Approccio Geometrico al metodo di Peierls e (Pre-)Quantizzazione del campo di Jacobi.

Antonio Michele Miti

20 novembre 2015

Formalismo canonico Ordinario (Finiti Gradi di Libertà)

1. *Coordinate di Configurazione* q^j.
2. *Momenti Canonici Coniugati* p^j.
3. *Matrice Simplettica*

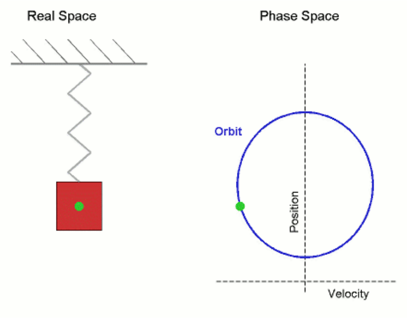
$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *Parentesi di Poisson*:

$$\{A, B\} = \Omega^{IJ} \frac{\partial A}{\partial Q^I} \frac{\partial B}{\partial Q^J}$$

5. *Dinamica*

$$\left\{Q^I, H\right\} = \dot{Q}^I$$

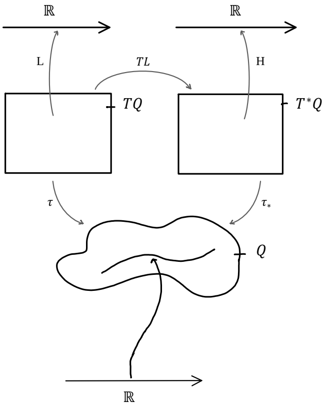


[a]

[a] Fonte: en.wikibooks.org

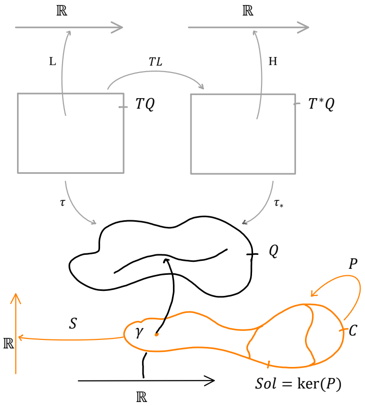
Formalismo canonico Intrinseco

1. Spazio di configurazione Q.
2. Spazio delle velocità generalizzate TQ.
3. Spazio delle fasi T^*Q.
4. T^*Q è naturalmente simplettico $\omega = dp^i \wedge dq^i$.
5. Dinamica codificata nelle funzioni L, H.



Formalismo Canonico Covariante

- Spazio delle configurazioni cinematiche $\mathtt{C}$.
- Dinamica codificata dall'azione $S : \mathtt{C} \to \mathbb{R}$.
- Equazioni differenziali del moto P.
- Spazio delle configurazioni dinamiche $\mathtt{Sol}$.



Formalismo Covariante esteso ai Campi

L'idea:

- Insieme delle configurazioni:

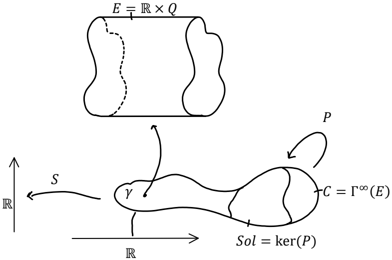
$$\underset{\text{(Spazio)}}{Q} \quad \mapsto \quad \underset{\text{(Fibrato)}}{\mathbb{R} \times Q}$$

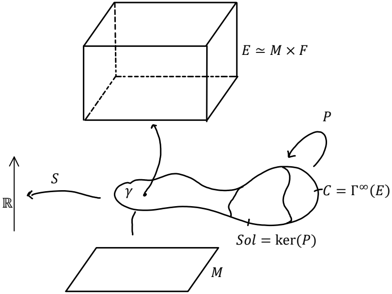
- Le configurazioni cinematiche:

$$\underset{\text{(curve)}}{\gamma : \mathbb{R} \to Q} \quad \mapsto \quad \underset{\text{(sezioni)}}{\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times Q}$$

