Génération Rapide de Toutes Les Discrétisations par Translation d'un Polygone

Mustafa Senol

Janvier-Mai 2021

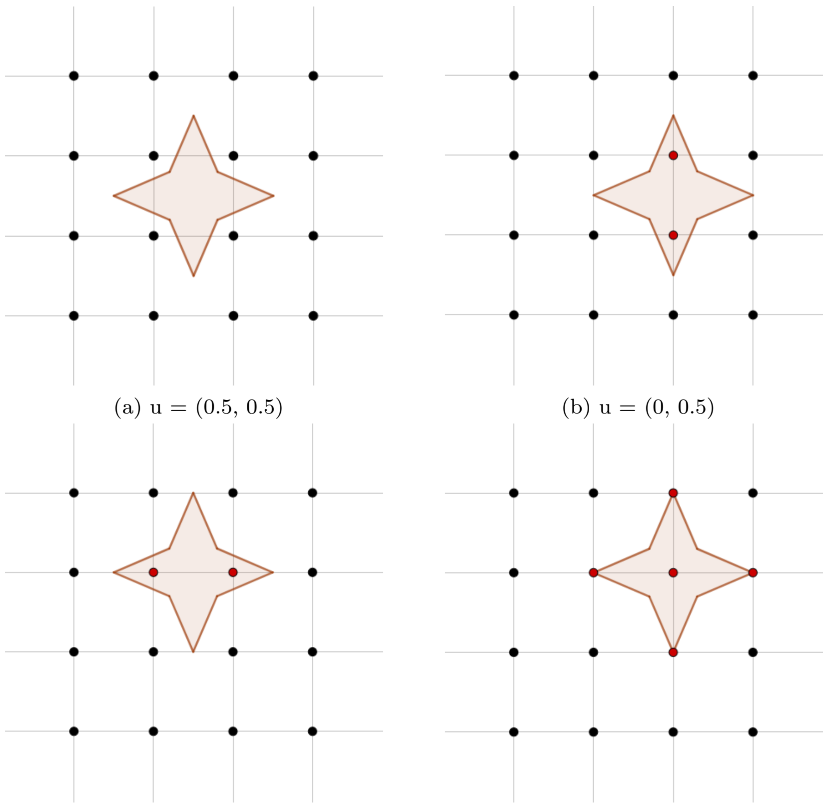
Contents

1 Abstract

Ce travail est basé sur l'article "Object digitization up to a translation" qui est sur le changement de discrétisation quand on translate une courbe fermée et aussi sur trouver toutes les différentes discrétisation possible d'une courbe quelconque. Dans cet article on va travailler sur le même problème mais pour des cas de polygones.

2 Introduction

La discrétisation d'un objet 2D dépend des positions relative de l'objet et de la grille. Quand on translate l'objet sur le grid, la forme et même la topologie de l'objet peut changer. Donc c'est utile de savoir toutes les discrétisations possible de l'objet.



(a) u = (0.5, 0.5)

(b) u = (0, 0.5)

(c) u = (0.5, 0)

(d) u = (0, 0)

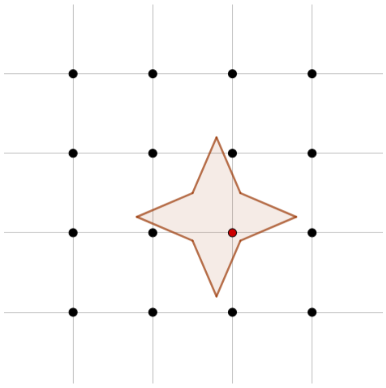
Figure 1: Dans les figures (a) et (b) on voit des différentes discrétisations gaussiens d'un polygone. Les points rouge représente la discrétisation du polygone. u = (a, b) represente un translation du polygone et a et b sont respectivement des translations vers la direction -x et -y.

Comme on le voit sur la figure 1, la discrétisation du polygone sur la figure (a) a aucun point, sur la figure (b) il y a 2 point, 2 sur le figure (c) et 5 sur la figure (d). Donc on besoin de connaître les différentes discrétisations possibles qu'on peut obtenir avec un translation pour un figure donnée.

