Matemáticas

Docente: Briceyda B. Delgado

Tarea 1

Javier Jhairt López Rojas

2026-01-31

Ejercicio 1

Un inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañías: Aeroméxico, Volaris y Vivaaerobus... Demuestre que el corredor no cuenta con la información suficiente... pero que si ella dice tener 280 acciones de Vivaaerobus, el corredor pueda calcular el número de acciones que posee en Aeroméxico y en Volaris.

Solución:

Definición de Variables

Sean:

- A_i: Acción de Aeroméxico
- V_{o_i}: Acción de Volaris
- V_i: Acción de VivaAerobus

Sean:

$$P = \text{Valor del Portafolio (Presente)}$$

$$P_0 = \sum_{i=0}^{n} A_i + \sum_{i=0}^{n} V_{o\_i} + \sum_{i=0}^{n} V_{no\_i}$$

Sean los precios:

- $\alpha =$ Precio Aeroméxico
- $\beta =$ Precio Volaris
- $\gamma =$ Precio Viva

Ecuación general del Portafolio:

$$P = \left(\sum_{i=0}^{n} A_i\right)\alpha + \left(\sum_{i=0}^{n} V_{o\_i}\right)\beta + \left(\sum_{i=0}^{n} V_{iva\_i}\right)\gamma$$

$$\begin{aligned} P - 350 &= P_2 \quad \text{(Hace 2 días)} \\ P_2 + 600 &= P_1 \quad \text{(Ayer)} \end{aligned}$$

Cambios en los precios:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha - 1 \\ \beta_2 &= \beta - 1{,}50 \\ \gamma_2 &= \gamma + 0{,}5 \end{aligned}$$

Y para el siguiente periodo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 + 1{,}5 \\ \beta_1 &= \beta_2 - 0{,}5 \\ \gamma_1 &= \gamma_2 + 1 \end{aligned}$$

Procedimiento:

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P - 350 &= P_1 - 600 \\ \alpha_1 - 1{,}5 &= \alpha - 1 \\ \beta_1 + 0{,}5 &= \beta - 1{,}5 \\ \gamma_1 - 1 &= \gamma + 0{,}5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P &= P_1 - 600 + 350 = P_1 - 250 \\ \alpha &= \alpha_1 - 1{,}5 + 1 = \alpha_1 - 0{,}5 \\ \beta &= \beta_1 + 0{,}5 + 1{,}5 = \beta_1 + 2 \\ \gamma &= \gamma_1 - 1 - 0{,}5 = \gamma_1 - 1{,}5 \end{aligned}$$

Sustituyendo los precios despejados en la ecuación original del portafolio:

$$P = (\alpha_1 - 0{,}5)\left(\sum_{i=0}^{n} A_i\right) + (\beta_1 + 2)\left(\sum_{i=0}^{n} V_{o\_i}\right) + (\gamma_1 - 1{,}5)\left(\sum_{i=0}^{n} V_{iva\_i}\right)$$

Para demostrar si el corredor cuenta con información suficiente, traducimos el problema a un sistema de ecuaciones lineales basado en las variaciones de valor. Definimos las incógnitas como la cantidad total de acciones por compañía:

- $x = \sum A_i$: Número de acciones de Aeroméxico.
- $y = \sum V_{o\_i}$: Número de acciones de Volaris.
- $z = \sum V_{iva\_i}$: Número de acciones de VivaAerobus.

El problema nos proporciona dos momentos de cambio en el valor total del portafolio:
1. Hace dos días (El valor bajó 350): El cambio total es la suma de los cambios individuales (ΔPrecio $\times$ Cantidad):

$$-1x - 1{,}5y + 0{,}5z = -350$$

2. Ayer (El valor aumentó 600):

$$1{,}5x - 0{,}5y + 1z = 600$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} -x - 1{,}5y + 0{,}5z = -350 \\ 1{,}5x - 0{,}5y + z = 600 \end{cases} \tag{1}$$

Conclusión: Tenemos un sistema de **2 ecuaciones con 3 incógnitas** (x, y, z). Esto se clasifica como un *sistema indeterminado.*

