

2

MAPPE IN DIMENSIONE UNO

Abbiamo visto come la sezione di Poincaré conduca in modo naturale alla considerazione di mappe definite mediante funzioni reali. In questo capitolo passiamo a discutere la dinamica delle mappe ignorando la proprietà di invertibilità che caratterizza la sezione di Poincaré, ma mantenendo le proprietà di continuità e differenziabilità. In questi casi la dinamica può diventare anche molto complessa, a dare origine ad un comportamento caotico.

2.1 Punti fissi, orbite periodiche e bacini di attrazione

Considereremo qui una mappa reale, ovvero una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ricordiamo che x_0 è un punto fisso per la mappa $f(x)$ se $f(x_0) = x_0$.

La nozione di punto fisso si generalizza in quella di *orbita periodica*. Inoltre la natura di attrattore di un punto fisso dà origine in modo naturale alla nozione di *bacino di attrazione*.

2.1.1 Criteri di esistenza di punti fissi

Iniziamo enunciando due criteri che ci saranno utili nel seguito. Tali criteri si fondano sulla

Proposizione 2.1: *Sia $f(x)$ continua sull'intervallo chiuso $[a, b]$, e sia p un punto compreso tra $f(a)$ e $f(b)$. Allora esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = p$.*

Questa proposizione è argomento standard dei corsi di Analisi Matematica, per cui omettiamo la dimostrazione.

Proposizione 2.2: *Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso, e sia $f : I \rightarrow I$ una mappa continua. Allora f ammette un punto fisso in I .*

Dimostrazione. Se vale $f(a) = a$ oppure $f(b) = b$ allora uno degli estremi è punto fisso, e non c'è altro da dimostrare. Supponiamo dunque $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Poiché $f(a) \in [a, b]$ segue subito che $f(a) > a$; analogamente, poiché $f(b) \in [a, b]$ segue che $f(b) < b$. Consideriamo la funzione $g(x) =$

$f(x) - x$. Essa è continua, e soddisfa $g(a) = f(a) - a > 0$ e $g(b) = f(b) - b < 0$. Per la proposizione 2.1 si conclude che esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $g(x_0) = 0$, ovvero $f(x_0) = x_0$. Q.E.D.

Proposizione 2.3: Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso, e sia $f(x)$ una mappa continua. Sia inoltre $I \subset f(I)$. Allora la mappa f ammette un punto fisso in I .

Dimostrazione. Poiché $I \subset f(I)$, esistono $c \in I$ tale che $f(c) = a$ e $d \in I$ tale che $f(d) = b$. Se accade che $c = a$ oppure $d = b$, allora uno degli estremi di I è punto fisso, e non c'è altro da dimostrare. Supponiamo dunque $c \neq a$ e $d \neq b$. Definiamo la nuova funzione $g(x) = f(x) - x$, che è continua. Essa soddisfa $g(c) = f(c) - c = a - c < 0$, perché $c \in [a, b]$, ed anche $g(d) = f(d) - d = b - d > 0$, perché $d \in [a, b]$. Per la proposizione 2.1 esiste x_0 tale che $g(x_0) = 0$, ovvero $f(x_0) = x_0$. Q.E.D.

2.1.2 Orbite periodiche e bacino di attrazione

Un punto x è detto *periodico* di periodo N se $f^N(x) = x$, ossia se è punto fisso per l'iterata N -esima della mappa. L'orbita corrispondente viene detta *periodica*, o talvolta *ciclo periodico*.

Un'orbita con punto iniziale x è detta *definitivamente periodica*¹ di periodo N se esiste $K > 0$ per cui vale $f^N(x) = x$ per $N \geq K$.

Un'orbita periodica contiene al più N punti: ciò si verifica in modo elementare. Ci si rende conto però che se un'orbita ha periodo N allora ha anche periodo kN con qualunque intero positivo k .

Questa apparente ambiguità si risolve mostrando che ogni orbita periodica ammette un periodo minimo, che denotiamo ancora con N . Inoltre, se N è il periodo minimo allora l'orbita contiene esattamente N punti distinti. La verifica è lasciata al lettore per esercizio. Se $N = 1$, allora si ha un punto fisso, che da solo costituisce anche un'orbita.

Grazie alle proprietà enunciate, lo studio delle orbite periodiche può ricondursi a quello dei punti fissi: basta considerare la mappa $f^N(x)$ anziché $f(x)$. Anche per esse potremo parlare di attrattori e repulsori, con le dovute estensioni.

Se un punto fisso x_0 è un attrattore diremo che il suo *bacino di attrazione* è l'insieme dei punti x tali che $f^k(x) \rightarrow x$ per $k \rightarrow +\infty$. Nel caso di un'orbita periodica la definizione dovrà essere modificata imponendo $f^{kN}(x) \rightarrow x$, dove N è il periodo. In alcuni testi si usa il termine *insieme stabile* di x_0 per indicare il bacino di attrazione di x_0 .

¹ In questa definizione è evidentemente essenziale il fatto che la mappa non sia invertibile: due orbite distinte possono fondersi in una sola da una certa iterata in poi.

2.2 Fenomeni di biforcazione

Passiamo ora a considerare una mappa $f_\lambda(x)$ che dipenda da un parametro reale λ . La mappa potrà ammettere uno più punti fissi, la cui posizione dipenderà in generale dal parametro. Possiamo quindi immaginare che al variare di λ avremo una funzione $x_0(\lambda)$ che descrive la posizione di un punto fisso.

La stabilità di un punto fisso x_0 , come abbiamo visto nel paragrafo 1.3.3, dipende dalla derivata $f'_\lambda(x_0)$. Dunque, al variare di λ il punto fisso $x_0(\lambda)$ può mutare da attrattore a repulsore, o viceversa. Può anche accadere che un punto fisso nasca in corrispondenza ad un *valore critico* λ_c di λ : abbiamo già visto un fenomeno di questo tipo nello studio dell'equazione logistica, nel paragrafo 1.2.3. Si dice che siamo in presenza di una *biforcazione*.² È questo il fenomeno che analizzeremo in questo paragrafo, illustrando i tipi più comuni di biforcazione.

2.2.1 Il criterio di biforcazione

Iniziamo con la seguente

Proposizione 2.4: *Sia $f_\lambda(x)$ una famiglia di funzioni che dipenda con regolarità dal parametro reale λ , e supponiamo che per un certo λ_0 esista un punto fisso x_0 , ossia $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$. Supponiamo infine che sia $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Allora esistono due intervalli $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta)$ ed una funzione regolare $g : (\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta) \rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $g(\lambda_0) = x_0$, e $x = g(\lambda)$ è un punto fisso per $f_\lambda(x)$, ossia verifica $f_\lambda(g(\lambda)) = g(\lambda)$. Inoltre $f_\lambda(x)$ non ammette altri punti fissi in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Dimostrazione. Ci si riconduce al teorema delle funzioni implicite considerando la funzione $H(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. I punti fissi della mappa $f_\lambda(x)$ coincidono palesemente con gli zeri di $H(x, \lambda)$. Per ipotesi, vale $H(x_0, \lambda_0) = 0$ e anche

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_\lambda(x_0) - 1 \neq 0.$$

Applicando il teorema delle funzioni implicite alla funzione $H(x, \lambda)$ si conclude che esiste un rettangolo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta)$ ed una funzione regolare $g : (\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta) \rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tale che $H(g(\lambda), \lambda) = 0$, e che non esistono altri zeri di $H(x, \lambda)$ nel rettangolo. Q.E.D.

Alla proposizione che abbiamo appena dimostrato si dà talvolta il nome di *criterio di biforcazione*. In effetti, essa assicura che, sotto condizioni di regolarità della mappa $f_\lambda(x)$, i fenomeni di biforcazione possono verificarsi solo nei punti per cui vale $f'_\lambda(x_0) = 1$.

² Dal latino *bifurcus*, che sta ad indicare un oggetto a due punte, ad esempio una forcella di un ramo

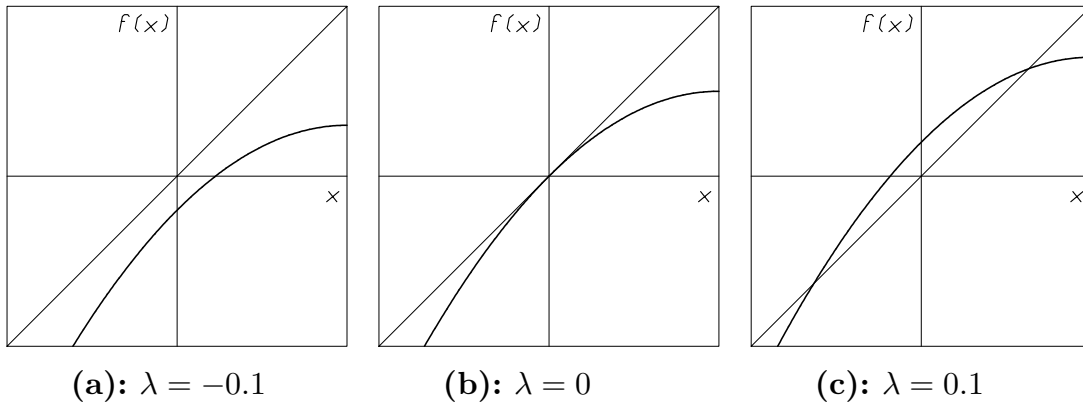


Figura 2.1. La biforcazione tangente per la mappa $\lambda + x(1 - x)$.

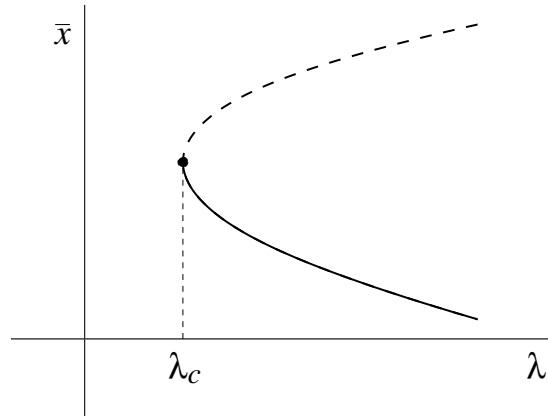


Figura 2.2. Un tipico grafico che rappresenta una biforcazione tangente. I punti fissi si formano quando il parametro λ supera il valore critico λ_c . Uno degli equilibri è stabile (linea continua), l'altro è instabile (linea tratteggiata).

2.2.2 La biforcazione tangente

Consideriamo la mappa

$$(2.1) \quad f_\lambda(x) = \lambda + x(1 - x) .$$

Risolvendo l'equazione $f_\lambda(x) - x$ si calcola rapidamente che per $\lambda > 0$ vi sono due punti fissi $x = \pm\sqrt{\lambda}$ che collassano in un unico punto fisso per $\lambda = 0$, e scompaiono per $\lambda < 0$. Si parla in questo caso di *biforcazione tangente*.

Il calcolo della derivata nei punti fissi mostra che si verifica il caso critico proprio per $\lambda = 0$, avendosi $f'_0(0) = 1$. È qui che può avvenire una biforcazione, che in effetti si verifica. Per $\lambda > 0$ si ha invece $f'_\lambda(-\sqrt{\lambda}) = 1 + 2\sqrt{\lambda}$ e $f'_\lambda(\sqrt{\lambda}) = 1 - 2\sqrt{\lambda}$, e qui si applica la proposizione 2.4 che esclude la possibilità di biforcazione.

La figura 2.1 riporta il grafico della mappa per tre valori significativi di λ . Applicando la proposizione 1.4, o anche svolgendo un'analisi grafica

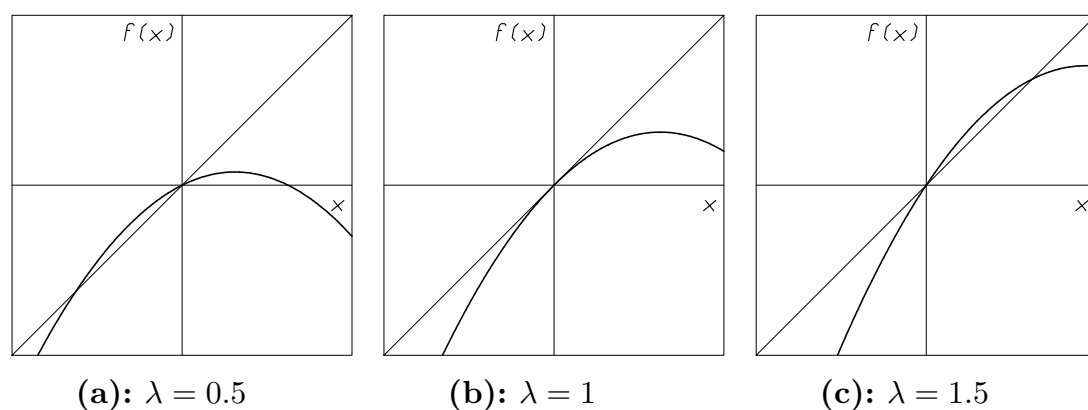


Figura 2.3. La biforcazione di scambio per la mappa $\lambda x - x^2$.

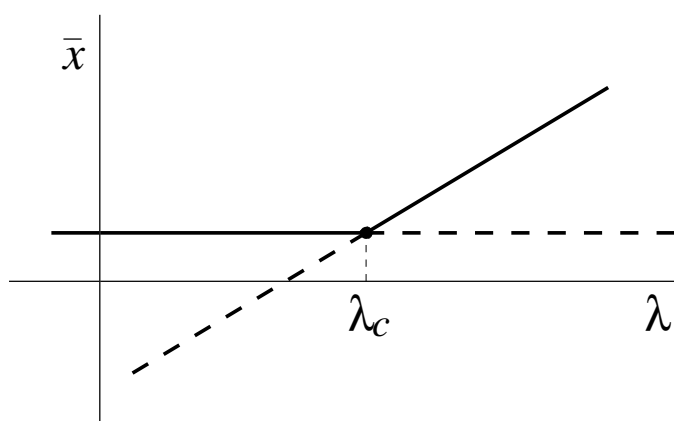


Figura 2.4. Un tipico grafico di biforcazione di scambio. Un equilibrio stabile ed uno instabile si attraversano in corrispondenza del valore critico λ_c , scambiandosi la stabilità.

delle orbite col metodo illustrato nel paragrafo 1.3.4, si vede che per $\lambda > 0$ il punto fisso $-\sqrt{\lambda}$ è un repulsore mentre il punto $\sqrt{\lambda}$ è un attrattore. Per $\lambda = 0$ l'unico punto fisso $x = 0$ è repulsivo a sinistra ed attrattivo a destra.

È d'uso rappresentare il fenomeno della biforcazione anche riportando la posizione del punto fisso come funzione del parametro λ , come in figura 2.2. Quando λ passa per il valore *critico* λ_c i due equilibri si formano (o si distruggono a vicenda, se si segue il decrescere di λ). L'equilibrio stabile viene rappresentato con una curva continua; quello instabile con la curva tratteggiata. Per inciso, la figura rende ragione dell'aggettivo *tangente* usato per descrivere questo tipo di biforcazione: le curve che descrivono l'evoluzione del punto fisso dopo la creazione hanno una tangente comune in corrispondenza al valore critico λ_c .

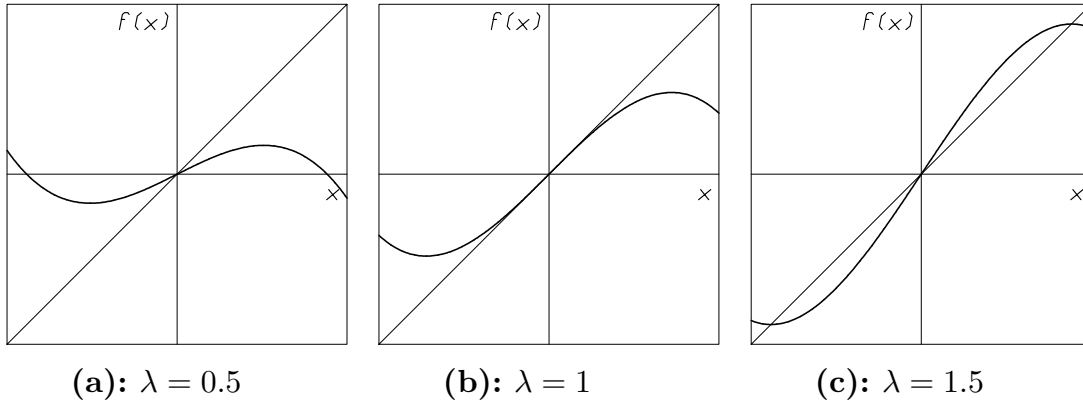


Figura 2.5. La biforcazione a forchetta per la mappa $\lambda x - x^3$.

2.2.3 La biforcazione di scambio

Consideriamo la mappa

$$(2.2) \quad f_\lambda(x) = \lambda x - x^2$$

Il punto $x = 0$ resta punto fisso per tutti i valori di λ , ma esiste un secondo punto fisso $x = \lambda - 1$ che per $\lambda = 1$ coincide col primo. Il calcolo della derivata dà $f'_\lambda(0) = \lambda$ e $f'_\lambda(\lambda - 1) = 2 - \lambda$, quindi la possibilità di biforcazione si presenta solo per $\lambda_c = 1$ e $x = 0$.

La figura 2.3 mostra il grafico della mappa per tre valori di λ intorno a $\lambda_c = 1$. Applicando la proposizione 1.4, o tracciando graficamente le orbite, si vede subito che il punto fisso $x = \lambda - 1$ è un repulsore per $\lambda < 1$, e diventa un attrattore per $\lambda > 1$. Nel caso $\lambda = 1$ l'unico punto fisso è repulsivo a sinistra ed attrattivo a destra. Se si segue l'evoluzione dei punti fissi al variare di λ si può ben dire che il punto fisso $x = \lambda - 1$ “attraversa” l'altro punto fisso $x = 0$ scambiando con esso la stabilità. Da qui il nome *biforcazione di scambio*.

