Ficha Prática 1 - Equações Diferenciais Ordinárias AM2E

1. Para cada uma das equações diferenciais, indique a sua ordem e verifique que a função $y = y(x)$ é solução da equação no intervalo I, indicando se se trata de uma solução geral ou de uma solução particular.

a. $y'' + y = 0, y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, em $I = \mathbb{R}$

b. $xy' + y = 2x, y(x) = x - x^{-1}$, em $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c. $e^x - y\frac{dy}{dx} = 0, y(x) = \sqrt{2e^x - 1}$, em $I =]\log(\frac{1}{2}), +\infty[$

d. $y' = xy^3, y(x) = \frac{1}{\sqrt{C-x^2}}$, com $C \in \mathbb{R}^+$, em $I =]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[$

2. Usando diferenciação implícita, mostre que cada uma das equações define soluções implícitas da respectiva equação diferencial.

a. $x^2 + xy^2 = C$, com $C \in \mathbb{R}$, para $2x + y^2 + 2xyy' = 0$

b. $\log(y) = xy^2 + C$, com $C \in \mathbb{R}$, para $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1-2xy^2}$

3. Considere a equação diferencial $x^2y' + xy = 1$.

a. Mostre que toda a curva definida por $y(x) = \frac{\log(x)+C}{x}$, com $C \in \mathbb{R}$ é solução da equação em $\mathbb{R}^+$.

b. Determine uma solução que satisfaça a condição inicial $y(e^2) = 4$.

4. Considere a equação diferencial $xy' - y = 1$.

a. Verifique se a equação admite soluções estáveis ou em equilíbrio. Em caso afirmativo, determine-as.

b. Mostre que $y(x) = x - 1$ é uma solução da equação em $\mathbb{R}$.

5. Considere a equação diferencial $\frac{(y')^2}{2} + xy' = y$.

a. Indique a ordem da equação diferencial.

b. Verifique se a família de funções $y(x) = Cx + \frac{C^2}{2}$, com $C \in \mathbb{R}$, é solução da equação diferencial em $\mathbb{R}$.

c. Será $y(x) = 2x + 2$ uma solução da equação diferencial?

d. Verifique que $y(x) = -\frac{x^2}{2}$ é também solução da equação diferencial. Como a designa?

6. Determine a solução geral de cada uma das equações diferenciais lineares seguintes, indicando o respectivo domínio de validade.

a. $xy + y' = 100x$

b. $(1+x)y' - 5xy = 0$

c. $y' = \sqrt{x}y$

d. $xy' + 2y = \sin(x)$

e. $y' \sin(x) + y \cos(x) = 1$

f. $xy' + y = 3x \cos(2x)$

7. Determine a solução dos problemas de valor inicial definidos por:

a. $xy' + x^2 y = e^{-x^2/2}$, com $y(-1) = 1$, para $x < 0$

b. $y' \cos(x) + y \sin(x) = \cos^2(x)$, com $y(0) = 2$, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

8. Determine a solução geral de cada uma das equações diferenciais de variáveis separáveis seguintes, indicando o respectivo domínio de validade.

a. $y' = \frac{2x}{1+2y}$

b. $x^2 y^2 y' = 1 + x^2$

c. $y' = e^{x-2y}$

d. $y' = (1-y)(2-y)$

e. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

f. $y' = y \log(x)$

9. Determine a solução geral de cada uma das equações diferenciais, indicando o respectivo domínio de validade.

a. $y' + 3y = x + e^{-2x}$

b. $y \log(x) - xy' = 0$

c. $e^{-y} \sin(x) - y' \cos(x) = 0$

d. $y' = \cos^2(x) \cos^2(2y)$

e. $(1 + x^2)y' + xy = -(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}$

f. $y' = \frac{y \cos(x)}{1+2y^2}$

10. A equação de Bernoulli tem a forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$. Esta equação é linear para $n = 0$ ou $n = 1$. Para outros naturais a sua solução obtém-se efectuando a mudança de variável $z = y^{1-n}$.

a. Considere $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $y \neq 0$. Mostre que a mudança de variável sugerida transforma a equação de Bernoulli numa equação diferencial linear de primeira ordem.

b. Usando o método descrito anteriormente, resolva a equação $y' = y + e^{-3x}y^4$.