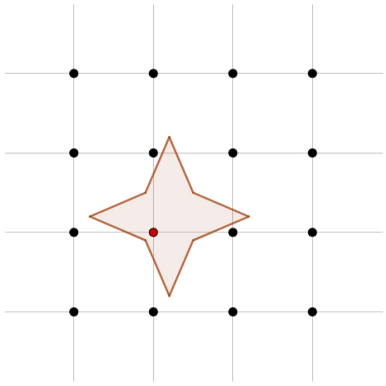
3 Discrétisation Gaussienne

La discrétisations Gaussienne c'est simplement l'union de toutes les points entiers qui sont dans l'objet ou sur le frontière de l'objet. Par exemple, sur le Figure 1 (d), il y a 4 points sur la frontière et 1 point dans le polygone.

En plus ce qu'il est important c'est les positions relatives des points de notre discrétisation. Par exemple (b) et (c) dans le Figure 1 sont des discrétisations différentes.



(a) u = (0.2, 0.8)



(b) u = (0.8, 0.8)

Figure 2

Cependant (a) et (b) du Figure 2 sont des discrétisations équivalentes car même si le point dans l'ensemble de discrétisation sont différents les positions relatives des points (dans ce cas il y a qu'une point donc c'est trivial) sont les mêmes.

Le dernière chose qu'il faut remarquer c'est pour trouver toutes les discrétisations possible d'un objet c'est suffisante de regarder des valeurs de u = (a, b) pour a,b $\in [0, 1)$ parce qu'on est sur un grid reguliere. Donc la translation u1 = (1.5, 1.7) est equivalente à la translation u2 = (0.5, 0.7).

3.1 Points Frontieres

Quand notre objet est assez grand, on peut avoir des points qui vont toujours rester dans la discrétion. Donc pour simplifier des calculs, on peut d'abord calculer des points susceptibles de changer. On appelle ces points des points frontières.

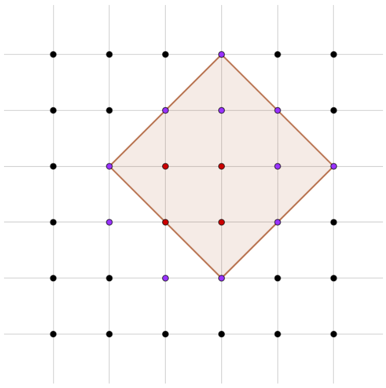
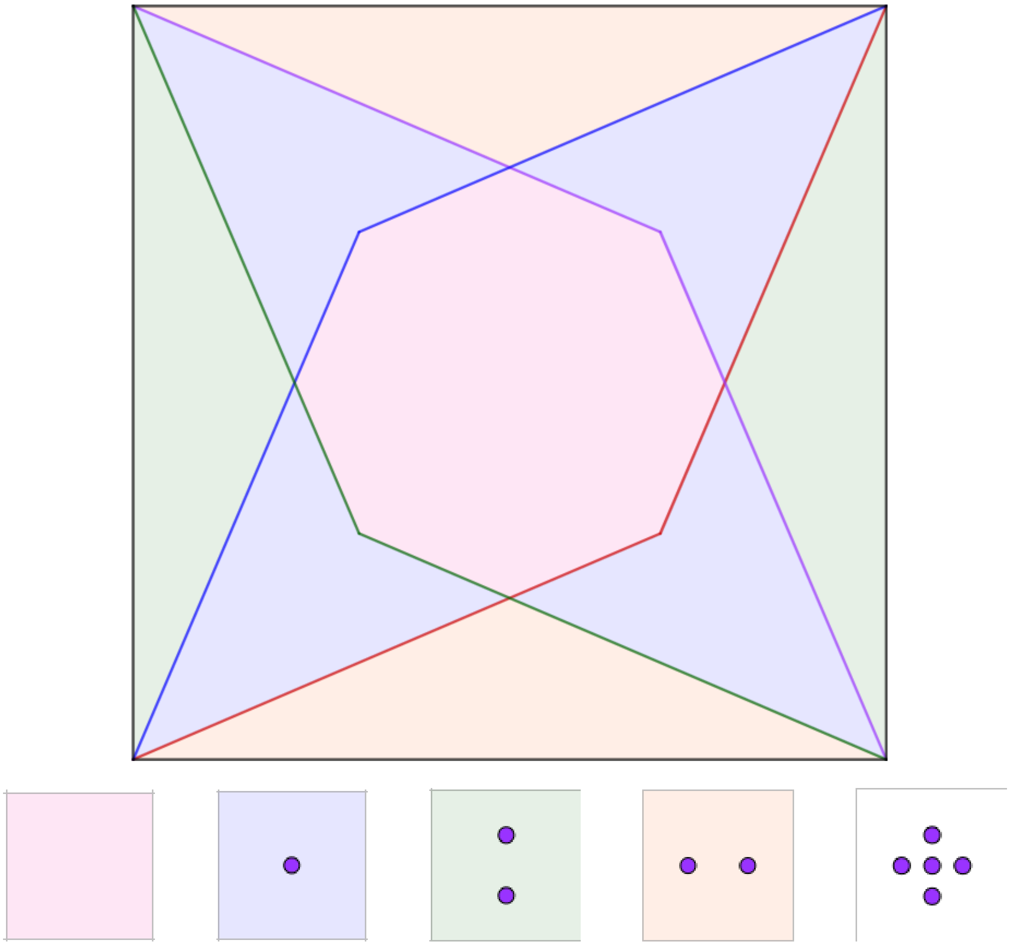