2.2.4 La biforcazione a forchetta

Consideriamo la mappa

$$(2.3) \quad f_\lambda(x) = \lambda x - x^3$$

Il punto $x = 0$ resta punto fisso per tutti i valori di λ . Inoltre per $\lambda \geq 1$ esiste una coppia di punti fissi $x = \pm\sqrt{\lambda - 1}$, che per $\lambda = 1$ coincidono con $x = 0$. Il calcolo della derivata dà $f'_\lambda(0) = \lambda$ e $f'_\lambda(\pm\sqrt{\lambda - 1}) = 3 - 2\lambda$, quindi la possibilità di biforcazione si presenta solo per $\lambda = 1$ e $x = 0$.

La figura 2.5 mostra il grafico della mappa per tre valori di λ intorno a $\lambda_c = 1$. Applicando la proposizione 1.4, o tracciando graficamente le orbite, si vede che il punto fisso $x = 0$ è un attrattore per $\lambda \leq 1$, e diventa un repulsore per $\lambda > 1$. I punti fissi $x = \pm\sqrt{\lambda - 1}$ sono degli attrattori.

Mettendo in grafico la posizione dei punti fissi in funzione di λ si ottiene la tipica rappresentazione della biforcazione che abbiamo appena discusso,

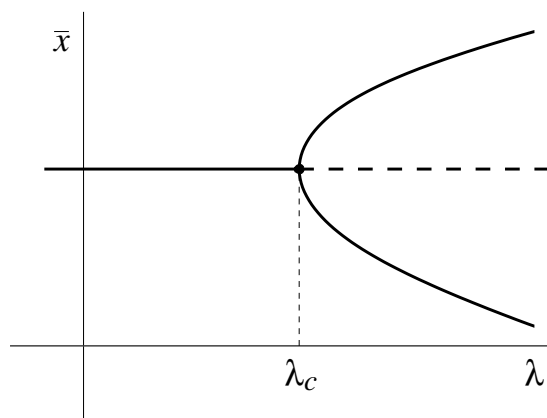


Figura 2.6. Un tipico grafico di biforcazione a forchetta. Al passaggio del parametro per il valore critico λ_c emergono due nuovi equilibri che ereditano la stabilità di quello preesistente, mentre quest'ultimo continua ad esistere.

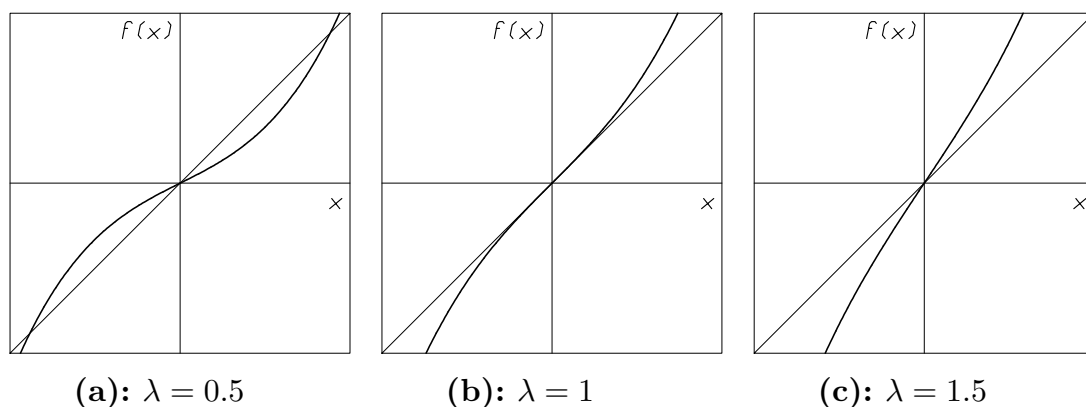


Figura 2.7. La biforcazione inversa a forchetta per la mappa $\lambda x + x^3$.

illustrata in figura 2.6. Il grafico giustifica il nome *biforcazione a forchetta* che viene usato in questo caso.³

Una variante della biforcazione a forchetta è la *biforcazione inversa a forchetta*. La illustriamo prendendo a riferimento la mappa

$$(2.4) \quad f_\lambda(x) = \lambda x + x^3,$$

che differisce dalla precedente solo per il segno del termine cubico.

Il grafico della mappa per tre valori di λ è rappresentato in figura 2.7. Per $\lambda < 1$ si hanno due repulsori in $x = \pm\sqrt{1-\lambda}$ che al crescere di λ si fondono in $\lambda = 1$ con l'attrattore $x = 0$. Per $\lambda > 1$ sopravvive solo quest'ultimo punto fisso, che diventa un repulsore.

³ Nei testi inglesi si usa il termine *pitchfork bifurcation*, con un espressivo riferimento al forcione, o tridente, usato dai contadini.

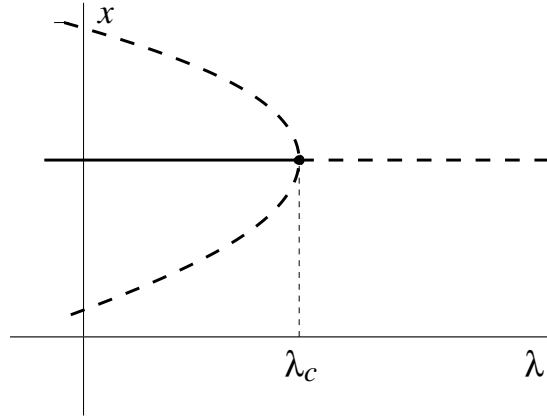


Figura 2.8. Un tipico grafico di biforcazione inversa a forchetta. Al passaggio del parametro per il valore critico λ_c i due punti fissi instabili si annullano incontrandosi col punto fisso stabile. Quest'ultimo continua ad esistere perdendo però la sua stabilità.

Il diagramma tipico della biforcazione inversa a forchetta è rappresentato in figura 2.8. Si tratta, come ben si vede, di un grafico che si ottiene per riflessione di quello della biforcazione diretta a forchetta di figura 2.6, con scambio della stabilità. La figura giustifica ampiamente l'aggettivo *inversa*.

2.2.5 La biforcazione con raddoppio del periodo

Abbiamo già avuto modo di osservare come le orbite periodiche di una mappa siano punti fissi per una delle iterate della mappa stessa. Ciò conduce in modo naturale ad esaminare la possibilità di biforcazione anche per le orbite periodiche.

Data una mappa $f_\lambda(x)$, consideriamone ad esempio la seconda iterata $f_\lambda^2(x)$, che scriviamo in modo più esplicito come $f_\lambda(f_\lambda(x))$. Calcoliamone la derivata, il che richiede l'applicazione della regola di Leibniz, ed otteniamo

$$\frac{d}{dx} f_\lambda(f_\lambda(x)) = \frac{df_\lambda}{dx}(f_\lambda(x)) \cdot \frac{df_\lambda}{dx}(x) .$$

Se x_0 è un punto fisso della mappa, si ha $f(x_0) = x_0$, e dunque anche

$$\frac{df_\lambda}{dx}(f_\lambda(x_0)) \cdot \frac{df_\lambda}{dx}(x_0) = (f'(x_0))^2 .$$

Applicando la proposizione 2.4 concludiamo immediatamente che si può verificare una biforcazione non solo nel caso $f'_\lambda(x_0) = 1$, che già conosciamo, ma anche nel caso $f'_\lambda(x_0) = -1$. In questo secondo caso nasce un nuovo punto fisso per la mappa iterata $f_\lambda^2(x)$, ma non per $f_\lambda(x)$. Ne consegue che la biforcazione ha dato origine ad un'orbita di periodo 2 per la mappa $f_\lambda(x)$.

Per illustrare meglio il fenomeno consideriamo ancora la mappa

$$(2.5) \quad f_\lambda(x) = \lambda x - x^2 .$$

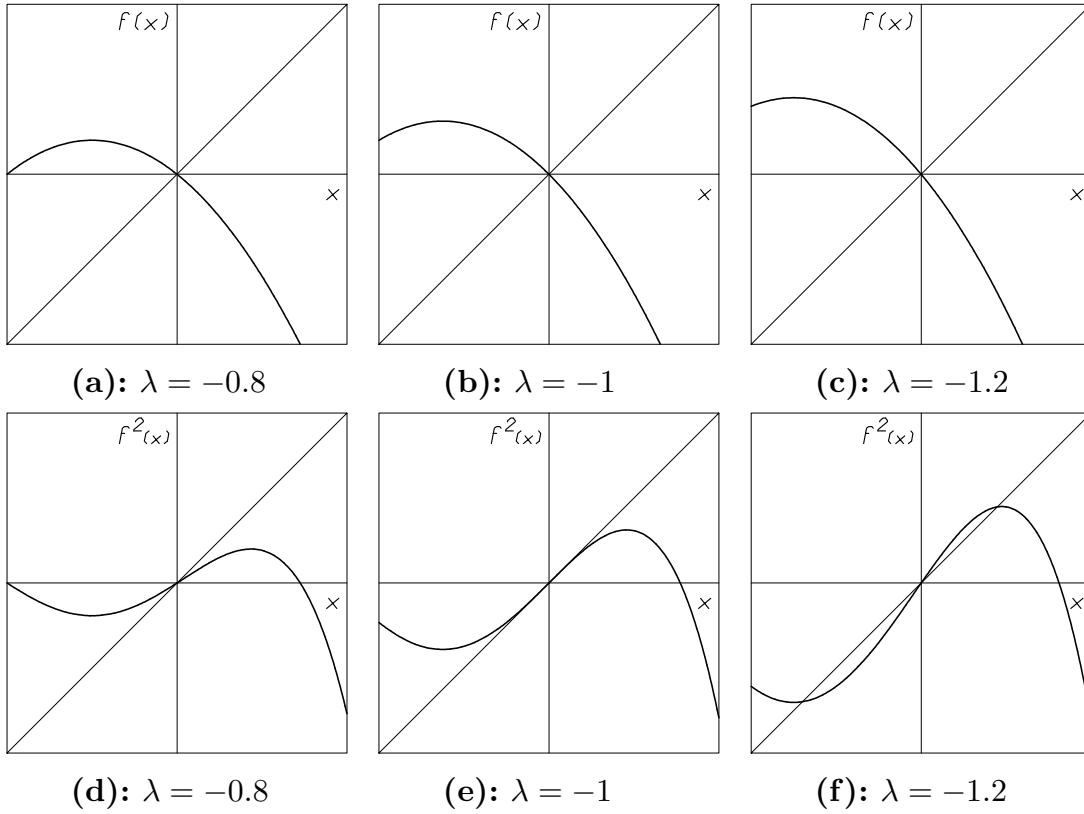


Figura 2.9. La biforcazione a forchetta per la seconda iterata della mappa $\lambda x - x^2$.

e concentriamo la nostra attenzione sul punto fisso $x = 0$, tralasciando l'altro punto fisso $x = \lambda$. Per $\lambda = -1$ la derivata prima è $f'_{-1}(0) = -1$; dunque c'è la possibilità di una biforcazione per la mappa iterata 2 volte. In effetti possiamo verificare che

$$f_{\lambda}^2(x) = \lambda^2 x - \lambda(\lambda + 1)x^2 + 2\lambda x^3 - x^4$$

presenta una biforcazione a forchetta per $\lambda = -1$.⁴

I grafici sono rappresentati in figura 2.9. I riquadri sulla prima riga mostrano la mappa $f_{\lambda}(x)$. I tre valori di λ considerati mostrano il passaggio da $\lambda > -1$ nel riquadro (a) a $\lambda < -1$ nel riquadro (c), passando per $\lambda = -1$ nel riquadro (b). Il punto fisso $x = 0$ non è soggetto a biforcazione in altri punti fissi, in accordo con la proposizione 2.4.

⁴ Il confronto con gli esempi riportati fin qui può sollevare qualche perplessità, in quanto si è visto che gli esempi di biforcazione a forchetta sono generati da un termine cubico nella non linearità, in assenza di un termine quadratico. Qui però si deve osservare che il termine quadratico ha un coefficiente $\lambda + 1$, che per λ prossimo a -1 è piccolo, sicché prevale il contributo del termine cubico.

La mappa $f_\lambda^2(x)$ è rappresentata sulla seconda riga, con valori $\lambda > -1$ in (d), $\lambda = -1$ in (e) e $\lambda < -1$ in (f). La biforcazione a forchetta per $f_\lambda^2(x)$ si osserva in modo evidente. Naturalmente, il punto fisso $x = 0$ è l'orbita di periodo 1, che ha anche periodo 2.

A questo punto si è naturalmente tentati di cercare biforcazioni che diano origine ad orbite di periodo n arbitrario. Ma si vede ben presto che, almeno per quanto riguarda il meccanismo della biforcazione con raddoppio di periodo, la ricerca aggiunge ben poco a quanto abbiamo già visto. In effetti, il calcolo della derivata per $f_\lambda^n(x)$ dà⁵

$$\frac{df_\lambda^n}{dx}(x) = \frac{df_\lambda}{dx}(f^{n-1}(x)) \cdot \dots \cdot \frac{df_\lambda}{dx}(x) .$$

Calcolando questa espressione per un punto fisso x_0 si trova subito

$$\frac{df_\lambda}{dx}(f^{n-1}(x_0)) \cdot \dots \cdot \frac{df_\lambda}{dx}(x_0) = (f'_\lambda(x_0))^n ,$$

che può assumere il valore 1 solo se $f'(x_0) = 1$, nel qual caso si verifica già la possibilità di una biforcazione per la mappa $f_\lambda(x)$ non iterata, oppure se n è pari e $f'(x_0) = -1$, nel qual caso si può verificare una biforcazione per $n = 2$, che è quanto abbiamo già analizzato.

Il lettore potrà verificare che la biforcazione con raddoppio di periodo può assumere anche la forma di una biforcazione a forchetta inversa. Ad esempio, può essere interessante analizzare il comportamento della famiglia di mappe

$$f_\lambda(x) = \lambda x \pm x^k$$

per diversi valori di k , variando il segno del termine non lineare.

Ciò che non si può escludere è che il fenomeno della biforcazione con raddoppio del periodo al variare di λ si verifichi anche per la mappa iterata $f_\lambda^2(x)$, così da generare un'orbita periodica di periodo 4, e poi di periodo 8, 16, 32... ed in generale di una qualunque potenza di 2. In effetti ciò accade.

Infine, esiste anche la possibilità che si formino orbite di periodo n arbitrario per biforcazione tangente. Anche questo accade, infatti. Passiamo subito a discutere un celebre esempio.

2.3 La mappa logistica

La *mappa logistica* può vedersi come evoluzione del modello logistico di equazione differenziale che abbiamo visto nel paragrafo 1.1. Restando nel caso di modelli biologici possiamo introdurlo come segue. Supponiamo di effettuare periodicamente (ad esempio una volta all'anno) un rilievo del

⁵ Occorre applicare n volte la formula di Leibniz per la derivata di funzione di funzione.

numero di membri di una popolazione animale, e di voler tradurre tutto questo in un modello che metta in relazione la quantità misurata in un determinato anno come funzione di quella misurata l'anno precedente. In termini matematici ciò si traduce nel cercare di scrivere una mappa della forma $n_k = f(n_{k-1})$, dove n_k è la quantità osservata nell'anno k -esimo. Una forma di $f(n)$ che, almeno qualitativamente, sembra adatta è proprio $f(n) = \lambda n(N - n)$. Le ipotesi sottostanti sono che per bassi valori di n la crescita della popolazione sia proporzionale a n stesso; al crescere di n le condizioni di affollamento e la competizione per il cibo diminuiscano il tasso di crescita, ed infine se n raggiunge un valore N le risorse ambientali si esauriscano, sicché la crescita viene brutalmente azzerata.

Per semplificare il modello matematico consideriamo la quantità $x = n/N$ come continua, e riscriviamo la mappa nella forma

$$(2.6) \quad x_k = f_\lambda(x_{k-1}) \quad , \quad f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$$

con un parametro positivo λ . Questa mappa è stata studiata in dettaglio da M. Feigenbaum in un celebre lavoro del 1977.^{[9][10][12]} I risultati discussi qui sono in gran parte contenuti in quel lavoro. Le ricerche successive si sono estese sull'arco di diversi anni, fino al 1990 circa.

Osserviamo che, contrariamente a quanto avviene se si usa lo strumento della sezione di Poincaré, la mappa che consideriamo è continua e regolare (addirittura analitica), ma non è invertibile.

2.3.1 Punti fissi e biforcazioni: studio preliminare

Con un calcolo elementare troviamo immediatamente i punti fissi della mappa: $x = 0$ e $x = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Inoltre è elementare osservare che $x = 1$ è il punto iniziale di un'orbita definitivamente periodica, essendo il suo iterato $f(1) = 0$, che è punto fisso.

Calcolando la derivata $f'_\lambda(x) = \lambda(1 - 2x)$ nei punti fissi troviamo

$$f'_\lambda(0) = \lambda \quad , \quad f'_\lambda\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda \quad .$$

Per $0 < \lambda < 1$ abbiamo un attrattore in $x = 0$, ed un repulsore in $x = \frac{\lambda-1}{\lambda} < 0$. Se vogliamo far riferimento al modello biologico il secondo punto fisso non ci interessa (non ha senso considerare una popolazione negativa), mentre l'attrattività dello zero significa che un tasso di crescita troppo basso porta inevitabilmente la popolazione all'estinzione.

Per $\lambda = 1$ si verifica una biforcazione di scambio in $x = 0$, e per $\lambda > 1$ il punto $x = 0$ diventa un repulsore, e $x = \frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$ diventa un attrattore: inizia ad esistere un punto fisso attrattivo interessante. Per inciso, osserviamo che per $\lambda > 1$ tutte le orbite con punto iniziale $x < 0$ fuggono a $-\infty$. Analogamente, tutte le orbite con dato iniziale $x > 1$ hanno $f_\lambda(x) < 0$, e quindi fuggono anch'esse a $-\infty$. La parte interessante della dinamica si concentra nell'intervallo $[0, 1]$, che del resto è anche quello significativo se consideriamo la mappa come rappresentazione di un modello biologico.

