Práctica 1: Dados dos curvas $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$
$\bar{\gamma} : \bar{I} \to \mathbb{R}^2$

decidir si difieren en un movimiento rígido junto con una reparametrización, al menos parcialmente (es decir, puede que coincidan al restringirlas a subintervalos $I' \subset I$
$\bar{I}' \subset \bar{I}$)

Herramienta: signatura de una curva.

$\gamma = \gamma(t)$ curva regular plana, la signatura de γ
$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$

$$sig_\gamma : I \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto \left(\kappa(t), \frac{d\kappa}{ds}(t)\right)$$

son invariantes diferenciales.

Teorema: γ y $\bar{\gamma}$ difieren en mov. rígido $\Leftrightarrow$
$sig_\gamma(I) = sig_{\bar{\gamma}}(\bar{I})$

$$K(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$$

$$\frac{dk}{ds} = \frac{dk}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dk}{dt} \cdot \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{\|\gamma'\|} \cdot \frac{dk}{dt}$$

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(\xi)\| d\xi$$

$$\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|$$

Bosquejo de demostración:

$\Rightarrow)$ $\overset{\text{Hip.}}{\gamma} \underset{\substack{\text{salvo} \\ \text{mov. + reparam.} \\ \text{rig.}}}{\sim} \bar{\gamma}$ ¿ $\text{rig}_\gamma(I) = \text{rig}_{\bar{\gamma}}(I)$?,

$$K(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$$ es inv. por mov. y reparam.

$$\gamma \sim \bar{\gamma} \Rightarrow K(t) = \bar{K}(\bar{t}(t))$$

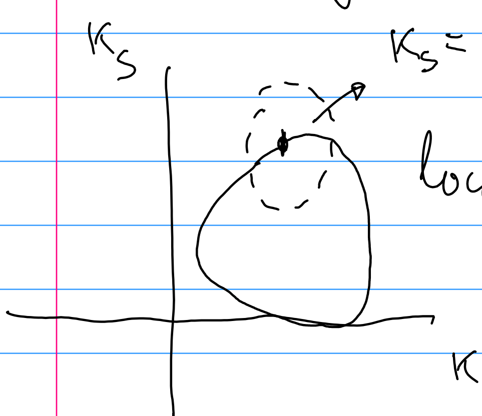
La reparam. es $\bar{t} = \bar{t}(t)$

y como $\frac{d}{ds}$ también es invariante.

$$\Rightarrow \quad \frac{d\kappa}{ds}(t) = \frac{d\bar{\kappa}}{ds}(\bar{t}(t))$$

las imágenes coinciden.

$$\Leftarrow) \quad \mathrm{sig}_{\gamma}(I) = \mathrm{sig}_{\bar{\gamma}}(\bar{I})$$



$\kappa_s = F(\kappa)$: ecuación diferencial ordinaria.

localmente es un grafo.

Si escribimos la curva también como un grafo: $y = y(x)$

Curva : $x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$

$$\kappa = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} \quad ; \quad \frac{d\kappa}{ds} = \frac{d\kappa}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} =$$

$$= \frac{dK}{dx} \cdot \frac{1}{ds/dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} =$$

$$= y''' \cdot \boxed{} + \text{cosas que dependen de } y', y''.$$

$$K_s = F(K)$$

$$y''' \cdot \underbrace{\boxed{}}_{} + \text{cosas que dependen de } y', y'' = F\left(\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right)$$

Despejando:

$$y''' = f(y', y'') \quad \text{E.D.O.}$$

con una única solución para cada cond. inicial

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ y''(x_0) = y''_0 \end{cases}$$

Si dos curvas tienen la misma κ (sig.) y podemos usar el mov. para convertir unas cond. inic. en las otras $\Rightarrow$ las curvas coincidirán porque la solución es única.

El mov. ajusta $\left.\begin{array}{l} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \end{array}\right\}$ tres cond.

Mov. del plano tienen 3 parámetros.

$y''(x_0)$ no hace falta porque coinciden las curvas. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ si las $y'(x_0)$ coinciden

$\Rightarrow$ coinciden las y''. ∎

Mov. ríg. de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Differential and Numerically Invariant Signature Curves Applied to Object Recognition

Eugenio Calabi†
Department of Mathematics
University of Pennsylvania
Philadelphia, PA 19066-1102
calabi@math.upenn.edu

Peter J. Olver‡
School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, MN 55455
olver@math.umn.edu
http://www.math.umn.edu/~olver

Chehrzad Shakiban
Department of Mathematics
University of St. Thomas
St. Paul, MN 55105-1096
c9shakiban@stthomas.edu

Allen Tannenbaum§
Department of Electrical Engineering
University of Minnesota
Minneapolis, MN 55455
tannenba@ee.umn.edu

Steven Haker
School of Mathematics
University of Minnesota
Minneapolis, MN 55455
haker@math.umn.edu

cdist

scipy.spatial.distance.cdist

scipy.spatial.distance.cdist(*XA*, *XB*, *metric='euclidean'*, *p=2*, *V=None*, *VI=None*, *w=None*)

Computes distance between each pair of the two collections of inputs.