Chapter 1

Mathematical Preliminaries

⚠ Le interazioni matematiche sono complesse e non triviali (vedi un po' di articoli di introduzione a AQFT per ispirarti)

Tendenzialmente le teorie quantistiche di campi moderne sono di Quantizzazione.. Quindi richiedono di specificare bene la struttura del campo classico (vedi intro di Mangiaratti shardashivly)

Gli strumenti matematici per raccontare la teoria dei campi classici sono essenzialmente 3: Fibrati, S-T G-H, LDOP e GHOP.

IN questo paper non ci soffermeremo sulle strutture del framework puramente quantistico (* algebre e quant'altro). Per un primer vedere articolo di Dappiaggi o Libro Adv aqft.

Diamo per scontato un background di base in Geometria differenziale e derivate esterne (algebre di Grassman? global calculus? non so come chiamarlo!)

Potrei avere la tentazione a provare ad usare un po' di linguaggio basilare delle categorie... la mia fonte ÃÍ Joy of Cat.

⚠ Stile: Intro lapiadaria ai 3 argomenti (bundle cinematica di campo, Glob iper stage per descrivere dinamica di tipo propagativo, Operatori tipo onda). Poi smitragliata di definizioni come faceva Penati.

1.1 Fiber Bundles

1.1.1 ...

⚠ Inserire solo i punti salienti del primo capitolo.. Spostare ex primo capitolo spostato nel repository "dispensarium" come dispensa WIP

1.1.2 Some Topics useful in Physics

Jet Bundles

Tautological one-form and simplectic form.

Fomm: As a mathematical curiosity, we note that the cotangent bundle of any manifold is orientable. Indeed, it carries a symplectic structure and hence a volume element.

1.2 Globally Hyperbolic Space-times

⚠ Mettere solo le definizioni che uso prese dagli articoli di review delle Fonti

Appunti che mi ero preso scrivendo il secono capitolo:

This condition is strictly connected to the dynamic behaviour of the system.

⚠ Def di dominio di dipendendenza footnote di definizione di spazio tempo def cauchy surface Remark causal future past def globally hyperbolic Teorema sulle caratterizzazioni

Notation fixing

We denote the set of all the cauchy surfaces as $\mathscr{P}_C(M)$.

Glon iperbolic determina la fogliazione dello spazio tempo per superfici di cauchy La superficie di cauchy ÃÍ questa:

Definition 1: Cauchy surface

questo da la possibilitÃă della buona posizione dei problemi di cauchy.. fisicamente ÃÍ la condizione minima per definire i dati iniziali dell'evoluzione dinamica. definisco data...

⚠ Rapporto con la condizione sugli operatori...

No! La definizione di green hyperbolicity non garantisce invece l'esistenza e unicitÃă del problema di cauchy associata

e non solo, anche l'esistenza degli operatori di green associati che sono ingrediente fondamentale della costruzione di peierls

M ÃÍ glob iper e P ÃÍ green iper per tener conto del comporatamento propagativo definire sup cauchy definire s-t iperbolico (solo la caratterizzazione di ammetre una sup di cauchy) definire op green iperbolico su spazio tempo iperbolico (cioÃÍ ha delle green ope) Propr di buona definizione esistenza e unicita della soluzione

⚠ Di particolare ricorrenza fisica sono gli operatori normally iperbolic espressione in coordinate esempio K-g!

⚠ Far notare che minkowski e tanti esempi importanti sono GH

Observation 1

(che serve dopo) lo spazio R Ãĺ banalmente iperbolico in quanto tutti i punti posso essere visti come superfici di cauchy.

(sono ripetizioni inutili per la tesi, sono informazioni che si ritrovano ovunque... sono informazioni adatta al knowledge base)

Recurring definitions in general Relativity (excluding the general smooth manifold prolegomena).

Definition 2: Space-Time

A quadruple $(M, g, \mathfrak{o}, \mathfrak{t})$ such that:

- (M, g) is a time-orientable n-dimensional manifold $(n > 2)$
- $\mathfrak{o}$ is a choice of orientation
- $\mathfrak{t}$ is a choice of time-orientation

Definition 3: Lorentzian Manifold

A pair (M, g) such that:

- M is a n-dimensional $(n \geq 2)$, Hausdorff, second countable, connected, orientable smooth manifold.
- g is a Lorentzian metric.