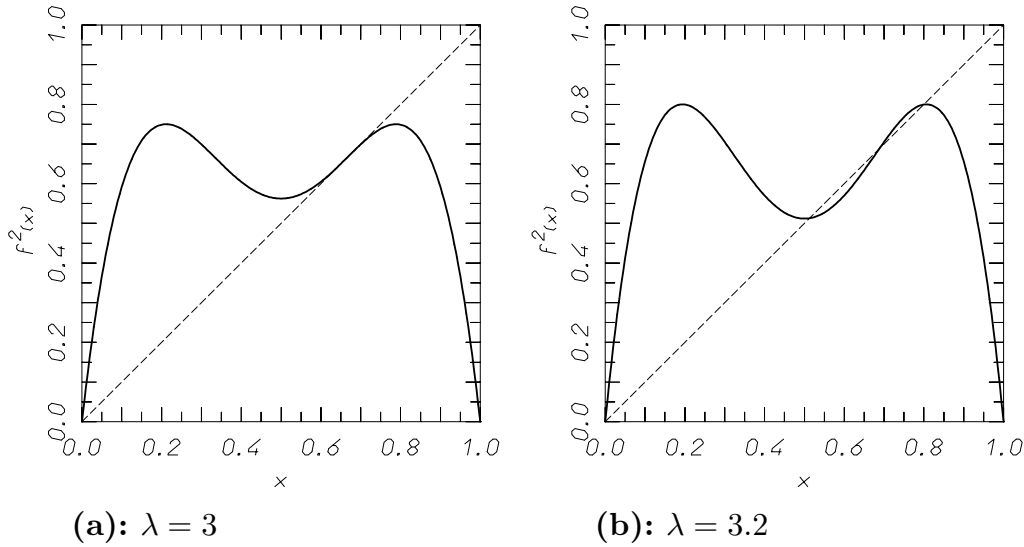


Figura 2.10. La biforcazione con raddoppio del periodo per la mappa logistica, in corrispondenza a $\lambda = 3$.

La stabilità di questo secondo punto fisso però è destinata a scomparire: per $\lambda = 3$ abbiamo $x = 2/3$ e $f'_3(2/3) = -1$. Per $\lambda > 3$ anche il punto fisso $x = \frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$ è diventato un repulsore.

Qui inizia la parte interessante, perché facendo crescere ulteriormente λ questo secondo punto fisso può dare origine ad una biforcazione con raddoppio di periodo. Il grafico della mappa iterata $f_\lambda^2(x)$ è rappresentato in figura 2.10, e mostra con evidenza che la biforcazione avviene effettivamente. Dalla figura emerge però un altro fatto.

Costruiamo un quadrato di vertici (a, a) , (a, b) , (b, b) e (b, a) determinati come segue. Il punto $b = x_0$ è il punto fisso della mappa $f_\lambda(x)$. Questo si calcola facilmente, perché sappiamo che $x_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Il punto a si calcola tracciando la retta orizzontale passante per il punto fisso (b, b) fino ad incontrare a sinistra il grafico della mappa iterata $f_\lambda^2(x)$. Questo richiede la soluzione di un'equazione di quarto grado, di cui però si conosce già una radice. Rappresentiamo poi la mappa iterata $f_\lambda^2(x)$ nel quadrato che abbiamo isolato. Il risultato è rappresentato in figura 2.11. Si osserva subito che il grafico della mappa è simile a quello della mappa logistica stessa, ruotato di π . Analizzando la figura si vede che se $x \in [a, b]$ allora vale anche $f_\lambda^2(x) \in [a, b]$, sicché la dinamica della mappa iterata resta confinata nel quadrato. In particolare si osserva l'esistenza di un secondo punto fisso della mappa $f_\lambda^2(x)$, che in questo caso è un attrattore, e che altro non è che uno dei due punti dell'orbita periodica di periodo 2 della mappa $f_\lambda(x)$.

Diventa spontaneo chiedersi se anche la mappa $f_\lambda^2(x)$, ristretta al quadrato costruito come abbiamo appena visto, presenti una biforcazione con raddoppio di periodo al crescere di λ . Così avviene, infatti, ma proseguire l'indagine con calcoli algebrici diventa un po' scomodo. Convien

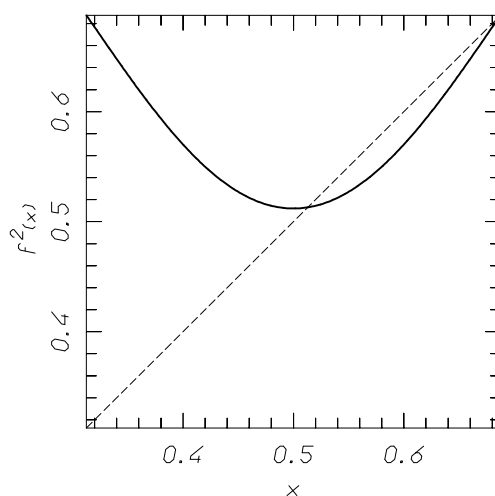


Figura 2.11. La mappa $f_\lambda^2(x)$ per $\lambda = 3.2$ in un quadrato ridotto.

quindi ricorrere all'esplorazione numerica.

2.3.2 Il grafico delle biforcazioni

L'operazione più spontanea consiste nel mettere in grafico le posizioni dei punti delle orbite periodiche attrattive in funzione del parametro λ . Conviene qui limitarsi a far variare λ nell'intervallo $[0, 4]$. In effetti, per $\lambda > 4$ il punto di massimo della mappa, localizzato in $x = 1/2$, supera il valore 1, e si ha un intervallo (a, b) che alla prima iterazione viene inviato sulla semiretta $x > 1$, ed alla seconda iterazione viene mappato sulla semiretta $x < 0$, fuggendo poi a $-\infty$. Torneremo più avanti a discutere questo caso.

Il grafico che cerchiamo è riportato in figura 2.12. L'intervallo considerato è $\lambda \in [2.95, 4]$.⁶ Il calcolo numerico della figura non richiede operazioni particolarmente sofisticate. Prendendo un punto iniziale in modo più o meno casuale, ad esempio $x = 1/2$, le iterazioni successive fanno convergere l'orbita verso l'attrattore, sia esso un punto fisso o un'orbita periodica o altro. Basta calcolare un transiente, ovvero iterare la mappa senza riportare i punti sul grafico lasciando che l'orbita si avvicini quanto basta all'attrattore, e poi riportare un certo numero di punti. Il solo difetto è che le orbite periodiche instabili che sopravvivono dopo la biforcazione non vengono tracciate.

La figura presenta evidentemente degli aspetti sorprendenti. Al crescere di λ si osservano chiaramente le biforcazioni che generano orbite di periodo 2, 4, 8. Poi la figura si fa confusa: si ha la sensazione che ad un certo punto l'orbita riempia in un intero intervallo. Questo rende bene l'idea che la dinamica tenda a diventare caotica. Si osservano anche delle bande verticali

⁶ Per valori di λ inferiori a 3 sappiamo già cosa accade grazie alle considerazioni analitiche già svolte, e quindi possiamo trascurare la maggior parte di quest'ultimo intervallo, salvo un tratto piccolo che ha il solo scopo di mettere in evidenza la prima biforcazione.

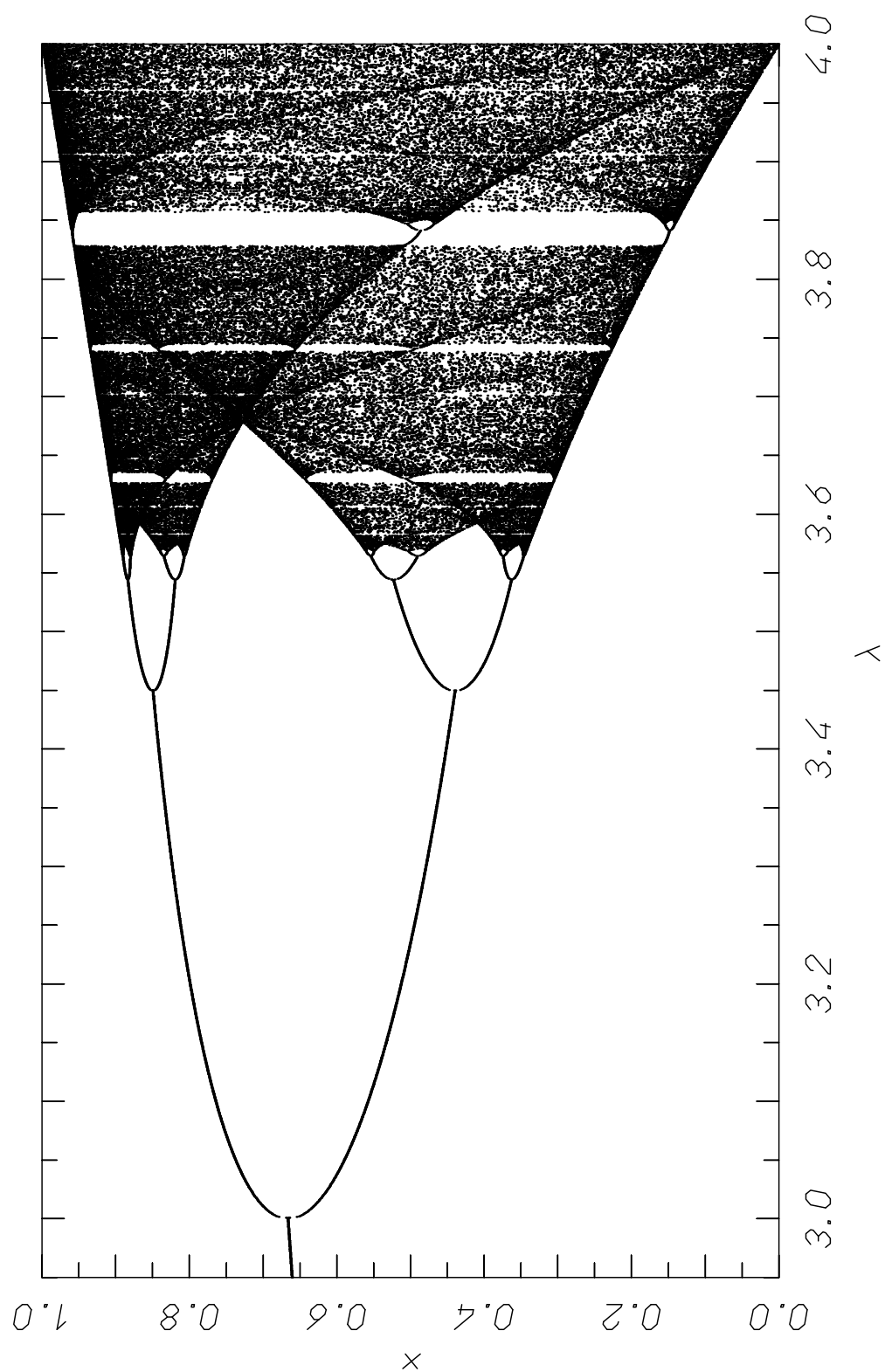


Figura 2.12. Il grafico delle biforcazioni della mappa logistica per $\lambda \in [2.95, 4]$.

quasi vuote. In particolare in prossimità di $\lambda = 3.85$ sembra di intravedere altri fenomeni di biforcazione.

Una discussione dettagliata di tutti i fenomeni richiederebbe uno spazio molto ampio. Il resto della discussione perciò sarà necessariamente limitato a pochi fatti essenziali. Il lettore interessato potrà dedicare tutto il tempo necessario per un ampio studio della dinamica della mappa. Per una discussione più completa si può consultare il testo [21].

2.3.3 La catena di biforcazioni e la costante di Feigenbaum

I raddoppi successivi di periodo sono illustrati nelle figure 2.13 e 2.14. In ciascuna figura l'intervallo di λ è scelto prendendo come estremo inferiore un valore di poco più basso rispetto al valore critico di biforcazione precedente. L'estremo superiore è invece costante. La scala verticale è adattata in ogni figura in modo da rappresentare solo uno dei due rami della biforcazione precedente, e precisamente quello che ha maggior ampiezza verticale. Si possono così rappresentare le biforcazioni successive delle orbite di periodo 2, 4, 8, 16, e si potrebbe continuare, almeno fin che la precisione necessariamente finita del calcolatore non rende impossibile il calcolo.

Il lettore noterà certamente la forte somiglianza tra le quattro figure: si ha l'impressione che ciascuna di esse si ottenga dalla precedente praticamente con un riscaldamento e con un'inversione verticale (il ramo più ampio si trova alternativamente sopra e sotto. In particolare, ciò significa che gli intervalli di persistenza della stabilità di un'orbita di periodo fissato si riscaldano in modo regolare. È naturale chiedersi se ciò sia una caratteristica solo delle prime biforcazioni, oppure se continui all'infinito. La risposta di Feigenbaum è che il processo continua all'infinito.

Per mettere in evidenza il fenomeno dal punto di vista quantitativo è conveniente precedere come segue.

- (i) Calcolare i valori critici di λ per cui avviene una biforcazione. Denoteremo tali valori con $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, intendendo che λ_j è il valore di λ per cui l'orbita di periodo 2^{j-1} biforca in un'orbita di periodo 2^j .
- (ii) Detto $\Delta_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}$, per $j > 1$, l'intervallo di stabilità dell'orbita di periodo 2^{j-1} , calcolare il rapporto Δ_j/Δ_{j+1} per $j \geq 3$.

Un calcolo rapido per le prime biforcazioni può svolgersi semplicemente ricordando che $\lambda_1 = 3$, e valutando alcuni dei λ_j successivi semplicemente leggendo l'ascissa delle figure. Un altro modo consiste nel calcolare numericamente i valori di biforcazione, che sappiamo essere quelli per cui la derivata della mappa $f_{\lambda_j}^{2^j}(x)$ vale -1 . Il calcolo non è particolarmente agevole, ma è fattibile. I risultati per le prime biforcazioni sono riportati nella tabella 2.1.

La domanda è se i numeri sulla terza colonna convergano a qualche limite. La tesi sostenuta da Feigenbaum è che tale limite esista, e che valga

$$(2.7) \quad \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 4.6692016091029 \dots$$

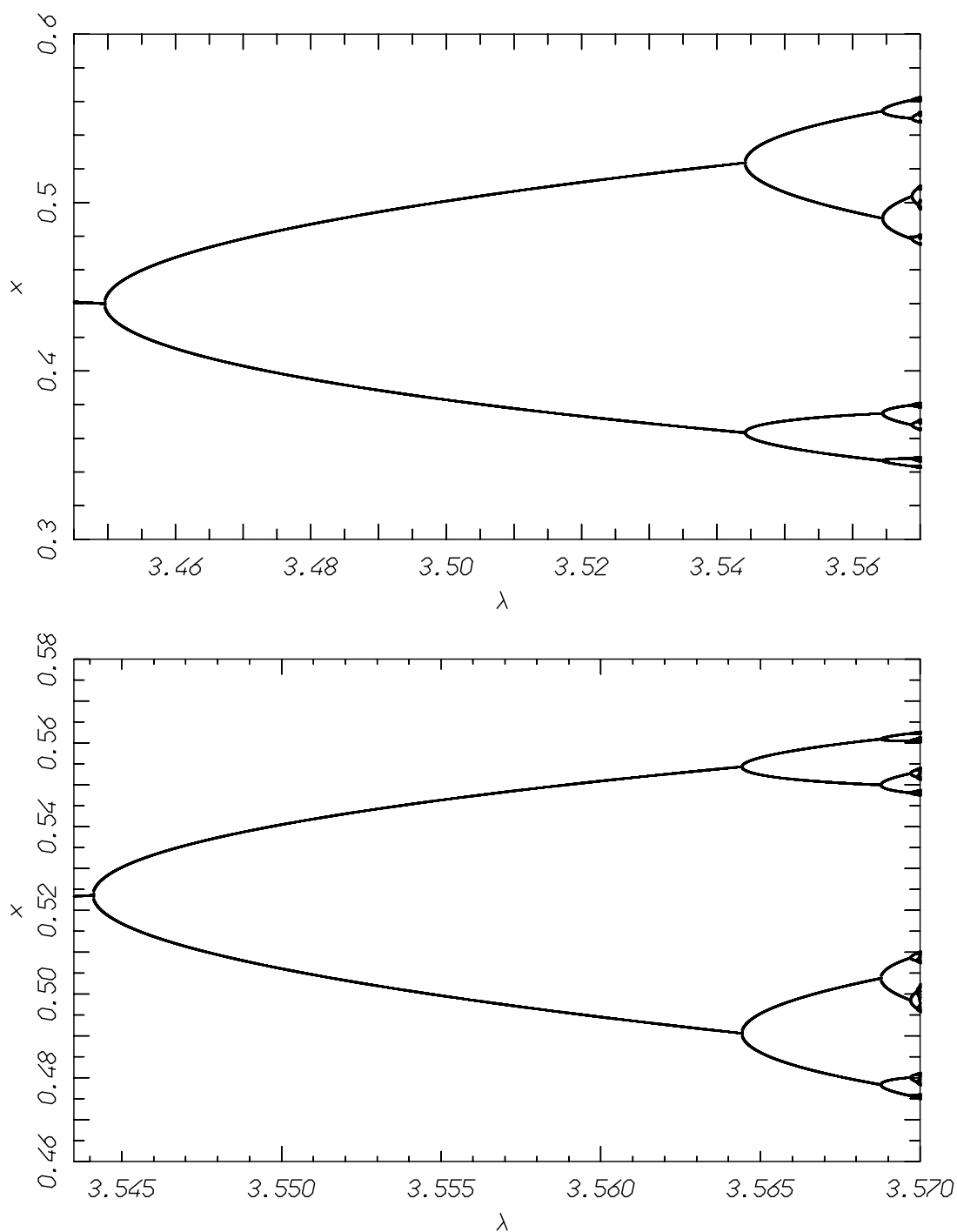


Figura 2.13. Le biforcazioni con raddoppio del periodo per le orbite di periodo 2 e 4. Qui, come nella successiva figura 2.14, si ricorre a ripetuti ingrandimenti di rettangoli opportunamente selezionati in modo da visualizzare la parte interessante del grafico. Il lettore potrà individuare i riquadri ingranditi osservando le scale delle figure.

