

# Approccio Geometrico alle parentesi di Peierls nella quantizzazione algebrica del campo Geodetico.

Antonio Michele Miti

Relatore : Claudio Dappiaggi  
Relatore Interno : Livio Pizzocchero

## 1 Motivazione della Tesi

Le parentesi di Peierls sono un elemento cruciale dello schema di quantizzazione algebrica, forniscono una “ricetta” efficace per attribuire una struttura pre-simplettica allo spazio delle configurazioni dinamiche per **un generico sistema campo** su spazio tempo Globalmente Iperbolico. Dalla ricerca bibliografica è evidente come questo strumento, a partire dal suo esordio nel 1952 fino ad oggi, non abbia mai ricevuto particolare attenzione. Questo sembra dovuto soprattutto alla mancanza di una convincente interpretazione geometrica che ha avuto l’effetto di limitarne la diffusione.

Per fare un passo verso la comprensione di questo oggetto viene studiato l’estremamente noto problema della geodetica riguardandolo come **un sistema campo**. L’esempio è notevole da due punti di vista:

1. in quanto sistema a gradi di libertà finiti:

- Le configurazioni cinematiche sono curve parametrizzate su una varietà Riemanniana. Il sistema è un campo molto semplice in cui la varietà base è banalmente **( $R$ )** quindi rappresenta un **di** esempio complementare al soliti **campo** reale scalare.
- Secondo lo schema di quantizzazione per dati iniziali, i dati di **cauchy** per sistemi di questo tipo sono semplicemente coppie di vettori finito-dimensionali. In questo caso la forma simplettica associata è unica e si può provare che corrisponde a quella costruita tramite il metodo, completamente differente, di Peierls.

2. In quanto campo geodetico:

- Il sistema geodetico è non-lineare. L’applicazione dello schema di quantizzazione algebrica e dell’algoritmo di Peierls richiede di passare per la sua linearizzazione, ovvero **al** *Campo di Jacobi*. **Anch’esso** è un oggetto matematico ampiamente studiato dal punto di vista della geometria differenziale ma molto raramente è stato **approcciato** come un sistema di tipo campo.

- L'operatore delle equazioni di **Jacobi** è *Normalmente Iperbolico*, **questo** permette di affrontare la quantizzazione del sistema secondo due schemi diversi: quello che sfrutta le parentesi di Peierls, in quanto Green Iperbolico e formalmente autogiunto, e quello per dati iniziali, in quanto Iperbolico nel senso delle EDP.

Siccome il campo di Jacobi si presta ad essere quantizzato sia secondo lo schema di Peierls che secondo lo schema per Dati Iniziali, il confronto con le 2 forme simplettiche così ottenute permette di attribuire un'interpretazione geometrica al metodo originale di Peierls.

## 2 Metodi di indagine

La prima parte della tesi è stata rivolta allo studio del framework matematico necessario per dare una formulazione rigorosa dei sistemi classici continui, punto di partenza di ogni schema di quantizzazione algebrica. **Nello specifico viene fatta una digressione sui Fibrati Topologici e viene sfruttata la definizione di fibrato liscio** per presentare un approccio geometrico astratto alla meccanica Lagrangiana classica che permette di trattare in modo unificato sia i sistemi a gradi di libertà finiti che quelli a gradi di libertà continui.

La seconda parte del lavoro è stata votata alla ricerca bibliografica riguardo le parentesi di Peierls. Siamo partiti dall'articolo originale di Peierls [1] e abbiamo **confrontato** questo approccio con quelli più moderni, essenzialmente proposti da DeWitt[2] e da Forger e Romero [3]. Mentre in questi ultimi due casi la forma simplettica viene essenzialmente postulata su delle opportune classi di *osservabili classici* il metodo di Peierls permette di dare una definizione più generale su tutti i funzionali lagrangiani attraverso la definizione dell' *effetto di una perturbazione lagrangiana su una soluzione imperturbata*.

Per poter proseguire nell'indagine è stato necessario un ulteriore ~~lavoro di~~ studio **riguardo** gli schemi di quantizzazione algebrica bosonica, nello specifico sono stati rivisti lo schema con le parentesi di Peierls e quello attraverso i **Dati** iniziali.

In tutto il lavoro è stato seguito un approccio deduttivo. Abbiamo dapprima presentato i sistemi classici in astratto, **dopo** gli schemi di quantizzazione e solo alla fine abbiamo realizzato tutte queste strutture nel caso del campo geodetico.

## 3 Risultati ottenuti

Il confronto con le numerose fonti analizzate ci ha permesso di sintetizzare, in un linguaggio più moderno e rigoroso, l'algoritmo di costruzione delle parentesi proposto da Peierls per una classe di sistemi abbastanza generale: **Lagrangiani** con operatore del moto Green-Iperbolico e con Operatori di Green unici.

Abbiamo sottolineato come da questa costruzione si possano ottenere in modo pressochè immediato la struttura simplettica di pre-quantizzazione che usualmente viene assunta come un postulato negli schemi di quantizzazione algebrica.

Abbiamo realizzato le parentesi di Peierls e due schemi di quantizzazione algebrica per l'esempio insolito del *Moto Geodetico* e fatto emergere un legame tra le forme simplettiche ottenute tramite queste due differenti costruzioni.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Peierls, R. E. (1952). The Commutation Laws of Relativistic Field Theory. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 214(1117), 143–157.
- [2] Dewitt, B. (1999). The Peierls Bracket. In Quantum Field Theory: Perspective and Prospective SE - 5 (Vol. 530, pp. 111–136). Springer Netherlands.
- [3] Forger, M., Romero, S. V. (2005). Physics Covariant Poisson Brackets in Geometric Field Theory, 410, 375–410.