Definition 4: Metric

A function on the bundle product of TM with itself:

$$g : TM \times_M TM \to \mathbb{R}$$

such that the restriction on each fiber

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

is a non-degenerate bilinear form.

Notation fixing

- *Riemman* if the sign of g is positive definite, *Pseudo-Riemman* otherwise.
- *Lorentzian* if the signature is $(+,-,\dots,-)$ or equivalently $(-,+,\dots,+)$.

Observation 2: Causal Structure

If a smooth manifold is endowed with a Lorentzian manifold of signature $(+,-,\dots,-)$ then the tangent vectors at each point in the manifold can be classed into three different types.

Notation fixing

$\forall p \in M, \quad \forall X \in T_p M$, the vector is:

- *time-like* if $g(X,X) > 0$.
- *light-like* if $g(X,X) = 0$.
- *space-like* if $g(X,X) < 0$.

Observation 3: Local Time Orientability

$\forall p \in M$ the timelike tangent vectors in p can be divided into two equivalence classes taking

$$X \sim Y \text{ iff } g(X,Y) > 0 \qquad \forall X, Y \in T_p^{\text{time-like}} M:$$

We can (arbitrarily) call one of these equivalence classes "future-directed" and call the other "past-directed". Physically this designation of the two classes of future- and past-directed timelike vectors corresponds to a choice of an arrow of time at the point. The future- and past-directed designations can be extended to null vectors at a point by continuity.

Definition 5: Time-orientation

A global tangent vector field $\mathfrak{t} \in \Gamma^{\infty}(TM)$ over the Lorenzian manifold M such that:

- $\text{supp}(\mathfrak{t}) = M$

- $\mathfrak{t}(p)$ is time-like $\forall p \in M$.

Observation 4

The fixing of a time-orientation is equivalent to a consistent smooth choice of a local time-direction.

Definition 6: Time-Orientable Lorentzian Manifold

A Lorentzian Manifold (M, g) such that exist at least one time-orientation $\mathfrak{t} \in \Gamma^\infty(TM)$.

Notation fixing

Consider a piece-wise smooth curve $\gamma : \mathbb{R} \supset I \to M$ is called:

- *time-like* (resp. light-like, space-like) iff $\dot{\gamma}(p)$ is time-like (resp. light-like, space-like) $\forall p \in M$.
- *causal* iff $\dot{\gamma}(p)$ is nowhere spacelike.
- *future directed* (resp. past directed) iff is causal and $\dot{\gamma}(p)$ is future (resp. past) directed $\forall p \in M$.

Definition 7: Chronological $\substack{\text{future}\\\text{past}}$ of a point

Are two subset related to the generic point $p \in M$:

$$\mathbf{I}^{\pm}_M(p) := \left\{q \in M \middle| \, \exists \gamma \in C^\infty\big((0,1), M\big) \text{ time-like } \substack{\text{future}\\\text{past}} - \text{directed} \, : \, \gamma(0) = p, \, \gamma(1) = q\right\}$$

Definition 8: Causal $\substack{\text{future}\\\text{past}}$ of a point

Are two subset related to the generic point $p \in M$:

$$\mathbf{J}^{\pm}_M(p) := \left\{q \in M \middle| \, \exists \gamma \in C^\infty\big((0,1), M\big) \text{ causal } \substack{\text{future}\\\text{past}} - \text{directed} \, : \, \gamma(0) = p, \, \gamma(1) = q\right\}$$

Notation fixing

Former concept can be naturally extended to subset $A \subset M$:

- $\mathbf{I}^{\pm}_M(A) = \bigcup_{p \in A} \mathbf{I}^{\pm}_M(p)$
- $\mathbf{J}^{\pm}_M(A) = \bigcup_{p \in A} \mathbf{J}^{\pm}_M(p)$

Definition 9: Achronal Set

Subset $\Sigma \subset M$ such that every inextensible timelike curve intersect Σ at most once.