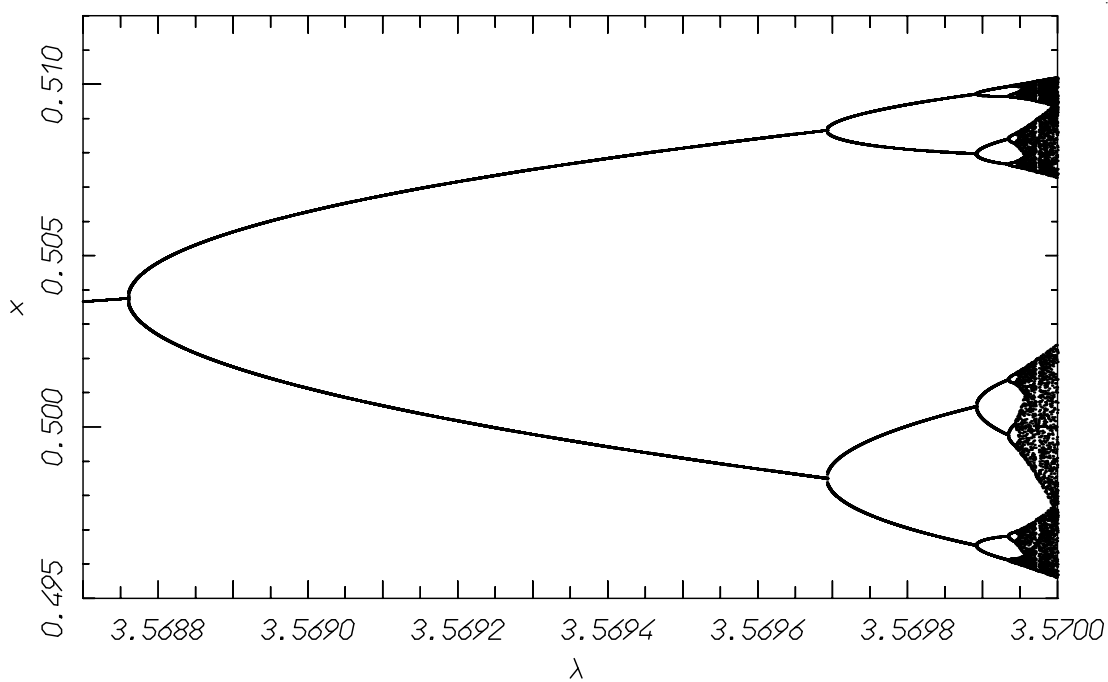
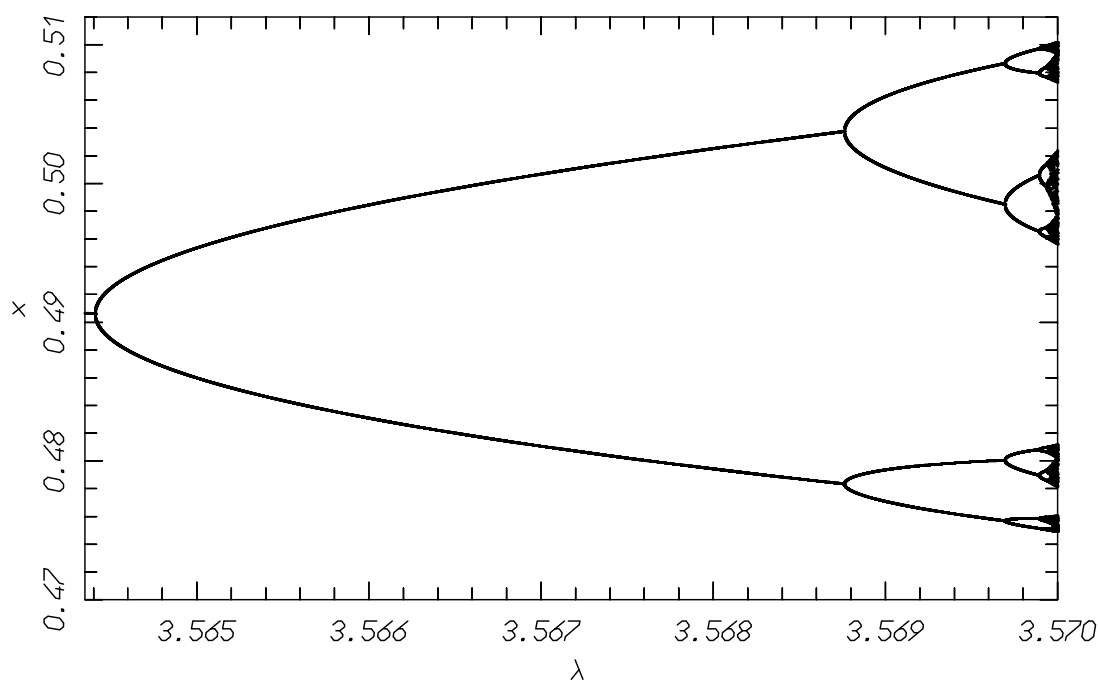


Figura 2.14. Seguito della figura 2.13. Le biforcazioni con raddoppio del periodo per le orbite di periodo 8 e 16.

Il numero qui riportato è chiamato, appunto, *costante di Feigenbaum*.

La tesi è dunque che gli intervalli di stabilità delle orbite biforcute decrescano in progressione geometrica con una ragione F^{-1} , dove F è la costante di Feigenbaum. Se si assume che questo sia vero, ne segue di conseguenza

Tavola 2.1. I primi valori critici di biforcazione per il parametro λ nel caso della mappa logistica, calcolati con l'approssimazione di 7 cifre decimali. In seconda colonna la lunghezza degli intervalli di stabilità. In terza colonna i rapporti tra le lunghezze.

j	λ_j	$\Delta_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}$	Δ_j/Δ_{j-1}
1	3.000000		
2	3.449489	4.4949×10^{-1}	
3	3.544090	9.4611×10^{-2}	4.7514
4	3.564407	2.0316×10^{-2}	4.6562
5	3.568759	4.3521×10^{-3}	4.6682
6	3.569692	9.3219×10^{-4}	4.6687

che i valori critici di biforcazione λ_j convergano anch'essi ad un limite

$$\lambda_\infty = \lambda_1 + \sum_{j>1} \Delta_j$$

che può essere valutato numericamente come

$$(2.8) \quad \lambda_\infty = 3.5699456 \dots$$

Questo secondo numero dipende evidentemente dalla mappa che abbiamo scelto. Ciò che più è sorprende è che il primo numero resti lo stesso per una classe di mappe molto ampia: *la costante di Feigenbaum non dipende dalla mappa considerata: è una costante universale che descrive il fenomeno della cascata di biforcazioni.*

Quest'ultima affermazione è discussa da Feigenbaum nei lavori [10] e [11], ove si mostra che per funzioni $f(x)$ che ammettono un unico massimo \bar{x} ove la funzione sia differenziabile e si comporti localmente come $|f(x) - f(\bar{x})| \sim |x - \bar{x}|^z$ con $z > 1$ il fenomeno della cascata di biforcazioni si verifica con una costante λ_∞ che dipende solo da z . Il valore riportato sopra corrisponde a $z = 2$.

2.3.4 Le bande di biforcazione

Concentriamo ora brevemente l'attenzione sulle bande verticali che compaiono in figura 2.12. L'esame con metodi numerici ci rivela che in quelle bande si ripete il fenomeno della sequenza di biforcazioni, ma stavolta a partire da orbite periodiche di periodo superiore ad uno.

Il riquadro superiore della figura 2.15 rappresenta un ingrandimento della banda più larga. Si vede subito che si tratta di un'orbita stabile di periodo tre che si forma per un valore di λ prossimo a 3.285, ed è poi soggetta a biforcazione. Il meccanismo che genera l'orbita stabile di periodo 3 è la biforcazione tangente. Ciò si vede bene nella figura 2.16, ove è rappresentato il grafico della mappa $f_\lambda^3(x)$ iterata tre volte.

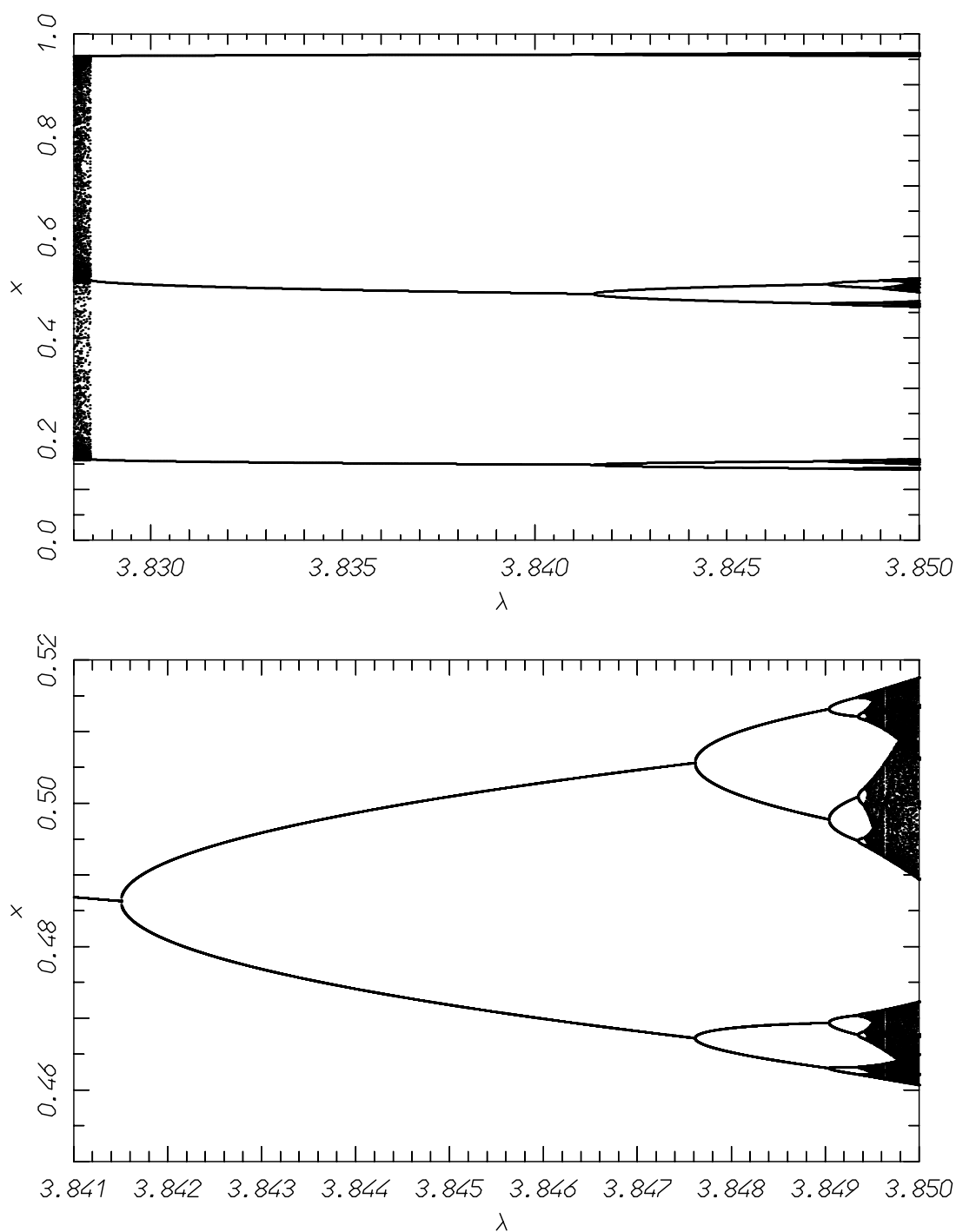


Figura 2.15. La banda di biforcazione dell'orbita di periodo tre. Nel riquadro superiore sono rappresentati tutti i punti delle orbite. Il riquadro inferiore mostra il grafico delle biforcazioni prodotto dal ramo centrale della figura superiore. Anche qui il lettore potrà identificare i riquadri ingranditi osservando le scale e confrontandole con quelle della figura 2.12.

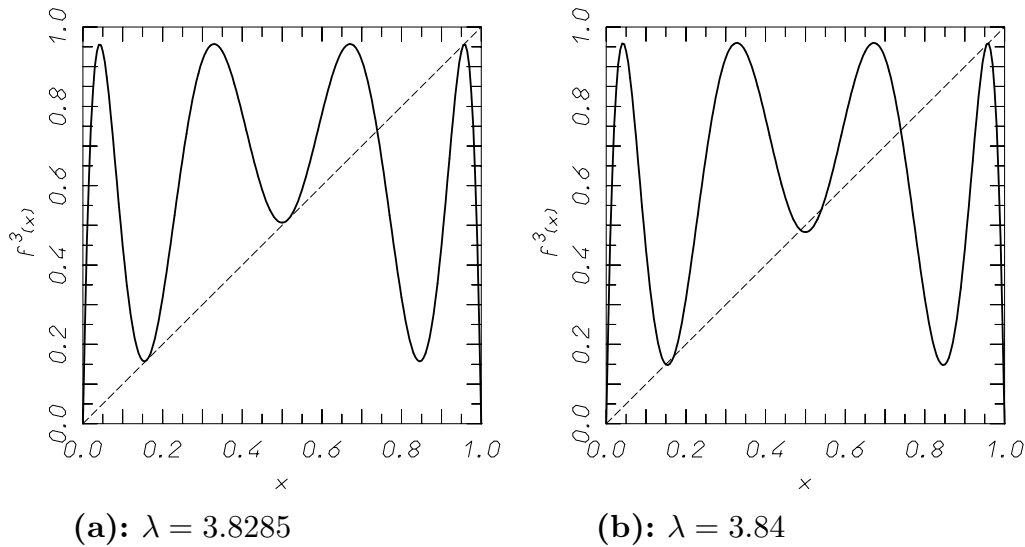


Figura 2.16. La biforcazione tangente che genera l'orbita stabile di periodo 3. Il valore $\lambda = 3.8285$, ricavato dal riquadro superiore della figura 2.15, è sufficientemente vicino a quello esatto perché il grafico della funzione appaia tangente alla bisettrice del primo quadrante.

Il riquadro inferiore della figura 2.15 riporta un ingrandimento della regione occupata dal ramo centrale della cascata di biforcazioni. Anche qui, il lettore noterà la somiglianza del grafico con quelli tracciati in precedenza. In effetti, anche in questo caso si può ritrovare la costante di Feigenbaum (2.7).

La banda dell'orbita di periodo 3 non è l'unica. In figura 2.17 è rappresentata la sequenza delle biforcazioni per uno dei punti dell'orbita periodica stabile di periodo 5. La ricerca di altre bande potrebbe proseguire, e richiede solo un po' di pazienza una volta che si abbia a disposizione un buon programma. La difficoltà principale sta nella larghezza delle bande, che decresce molto rapidamente al crescere del periodo. In effetti, è stato mostrato teoricamente che esistono infinite bande.

2.4 Il teorema di Sarkowskii

È spontaneo porsi la domanda: *quante sono le orbite periodiche di una mappa $f(x)$ generica?* Il teorema di Sarkowskii dà una risposta parziale ma alquanto sorprendente.

2.4.1 L'ordinamento di Sarkowskii

Prima di enunciare il teorema dobbiamo introdurre un ordine del tutto inusuale sui numeri naturali, detto appunto *ordinamento di Sarkowskii*. De-

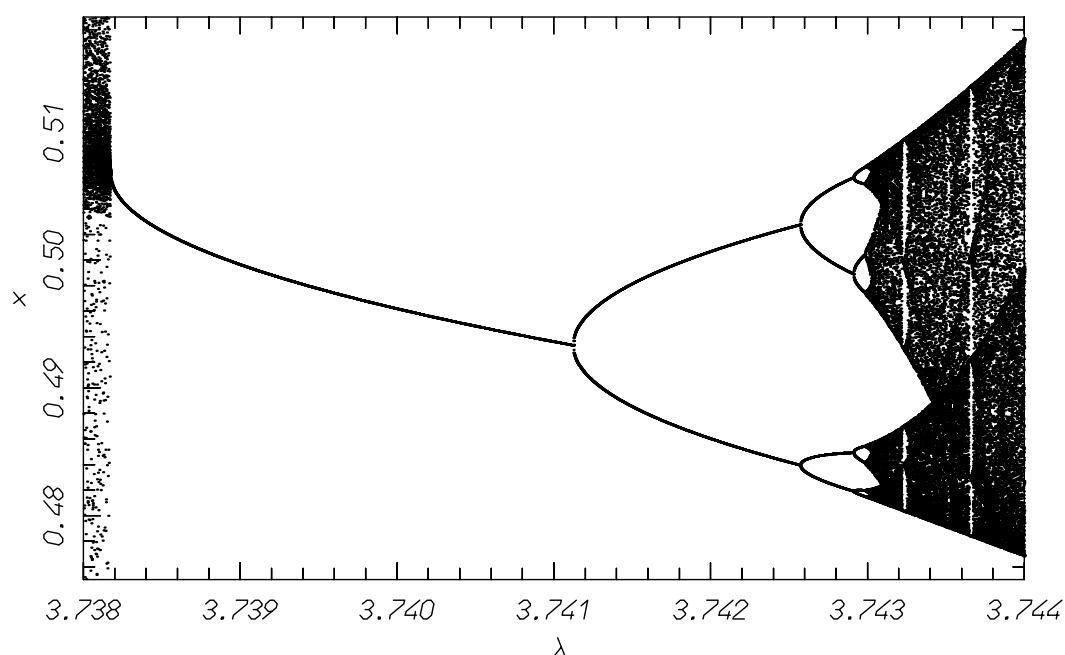


Figura 2.17. Un ingrandimento della banda di biforcazione per l'orbita di periodo 5.

notando la relazione di ordinamento con il simbolo \triangleright consideriamo la tabella

$$\begin{aligned}
 3 &\triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots \\
 &\triangleright 2 \times 3 \triangleright 2 \times 5 \triangleright 2 \times 7 \triangleright 2 \times 9 \triangleright \dots \\
 &\triangleright 4 \times 3 \triangleright 4 \times 5 \triangleright 4 \times 7 \triangleright 4 \times 9 \triangleright \dots \\
 &\triangleright \dots \triangleright 2^4 \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.
 \end{aligned}$$

Come si vede, la tabella è costruita elencando nell'ordine tutti i dispari a partire da 3, disposti nell'ordine naturale; poi si elenca il doppio dei dispari, poi il quadruplo dei dispari e così via, procedendo per potenze di 2; infine si elencano tutte le potenze di 2, in ordine inverso, concludendo con 1.