Figure 3: Dans le figure les points rouge sont toujours les points rouges restent toujours dans le discretisation mais les points violets sont des point frontieres.

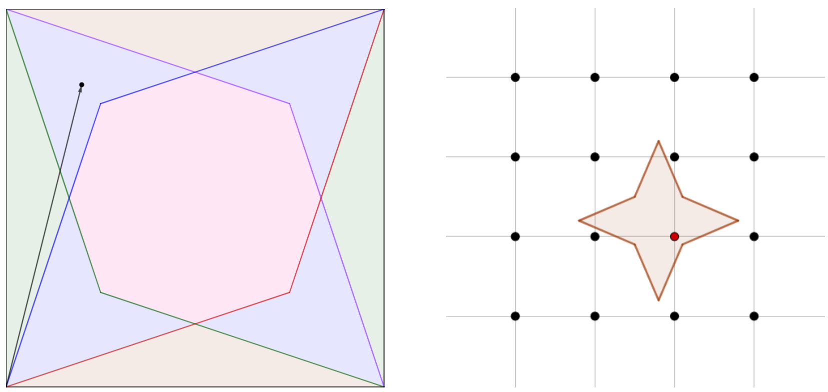
4 Dual



(a) (b) (c) (d) (e)

Figure 4: Dual du polygone sur des Figures 1 et 2. On obtient (e) seulement pour u = (0, 0) donc il est représenté par un point. Le bas gauche du dual c'est le point (0, 0) et le haute droite c'est (1, 1).

Le Dual d'un objet représente toutes les discrétisations et avec quelles translations on les obtient. Donc chaque point sur le dual représente un translation possible.

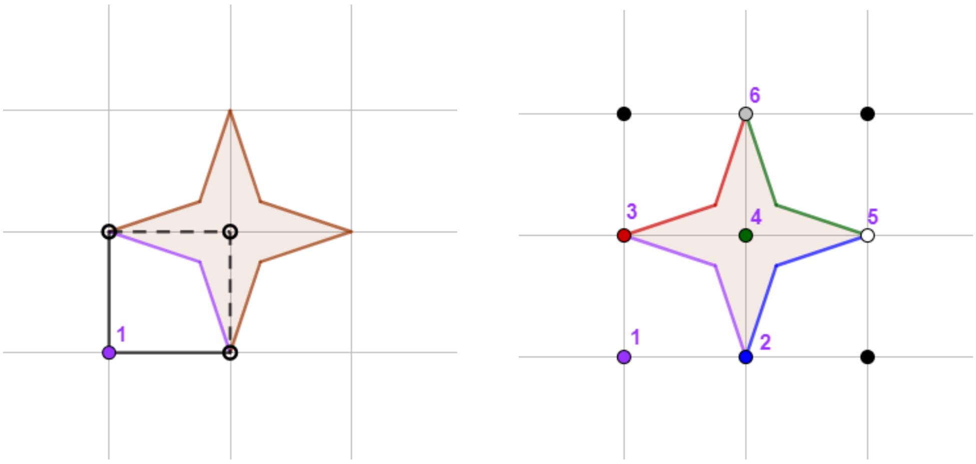


(a) u = (0.2, 0.8) (b) u = (0.2, 0.8)

Figure 5

4.1 Notion de Γ

Quand on translate un objet sur le grid, sa discrétisation change quand un point frontière entre ou sort de l'objet. Donc changement de région sur le dual aussi représente un point frontière qui est entré ou est sorti de l'objet. Chaque ligne frontière qu'on voit avec des couleurs différentes sur le Figure 4 représente la frontière pour un point frontière spécifique. On appelle Γ l'ensemble de ces ligne des frontières et $\Gamma_{\,p}$ est le p'ieme ligne frontière qui représente la frontière pour p'ieme point du frontiere.