Per i campi

- La varietà base è generico spaziotempo M.
- Le configurazioni cinematiche sono mappe $\gamma : M \to M \times F$.
- Equazioni del moto P si rivacano da una *Densità Lagrangiana* $\mathcal{L}$
- Le configurazioni dinamiche sono le soluzioni di P





Il metodo di Peierls

Di cosa si tratta

- Ricetta per definire forma bilineare sulle Lagrangiane.
- Ristretta ad un insieme opportuno risulta una buona forma simplettica.

Prerequisiti

- Teorie di Campo lineari
- Equazioni del moto ammettono funzioni di Green
- Problema ai dati iniziali ben posto.

Concetto chiave dell'algoritmo di Peierls : Disturbo Lagrangiano

Le densità Lagrangiane compatibili con la cinematica formano un insieme Lag. Ognuna di esse possiede due statuti

- Può essere *Motore della dinamica*

$$Q_\chi(\gamma) = \left(\nabla_\mu \left(\frac{\partial \chi}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bigg|_\gamma \right) - \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \bigg|_\gamma \right) \qquad \forall \gamma \in \mathtt{C}$$

- E' una quantità che può essere *valutata* su una qualsiasi configurazione del sistema

$$\mathcal{O}_{\mathcal{L}}[\phi](f) = \int_M \mathcal{L}[\phi] f \, \mathrm{d}\mu$$

Ci chiediamo:

Come si modificano le configurazioni dinamiche del sistema quando la Lagrangiana viene disturbata da una seconda densità χ

$$\mathcal{L} \rightsquigarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \cdot \chi$$

L'effetto del Disturbo Lagrangiano

- Fissata una soluzione ϕ_0 del sistema imperturbato
- Un disturbo Lagrangiano χ determina univocamente due soluzioni *"disturbate"*

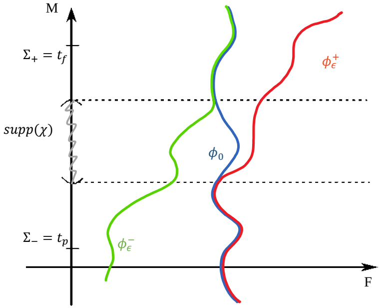
$$\phi_\epsilon^\pm = \phi_0 + \epsilon\eta_\pm$$

dove:

$$\eta_\pm = G^\pm\big(- Q_\chi \phi_0\big)$$

- L'*effetto* di un disturbo Lagrangiano su un funzionale $B : \mathtt{C} \to \mathbb{R}$ è:

$$\mathbf{D}_\chi^\pm B(\phi_0) = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\frac{B(\phi_\epsilon^\pm) - B(\phi_0)}{\epsilon}\right)$$

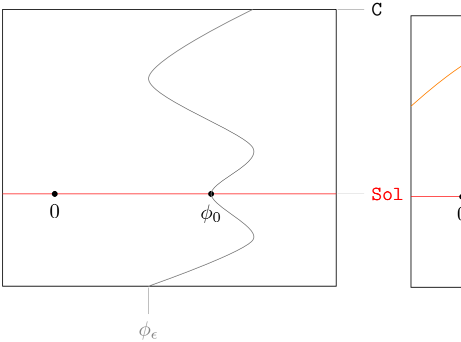


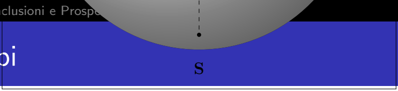
I passi del metodo di Peierls

Per semplicità rappresentiamo lo spazio infinito dimensionale C come un piano.