Si la inversionista declara tener **280 acciones de VivaAerobus**, obtenemos el valor de la tercera incógnita:

$$z = 280$$

Sustituimos z en el sistema original:
Ecuación 1:

$$-x - 1{,}5y + 0{,}5(280) = -350 \implies -x - 1{,}5y + 140 = -350$$

$$\implies -x - 1{,}5y = -490 \quad \ldots \text{(Eq. A)}$$

Ecuación 2:

$$1{,}5x - 0{,}5y + 1(280) = 600 \implies 1{,}5x - 0{,}5y + 280 = 600$$

$$\implies 1{,}5x - 0{,}5y = 320 \quad \ldots \text{(Eq. B)}$$

Ahora tenemos un sistema de 2×2 determinado. Resolvemos para x y y: De la (Eq. A) multiplicamos por (-1):

$$x + 1{,}5y = 490$$

De la (Eq. B) multiplicamos por 3:

$$4{,}5x - 1{,}5y = 960$$

Sumamos ambas ecuaciones para eliminar y:

$$5{,}5x = 1450 \implies x = \frac{1450}{5{,}5} \approx 263{,}63$$

Sustituimos x en la ecuación despejada de y:

$$1{,}5(263{,}63) - 0{,}5y = 320 \implies 395{,}45 - 320 = 0{,}5y$$

$$75{,}45 = 0{,}5y \implies y \approx 150{,}9$$

Resultado Final: Con el dato adicional $z = 280$, el sistema tiene solución única y el corredor puede calcular las acciones restantes (aproximadamente):

- Aeroméxico (x): ≈ 264 acciones.
- Volaris (y): ≈ 151 acciones.
- VivaAerobus (z): 280 acciones.

Ejercicio 2

Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por $[k]$, donde $k = 1, 2, 3, 4$.

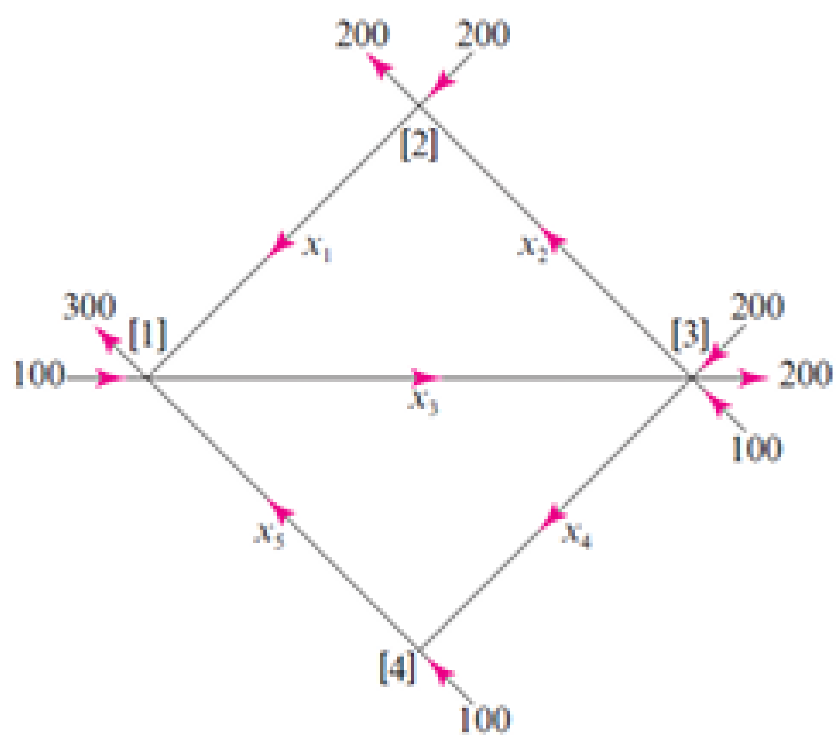

Figura 1: Diagrama de la malla de calles

Por ejemplo, en la intersección [1], la ecuación que lo representa es:

$$x_1 + x_5 + 100 = x_3 + 300$$

A partir de esta información y el diagrama presentado, realice lo siguiente:

1. **Proponga el sistema de ecuaciones** que ilustra el flujo de tráfico completo de la imagen anterior.
2. **Resuelva el sistema** obtenido del flujo de tráfico.
3. Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse; es decir:

$$x_3 = 0$$

4. Con la restricción anterior ($x_3 = 0$), responda:
   - ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4], es decir $x_5 = 0$, sin modificar los sentidos del tránsito?
   - Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

Solución

- **Intersección [1]:**

$$x_3 - x_5 - x_1 = -100 + 300 = 200$$

  Multiplicando por (-1) para facilitar el pivote:

$$x_1 - x_3 + x_5 = -200$$

- **Intersección [2]:**

$$-x_2 + x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0$$

- **Intersección [3]:**

$$x_3 + x_2 + x_4 = -100 + 200 = 100$$

  (Ordenado: $x_2 + x_3 + x_4 = 100$)