(a) (b)

Figure 6

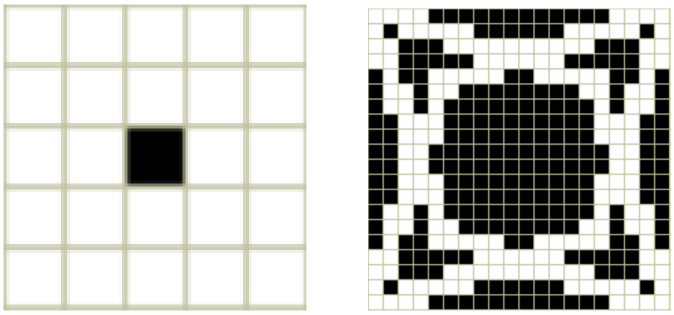
Jusqu'à maintenant on a translaté l'objet par rapport au grid. Mais c'est équivalent à translater le grid par rapport à l'objet et pour cette exemple il est mieux de penser comme on translate le grid.

Sur le Figure 6a on voit le point frontière 1, le carré indique ou on peut translater cette point, la ligne violet c'est la frontière Γ_1 . Sur la figure 6b on voit tous les points frontières. et les Γ_p qui appartient à chaque point frontière. Aussi sur le figure 6b on peut voir que les frontière qui appartiennent aux points 5 et 6 sont des points et pas des lignes.

On peut visualiser le dual comme on a coupé chaque carré comme sur la Figure 6a et les superposer.

4.2 Resolution du Dual

Normalement le dual définie sur R^2 mais on va stocker notre dual dans un matrice carré et binaire ou des 1 représente des points qui est sur un élément de Γ . La résolution est le nombre de colonne (ou ligne) de notre matrice. Le problème c'est qu'on doit choisir une résolution assez grande pour bien représenter le Dual mais aussi assez bas pour que les calculs ne deviennent pas très lourds. Malheureusement il n'y a pas de solution magique qu'on peut utiliser ou facilement calculer car on peut avoir des regiones arbitrairement petites sur le dual.



(a) resolution = 5 (b) resolution = 20

Figure 7: Representation du dual dans le Figure 4

Par exemple sur la Figure 7a on peut voir seulement 1 region et sur la figure 7b on voit 4 extra region qui n'existe pas sur le dual original.

5 Différences et des Améliorations Possibles Pour Des Polygones Par Rapport au Cas Général

5.1 Differences

- Première chose on peut remarquer puisq'on a un polygone, on va avoir que des segments droites sur notre Dual. Donc le calcul du matrice de Dual va être beaucoup plus simple.
- Car on a des polygones, c'est pas simple de les représenter avec des équations paramétriques ou implicites. Pour cette raison, on utilise des sommets de notre polygone pour le représenter.
- On peut aussi dire que les calculs d'intersections sont plus facile car on a que des segment lignes.

5.2 Ameliorations

- Car des calculs sont simples, on peut les faire à la volée au lieu de les précalculer et stocker les résultats surtout pour des calculs de Dual.
- On peut définir le dual pas comme un matrice mais comme un ensemble des polygones ou un ensemble de segment droites. Ça peut potentiellement résoudre le problème de résolution qu'on avait dans la section 4.2 .

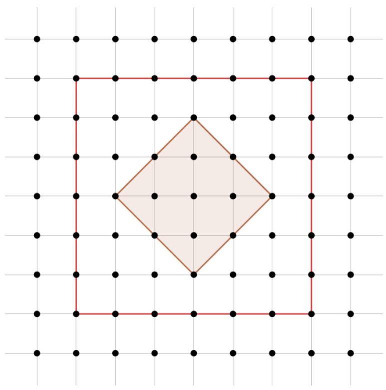
6 Algorithme

Pour calculer toutes les discrétisations possibles on va d'abord calculer le dual de notre polygone. Pour l'algo, on va supposer que en position initial, les sommets de notre polygone ont des coordonnés entières contrairement au Figure 1. On va aussi supposer que les arête de notre polygone ne sont pas parallèles aux axe des abscisses et axe des ordonnées. Après on va utiliser le dual pour calculer des discrétisations.