2.4.2 Il teorema

Siamo ora in grado di enunciare la

Proposizione 2.5: *Supponiamo che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una mappa continua, e che essa ammetta un'orbita periodica di periodo minimo n ; sia poi $n \triangleright m$. Allora la mappa ammette un'orbita periodica di periodo minimo m .*

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto lunga e laboriosa. Il lettore interessato la potrà trovare in forma completa in [8]. Diamo invece la dimostrazione del

Corollario 2.6: *Se la mappa continua $f(x)$ ammette un'orbita di periodo minimo 3, allora ammette orbite di qualunque periodo minimo m .*

Il corollario è evidente conseguenza del teorema se si tiene conto che 3 è il

numero più alto nell'ordinamento di Sarkowskii, ma darne una dimostrazione diretta è relativamente semplice. Si fa uso della proposizione 2.3 che abbiamo dimostrato nel paragrafo 2.1.1, e del seguente

Lemma 2.7: *Siano $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ due intervalli chiusi, e sia $f(x)$ una mappa continua soddisfacente $f(I) \supset J$. Allora esiste un sottointervallo $I_0 \subset I$ tale che $f(I_0) = J$.*

La dimostrazione è lasciata al lettore. Veniamo ora alla

Dimostrazione del corollario 2.6. Denotiamo con $\{a, b, c\}$ l'orbita di periodo minimo 3, ed assumiamo $a < b < c$, sicché i tre punti sono distinti. Supponiamo inoltre che sia $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$; l'altra possibilità è che sia $f(a) = c$, $f(c) = b$, $f(b) = a$, e si tratta in modo del tutto simile. Denotiamo $I_0 = [a, b]$, $I_1 = [b, c]$ e $I = I_0 \cup I_1 = [a, c]$. Per le nostre ipotesi e per la continuità della mappa vale $f(I_0) \supset I_1$ e $f(I_1) \supset I \supset I_1$.

Mostriamo anzitutto che esistono orbite di periodo 1 e 2. Dal momento che $f(I_1) \supset I_1$, per la proposizione 2.3 esiste un punto fisso $x_1 \in I_1$, ovvero un'orbita di periodo 1. In particolare x_1 deve essere un punto interno all'intervallo I_1 , perché se coincidesse con uno degli estremi sarebbe un punto di un'orbita di periodo minimo 3. Se consideriamo la mappa $f^2(x)$ abbiamo $f^2(I_0) = f(f(I_0)) \supset f(I_1) \supset I \supset I_0$, e dunque $f^2(x)$ ammette almeno un punto fisso $x_2 \in I_0$. Questo punto non può coincidere con x_1 , che è interno all'intervallo I_1 , e non può coincidere con uno degli estremi a, b di I_0 , che appartengono ad un'orbita di periodo minimo 3. Dunque esiste un'orbita di periodo primo 2.

Assumiamo ora $m > 3$, e proviamo che esiste un'orbita di periodo m . A tal fine mostriamo che possiamo costruire una catena A_0, \dots, A_m di intervalli chiusi nel modo seguente. Poniamo $A_0 = I_1$. Poiché $f(I_1) \supset I_1$, per il lemma 2.7 esiste un intervallo $A_1 \subset I_1$ tale che $f(A_1) = A_0 = I_1$. Poiché $f(A_1) = I_1 \supset A_1$, esiste un intervallo $A_2 \subset A_1$ tale che $f(A_2) = A_1$, e dunque $f^2(A_2) = A_0 = I_1$. Procedendo allo stesso modo possiamo costruire gli intervalli A_3, \dots, A_{m-2} tali che $f(A_3) = A_2, \dots, f(A_{m-2}) = A_{m-3}$, e dunque $f^3(A_3) = \dots = f^{m-2}(A_{m-2}) = A_0 = I_1$. Poiché $f^{m-1}(A_{m-2}) = f(f^{m-2}(A_{m-2})) = f(I_1) \supset I_0$ esiste un intervallo $A_{m-1} \subset A_{m-2}$ tale che $f^{m-1}(A_{m-1}) = I_0$. Infine, poiché $f^m(A_{m-1}) = f(f^{m-1}(A_{m-1})) = f(I_0) \supset I_1$, esiste un ultimo intervallo $A_m \subset A_{m-1}$ tale che $f^m(A_m) = I_1 \supset A_m$. Per la proposizione 2.3 la mappa $f^m(x)$ ammette un punto fisso $\bar{x} \in A_m \subset I_1$, che è il punto iniziale di un'orbita periodica di periodo m .

Resta da mostrare che m è il periodo minimo. Consideriamo l'orbita $\{\bar{x}, f(\bar{x}), \dots, f^{m-1}(\bar{x})\}$. Per costruzione, deve essere $\bar{x} \in I_1, f(\bar{x}) \in I_1, \dots, f^{m-2}(\bar{x}) \in I_1, f^{m-1}(\bar{x}) \in I_0, f^m(\bar{x}) = \bar{x}$, e dunque l'orbita ha un solo punto $f^{m-1}(\bar{x}) \in I_0$, mentre tutti gli altri punti giacciono in I_1 . Mostriamo che se $m > 3$ allora \bar{x} non può coincidere con uno degli estremi b, c di I_1 . Infatti, se fosse $\bar{x} = b$, allora avremmo $f^2(x) = a \notin I_1$, e dunque dovrebbe essere necessariamente $m = 3$. Se invece fosse $\bar{x} = c$ allora avremmo

$f(x) = a$, e dunque dovrebbe essere $m = 2$. Ne segue che \bar{x} è un punto interno ad I_1 . D'altra parte, nessuno dei punti $\bar{x}, f(\bar{x}), \dots, f^{m-1}(\bar{x})$ può coincidere con uno dei punti a, b, c , altrimenti dovrebbe ancora essere $\bar{x} = b$ oppure $\bar{x} = c$, cosa che abbiamo già escluso. Ne segue che con la sola eccezione del punto $f^{m-1}(\bar{x})$ che è interno all'intervallo I_0 , tutti gli altri punti dell'orbita devono essere interni all'intervallo I_1 . Concludiamo che m deve essere il periodo minimo, perché se ciò non fosse dovrebbe esserci almeno un secondo punto dell'orbita interno ad I_0 , contrariamente a quanto abbiamo appena dimostrato. Q.E.D.

2.5 La dinamica caotica

Veniamo ora a discutere il caos nelle mappe. La prima questione che si pone è definire in modo chiaro cosa si intenda per dinamica caotica. Adotteremo qui la caratterizzazione proposta da Devaney,^[8] alla quale dobbiamo premettere alcune definizioni. Ci limitiamo qui al caso di una mappa dell'intervallo, ma le definizioni fanno uso solo di proprietà topologiche e metriche, e quindi sono estendibili a casi più generali.

Definizione 2.8: Consideriamo una mappa $f : I \rightarrow I$, dove $I \in \mathbb{R}$ è un intervallo.

- (i) Diremo che la mappa f è topologicamente transitiva se per ogni coppia U, V di sottointervalli aperti in I esiste un intero positivo n tale che $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- (ii) Diremo che la mappa f dipende in modo sensibile dai dati iniziali se esiste $\delta > 0$ con la proprietà seguente: per qualunque x e qualunque intorno U di x esistono $y \in U$ e $n > 0$ tali che $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.
- (iii) Diremo che la mappa f è espandente se esiste $\delta > 0$ con la proprietà seguente: per ogni coppia di punti distinti $x, y \in I$ esiste n tale che $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

La proprietà (i) può riformularsi dicendo che esiste $x \in U$ tale che $f^n(x) \in V$, dove U, V sono due intorni. Per questo basta che esista un'orbita densa nell'intervallo I .

La proprietà (i) afferma in sostanza che data una qualunque orbita ne esiste una seconda che parte arbitrariamente vicino alla prima, ma poi se ne separa a causa della dinamica. Non è richiesto che ciò avvenga per tutte le orbite di un intorno.⁷

⁷ Una proprietà di questo genere getta molte ombre sulla possibilità di calcolare numericamente delle orbite di una mappa che ha una dipendenza sensibile dai dati iniziali: è naturale attendersi che l'inevitabile errore numerico conduca a calcolare un'orbita che non ha praticamente nulla a che vedere con quella che ha il dato iniziale assegnato. Se però si considerano mappe cosiddette iperboliche, caratterizzate da un allontanamento esponenziale di orbite vicine,

La proprietà (iii) differisce dalla (ii) perché si richiede che *tutte* le orbite che hanno dati iniziali vicini vengano separate dalla dinamica.

Veniamo ora alla definizione di sistema caotico proposta da Devaney.

Definizione 2.9: Diremo che una mappa f è caotica se ha le tre proprietà seguenti:

- (i) possiede un insieme denso di orbite periodiche;
- (ii) è topologicamente transitiva;
- (iii) dipende in modo sensibile dai dati iniziali.

L'osservazione di Devaney è che queste proprietà caratterizzano la caoticità come combinazione di tre elementi: l'imprevedibilità delle orbite, dovuta alla dipendenza sensibile dai dati iniziali; l'indecomponibilità dello spazio delle fasi in sottoinsiemi separati dalla dinamica; un tocco di regolarità dovuto all'esistenza di un insieme denso di orbite periodiche.

2.5.1 Sulla definizione di caos di Devaney

La condizione di transitività topologica e di dipendenza sensibile dai dati iniziali richieste dalle (ii) e (iii) della definizione 2.9 hanno natura diversa, in quanto la prima è esclusivamente topologica, mentre la seconda dipende dall'esistenza di una metrica. È quindi curioso constatare che per le mappe continue dell'intervallo la dipendenza sensibile dai dati iniziali segue dalla transitività topologica e dall'esistenza di infinite orbite periodiche.^[4]

Proposizione 2.10: Sia U un sottinsieme infinito della retta reale, e sia $f : U \rightarrow U$ una mappa continua. Se f è topologicamente transitiva su D e possiede un insieme denso di orbite periodiche allora f dipende in modo sensibile dai dati iniziali.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare l'esistenza di un δ che soddisfi la definizione 2.8 per qualunque $x \in U$. La dimostrazione si articola nei punti seguenti.

- (i) Esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in U$ esiste un'orbita periodica Π per cui vale $\text{dist}(x, \Pi) \geq 4\delta$.⁸ Questa affermazione richiede una dimostrazione che svolgiamo più sotto.

allora si può dimostrare il *lemma dell'orbita ombra*. Tale lemma assicura che a patto che l'errore commesso in una singola iterazione sia abbastanza piccolo (ma comunque macroscopico in casi di interesse pratico) il calcolo numerico segue comunque un'orbita effettiva del sistema, pur diversa da quella attesa. Ciò può presentare una grande utilità per applicazioni che richiedano solo il calcolo di quantità di interesse statistico. Per una discussione più approfondita dell'affidabilità del calcolo numerico in queste condizioni si vedano ad esempio [5] e [6].

⁸ Ricordiamo che un'orbita periodica Π ha un numero finito di punti. Per distanza tra il punto x e l'orbita periodica Π intendiamo la minima distanza tra x e ciascun punto di Π ; formalmente: $\text{dist}(x, \Pi) = \min_{y \in \Pi} |x - y|$. Analogamente, date due orbite periodiche Π, Π' definiamo $\text{dist}(\Pi, \Pi') = \min_{x \in \Pi, y \in \Pi'} |x - y|$.

- (ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una seconda orbita periodica Π' , distinta da Π , tale che $\text{dist}(x, \Pi') < \varepsilon$. Questa seconda affermazione segue dall'ipotesi che le orbite periodiche siano dense in U .
- (iii) Sia k il periodo minimo dell'orbita Π' . Esiste un numero positivo $\mu < \delta$ tale che per ogni $p \in \Pi$ e per ogni z soddisfacente $|z - p| < \mu$ vale $|f^i(z) - f^i(p)| < \delta$ per $i = 0, \dots, k$. Questa affermazione segue dalla continuità della mappa.
- (iv) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $w \in U$ con $|x - w| < \varepsilon$ ed un intero positivo m tale che $\text{dist}(f^m(w), \Pi) < \mu$, dove μ è la costante del punto (iii). Questa affermazione è conseguenza della transitività topologica di f .

Dimostriamo l'affermazione (i). Poiché U è infinito e l'insieme delle orbite periodiche è denso, esistono infinite orbite periodiche. In particolare devono esistere due orbite periodiche distinte $\Pi, \tilde{\Pi}$. Definiamo $\delta = \frac{1}{8} \text{dist}(\Pi, \tilde{\Pi})$; poiché il numero di punti delle orbite è finito, deve essere $\delta > 0$. Sia ora $x \in U$ un punto qualsiasi. Per la disuguaglianza triangolare abbiamo⁹

$$8\delta = \text{dist}(\Pi, \tilde{\Pi}) \leq \text{dist}(\Pi, x) + \text{dist}(x, \tilde{\Pi}).$$

Ne segue che almeno una delle affermazioni $\text{dist}(x, \Pi) \geq 4\delta$ e $\text{dist}(x, \tilde{\Pi}) \geq 4\delta$ deve essere vera, il che dimostra l'asserto.

Poiché le affermazioni (ii), (iii) e (iv) sono conseguenza diretta delle ipotesi, veniamo alla dimostrazione della proposizione. Dati m e k come ai punti (iii) e (iv), scegliamo un multiplo n di k soddisfacente $m \leq n \leq m + k$; ciò è certamente possibile. Da qui segue $f^n(p') = p'$ per ogni $p' \in \Pi'$. In virtù delle affermazioni (i) ed (iv) per ogni $p \in \Pi$ e per ogni $p' \in \Pi'$ vale

$$(2.9) \quad \begin{aligned} 4\delta &\leq |x - f^{n-m}(p)| \\ &\leq |x - p'| + |f^n(p') - f^n(w)| + |f^n(w) - f^{n-m}(p)|, \end{aligned}$$

dove w può scegliersi in modo che valga $|x - w| < \varepsilon$, e $|f^m(w) - p| < \mu$ per un qualche $p \in \Pi$. Osservando che è $f^n(w) = f^{n-m}(f^m(w))$, grazie all'affermazione (iii) vale anche

$$|f^n(w) - f^{n-m}(p)| = |f^{n-m}(f^m(w)) - f^{n-m}(p)| < \delta.$$

D'altra parte, in virtù dell'affermazione (ii) e tenuto conto dell'arbitrarietà di ε , possiamo scegliere $p' \in \Pi'$ che soddisfi $|x - p'| < \varepsilon < \delta$. Inserendo queste informazioni nella (2.9) otteniamo

$$4\delta < \delta + |f^n(p') - f^n(w)| + \delta,$$

⁹ Per una qualunque coppia di punti $q \in \Pi$ e $\tilde{q} \in \tilde{\Pi}$ e per la definizione di distanza tra orbite vale $8\delta \leq |q - \tilde{q}| \leq |q - x| + |x - \tilde{q}|$. Questo implica $8\delta \leq \min_{q \in \Pi} |q - x| + \min_{\tilde{q} \in \tilde{\Pi}} |x - \tilde{q}|$, come affermato.

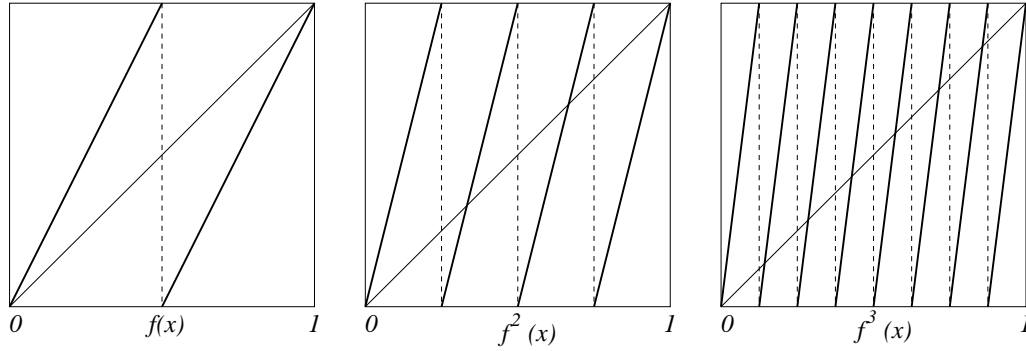


Figura 2.18. La mappa espandente del cerchio (2.12) e le sue prime due iterate.

ovvero

$$2\delta < |f^n(p') - f^n(w)| .$$

Applicando di nuovo la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$2\delta < |f^n(p') - f^n(x)| + |f^n(x) - f^n(w)| .$$

Ne segue che deve valere almeno una delle disuguaglianze

$$|f^n(p') - f^n(x)| > \delta , \quad |f^n(x) - f^n(w)| > \delta .$$

Poiché abbiamo scelto $|p' - x| < \varepsilon$ e $|w - x| < \varepsilon$, segue che esiste un $y \in U$ (uno dei due punti p o w) che soddisfa $|x - y| \leq \varepsilon$ e $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$, con δ determinato come nella (i), ed un qualche n . *Q.E.D.*

2.5.2 Una mappa del cerchio: il raddoppio dell'angolo

Consideriamo la circonferenza S^1 descritta dalla variabile angolare ϑ , e la mappa $f : S^1 \rightarrow S^1$ definita come

$$(2.10) \quad f(\vartheta) = 2\vartheta .$$

Naturalmente dovremo considerare tutti gli angoli ϑ che differiscono di 2π come equivalenti.

Definiamo la distanza sulla circonferenza nel modo più naturale: $\text{dist}(\vartheta_0, \vartheta_1)$ è la lunghezza dell'arco più breve tra gli angoli ϑ_0 e ϑ_1 . La definizione formale richiede qualche piccola precauzione per non incorrere in fraintendimenti dovuti alla periodicità dell'angolo. Supponiamo che $\vartheta_0, \vartheta_1 \in [0, 2\pi]$. Allora

$$(2.11) \quad \text{dist}(\vartheta_0, \vartheta_1) = \min(|\vartheta_0 - \vartheta_1|, 2\pi - |\vartheta_0 - \vartheta_1|) .$$

Nel seguito troveremo più comodo identificare il cerchio con l'intervallo $[0, 1)$ e considerare la mappa

$$(2.12) \quad f(x) = 2x \pmod{1} .$$

La figura 2.18 riporta il grafico della mappa $f(x)$ e quello delle sue prime iterate $f^2(x)$ e $f^3(x)$.

Considerando l'espressione (2.12) non è difficile mostrare che la mappa che stiamo considerando è caotica nel senso di Devaney. Basta, con un minimo di immaginazione, continuare la sequenza dei grafici di figura 2.18 per un'iterata di ordine qualsiasi. Si mostra senza difficoltà che vale $f^n(x) = 2^n x \pmod{1}$, sicché il grafico dell'iterata n -esima è formato da 2^n segmenti con un estremo sul lato inferiore del quadrato e l'altro estremo sul lato superiore.