11. Uma equação diferencial na sua *forma normal* $y' = f(x, y)$ (f é contínua num domínio de $\mathbb{R}^2$) diz-se *homogénea de grau zero* se $f(tx, ty) = f(x, y)$, para todo o t real.

a. Mostre que efectuando a mudança de variável $y(x) = x\, u(x)$ numa equação diferencial homogénea de grau zero, se obtém uma equação diferencial de variáveis separáveis.

b. Usando o método proposto, resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$.

12. O gráfico de uma função diferenciável $y = y(x)$ passa no ponto $(0, 1)$. Sabe-se ainda que em cada ponto (x, y) pertencente ao gráfico desta função, a recta tangente é perpendicular à recta que passa pelo ponto e pela origem. Determine a função em causa.

13. Use derivação implícita para determinar um campo de direcções cuja curva integral é definida implicitamente pela equação $xe^y + ye^x = 0$.

14. Determine a curva que passa pelo ponto $(0, 3)$ e cuja recta tangente tem inclinação $\frac{2x}{y^2}$, no ponto (x, y).

15. Segundo as Nações Unidas, a população mundial em 1998 era aproximadamente igual a 5,9 mil milhões e crescia a uma taxa instantânea de $1,33\%$ ao ano. Assumindo um modelo de crescimento exponencial para a população, estime a população mundial no ano de 2023.

16. Suponha que 100 moscas-da-fruta são colocadas num recipiente de acasalamento que, no máximo, suporta 5000 moscas. Supondo que a população cresce exponencialmente a uma taxa instantânea de 2% por dia, quanto tempo demorará o recipiente a atingir a sua capacidade máxima?

17. Um cientista pretende determinar o tempo de meia-vida de uma certa substância radioactiva. Em 5 dias uma amostra de 10 mg da substância decai para 3,5 mg. Ajude o cientista na sua tarefa.

18. O polónio-210 é um elemento radioactivo com uma meia-vida de 140 dias. Suponha que 10 mg desta substância são colocados num recipiente e seja $y(t)$ o número de miligramas da substância após t dias.

a. Formalize o problema de valor inicial de primeira ordem que representa a situação descrita e resolva-o.

b. Quantos miligramas da substância estarão presentes após 10 semanas?

c. Quanto tempo levará para decair 70% da quantidade inicial?

19. Um tecido encontrado numa pirâmide egípcia contém $78,5\%$ do seu carbono-14 original. Sabendo que a meia-vida do carbono-14 é igual a 5730 anos, estime a idade do tecido.

20. Uma pessoa viva tem uma temperatura corporal de $37°C$. Após a morte, na primeira hora, a temperatura do corpo desce $1°C$. Num ambiente, a temperatura constante de $25°C$, um corpo é encontrado a $32°C$. Estime há quanto tempo ocorreu a morte.