- **Intersección [4]:**

$$-x_4 + x_5 = -100 \quad \Rightarrow \quad x_4 - x_5 = 100$$

Ordenando las variables $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, generamos la matriz aumentada inicial:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Gauss-Jordan

Eliminamos x_1 de la fila 2 ($R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Convertimos el pivote de la fila 2 en positivo ($R_2 \Rightarrow -R_2$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Eliminamos x_2 de la fila 3 ($R_3 \Rightarrow R_3 - R_2$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Simplificamos la fila 3 dividiendo entre 2 ($R_3 \Rightarrow \frac{1}{2}R_3$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & -0{,}5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Realizando las operaciones finales para eliminar los términos superiores):

$$\xrightarrow{\text{Reducción Final}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

Del sistema matricial reducido obtenemos las ecuaciones despejadas:

$$\begin{aligned} x_1 - x_5 &= 400 \\ x_2 - x_5 &= 400 \\ x_3 - 2x_5 &= 600 \\ x_4 - x_5 &= 100 \end{aligned}$$

Expresando todo en función de la variable libre x_5 (t):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 400 + t \\
x_2 &= 400 + t \\
x_3 &= 600 + 2t \\
x_4 &= 100 + t \\
x_5 &= t
\end{aligned}
$$

$\forall t \geq 0$

¿Puede cerrarse la calle de [1] a [3] ($x_3 = 0$)?
Respuesta: No es posible.
Justificación matemática: Sustituimos $x_3 = 0$ en la ecuación paramétrica obtenida:

$$600 + 2t = 0$$

$$2t = -600$$

$$t = -300$$

Dado que t representa el flujo de la calle 5 (x_5), tenemos la restricción física de que $t \geq 0$. Como $t = -300$ viola esta condición (implicaría flujo negativo/inverso), no es posible cerrar la calle [1] a [3] bajo las condiciones actuales de la red. De hecho, el flujo mínimo en x_3 es de 600 vehículos (cuando $t = 0$).

¿Puede cerrarse la calle de [1] a [4] ($x_5 = 0$)?
Respuesta: Sí es posible.
Justificación: Si cerramos esta calle, implica que $x_5 = t = 0$. Verificamos el comportamiento del resto del sistema con $t = 0$:

- $x_1 = 400 + 0 = 400$ (Válido)
- $x_2 = 400 + 0 = 400$ (Válido)
- $x_3 = 600 + 2(0) = 600$ (Válido)
- $x_4 = 100 + 0 = 100$ (Válido)

Como todas las variables resultantes son positivas (≥ 0), cerrar esta calle no genera conflictos en la red.

Mínimo flujo para la calle [1] a [4]:
Dado que esta calle está representada por la variable x_5, y hemos definido que $x_5 = t$, el flujo mínimo está determinado directamente por la restricción de no negatividad del sistema.

$$x_{5_{min}} = 0 \text{ vehículos.}$$

Ejercicio 3

Utilice la inversa de matrices para codificar un mensaje asignado en clase de forma personalizada. Se utilizarán arreglos de tamaño 3 y la siguiente matriz de 3×3*:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Cada letra del mensaje a encriptar será representada por un número módulo 26.

Solución

Se utiliza la matriz A de 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Para encontrar A^{-1}, primero obtenemos el polinomio característico resolviendo $\det(A - \lambda I)$.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 3 & 5 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

Expandiendo por cofactores de la primera fila:

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(7-\lambda) - (-1)(5)\right] - 4\left[0(7-\lambda) - (-1)(3)\right] + 3\left[0(5) - (1-\lambda)(3)\right]$$

Desarrollamos el álgebra paso a paso:

$$\begin{aligned} &= (2-\lambda)\left[(7 - \lambda - 7\lambda + \lambda^2) - (-5)\right] - 4\left[0 - (-3)\right] + 3\left[0 - (3 - 3\lambda)\right] \\ &= (2-\lambda)\left[(\lambda^2 - 8\lambda + 7) + 5\right] - 4(3) + 3(-3 + 3\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) - 12 - 9 + 9\lambda \end{aligned}$$

Multiplicamos el binomio por el trinomio:

$$\begin{aligned} &= 2(\lambda^2 - 8\lambda + 12) - \lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 12) - 21 + 9\lambda \\ &= (2\lambda^2 - 16\lambda + 24) - (\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda) - 21 + 9\lambda \\ &= 2\lambda^2 - 16\lambda + 24 - \lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda - 21 + 9\lambda \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes obtenemos el polinomio característico:

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 19\lambda + 3 = 0$$

Toda matriz satisface su propio polinomio característico, por lo tanto:

$$-A^3 + 10A^2 - 19A + 3I = 0$$

Despejamos la matriz identidad para encontrar la inversa (multiplicando toda la ecuación por A^{-1}):

$$\begin{aligned} -A^3(A^{-1}) + 10A^2(A^{-1}) - 19A(A^{-1}) + 3I(A^{-1}) &= 0 \\ -A^2 + 10A - 19I + 3A^{-1} &= 0 \\ 3A^{-1} &= A^2 - 10A + 19I \end{aligned}$$

Finalmente despejamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\left(A^2 - 10A + 19I\right)$$

Operaciones Matriciales

Paso 1: Calcular A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 27 & 23 \\ -3 & -4 & -8 \\ 27 & 52 & 53 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Sustitución en la fórmula de la inversa

$$3A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 27 & 23 \\ -3 & -4 & -8 \\ 27 & 52 & 53 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} + 19 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Proceso de Encriptado y Desencriptado

Encriptado: Para encriptar un mensaje, se convierte cada letra a su valor numérico correspondiente ($A = 0, B = 1, \dots$) y se agrupan en vectores columna M de tamaño 3×1. Luego se multiplica por la matriz A:

$$C = A \cdot M \pmod{26}$$

Desencriptado: Para recuperar el mensaje original, multiplicamos el vector cifrado C por la matriz inversa A^{-1} encontrada:

$$M = A^{-1} \cdot C$$

Ejercicio 4

En una región la población se mantiene constante y esta se divide en rural y urbana. Se ha observado que cada año, 25habitantes de la zona rural pasa a la urbana y 5cambia a la rural. Si al inicio de un experimento para determinar el movimiento de una población se tienen 8 millones en la zona rural y 2 en la zona urbana.

a) Justificación de la Matriz Estocástica

Sea el espacio de estados $\Omega = \{0, 1\}$. Si para $i = 0, \dots, n$:

- $X_i = 0 \implies$ Población Rural
- $X_i = 1 \implies$ Población Urbana

Datos del problema (probabilidades de transición):

$$\begin{aligned} P(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0) &= 0{,}25 \quad \text{(Rural a Urbana)} \\ P(X_i = 0 \mid X_{i-1} = 1) &= 0{,}05 \quad \text{(Urbana a Rural)} \end{aligned}$$

Por complementos (la suma de probabilidades debe ser 1):

$$\begin{aligned} P(X_i = 0 \mid X_{i-1} = 0) &= 1 - P(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \\ P(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1) &= 1 - P(X_i = 0 \mid X_{i-1} = 1) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \end{aligned}$$

Ordenando en la matriz de transición A (donde las columnas representan el estado origen y las filas el estado destino):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}25 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Bajo el supuesto hecho que las probabilidades de transición son estacionarias, se cumple la propiedad de Markov.

b) Polinomio Mínimo y Valores Propios

Calculamos el polinomio característico mediante $\det(A - \lambda I)$:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0{,}75 - \lambda & 0{,}05 \\ 0{,}25 & 0{,}95 - \lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante:

$$= (0{,}75 - \lambda)(0{,}95 - \lambda) - (0{,}25)(0{,}05)$$

$$= 0{,}7125 - 0{,}75\lambda - 0{,}95\lambda + \lambda^2 - 0{,}0125$$

Agrupando términos:

$$= \lambda^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}7005$$

Resolvemos la ecuación cuadrática para encontrar las raíces (λ):

$$\lambda = \frac{-(-1{,}7) \pm \sqrt{(-1{,}7)^2 - 4(1)(0{,}7005)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{1{,}7 \pm \sqrt{2{,}89 - 2{,}802}}{2}$$

$$\lambda = \frac{1{,}7 \pm \sqrt{0{,}08}}{2} \quad (\text{Nota: } \sqrt{0{,}08} \approx 0{,}282842)$$

Calculando los dos valores:

$$\lambda_1 = \frac{1{,}7 + 0{,}282842}{2} = \frac{1{,}982842}{2} = 0{,}991421$$
$$\lambda_2 = \frac{1{,}7 - 0{,}282842}{2} = \frac{1{,}417158}{2} = 0{,}708579$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$$P(\lambda) = (\lambda - 0{,}991421)(\lambda - 0{,}708579)$$

c) Matriz Diagonalizadora P

Buscamos P tal que $P^{-1}AP = D$.