In modo più formale si può osservare che tutti i punti x razionali danno origine ad orbite periodiche, il che dimostra che vale la proprietà (i) della definizione 2.9. Le altre due proprietà si dimostrano osservando che la lunghezza di un intervallo comunque piccolo U viene raddoppiata ad ogni iterazione, e che in particolare esiste un n tale che $f^n(U)$ copre tutto il cerchio.

Ciò che abbiamo detto basta a concludere che la mappa (2.12) del raddoppio del cerchio è caotica. Ma è interessante descriverne il comportamento da un punto di vista diverso. Consideriamo la rappresentazione binaria dei punti dell'intervallo $[0, 1)$. Ad esempio, abbiamo la rappresentazione

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.1011010100000100111100110011001111110011101111001100100 \dots$$

Dobbiamo però sbarazzarci di uno spiacevole contrattempo: vi è un'infinità numerabile di punti che ha una doppia rappresentazione. In effetti, tutti i punti che ammettono una rappresentazione binaria finita, diciamo $0.\langle xxx \rangle 1$ dove $\langle xxx \rangle$ sostituisce un qualunque gruppo finito di cifre binarie, possono scriversi anche nella forma $0.\langle xxx \rangle 0111 \dots$, con una coda costituita da una sequenza infinita di 1. Decidiamo allora di considerare sequenze infinite per cui una coda di infiniti 0 è ammessa (la si usa per completare le rappresentazioni finite), ma sopprimiamo tutte le sequenze che terminano con una coda di infiniti 1. In tal modo ogni punto ha una rappresentazione unica.¹⁰

Una breve riflessione farà comprendere che la mappa (2.12), consiste semplicemente nello spostare a destra di un posto il punto che segna inizio della mantissa (o della parte frazionaria), e nell'azzerare la parte intera.

È interessante riverificare la caoticità della mappa servendoci della rappresentazione che abbiamo appena descritto.

L'esistenza di infinite orbite periodiche si riconduce all'osservazione che tutti i razionali hanno una rappresentazione periodica. Dunque tutti

¹⁰ Il lettore che avesse scarsa familiarità con la rappresentazione binaria potrà utilmente considerare la mappa $f(x) = 10x \pmod{1}$, e riferirsi alla rappresentazione decimale. In tal caso le sequenze da sopprimere sono quelle che hanno una coda di infiniti 9. Adattare a questo caso il resto della discussione può essere un utile esercizio.

i punti razionali danno origine ad orbite definitivamente periodiche: esaurito l'antiperiodo grazie all'eliminazione sistematica della prima cifra della mantissa restano solo le cifre del periodo che si ripetono indefinitamente. In particolare, tutti i razionali della forma $\frac{m}{2^n}$ danno origine ad orbite che terminano nel punto fisso $x = 0$: in effetti questi numeri hanno una rappresentazione binaria finita, che noi abbiamo convenuto di completare con una sequenza infinita di zeri.¹¹

La verifica che esista un'orbita densa richiede qualche momento di riflessione. Iniziamo col considerare gli intervalli aperti della forma $(\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k})$ con $k > 0$ e $0 \leq m < 2^k$. Non è difficile rendersi conto che un aperto arbitrario in $[0, 1)$ contiene almeno uno degli intervalli di questa forma: basta prendere k abbastanza grande. Passando alla rappresentazione binaria si verifica facilmente che tutti i numeri appartenenti ad uno degli intervalli considerati hanno in comune le prime k cifre della mantissa, escludendo il punto con una coda di infiniti zeri dopo il k -esimo posto che coincide con l'estremo $\frac{m}{2^n}$ dell'intervallo. Così, ad esempio, l'intervallo $(\frac{3}{8}, \frac{4}{8})$ contiene tutti e soli i punti la cui rappresentazione binaria ha la forma $0.011\langle xxx \rangle$, dove $\langle xxx \rangle$ è una successione arbitraria di cifre binarie non tutte nulle. Dunque, per trovare un'orbita densa basta trovare un'orbita che visiti ciascuno degli intervalli appena menzionati, ovvero un'orbita che contenga un punto la cui mantissa inizi con un gruppo di k simboli prefissato ad arbitrio. Consideriamo ora il punto

$$0. \underbrace{0\ 1}_{1\text{ cifra}} \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{2\text{ cifre}} \underbrace{000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111}_{3\text{ cifre}} \dots$$

la cui rappresentazione binaria è costruita allineando nell'ordine tutti i possibili gruppi di 1 cifra, ossia 0, 1, poi tutti i possibili gruppi di 2 cifre, ossia 00, 01, 10, 11, , poi tutti i possibili gruppi di tre cifre 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, &c. Un tal numero è certamente irrazionale, non essendo periodico. D'altra parte, applicando successivamente la mappa si arriva certamente ad un numero la cui mantissa inizia con un gruppo di cifre prefissato ad arbitrio.

Può essere curioso anche verificare in modo dettagliato che la mappa dipende in modo sensibile dai dati iniziali. A tal fine basta considerare, per un assegnato x , un punto y la cui rappresentazione binaria coincida con quella di x in tutto, tranne che per la k -esima cifra. Allora vale $\text{dist}(x, y) = 2^{-k}$, sicché dato un intorno arbitrario U di x basta prendere k abbastanza grande

¹¹ Il lettore che tentasse di iterare la mappa (2.12) su un comune calcolatore scoprirebbe, forse con sorpresa, che qualunque sia il dato iniziale il calcolo termina inesorabilmente sullo zero dopo un numero finito di iterazioni. Ciò è dovuto precisamente al fatto che la rappresentazione binaria comune a tutti i processori restringe il campo dei numeri effettivamente disponibili ad un sottoinsieme di quelli con rappresentazione binaria finita.

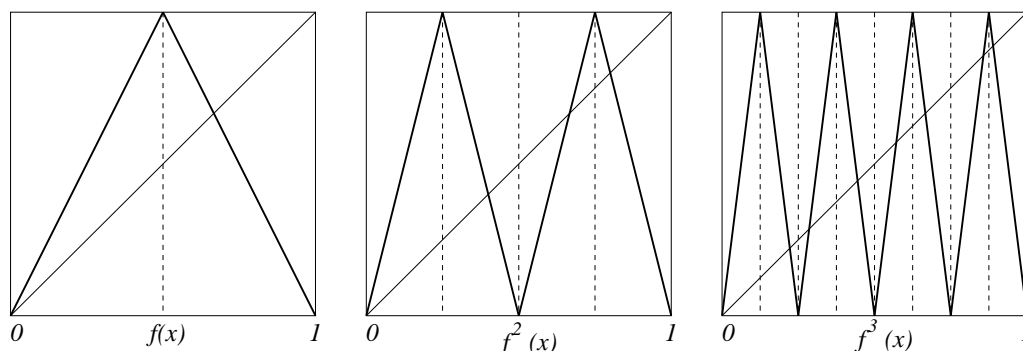


Figura 2.19. La mappa a tenda (2.13) e le sue prime due iterate.

perché valga $y \in U$. Iterando la mappa k volte si ha che le mantisse di $f^k(x)$ e $f^k(y)$ differiscono solo per la prima cifra, sicché vale $\text{dist}(f^k(x), f^k(y)) = \frac{1}{2}$. Dunque la proprietà di dipendenza sensibile dai dati iniziali vale con una qualsiasi costante $\delta < 1/2$ (ad esempio, basta prendere $\delta = 3/8$).

Mostreremo nel prossimo paragrafo 2.6 come questa discussione, apparentemente bizzarra, sulla rappresentazione binaria suggerisca di costruire la *dinamica simbolica*.

Nel frattempo, il lettore potrà convincersi facilmente che tutte le considerazioni svolte in questo paragrafo si applicano ad una qualunque mappa del cerchio della forma $f(\vartheta) = k\vartheta$, con k intero. Basta sostituire alla rappresentazione binaria la rappresentazione in base k , e modificare di poco gli argomenti illustrati.

2.5.3 La mappa a tenda

Consideriamo ora una mappa simile a quella che abbiamo già discusso, ma continua, benché non differenziabile. Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$, e definiamo la mappa $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ come

$$(2.13) \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x & \text{per } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Il nome di *mappa a tenda* è ampiamente giustificato se si osserva il grafico della mappa, rappresentato in figura 2.19 insieme con quello delle sue prime due iterate.

Osservando il grafico si intuisce subito come si possa mostrare che anche la mappa a tenda è caotica nel senso di Devaney, servendosi argomenti simili a quelli utilizzati per la mappa espandente del cerchio. Lasciamo al lettore la verifica.

2.5.4 La coniugazione topologica

È intuitivo che la caoticità delle mappe che abbiamo appena discusso sia caratteristica anche di mappe il cui grafico abbia forma simile a quelle.

Questa intuizione viene confermata tramite il concetto di *coniugazione topologica di mappe*.

Definizione 2.11: Siano I e L due intervalli chiusi e limitati sulla retta reale. Diremo che la mappa continua $f : I \rightarrow I$ è topologicamente coniugata alla mappa continua $g : L \rightarrow L$ se esiste un omeomorfismo $h : I \rightarrow L$ che soddisfi la relazione $h \circ f = g \circ h$.

L'osservazione rilevante è che l'omeomorfismo h trasporta le orbite della mappa f in orbite della mappa g . Vale infatti il

Lemma 2.12: Per l'omeomorfismo h della definizione 2.11 vale

$$h \circ f^n = g^n \circ h .$$

Dimostrazione. Per induzione. La proprietà è vera per $n = 1$, perché è la definizione stessa di coniugazione. Supponiamo che sia vera per $n - 1$, sicché vale $h \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ h$. Allora abbiamo

$$h \circ f^n = (h \circ f^{n-1}) \circ f = (g^{n-1} \circ h) \circ f = g^{n-1} \circ (h \circ f) = g^{n-1} \circ (g \circ h) = g^n \circ h .$$

Q.E.D.

Proposizione 2.13: Siano $f : I \rightarrow I$ e $g : L \rightarrow L$ due mappe continue definite su intervalli finiti della retta reale, e supponiamo che f e g siano topologicamente coniugate mediante la mappa $h : I \rightarrow L$. Allora se f è caotica anche g è caotica.

Dimostrazione. Mostriamo anzitutto che g ammette un insieme denso di orbite periodiche. Sia $U \subset L$ un intervallo aperto arbitrario, e sia $h^{-1}(U) \subset I$ la sua controimmagine. Poiché la mappa f è caotica, esiste un punto periodico $x \in h^{-1}(U)$. Supponiamo che x abbia periodo n , sicché $f^n(x) = x$. Allora, tenuto conto del lemma 2.12, abbiamo

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x) ,$$

sicché $h(x)$ è un punto periodico di g .

Mostriamo ora che g è topologicamente transitiva. Siano $U \subset L$ e $V \subset L$ due sottointervalli aperti arbitrari, e consideriamo le loro controimmagini $h^{-1}(U) \subset I$ e $h^{-1}(V) \subset I$, che sono degli aperti. Poiché f è topologicamente transitiva, esistono $x \in h^{-1}(U)$ ed n tali che $f^n(x) \in h^{-1}(V)$. Allora, facendo ancora uso del lemma 2.12, vale anche $h(x) \in U$ e $h(f^n(x)) \in V$, sicché anche g è transitiva.

Infine, l'esistenza di un insieme denso di orbite periodiche e la transitività topologica implicano che g dipenda in modo sensibile dai dati iniziali, in virtù della proposizione 2.10. Q.E.D.

2.5.5 La mappa logistica per $\lambda = 4$

Usando lo strumento della coniugazione topologica non è difficile mostrare

che la mappa dell'intervallo $[0, 1]$

$$g(x) = 4x(1 - x) ,$$

che altro non è che la mappa logistica ove si ponga $\lambda = 4$, è caotica nel senso di Devaney. Occorre solo verificare che la mappa

$$h(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$$

è un omeomorfismo che realizza una coniugazione topologica tra la mappa a tenda $f(x)$ definita dalla (2.13) e la mappa $g(x)$ definita sopra. In virtù della proposizione 2.13 ciò è sufficiente per dimostrare che $g(x)$ ha le stesse caratteristiche di caoticità di $f(x)$.

In effetti, controllare che la mappa $h(x)$ sia un omeomorfismo è facile. La verifica che si tratti di una coniugazione topologica tra $g(x)$ e la mappa a tenda richiede un minimo di pazienza. Occorre provare che $h \circ f = g \circ h$, ovvero, con scrittura di poco più esplicita, che $h(f(x)) = g(h(x))$. Ora, al secondo membro si ha

$$g(h(x)) = 4h(x) \cdot (1 - h(x)) = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi x}{2}\right) = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2}$$

Per il calcolo del primo membro osserviamo anzitutto che

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \sin^2 \frac{\pi x}{2} \leq \frac{1}{2} , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin^2 \frac{\pi x}{2} \leq 1 .$$

Calcoliamo poi, sostituendo ad $f(x)$ la mappa a tenda (2.13),

$$h(f(x)) = \sin^2 \frac{\pi f(x)}{2} ,$$

e dunque

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= \sin^2 \pi x = \left(2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}\right)^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} , \\ h(f(x)) &= \sin^2 \pi(1 - x) = \sin^2 \pi x = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \cos^2 \frac{\pi x}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{per } \frac{1}{2} < x \leq 1 . \end{aligned}$$

Le quantità calcolate coincidono con $g(h(x))$, il che prova la coniugazione topologica delle mappe.

2.6 La dinamica simbolica

Veniamo ora alla descrizione di un sistema dinamico di grande rilievo grazie alla sua astrattezza che gli conferisce anche una grande generalità: la dinamica simbolica. Il lettore si renderà facilmente conto che il modello è

ricalcato su quello della mappa del raddoppio dell'angolo, ed in particolare sulla tecnica della rappresentazione binaria. Qui ci limiteremo al caso di due soli simboli, ma è possibile formulare tutta la teoria in modo più generale.

2.6.1 Lo spazio delle successioni di simboli e la metrica

Iniziamo con la

Definizione 2.14: Denoteremo con Σ lo spazio delle successioni di simboli 0 e 1 infinite a destra; formalmente:

$$\Sigma = \{(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) : s_j \in \{0, 1\}, j \geq 0\}$$

Il lettore noterà che si tratta di un insieme del tutto simile a quello dei numeri dell'intervallo $[0, 1]$ in rappresentazione binaria. La differenza sta nel fatto che le successioni che terminano con una coda infinita di simboli 1 sono ammesse, e considerate come punti distinti da tutti gli altri. Data la forte somiglianza, è comune far riferimento agli elementi di Σ come *punti* e ai singoli simboli di una successione come *cifre*.

Passiamo alla definizione della nozione di distanza tra due successioni.

Definizione 2.15: Date due successioni $s = s_0 s_1 s_2 s_3 \dots$ e $t = t_0 t_1 t_2 t_3 \dots$ definiamo la distanza come

$$\text{dist}(s, t) = \sum_{j \geq 0} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} .$$

Si verifica facilmente che vale

$$0 \leq \text{dist}(s, t) \leq \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^j} = 2 .$$

Il lettore che provasse a confrontare questa distanza con quella naturale definita sull'intervallo $[0, 1]$ scoprirebbe immediatamente che esse sono del tutto diverse. Come esempio, consideriamo due punti dell'intervallo $[0, 1]$ che abbiano la rappresentazione binaria

$$x = 0.0 \underbrace{111 \dots 1}_{k \text{ cifre}} 000 \dots , \quad y = 0.1000 \dots ,$$

ambedue terminate da una coda di infiniti zeri. La distanza sull'intervallo tra questi due punti è palesemente

$$|x - y| = \frac{1}{2^{k+1}} ,$$

che diminuisce tendendo a zero al crescere di k . Consideriamo ora le analoghe successioni in Σ

$$s = 0 \underbrace{111 \dots 1}_{k \text{ cifre}} 000 \dots , \quad t = 1000 \dots ,$$

anch'esse con una coda di infiniti zeri. La distanza in questo caso è

$$\text{dist}(s, t) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} = 2 - \frac{1}{2^k},$$

che invece cresce tendendo a 1 al crescere di k .

Lemma 2.16: Siano $s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) \in \Sigma$ e $t = (t_0 t_1 t_2 t_3 \dots) \in \Sigma$.

- (i) Se $\text{dist}(s, t) \leq 1/2^k$ allora le due successioni hanno in comune i primi k simboli, ossia $s_0 = t_0, \dots, s_{k-1} = t_{k-1}$.
- (ii) Se le due successioni hanno in comune i primi $k+1$ simboli, ossia $s_0 = t_0, \dots, s_k = t_k$, allora vale $\text{dist}(s, t) \leq 1/2^k$.

Dimostrazione. (i) Supponiamo che sia $s_0 = t_0, \dots, s_{j-1} = t_{j-1}$, ma $s_j \neq t_j$. Allora vale $\text{dist}(s, t) \geq 1/2^j$, sicché può essere $\text{dist}(s, t) \leq 1/2^k$ solo se $j \geq k$, e quindi le successioni coincidono sui primi k simboli.

(ii) Supponiamo che le due successioni coincidano sui primi $k+1$ simboli, ossia che $s_j = t_j$ per $j = 0, \dots, k$. Allora vale

$$\text{dist}(s, t) = \sum_{j>k} \frac{|s_j - t_j|}{2^j} \leq \sum_{j>k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k}.$$

Q.E.D.

Al fine di familiarizzarci con la nozione di distanza appena introdotta, e con la topologia da essa indotta, aggiungiamo due osservazioni.

- (i) Sia $s \in \Sigma$, e sia $S \subset \Sigma$ l'insieme di tutti i punti che hanno in comune con s i primi k simboli. Allora S è chiuso.
- (ii) L'insieme delle successioni che terminano con una coda infinita di simboli 0 è denso in Σ .

Concludiamo il paragrafo con la verifica delle due proprietà enunciate.

Iniziamo con (i), e dimostriamo che S contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Supponiamo che t sia punto di accumulazione per S . Ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t' \neq t$ tale che $\text{dist}(t, t') < \varepsilon$, e possiamo sempre supporre $\varepsilon < 1/2^k$. Per il lemma 2.16, t e t' devono avere in comune i primi k simboli, e dunque vale $t \in S$.