1. Alla Lagrangiana disturbata corrisponde un proprio spazio di soluzioni.
2. Si determinano tra tutte le possibili variazioni ϕ_ϵ di ϕ_0 quelle che ricadono in $\mathtt{Sol}_\epsilon$ al primo ordine in ϵ
3. L'effetto è la derivata del valore di un funzionale B lungo le variazioni appena trovate.
4. La parentesi di Peierls si ottiene per confronto dei due effetti anticipato e ritardato:

$$\{\chi,\omega\}(\phi_0) = \mathbf{D}^-_\chi \mathcal{O}_\omega(\phi_0) - \mathbf{D}^+_\chi \mathcal{O}_\omega(\phi_0)$$





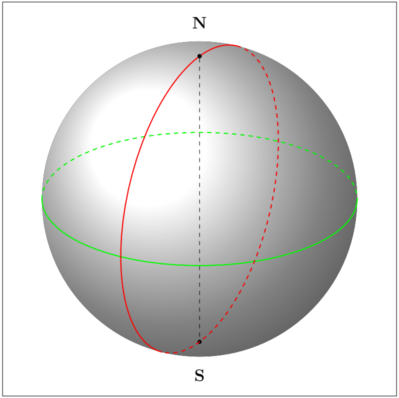
Ricordiamo il problema di Jacobi

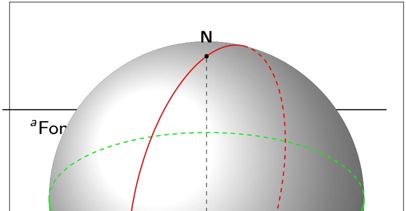
- Varietà
- Pseudo-Riemmanian
- Le geodetiche soddisfano l'equazione di lunghezza estremale

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \ddot{\gamma}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0$$

- La variazione regolare di una curva γ_0 determina un campo lungo la curva.
- Una variazione geodetica determina un campo che soddisfa le equazioni di *Jacobi*

$$(X'')^{\mu} + R^{\mu}_{i\alpha j} T^i X^{\alpha} T^j = 0$$





[a] For

I Campi di Jacobi visti come un sistema fisico

Cinematica

- La varietà di base è $\mathbb{R}$
- Le varietà di target sono $E_p = T_{\gamma_0(p)}Q$
- $\mathtt{C} = \Gamma^\infty(E) = \mathfrak{X}(\gamma_0)$ è costituito da campi lungo la curva γ_0.

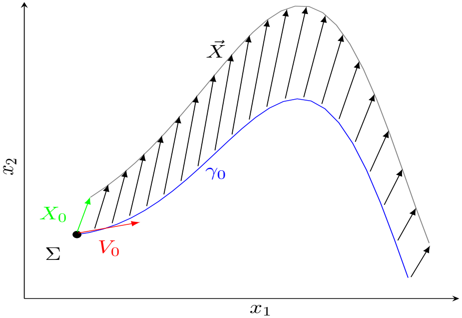
Dinamica

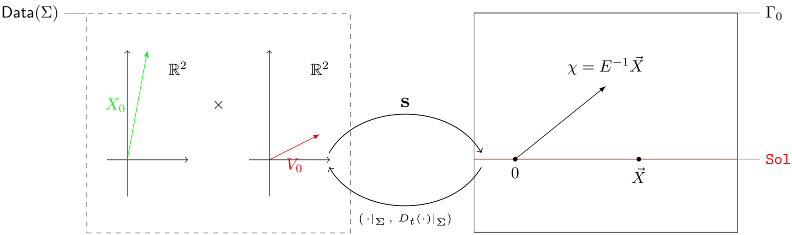
- Equazioni del moto: $(PX)^\mu = (X'')^\mu + R^\mu_{i\alpha j} T^i T^j X^\alpha$

Metodo di Peierls

- Spazio degli osservabili classici: $\mathcal{E} \simeq \frac{\Gamma_0}{P\Gamma_0}$
- Funzionali associati: $F_{[f]}(X) = F_f(X) = \int_{\mathbb{R}} < X, f >_t \, dt \qquad \forall X \in \mathtt{Sol}$
- Parentesi di Peirels: $\{\chi, \omega\} = \int \left\langle \chi, \left(G^- - G^+\right) \omega \right\rangle dt = (\chi, E\omega)$

Lo spazio delle Fasi Classico





Conclusioni

Risultati

- Riformulazione in linguaggio geometrico dell'algoritmo di Peierls.
- Estensione dell'algoritmo di Peierls da campi scalari a teorie di campo Lagrangiane su spaziotempo curvo.

