 0)}_{= e_i^T} C^T C a - 2 e_i^T C^T b = 0 \quad \forall i$$

(el 1 en la posición i)

$$2 e_i^T \big(\underbrace{C^T C a - C^T b}_{= 0} \big) = 0 \quad \forall i$$

$$C^T C a = C^T b$$

$$a = \underbrace{(C^T C)}^{-1} C^T b \quad \text{solución de mínimos cuadrados.}$$

En general $C_1 \dots C_k$ $\qquad k << m$

$z_1 \dots \dots z_m$

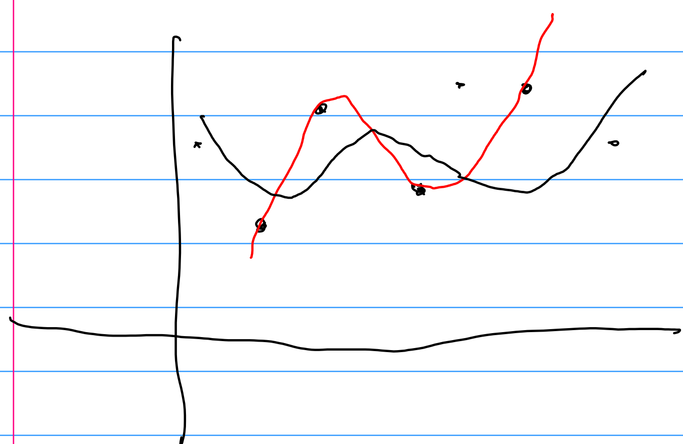
$$\underbrace{\underset{k\times m}{C^T}\ \underset{m\times k}{C}}_{k\times k}$$

Si $k = m$ y C es invertible (lo que ocurre si $C_1 \dots C_k$ son base de pol. de orden k)

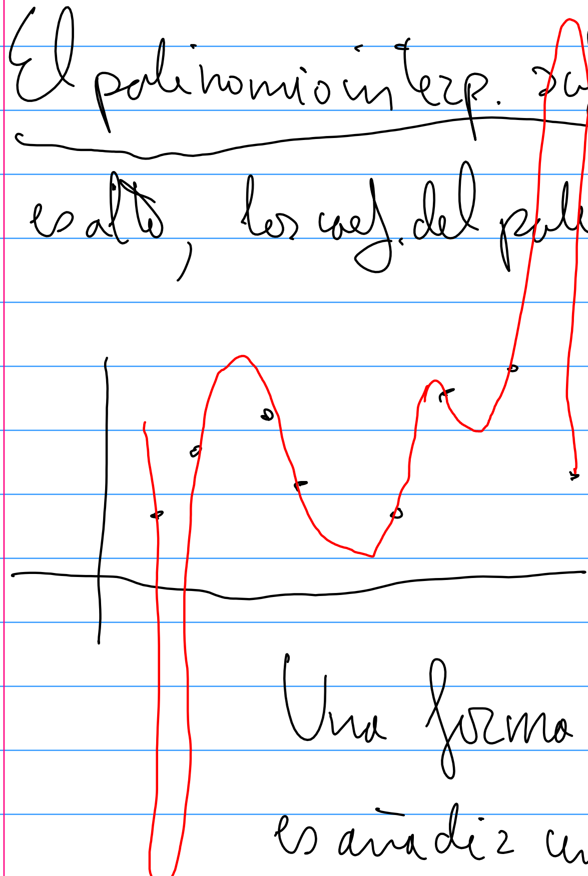
$$a = (G^T G)^{-1} G^T b$$

$$G^{-1} \cancel{G^{-T}} \cancel{G^T} b = G^{-1} b.$$

$\Rightarrow$ coef. del polinomio interpolador.



El polinomio interp. sufre overfitting: Si el grado es alto, los coef. del polinomio tienen oscilaciones muy grandes



Una forma de paliar este problema es añadir un término de regularización:

$$\min_a \underbrace{\|G a - b\|^2} + \frac{\lambda}{2}\|a\|^2$$ → no es ya interpolador pero se aproxima. No sufre tanto overfitting.

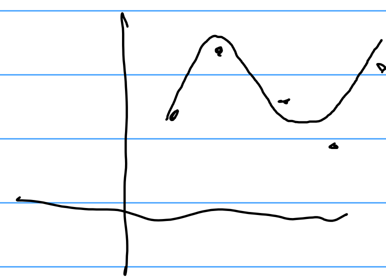
$$\|Ga-b\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|a\|^2 =$$

$$= \underbrace{a^T G^T G a - 2a^T G^T b} + \underbrace{\frac{\lambda}{2} a^T a}_{= a^T \cdot Id \cdot a} =$$

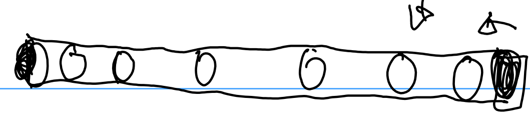
$$= a^T \underbrace{\left(G^T G + \frac{\lambda}{2} Id\right)}_{= H;\ H^T = H} a - 2 a^T G^T b$$

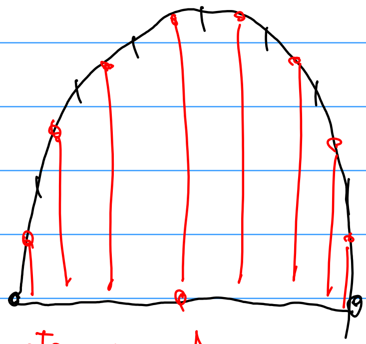
solución de min. cuadrados:

$$\underline{a = H^{-1} G^T b}$$



<u>Otra opción</u>: que los z_i sean los nodos de Chebyshev





$$(9) \quad \tau_j = \tau_j^c := \left(a+b-(a-b)\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)\right)/2, \qquad j=1,\dots,n,$$

fórmula de los nodos de Chebyshev

Encontrar el polinomio interpolador de los puntos $(x_0, y_0) \dots (x_N, y_N)$ a tiempo $\tau_0 \dots \tau_N$ mediante 1) el polinomio de Newton

2) mínimos cuadrados.

grado fijo. N arbitrario.

(pol. interp. o pol. que se aproxima)

+ regularización

+ nodos de Chebyshev.