Veniamo infine alla (ii). Occorre mostrare che per ogni $s \in \Sigma$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t \in \Sigma$ che termina con una coda di infiniti zeri e che soddisfa $\text{dist}(s, t) < \varepsilon$. Scegliamo k abbastanza grande perché valga $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, e determiniamo t in modo che i suoi primi $k+1$ simboli coincidano con quelli di s , e tutti gli altri siano 0. Allora, per il lemma 2.16, vale $\text{dist}(s, t) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$, come richiesto.

2.6.2 L'operazione di shift come mappa

Veniamo ora alla dinamica, introducendo l'operazione di *shift*.¹²

¹² Il termine *shift* dovrebbe tradursi in questo contesto con *spostamento* o *avvi-*

Definizione 2.17: L'operazione di shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ è definita come

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 \dots) = (s_1 s_2 s_3 s_4 \dots) .$$

In altre parole, si sposta tutta la sequenza di un posto verso sinistra eliminando il primo simbolo. La somiglianza con la moltiplicazione per 2 (mod 1) nella rappresentazione binaria è fin troppo evidente.

Le proprietà interessanti dello shift sono raccolte nella seguente

Proposizione 2.18: Lo shift ha le seguenti proprietà:

- (i) è continuo rispetto alla topologia indotta dalla distanza su Σ ;
- (ii) possiede un insieme denso di orbite periodiche;
- (iii) possiede un'orbita densa in Σ ;
- (iv) possiede 2^n punti periodici di periodo n ;
- (v) l'insieme dei punti definitivamente periodici che non sono essi stessi periodici è denso in Σ ;
- (vi) l'insieme dei punti di Σ che non sono né periodici né definitivamente periodici è denso in Σ ;
- (vii) esistono orbite che non sono né, periodiche, né definitivamente periodiche, né dense;
- (viii) dato $s \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste $t \in \Sigma$ ed un intero N tali che $\text{dist}(s, t) < \varepsilon$ e $\text{dist}(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) = 2$ per $n > N$.

Corollario 2.19: La dinamica dello shift su Σ è caotica nel senso di Devaney.

Dimostrazione. L'asserto segue dalle proprietà (ii), (iii) e (viii) della proposizione 2.18. Q.E.D.

Il lettore non fatterà a rendersi conto che il modello che abbiamo appena discusso descrive perfettamente il gioco del lancio di una moneta. Una sequenza infinita di lanci produce una successione infinita di simboli, quando si decida ad esempio di identificare l'uscita "testa" con 0 e "croce" con 1. Dunque, lo spazio Σ è l'insieme di tutte le partite con successione infinita di lanci che si possono giocare. Lo shift si identifica con un singolo lancio: si archivia il risultato del lancio precedente, e si porta al primo posto la seconda cifra della successione. Naturalmente la nostra analisi puramente dinamica del modello non mette in luce gli aspetti probabilistici.

Dimostrazione della proposizione 2.18. La dimostrazione fa ampio uso del lemma 2.16 e degli argomenti esposti nel paragrafo 2.5.2 facendo uso della rappresentazione binaria in connessione con lo studio della mappa del raddoppio del cerchio. La dimostrazione viene esposta in forma sintetica.

pendamento. Tuttavia si tratta qui di un termine tecnico così profondamente radicato nell'uso, che farne una traduzione eviterebbe uno sgarbo alla lingua italiana, ma provocherebbe più incomprensioni che benefici.

(i) Sia $s \in \Sigma$ assegnato, e sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo k tale che valga $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, e poniamo $\delta = \frac{1}{2^{k+2}}$. Se $t \in \Sigma$ soddisfa $\text{dist}(s, t) < \delta$, allora s e t devono avere in comune i primi $k+2$ simboli, e $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ hanno in comune i primi $k+1$ simboli. Di conseguenza vale $\text{dist}(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Questo prova la continuità.

(ii) Le orbite periodiche di periodo n sono tutte e sole quelle generate da successioni $p = (p_0 p_1 p_2 p_3 \dots)$ con la proprietà che $p_{j+n} = p_j$ per ogni $j \geq 0$. In effetti, tali successioni sono tutte e sole quelle che soddisfano $\sigma^n(p) = p$. Sia ora $s \in \Sigma$ assegnato, e sia $\varepsilon > 0$. Scegliamo k tale che valga $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Tutti i punti dell'intorno di raggio δ di s hanno in comune i primi k simboli, diciamo $s_0 \dots s_{k-1}$. Costruiamo la successione $p = (p_0 p_1 p_2 p_3 \dots) \in \Sigma$ definita come

$$p_0 = s_0, \dots, p_{k-1} = s_{k-1}, \quad p_j = p_{j-k} \text{ per } j \geq k,$$

o, con la consueta rappresentazione dei numeri periodici,

$$p = \overline{s_0 \dots s_{k-1}},$$

dove la barra sta ad indicare che la sequenza di simboli $s_0 \dots s_{k-1}$ è un periodo che viene ripetuto all'infinito. Quest'orbita è periodica, ed ha punto iniziale in un intorno di s di raggio $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Ciò mostra che in ogni intorno di ogni punto esiste un'orbita periodica.

(iii) Un esempio di punto che genera un'orbita densa è quello già considerato nel paragrafo 2.5.2, ossia

$$\underbrace{0 \ 1}_{1 \text{ cifra}} \underbrace{00 \ 01 \ 10 \ 11}_{2 \text{ cifre}} \underbrace{000 \ 001 \ 010 \ 011 \ 100 \ 101 \ 110 \ 111}_{3 \text{ cifre}} \dots$$

Il lettore non avrà difficoltà a costruire egli stesso altri esempi: basta garantire che qualunque sequenza finita di simboli sia rappresentata da qualche parte nella successione.

(iv) Un punto periodico di periodo n ha necessariamente la forma

$$s = \overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}.$$

Dunque, i punti periodici di periodo n sono tanti quante le diverse combinazioni di simboli 0 e 1 in n caselle,¹³ ossia 2^n .

(v) Le orbite definitivamente periodiche sono tutte e sole quelle generate da elementi $s \in \Sigma$ della forma

$$s = \langle xxx \rangle \overline{s_0 s_1 \dots s_k}$$

¹³ Con un argomento di analisi combinatoria: nella prima casella si può porre 0 oppure 1, quindi vi sono due combinazioni; vi sono poi due possibilità per la seconda casella, con un totale di quattro combinazioni, altre due possibilità per la terza, con un totale di 8 combinazioni, &c. Per chi ama l'induzione: per $n = 1$ vi sono 2^1 combinazioni; assumendo per induzione che per $n - 1$ caselle ve ne siano 2^{n-1} , la casella n -esima può essere riempita in 2 modi distinti, e quindi si hanno $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ combinazioni distinte per n caselle.

dove $\langle xxx \rangle$ è un antiperiodo di lunghezza arbitraria, ma finita. Se l'antiperiodo non coincide col periodo allora l'orbita è definitivamente periodica, ma non periodica. L'arbitrarietà nella scelta dell'antiperiodo assicura che si può costruire un punto che appartenga ad un intorno arbitrario di qualunque punto $s \in \Sigma$. Il procedimento è quello già usato per mostrare che le orbite periodiche sono dense.

(vi) Ogni punto $s \in \Sigma$ rappresentato da una successione non periodica (nel senso che non termina con una sequenza di cifre ripetuta all'infinito) genera un'orbita non periodica e non definitivamente periodica. Assegnato un qualunque intervallo si può costruire un tal punto ponendo all'inizio una sequenza finita opportuna di cifre.

(vii) Un esempio di successione che genera un'orbita non periodica e non densa è

$$1\ 01\ 001\ 0001\ 00001\ 000001\ \dots\ \underbrace{00\dots0}_{k\text{ volte}}1\ \dots$$

in cui ad ogni passo si incrementa di uno il numero degli zeri, e si termina con un singolo 1. Altri esempi si possono costruire senza difficoltà costruendo successioni che non possano contenere più di k simboli 0 o 1 consecutivi.

(viii) Detto $s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$ e scelto n in modo che valga $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, basta prendere il punto $t = (t_0 t_1 t_2 t_3 \dots)$ con $t_0 = s_0, \dots, t_{n-1} = s_{n-1}$ e $t_j = 1 - s_j$ per $j \geq n$. Q.E.D.

2.7 L'insieme di Cantor nella mappa logistica

Veniamo ora a considerare la mappa logistica per $\lambda > 4$. Se si traccia il grafico della mappa si vede che esiste un intervallo $(a, b) \subset [0, 1]$ che viene mappato al di fuori dell'intervallo. La stessa sorte tocca a tutti i punti che dopo un certo numero di iterazioni cadono nell'intervallo (a, b) . Con un momento in più di riflessione si vede che gli estremi a, b dell'intervallo vengono ambedue mappati sul punto 1, ed all'iterazione successiva finiscono in 0, che è un punto fisso della mappa; dunque a, b sono punti definitivamente fissi. Queste osservazioni possono indurre a pensare che iterando successivamente la mappa tutti i punti dell'intervallo $[0, 1]$ finiscano a $-\infty$, oppure sullo 0.

La realtà è ben più complessa: esiste un'infinità non numerabile di punti che resta indefinitamente nell'intervallo, e la dinamica su questo insieme è descrivibile tramite il modello della dinamica simbolica con lo shift. È ciò che discuteremo in dettaglio in questo paragrafo. Prima però richiamiamo alcune nozioni generali sugli insiemi di Cantor.

2.7.1 L'insieme ternario di Cantor

In termini semplici l'insieme ternario di Cantor si costruisce nel modo illustrato in figura 2.20, che passiamo ad esporre.

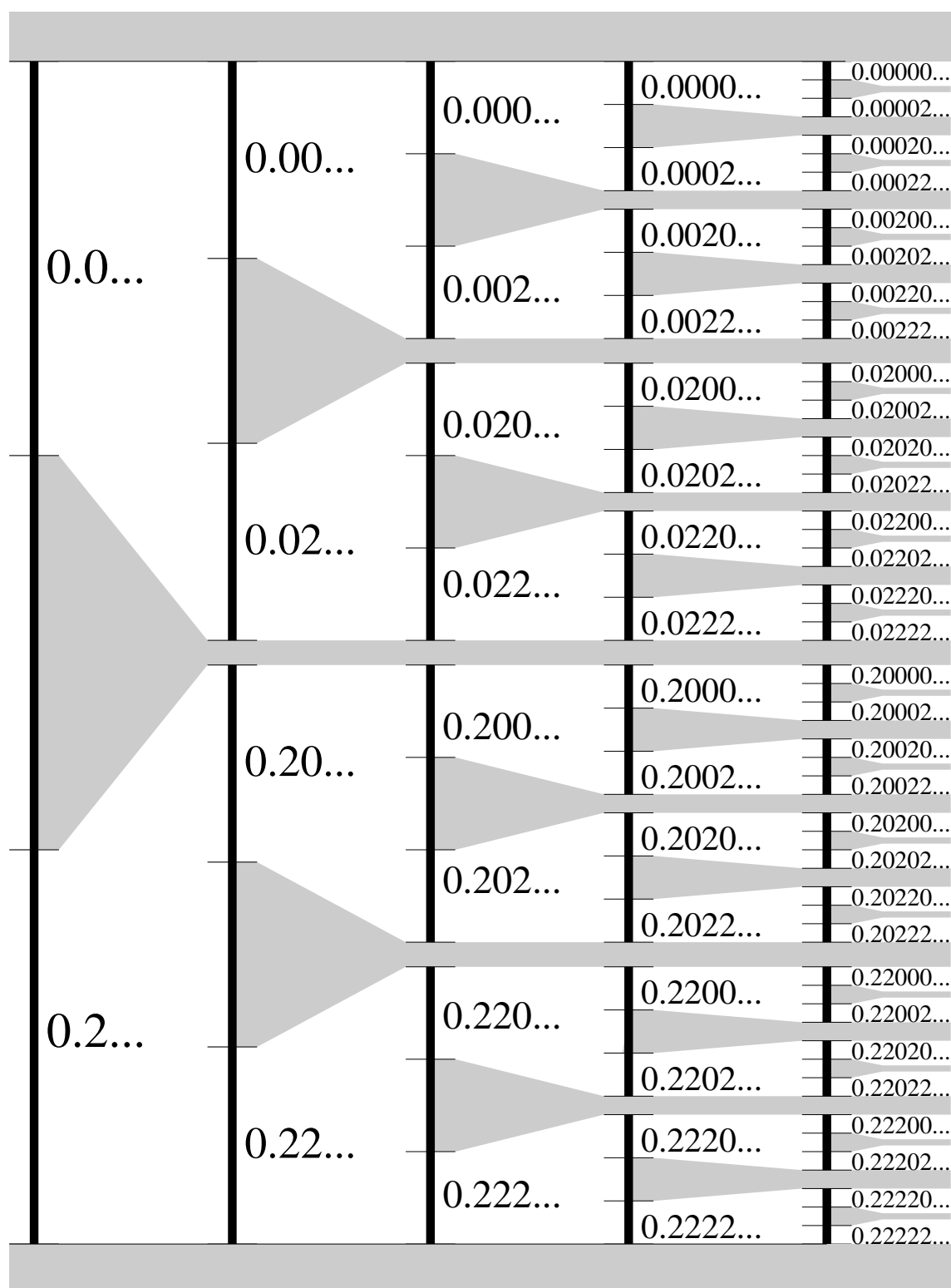


Figura 2.20. La costruzione dell'insieme ternario di Cantor e la sua rappresentazione triadica.

Si parte con un segmento finito, che indicheremo con C_0 e che possiamo ben identificare con l'intervallo $[0, 1]$, ed al primo passo si rimuove il terzo centrale del segmento, dunque l'intervallo aperto $(1/3, 2/3)$. Resta dunque un insieme $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, unione di due intervalli chiusi. Al secondo passo si rimuove il terzo centrale di ciascuno dei segmenti rimasti, ossia gli intervalli aperti $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$, lasciando un insieme di quattro intervalli chiusi $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Al terzo passo si rimuove il terzo centrale di ciascuno degli ultimi 4 intervalli, ottenendo un insieme C_3 che è unione di 8 intervalli chiusi, e si prosegue iterativamente, sicché dopo n passi resta un insieme C_n composto da 2^n intervalli chiusi, ciascuno di lunghezza $(1/3)^n$.

La domanda che si pone è: cosa resta quando si passa al limite $n \rightarrow \infty$? La risposta può apparire a prima vista sorprendente: resta un'infinità non numerabile di punti. A prima vista può sembrare ragionevole concludere che si salvino gli estremi degli intervalli chiusi che ad ogni passo n fanno parte dell'insieme C_n . In effetti tutti questi estremi restano,¹⁴ ma si tratta comunque di un'infinità numerabile: per costruzione, sono tutti punti razionali. In realtà vedremo che resta molto di più.

Prima di passare a enunciati formali riflettiamo sul procedimento. Cominciamo col valutare la lunghezza dell'insieme C_n , intesa come la somma delle lunghezze degli intervalli. Poiché C_n contiene 2^n intervalli di lunghezza $(1/3)^n$, la lunghezza totale è $(2/3)^n$, che per $n \rightarrow \infty$ tende a zero.

Un modo comodo per proseguire la nostra analisi consiste nel considerare la rappresentazione in base 3, o rappresentazione triadica, dei punti dell'intervallo $[0, 1]$. Con un po' di pazienza osserviamo che possiamo scrivere gli estremi dei primi intervalli come¹⁵

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)_{10} &= 0.1_3, & \left(\frac{2}{3}\right)_{10} &= 0.2_3, \\ \left(\frac{1}{9}\right)_{10} &= 0.01_3, & \left(\frac{2}{9}\right)_{10} &= 0.02_3, & \left(\frac{7}{9}\right)_{10} &= 0.21_3, \\ \left(\frac{8}{9}\right)_{10} &= 0.22_3, \\ \left(\frac{1}{27}\right)_{10} &= 0.001_3, & \left(\frac{2}{27}\right)_{10} &= 0.002_3, & \left(\frac{7}{27}\right)_{10} &= 0.021_3, \\ \left(\frac{8}{27}\right)_{10} &= 0.022_3, & \left(\frac{19}{27}\right)_{10} &= 0.201_3, & \left(\frac{20}{27}\right)_{10} &= 0.202_3, \\ \left(\frac{25}{27}\right)_{10} &= 0.221_3, & \left(\frac{26}{27}\right)_{10} &= 0.222_3, & \dots \end{aligned}$$

Riflettendo ancora un momento ci renderemo conto che tutti gli estremi degli intervalli hanno una rappresentazione finita in base 3 (basta osservare che sono tutte frazioni della forma $\frac{m}{3^n}$), e che la cifra 1 può comparire solo all'ultimo posto. Ora, anche la rappresentazione triadica presenta delle ambiguità. Ciò che qui ci importa è che qualunque numero che abbia una

¹⁴ Ciò è conseguenza del fatto che ad ogni passo si rimuove la parte centrale di uno degli intervalli esistenti.

¹⁵ I pedici 3 e 10 stanno ad indicare la base di numerazione.

rappresentazione finita $0.\langle xxx \rangle 1$, dove $\langle xxx \rangle$ sta per una sequenza finita qualunque di cifre, può scriversi anche come $0.\langle xxx \rangle 022222 \dots$ con una coda di infiniti 2. Ad esempio, abbiamo

$$0.0222 \dots_3 = \sum_{j \geq 2} \left(\frac{2}{3^j} \right) = \frac{2}{9} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{3} \right)^k = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = 0.1_3 .$$

Il lettore non avrà difficoltà a convincersi che l'affermazione fatta poco sopra è vera generalizzando opportunamente l'esempio appena riportato.