Prospettive

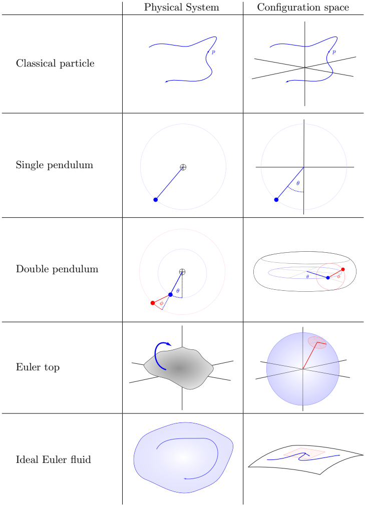
- Cercare un interpretazione geometrica ai singoli passaggi che costituiscono il metodo di Peierls.
- Riformulazione rigorosa delle costruzioni formali sviluppando un *calcolo differenziale sulle varietà infinito dimensionali*.
- Estensione ulteriore della procedura di Peierls a teorie più elaborate (Libertà di Gauge, Equazioni di Vincolo, Strutture di Spin).
- Formulazione della struttura geometrica che soggiace allo spazio delle Lagrangiane

Section 5

Extra

Meccanica Geometrica

- **L'Idea:** Fare uso della geometria per codificare tutte le proprietà meccaniche di un sistema indipendentemente dalle coordinate di configurazione.(Lessig)
- **La scommessa:** Saper ricostruire da questi oggetti matematici astratti tutte le osservabili di interesse fisico.
- **Il vantaggio:** Base formale su cui definire la Quantizzazione.



[a]

[a] Fonte: *A Primer on Geometric Mechanics* - C. Lessig

I passi del metodo di Peierls (1)

La procedura può essere riassunta in pochi passi:

1. Si considera un disturbo Lagrangianoχ.
2. Si costruiscono le soluzioni perturbate dall'azione di χ.
3. Si calcolo l'effetto del disturbo χ sul funzionale Lagrangiano relativo ad un secondo disurbo ω.
4. Si assembla l'effetto reciproco dei due disturbi a costruire una funzione binaria.

Dalle Parentesi di Peierls alla struttura simplettica

1. Considero solo le Lagrangiane costruibili a partire da una configurazione cinematica.

$$Q_\chi(\psi) = -\chi$$

$$\mathcal{O}_\chi(\psi) = \int_M \chi(x)\psi(x)d\mu(x) = (\chi, \psi)$$

2. Le soluzioni dell'equazione del moto disturbato

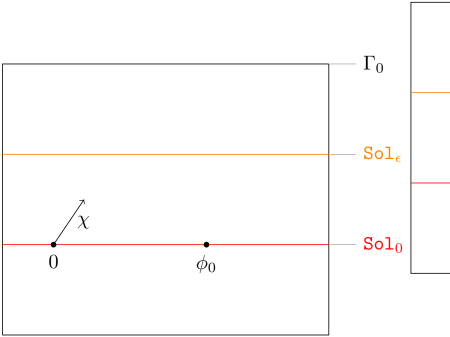
$$\mathtt{Sol}_\epsilon = \mathtt{Sol} + \epsilon G^- \chi = \mathtt{Sol} + \epsilon G^+ \chi$$

3. Le variazioni $\eta_\pm$ sono indipendenti dalla soluzione di partenza

$$\eta_\pm = G^\pm(-Q_\chi \phi_0) = G^\pm \chi$$

4. Le parentesi risultano

$$\{\omega, \chi\} = \left(\omega, (G^- - G^+)Q_\chi \phi_0\right) = (\omega, E\chi)$$