$$D = \begin{pmatrix} 0{,}991421 & 0 \\ 0 & 0{,}708579 \end{pmatrix}$$

Cálculo de Vectores Propios

Para $\lambda_1 = 0{,}991421$: Planteamos $(A - \lambda_1 I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}25 & 0{,}95 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}991421 & 0 \\ 0 & 0{,}991421 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}241421 & 0{,}05 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Del sistema obtenemos:

$$-0{,}241421v_1 + 0{,}05v_2 = 0$$

$$0{,}05v_2 = 0{,}241421v_1 \implies v_2 = \frac{0{,}241421}{0{,}05}v_1 \approx 4{,}828v_1$$

Si $v_1 = 1$, entonces $v_2 = 4{,}8285$.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4{,}8285 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 0{,}708579$: Del sistema $(A - \lambda_2 I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0{,}75 - 0{,}7085 & 0{,}05 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \implies 0{,}0415v_1 + 0{,}05v_2 = 0$$

$$0{,}05v_2 = -0{,}0415v_1 \implies v_2 = \frac{-0{,}0415}{0{,}05}v_1 = -0{,}83v_1$$

Según la matriz P construida en las notas:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1{,}03 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz P formada:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1{,}03 \\ 4{,}8285 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la Inversa P^{-1} (Gauss-Jordan)

Aumentamos la matriz con la identidad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1{,}03 & 1 & 0 \\ 4{,}8285 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Operación $R_2 = R_2 - 4{,}8285R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1{,}03 & 1 & 0 \\ 0 & 5{,}8585 & -4{,}8285 & 1 \end{array}\right)$$

Operación $R_2 = R_2/5{,}8585$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1{,}03 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}8241 & 0{,}1706 \end{array}\right)$$

Operación $R_1 = R_1 + 1{,}03R_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}1759 & 0{,}1757 \\ 0 & 1 & -0{,}8241 & 0{,}1706 \end{array}\right)$$

Por lo tanto:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1759 & 0{,}1757 \\ -0{,}8241 & 0{,}1706 \end{pmatrix}$$

Paso A: Multiplicación $M = P^{-1} \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 0{,}1759 & 0{,}1757 \\ -0{,}8241 & 0{,}1706 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}25 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

Resultado Intermedio:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}1758 & 0{,}1756 \\ -0{,}5754 & 0{,}1208 \end{pmatrix}$$

Paso B: Multiplicación Final $(P^{-1}A) \cdot P$

$$\begin{pmatrix} 0{,}1758 & 0{,}1756 \\ -0{,}5754 & 0{,}1208 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1{,}03 \\ 4{,}8285 & 1 \end{pmatrix}$$

Resultado de la Verificación:

$$D \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}71 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que se recuperan los valores propios aproximados.

d) Habitantes al cabo de 100 años

Datos iniciales:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{(8 millones Rural, 2 Urbanos)}$$

Matriz de vectores propios (recalculada con enteros):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema para hallar constantes c_1, c_2:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 8 \\ 5c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$6c_1 = 10 \implies c_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Sustituyendo c_1 en la primera ecuación:

$$\frac{5}{3} - c_2 = 8 \implies c_2 = \frac{5}{3} - 8 = \frac{5-24}{3} = -\frac{19}{3}$$

Ecuación de estado al año k:

$$X_k = c_1(\lambda_1)^k v_1 + c_2(\lambda_2)^k v_2$$

$$X_{100} = \frac{5}{3}(1)^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{19}{3}(0{,}7)^{100} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando el límite cuando $k = 100$: Dado que $(0{,}7)^{100} \approx 1{,}08 \times 10^{-15} \approx 0$:

$$X_{100} \approx \frac{5}{3}(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 0$$

$$X_{100} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$$

Resultado Final:

- Población Rural: $5/3 \approx 1{,}66$ millones.
- Población Urbana: $25/3 \approx 8{,}33$ millones.