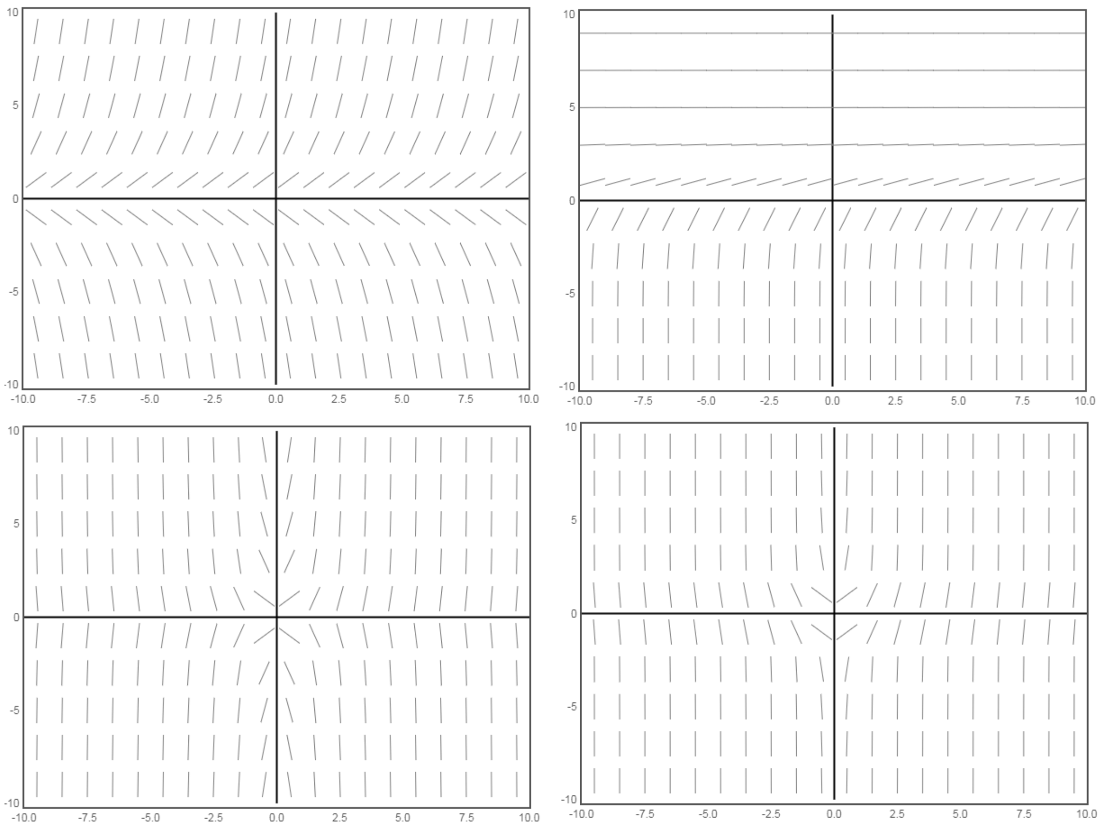
21. Associe a cada equação diferencial a representação gráfica do seu campo de direcções.

a. $y' = 2xy$

b. $y' = e^{-y}$

c. $y' = y$

d. $y' = 2xy^2$



22. Esboce o campo de direcções de cada uma das equações diferenciais e desenhe a solução que satisfaz a condição inicial dada. (*Sugestão:* Recorra a `http://www.bluffton.edu/homepages/facstaff/nesterd/java/slopefields.html`)

a. $\frac{dy}{dx} = 0.02y(10-y),\ y(0) = 2$

b. $y' = 0.4y(3-x),\ y(0) = 1$

23. Recorra ao método de Euler para construir uma tabela de valores para a solução aproximada do problema de valor inicial de primeira ordem indicado, considerando o número de passos (n) e o comprimento de passo (h) sugeridos (*Sugestão:* Recorra a uma folha de cálculo).

a. $y' = x + y;\ y(0) = 2;\ n = 10;\ h = 0.1$

b. $y' = x + y;\ y(0) = 2;\ n = 20;\ h = 0.05$

c. $y' = \cos(x) + \sin(y);\ y(0) = 5;\ n = 10;\ h = 0.1$

24. Considere o problema de valor inicial de primeira ordem definido por

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(y - 72) \text{ e } y(0) = 140.$$

a. Usando o método de Euler, aproxime a solução deste problema de valor inicial de primeira ordem para $t = 1$ e $t = 2$, considerando os comprimentos de passo $h = 0.1$ e $h = 0.01$.

b. Resolva analiticamente o problema de valor inicial de primeira ordem.

c. Compare os resultados obtidos numericamente com os obtidos a partir da resolução analitica.

25. O método de Euler foi usado para determinar uma aproximação numérica da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{2x-y} \end{cases}$$

Sabe-se que $x_3 = 1, y_4 = 2$ e $y_5 = \frac{11}{4}$. Determine o comprimento de passo utilizado.