Definition 10: $^{\textbf{future}}_{\textbf{past}}$ Domain of dependence of an Achronal set

The two subset related to the generic achornal set $\Sigma \subset M$:

$$\mathbf{D}^{\pm}_{M}(\Sigma) := \left\{ q \in M \middle| \ \forall \gamma \ {}^{\text{past}}_{\text{future}}\text{inextensible causal curve passing through } q : \gamma(I) \cap \Sigma \neq \emptyset \right\}$$

Notation fixing

$\mathbf{D}_{M}(\Sigma) :- \mathbf{D}^{+}_{M}(\Sigma) \cup \mathbf{D}^{-}_{M}(\Sigma)$ is called *total domain of dependence*.

Definition 11: Cauchy Surface

Is a subset $\Sigma \subset M$ such that:

- closed
- achronal
- $\mathbf{D}_{M}(\Sigma) \equiv M$

1.3 Green Hyperbolic Operators

Mettere solo le definizioni che uso prese dagli articoli di review delle Fonti

Pensavo di utilizzare la definizione di Green hyperbolic data da Bar che si avvale del concetto di formally dual (che non richiede la presenza del pairing) invece di quella usata in Advances AQFT che richiede solo che ammetta almeno un $G^{\pm}$ per poi dimostrare tramite teorema che se Ãĺ anche autoaggiunto vale l'unicitÃă. Si tratta solo di una piccola sfumatura.. Deve essere chiarito che in tutto ciÃš che faccio interessano che

$$\forall P \exists 1! G^{\pm}$$

. Che poi questa condizione derivi da GH secondo bar o Gh secondo dap+selfadj Ãĺ una di quelle questioni propriamente matematiche che poco interessa ai fisici della commissione.

Devo richiedere che il green operator sia unico? sia negli schemi di quantizzazione che nella definizione di peierls faccio largo uso dell'unicitÃă. Per provare questa unicitÃă si passa per la definizione di una forma bilineare che permette di parlare di aggiunto formale e quindi avvalersi del teorema.

Green-hyperbolic operators are not necessarily hyperbolic in any PDE-sense and that they cannot be characterized in general by well-posedness of a Cauchy problem. [**?**] [**?**]

(sono ripetizioni inutili per la tesi, sono informazioni che si ritrovano ovunque... sono informazioni adatta al knowledge base) Basic Definition in L.P.D.O. on smooth vector sections.
Consider $F = F(M,\pi,V), F' = F'(M,\pi',V')$ two linear vector bundle over M with different typical fiber

Definition 12: Linear Partial Differential operator **(of order at most $s \in \mathbb{N}_0$)**

Linear map $L : \Gamma(F) \to \Gamma(F')$ such that:
$\forall p \in M$ exists:

- (U,ϕ) local chart on M.
- (U,χ) local trivialization of F
- (U,χ') local trivialization of F'

for which:

$$L\left(\sigma\big|_U\right) = \sum_{|\alpha|\le s} A_\alpha \partial^\alpha \sigma \qquad \forall \sigma \in \Gamma(M)$$

Remark:

(multi-index notation)
A multi-index is a natural valued finite dimensional vector $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n - 1) \in \mathbb{N}_0^n$ with $n < \infty$.
On $\mathbb{R}^n$ a general differential operator can be identified by a multi-index:

$$\partial^\alpha = \prod_{\mu=0}^{n-1} \partial_\mu^{\alpha_\mu}$$

(Until the Schwartz theorem holds, the order of derivation is irrelevant.)
The order of the multi-index is defined as:

$$|\alpha| := \sum_{\mu=0}^{n-1} \alpha_\mu$$

?????????????????????

Hp:

Proposition 1.3.1 (Existence and uniqueness for the Cauchy Problem)

- $\mathbf{M} = (M, g, \mathfrak{o}, \mathfrak{t})$ *a globally hyperbolic space-time.*
- $\Sigma \subset M$ *a spacelike cauchy surface with future-pointing unit normal vector field* $\vec{n}$.
-

Th:

Observation 5

"Green-hyperbolic operators are not necessarily hyperbolic in any PDE-sense and that they cannot be characterized in general by well-posedness of a Cauchy problem. " [**?**] [**?**]

However the existence and uniqueness can be proved for the large class of the *Normally-Hyperbolic Operators*.