L'Algebra di Poison realizzata tramite il metodo di Peierls

Risultato:
Alla generica teoria lagrangiana di campo $(E, \mathcal{L})$
Viene associato lo spazio simplettico $(\mathcal{E}, \tau)$

- $\mathcal{E} \simeq \frac{\Gamma_0}{P\Gamma_0}$
- $\tau([\chi], [\omega]) = \{\chi, \omega\} = \int_M \langle \chi, \left(G^- - G^+\right) \omega \rangle \, d\mu(x) = (\chi, E\omega) \qquad \forall \chi, \omega \in \Gamma_0(E)$

Gli elementi di $\mathcal{E}$ agiscono come osservabili:

$$F_{[f]}(X) = F_f(X) = \int_M < X, f >_x \, d\mu(x) \qquad \forall X \in \mathtt{Sol}$$

La forma τ può essere rivista come una parentesi di Poisson

$$\left\{F_{[f]}, F_{[g]}\right\}(X) = F_{[???]}(X)$$

Che c'entra tutto ciò con la quantizzazione?

Una volta determinato lo spazio simplettico classico della teoria di campo lo schema di quantizzazione si completa in due passi:

1. Si associa a $(\mathcal{E}, \tau)$ un'opportuna "unital $*-$algebra".
2. Si seleziona uno stato algebrico

L'algebra degli osservabili quantistici

We call *algebra of quantum observables* associated to the classical field system $(\mathcal{E}, \tau)$ the unital $*-$algebra $A = \big((A, \mathbb{C}), \cdot, *\big)$ generated over $\mathbb{C}$ by the symbols

$$\{\mathbf{1}\} \bigcup \{\mathbf{\Phi}([f]) \mid [f] \in \mathcal{E}\}$$

such that:

1. The generators are linearly independent:
$$\mathbf{\Phi}\big(a[f] + b[s]\big) = a\mathbf{\Phi}([f]) + b\mathbf{\Phi}([s]) \qquad \forall [f], [s] \in \mathcal{E},\ \forall a, b \in \mathbb{R} \qquad (1)$$
2. The generators are *formally self-adjoint* in the sense that:
$$\big(\mathbf{\Phi}([f])\big)^* = \mathbf{\Phi}([f]) \qquad \forall [f] \in \mathcal{E} \qquad (2)$$
3. The (anti-) commutation relations extrapolated from the classical τ are replicated on A:
$$\big[\mathbf{\Phi}([f]), \mathbf{\Phi}([g])\big]_{\mp} = \mathbf{\Phi}([f]) \cdot \mathbf{\Phi}([g]) \mp \mathbf{\Phi}([g]) \cdot \mathbf{\Phi}([f]) = i\tau\big([f], [g]\big)\mathbf{1} \quad (3)$$
where the sign $\mp$ depend respectively on the anti-symmetry and symmetry of the form τ.

Prospettive

- Ci si può porre il problema di trovare un interpretazione geometrica ai singoli passaggi che costituiscono il metodo di *Peierls*.
  Perché la costruzione di Peierls fornisce proprio la giusta usuale forma simplettica (Ω) sullo spazio delle fasi classico ?
- Tali costruzioni sono formali. E' possibile dare un fondamento rigoroso a tali costruzioni sviluppando il *calcolo differenziale sulle varietà infinito dimensionali*
- E' possibile estendere ulteriormente la procedura di Peierls a teorie di campo più articolate?
  - Libertà di Gauge
  - Equazioni di Vincolo
  - Strutture di Spin
- Al discorso soggiace la geometria di 2 spazi: lo spazio delle soluzioni `Sol` e lo spazio delle Lagrangiane Lag.
  E' possibile fornire un'interpretazione geometrica alle parentesi di Peierls formalizzando lo spazio delle Lagrangiane?