6.1 Algorithme Pour Calcul du Dual

Pour calculer le dual, on a d'abord calculé le bounding box. Tous les points dans cette box sont nos candidats pour être un point frontière. Des points frontières sont des points qui est susceptible de changer quand on translate notre polygone. Pour tester si un point est un point de frontière on translate le polygone 1 unité vers la gauche, après un unité vers le bas, après un unité vers la droite, finalement un unité vers le haut et on revient d'où on commence. Si le point de départ a coupé l'un des arêtes quand on translate le polygone, ça veut dire qu'il est un point de frontière. S' il est un point de frontière coupe notre polygone soit en un point, soit en deux points (Pour l'instant on suppose que notre polygone n'a pas un arrête qui est parallèle à Ox ou Oy). Si il coupe en deux points, le segment que ces deux points représente devient l'un de nos Γ_p. Si il coupe en un point P on le considère comme un segment qui commence et finit en p.

6.1.1 Calcul du Bounding Box

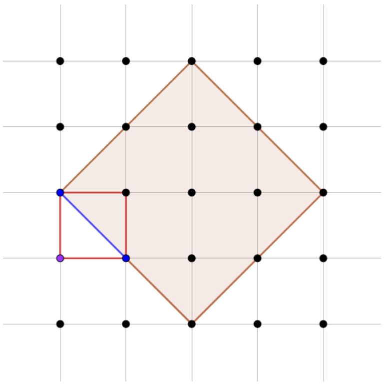


On regarde chaque coordonnée des sommets de notre polygone et on prend des valeurs maximale et minimale qu'on a pour des abscisses et des ordonnées. On ajoute 1 aux valeurs maximum, et supprime 1 par des valeurs minimum.

6.1.2 Calcul des Points Frontieres

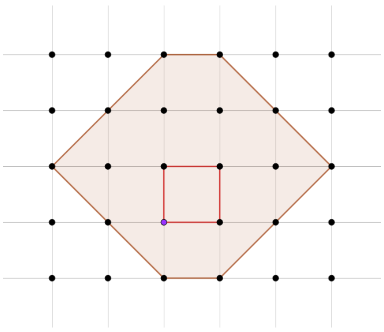
Pour chaque point (x, y) dans le Bounding Box on regarde le carré qui a (x, y), (x+1, y), (x+1, y+1), (x, y+1) comme ses sommets. On va regarder les intersections de ce carré et des arrêtes de polygone. Il y a plusieurs types de résultats possibles.

1. Intersect sur 2 points



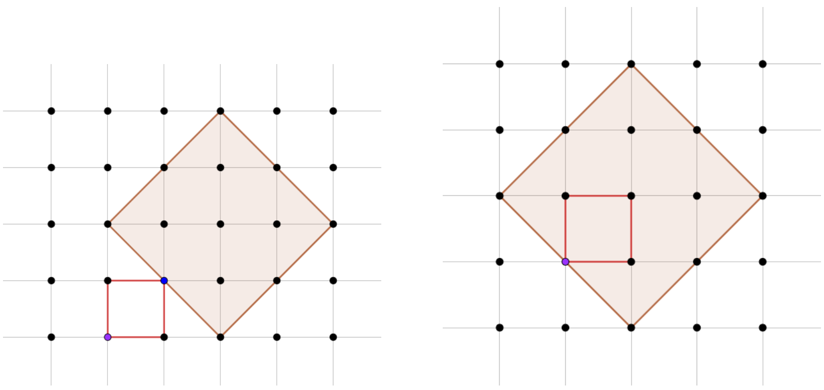
Dans ce cas le point (x, y) est un point frontière.

2. Pas d'Intersection



Dans ce cas le point (x, y) n'est pas un point frontière.

3. Intersect sur un point



(a) (b)

Dans ce cas, si l'intersection est le point (x, y) il est un point frontière sinon ce n'est pas un point frontière.