Ejercicio 5

Considere la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Cálculo de matrices

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su transpuesta A^t:

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Realizamos la multiplicación AA^t:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (16 + 121 + 196) & (32 + 77 - 28) \\ (32 + 77 - 28) & (64 + 49 + 4) \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 333 & 81 \\ 81 & 117 \end{pmatrix}$$

b) Valores propios de la matriz producto

Calculamos el polinomio característico $\det(AA^t - \lambda I)$:

$$\det \begin{pmatrix} 333 - \lambda & 81 \\ 81 & 117 - \lambda \end{pmatrix} = (333 - \lambda)(117 - \lambda) - (81)^2$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} &= 38961 - 333\lambda - 117\lambda + \lambda^2 - 6561 \\ &= \lambda^2 - 450\lambda + 32400 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación cuadrática $\lambda^2 - 450\lambda + 32400 = 0$ usando la fórmula general:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-(-450) \pm \sqrt{(-450)^2 - 4(1)(32400)}}{2(1)} \\ &= \frac{450 \pm \sqrt{202500 - 129600}}{2} \\ &= \frac{450 \pm \sqrt{72900}}{2} = \frac{450 \pm 270}{2} \end{aligned}$$

Soluciones:

$$\lambda_1 = \frac{450 + 270}{2} = \frac{720}{2} = 360$$

$$\lambda_2 = \frac{450 - 270}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

c) Valores Singulares

Los valores singulares (σ) son la raíz cuadrada de los valores propios:

$$\lambda_1 = 360 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{360} \approx 18{,}97$$

$$\lambda_2 = 90 \quad \Longrightarrow \quad \sigma_2 = \sqrt{90} \approx 9{,}48$$

d) Vectores Propios y Base Ortonormal (Matriz U)

Para $\lambda_1 = 360$:

Sustituimos en $(AA^t - 360I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 333-360 & 81 \\ 81 & 117-360 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -27 & 81 \\ 81 & -243 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera ecuación:

$$-27v_1 + 81v_2 = 0 \implies 27v_1 = 81v_2 \implies v_1 = 3v_2$$

Si $v_2 = 1$, entonces $v_1 = 3$.

$$\vec{u}_1 = (3, 1)$$

Para $\lambda_2 = 90$:

Sustituimos en $(AA^t - 90I)v = 0$:

$$\begin{pmatrix} 333-90 & 81 \\ 81 & 117-90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 81 \\ 81 & 27 \end{pmatrix}$$

De la segunda ecuación:

$$81v_1 + 27v_2 = 0 \implies 27v_2 = -81v_1 \implies v_2 = -3v_1$$

Si $v_1 = 1$, entonces $v_2 = -3$.

$$\vec{u}_2 = (1, -3)$$

Normalización (Base P_L)

Comprobamos ortogonalidad: $\langle (3,1),(1,-3)\rangle = 3(1)+1(-3) = 0$. Calculamos las normas:

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

La matriz U (o base ortonormal P_L) es:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

e)

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{360} \begin{pmatrix} 333 & 81 \\ 81 & 117 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{360} \begin{pmatrix} 1080 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1080}{360} \\ \frac{360}{360} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_2 = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 333 & 81 \\ 81 & 117 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{90} \begin{pmatrix} 90 \\ -270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{90}{90} \\ \frac{-270}{90} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U\Sigma V^T = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 360 & 0 \\ 0 & 90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1080 & 90 \\ 360 & -270 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3330 & 810 \\ 810 & 117 \end{pmatrix}$$

$$= A$$

f) Verificación

Se verifica que el producto de la descomposición SVD reconstruye la matriz original:

$$A = U\Sigma V^T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3330 & 810 \\ 810 & 117 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 333 & 81 \\ 81 & 11{,}7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la factorización es correcta.

Ejercicio 6

Investigue alguna aplicación práctica de la descomposición en valores singulares (SVD).

Aplicación: Clusterizacion de Matrices de alda cardinalidad usando Singular Value Decomposition

EL articulo provee una justificacion matematico-computacional de los beneficios de usar un algoritmo que logra con una estrategia de eleccion aleatroria de columnas para su la formacion de clusters; donde se aprovecha el concepto de ortogonalidad para reforzar la propiedad de cohesión, vital para obtener un analisis no-supervisado de calidad.

Referencias

[1] Rincón, L. (2014). Variables aleatorias y funciones de distribución. En *Introducción a la probabilidad* (p. 74). Facultad de Ciencias, UNAM.

[2] Rincón, L. (2012). Cadenas de Markov a tiempo discreto. En *Introducción a los procesos estocásticos* (p. 80). Facultad de Ciencias, UNAM.

[3] Axler, S. (2015). Eigenvalues, Inner Product Spaces, and Operators on Inner Product Spaces. En *Linear Algebra Done Right* (3.ª ed., caps. 5-9, p. 275). Springer.

[4] Drineas, P., Frieze, A., Kannan, R. et al. Clustering Large Graphs via the Singular Value Decomposition. Machine Learning 56, 9–33 (2004). https://doi.org/10.1023/B:MACH.0000033113.59016.96