6.1.3 Calcul de Γ

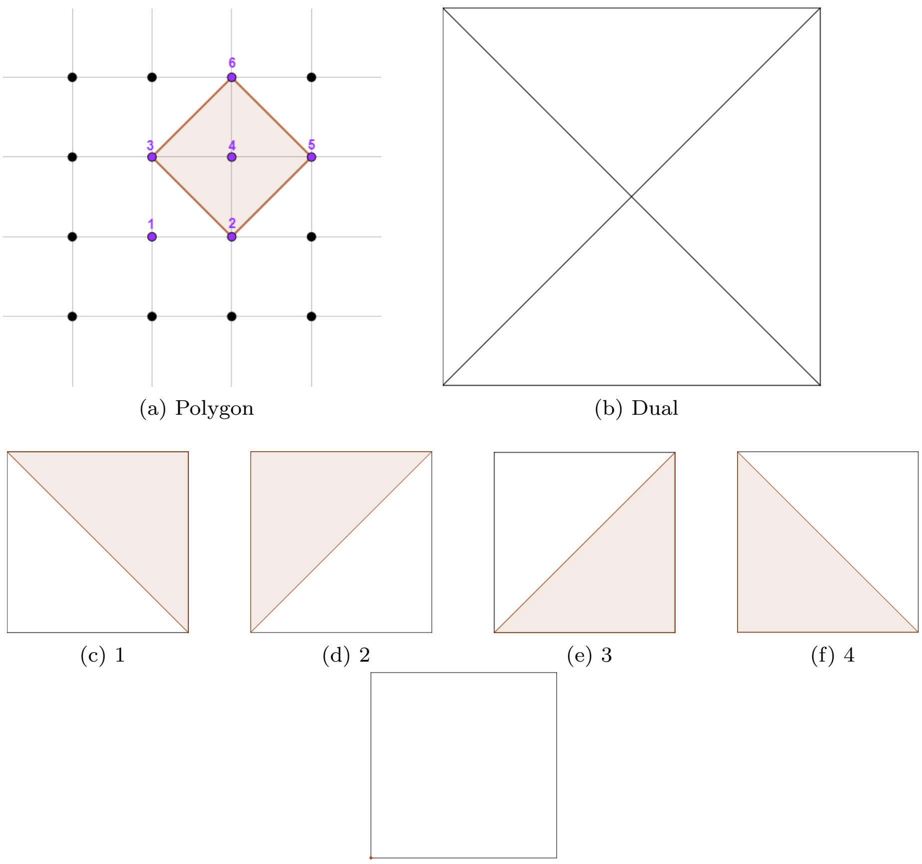
Comme on a vu dans la section 6.1.2 pour un point frontière P = (x, y), l'intersection des arêtes de polygone et le carré qui a (x, y), (x+1, y), (x+1, y+1), (x, y+1) comme ses sommets peuvent intersecter sur 1 ou 2 points. S' ils intersectent sur 1 point a, $\Gamma_p = A$. S' ils intersectent sur 2 points A et B, $\Gamma_p = \overline{AB}$

6.2 Algorithme Pour Calcul Des Discrétisations

Après qu'on calcule le dual, pour calculer toutes les discrétisations d'abord on doit trouver toutes des régions sur le dual après on doit calculer la discrétisation de chaque région. Donc on a besoin un algorithme qui trouve tous les régions et retourne un point pour chaque région, un algorithme pour trouver la discrétisation d'un point donné sur le dual et un dernier algorithme qui prend un liste des discrétisations et va retourner un liste avec des éléments unique car on peut avoir plusieurs régions qui représente même discrétisation.

6.2.1 Calcul du Discretisation pour Un Point Donné Sur le Dual

Car tous les éléments de Γ sont soit un point, soit un segment droit, on peut dire que chaque élément de Γ coupe le Dual en deux régions. Dans l'un de ces régions le point frontière ne va pas être dans la discrétisation, dans l'autre il va être dedans. Pour des points ces deux régions vont être sur le points et les autres points. Pour des segments droites, on va donner un direction à notre segment droite et on va avoir la gauche et la droite de ce segment droite (On peut inclure sur le droite à l'un des deux).



(a) Polygon

(b) Dual

(c) 1

(d) 2

(e) 3

(f) 4

(g) 5 et 6

Figure 8: Sur la figure a on voit un polygone et ces points frontières. Sur la figure b on voit son dual. Sur les figures c, d, e, f on voit respectivement Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 et sur la figure g on voit Γ_5 et Γ_6 ou la partie coloré représente la région quand on inclut le point frontière au discrétisation.

7 Conclusion

Notre but de départ avec ce travail était de trouver une méthode pour trouver toutes les discrétions possibles d'un polygone. Pour faire cela on a utilisé le Dual du polygone qui est un représentation de chaque discrétisation avec quelle translation on l'obtient. On a trouvé une méthode pour calculer le Dual d'un polygone avec des coordonnées entières. En plus on a montré que si on peut trouver un algorithme qui nous retourne des régions d'un dual, on peut facilement calculer toutes les discrétisations. Donc pour les travaux futures, on peut travailler sur ça.

8 Bibliographie

[1] Loïc Mazo, Étienne Baudrier: *Object digitization up to a translation:* `https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022000017301113`