Conveniamo allora di sopprimere tutte le sequenze che terminano con un unico 1, sostituendole con la rappresentazione corrispondente che termina con $02222 \dots$. Alla luce di quanto abbiamo detto fin qui si vede con chiarezza che *gli estremi degli intervalli che vengono mantenuti nella costruzione dell'insieme ternario di Cantor sono tutti i numeri che in base 3 hanno una rappresentazione che non contiene mai la cifra 1, e che o è finita (e dunque completabile con una coda di infiniti 0) oppure termina con una coda di infiniti 2.*

Se si considerano solo gli estremi si ha però un insieme numerabile di punti: come abbiamo già osservato, anche senza prendere in considerazione la rappresentazione triadica, si tratta comunque di un sottinsieme dei numeri razionali. Ma l'insieme di Cantor non si riduce agli estremi dei segmenti. Occorre ancora un po' di riflessione, con l'aiuto della figura 2.20, per rendersi conto che *l'insieme ternario di Cantor è costituito da tutti e soli i punti dell'intervallo $[0, 1]$ la cui rappresentazione in base 3 contiene le sole cifre 0, 2, mai la cifra 1.*

Ad esempio, il punto $\frac{1}{4}$ non è un estremo di un segmento, dato che il suo denominatore non è una potenza di 3. Se però lo si scrive in base 3 si ottiene

$$\left(\frac{1}{4} \right)_{10} = 0.02020202 \dots ,$$

ossia un numero periodico con periodo 02 che appartiene all'insieme ternario di Cantor, pur non essendo estremo di nessuno dei segmenti considerati nella costruzione. Del resto si possono costruire quanti esempi si vogliono semplicemente considerando numeri non periodici che contengano le sole cifre 0, 2.

Veniamo ora alla dimostrazione che l'insieme ternario di Cantor non è numerabile. Riportiamo due argomenti diversi.

Un primo argomento si basa sulla possibilità di identificare l'insieme ternario di Cantor con l'intervallo $[0, 1]$, a meno di un'infinità numerabile di punti. A tal fine basta sostituire la cifra 2 con la cifra 1 nella rappresentazione in base 3. Si ottiene così l'insieme di tutti i numeri della forma $0.c_1c_2c_3c_4 \dots$ con le cifre c_j che possono assumere uno qualunque dei due valori 0, 1. Questo insieme coincide di fatto con l'insieme dei punti dell'intervallo $[0, 1]$ scritti in rappresentazione binaria. Resta solo l'ambiguità dei numeri che terminano con una coda di infiniti 1, che hanno una doppia rappresentazione. Ma si

tratta, come abbiamo osservato, di un insieme numerabile di punti, che non cambia le conclusioni.

Un secondo argomento che porta alle medesime conclusioni è quello ideato da Cantor stesso per dimostrare che l'insieme dei numeri reali non è numerabile. Manteniamo la rappresentazione in base 2, e supponiamo che l'insieme ternario sia numerabile. Allora, avendo stabilito una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, possiamo elencarne ordinatamente gli elementi. Ad esempio, possiamo formare la lista che segue, opportunamente numerata

1 :	0.0000000...	5 :	0.0022022...
2 :	0.0202020...	6 :	0.0002220...
3 :	0.0220220...	7 :	0.2220000...
4 :	0.0020020...	...	

e così via, con un qualche criterio più o meno fantasioso di ordinamento. Supponiamo di aver svolto questo compito, e dunque di aver messo in elenco *tutti* i punti dell'insieme ternario di Cantor. Costruiamo ora un numero $0.c_1c_2c_3c_4\dots$ col criterio seguente: c_1 è una cifra diversa dalla prima cifra del primo numero della lista; c_2 è una cifra diversa dalla seconda del secondo numero, &c, ponendo sempre al posto di c_j una cifra diversa dalla j -esima del j -esimo numero della lista. Ad esempio, facendo riferimento all'elenco riportato sopra scriveremo il numero $z = 0.2002202\dots$. Ora, questo numero appartiene certamente all'insieme ternario di Cantor, perché la sua rappresentazione in base 3 contiene le sole cifre 0, 2. D'altra parte z non può coincidere col primo punto dell'elenco perché differisce sulla prima cifra, non può coincidere col secondo perché differisce sulla seconda cifra, &c. Dunque, z non può coincidere con *nessun* numero dell'elenco, il che contraddice quanto abbiamo supposto, ossia che il nostro elenco contenesse tutti i punti dell'insieme.

2.7.2 Gli insiemi di Cantor

Richiamiamo qui la definizione generale.

Definizione 2.20: *Un sottinsieme non vuoto $\Gamma \in \mathbb{R}$ è detto insieme di Cantor se:*

- (i) *è chiuso e limitato;*
- (ii) *è totalmente disconnesso (ossia non contiene intervalli);*
- (iii) *ogni suo punto è punto di accumulazione (è un insieme perfetto).*

Al fine di mostrare che l'insieme ternario soddisfa le proprietà elencate consideriamo ora un insieme costruito con un procedimento di poco più generale. Partendo ancora dall'intervallo $\Gamma_0 = [0, 1]$, costruiamo un insieme Γ_1 formato dall'unione di due intervalli chiusi disgiunti ottenuti rimuovendo da Γ_0 un segmento aperto di lunghezza α posizionato al centro, sicché ciascuno dei due segmenti di Γ_1 ha lunghezza $\frac{1-\alpha}{2}$. Al secondo passo rimuoviamo da

ciascuno di questi un segmento aperto di lunghezza $\alpha(1 - \alpha)/2$, sempre posizionato al centro, e così via. Avremo così una successione $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ di insiemi chiusi (perché complementi di aperti), con Γ_n formato dall'unione di 2^n segmenti chiusi disgiunti. L'insieme che ci interessa è $\Gamma = \bigcap_{j \geq 0} \Gamma_j$.

Osserviamo subito che ciascuno dei segmenti che compongono Γ_n ha lunghezza $(\frac{1-\alpha}{2})^n$. Dunque la lunghezza totale di Γ_n è $(1 - \alpha)^n$, che tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Ciononostante, Γ è non vuoto, se non altro perché contiene almeno gli estremi di tutti gli intervalli aperti che sono stati rimossi.

Proposizione 2.21: *L'insieme Γ appena costruito è un insieme di Cantor.*

Dimostrazione. Anzitutto, Γ è intersezione numerabile di insiemi chiusi, e dunque è chiuso; questo mostra che vale la proprietà (i).

Per mostrare che vale la proprietà (ii), supponiamo che Γ contenga un intervallo aperto $I = (x, y)$, la cui lunghezza è $|x - y|$. Questo significa che $I \subset \Gamma_n$ per ogni $n \geq 0$. Ma abbiamo già visto che Γ_n è formato dall'unione di segmenti disgiunti ciascuno di lunghezza $(\frac{1-\alpha}{2})^n$, e per m abbastanza grande si ha certamente $(\frac{1-\alpha}{2})^m < |x - y|$, sicché non può essere $I \in \Gamma_m$, contrariamente a quanto abbiamo supposto.

Veniamo infine alla proprietà (iii). Sia $x \in \Gamma$, e sia $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ un suo intorno. Mostriamo che esiste un punto $y \in \Gamma \cap U_\varepsilon$ distinto da x . Per ogni n deve esistere un intervallo chiuso $I_n \subset \Gamma_n$ che contiene x . Ma se n è abbastanza grande perché valga $(\frac{1-\alpha}{2})^n < \varepsilon$ allora vale anche $I_n \subset U_\varepsilon(x)$, sicché U_ε contiene anche gli estremi di I_n , che a loro volta appartengono a Γ . Ora, se x è uno degli estremi di I_n , basta prendere come y l'altro estremo. Se invece x è un punto interno di I_n , allora si può prendere come y uno qualunque degli estremi di I_n . In ogni caso vale $y \in \Gamma \cap U_\varepsilon$ (perché gli estremi degli intervalli appartengono tutti a Γ), e dunque x è punto di accumulazione di Γ . Q.E.D.

2.7.3 L'insieme di Cantor per la mappa logistica

Consideriamo meglio il comportamento della mappa logistica per $\lambda > 4$, identificando l'insieme di punti che resta confinato nell'intervallo $[0, 1]$. Con un rapido calcolo si vede che l'intervallo (a, b) che viene mappato all'esterno dell'intervallo $[0, 1]$ ha estremi

$$(2.14) \quad a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

I punti a, b vengono mappati in 1, e quindi sono punti definitivamente fissi.

Identifichiamo ora i punti che vengono mappati sull'intervallo $[a, b]$. Ricorriamo a tal fine al grafico riportato nel secondo riquadro della figura 2.21. Appoggiandoci alla bisettrice del primo quadrante riportiamo l'intervallo $[a, b]$ sull'asse delle ordinate, e identifichiamone l'immagine inversa mediante il grafico della funzione. In altre parole, identifichiamo i punti in cui il grafico della funzione assume i valori a, b , e proiettiamo questi punti sull'asse delle

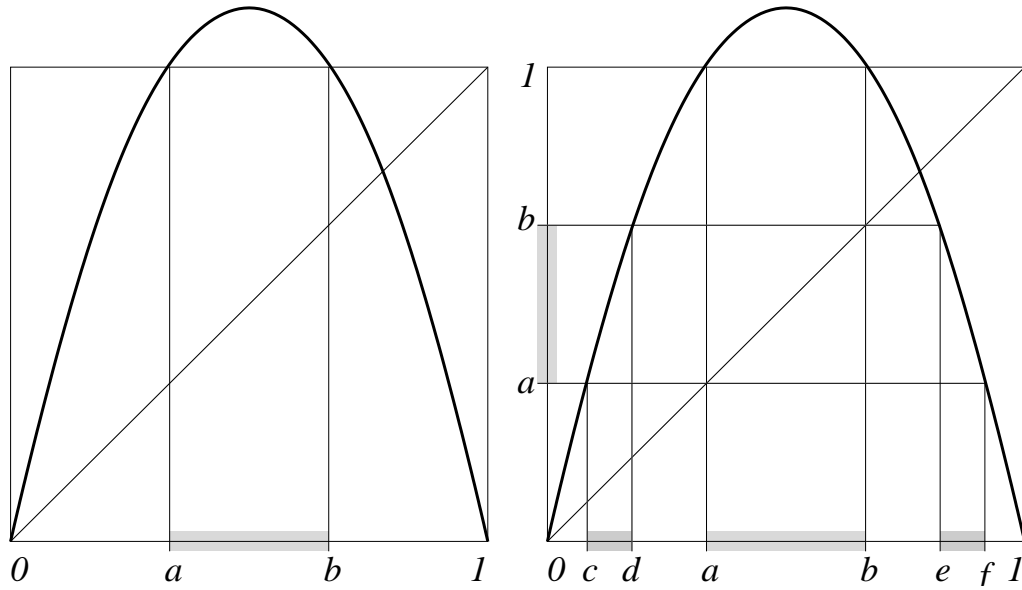


Figura 2.21. La costruzione dell'insieme di Cantor a partire dalla mappa logistica con $\lambda > 4$.

ascisse. Vediamo così che in una singola iterazione due intervalli $[c, d]$ e $[e, f]$ vengono mappati su $[a, b]$. Ne concludiamo che c, d, e, f sono punti definitivamente fissi (dopo 3 iterazioni cadono sul punto fisso 0), mentre i punti degli intervalli aperti (c, d) e (e, f) abbandonano l'intervallo $[0, 1]$ e finiscono asintoticamente a $-\infty$.

Il lettore potrà provare ad eseguire la stessa operazione per identificare le immagini inverse degli intervalli $[c, d]$ ed $[e, f]$, e immaginare di iterare il procedimento. In tal modo si identificano gli intervalli aperti che il meccanismo delle iterazioni successive mappa al di fuori dell'intervallo $[0, 1]$. Tutti gli estremi di tali intervalli sono punti definitivamente fissi, perché dopo un numero sufficiente di iterazioni vengono mappati su uno degli estremi a, b , ed in altre due iterazioni sullo zero. Il procedimento descritto richiama immediatamente alla mente la costruzione dell'insieme ternario di Cantor.

Formalizziamo meglio quanto abbiamo esposto fin qui. Riscriviamo la mappa logistica

$$f(x) = \lambda x(1 - x), \quad x \in [0, 1]$$

e supponiamo $\lambda > 4$. Per ogni intero positivo n definiamo l'insieme

$$(2.15) \quad K_n = \{x : f^n(x) \in [0, 1]\}.$$

In altre parole, K_n è l'insieme dei punti che dopo n iterazioni non hanno ancora abbandonato l'intervallo $[0, 1]$.

Lemma 2.22: Per $\lambda > 4$ valgono le seguenti proprietà:

- (i) per ogni intero $n > 0$ l'insieme K_n è costituito da 2^n intervalli chiusi disgiunti;

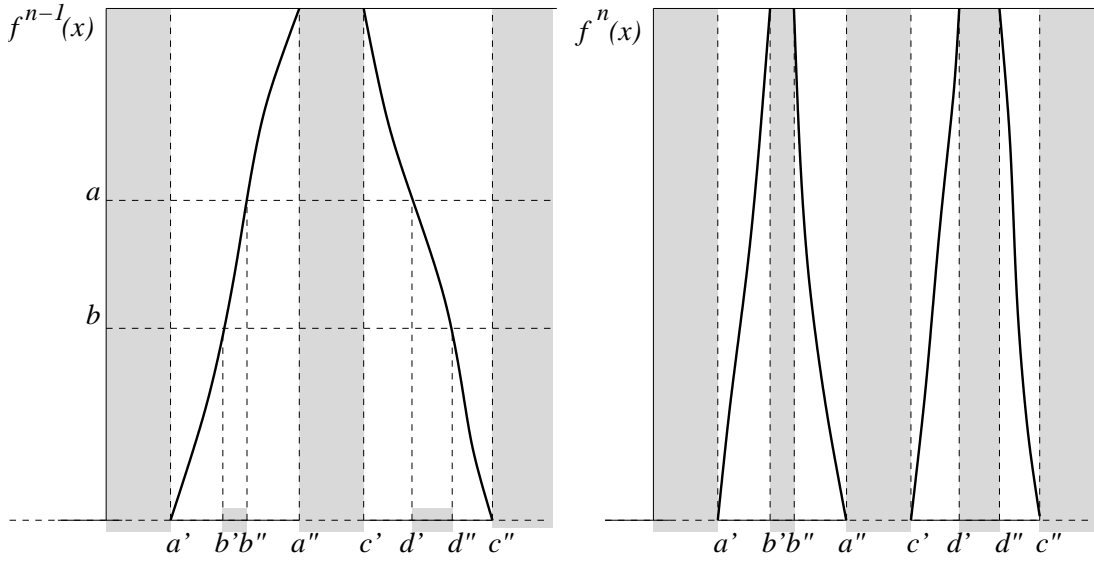


Figura 2.22. Ad illustrazione della dimostrazione che la mappa logistica per $\lambda > 4$ si riduce ad un insieme di Cantor.

- (ii) detto I uno degli intervalli che costituiscono K_n vale $f^n(I) = [0, 1]$, e $f^n(x)$ è monotona su I .

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione. Abbiamo già visto che

$$K_1 = I_0 \cup I_1,$$

dove

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}\right], \quad I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\lambda}}{2\lambda}, 1\right],$$

sono intervalli chiusi disgiunti, sicché vale la (i) per K_1 . Detto I uno di questi due intervalli, i suoi estremi sono mappati rispettivamente su 0 e 1. Inoltre la derivata $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$ è continua e non si azzerava in I (lo si verifica direttamente), sicché $f(x)$ è monotona su I . Per continuità e per il teorema del valor medio vale allora $f(I) = [0, 1]$. Questo dimostra che per K_1 vale la (ii).

Supponiamo ora che l'enunciato del lemma valga per K_{n-1} , sicché questo è composto da 2^{n-1} intervalli chiusi disgiunti. In particolare, detto I uno degli intervalli che compongono K_{n-1} , supponiamo che valga $f^{n-1}(I) = [0, 1]$ e che la derivata $(f^{n-1})'(x)$ abbia segno costante e non si annulli su I . Mostriamo che le stesse affermazioni valgono per n , aiutandoci con la figura 2.22.

Consideriamo uno degli intervalli chiusi $I \subset K_{n-1}$, e supponiamo che in I valga $(f^{n-1})'(x) > 0$, come per l'intervallo $[a', a'']$ del riquadro di sinistra della figura 2.22. Costruendo la controimmagine dell'intervallo (a, b) che viene mappato al di fuori da $[0, 1]$, con a, b dati dalla (2.14), si vede immediatamente che tale controimmagine è l'intervallo aperto (b', b'') , con

$a' < b' < b'' < a''$. Ciò è conseguenza del teorema del valor medio, essendo $0 < a < b < 1$ ed essendo la mappa $f^{n-1}(x)$ monotona crescente in $[a', a'']$. Inoltre gli intervalli $[a', b']$ e $[b'', a'']$ sono disgiunti. Per costruzione abbiamo anche $f^{n-1}(a') = 0$, $f^{n-1}(a'') = 1$, $f^{n-1}(b') = a$ e $f^{n-1}(b'') = b$, sicché vale anche $f^n(a') = f^n(a'') = 0$ e $f^n(b') = f^n(b'') = 1$. Resta da mostrare che la derivata $(f^n)'(x)$ è positiva in $[a', b']$ e negativa in $[b'', a'']$. A tal fine calcoliamo

$$(f^n)'(x) = \frac{d}{dx} f(f^{n-1}(x)) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot (f^{n-1})'(x).$$

Poiché $f'(x) > 0$ in $[0, a] \subset [0, \frac{1}{2}]$ e $f'(x) < 0$ in $[b, 1] \subset [\frac{1}{2}, 1]$, segue che la derivata $(f^n)'(x)$ ha segno costante in ciascuno di questi due intervalli, e precisamente segno positivo in $[a', b']$ e negativo in $[b'', a'']$, come affermato. Per continuità, segue che $f^n([a', b']) = f^n([b'', a'']) = [0, 1]$.

Il caso dell'intervallo $[c', c'']$, in cui la derivata è negativa, si tratta in modo analogo, con poche variazioni. Concludiamo che ciascuno dei 2^{n-1} intervalli che compongono K_{n-1} genera due intervalli disgiunti, sicché K_n è composto da 2^n intervalli disgiunti. Ciascuno di questi intervalli ha per immagine sotto $f^n(x)$ l'intero intervallo $[0, 1]$. Infine in ciascuno di questi intervalli la derivata $(f^n)'(x)$ ha segno costante, sicché la mappa $f^n(x)$ ristretta a ciascun intervallo è monotona. Questo ci consente di iterare il processo induttivo, sicché la dimostrazione è completa. *Q.E.D.*

Proposizione 2.23: *Consideriamo la mappa logistica $f(x) = \lambda x(1 - x)$. Se $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, allora l'insieme*

$$K = \bigcap_{n \geq 0} K_n,$$

con K_n definito dalla (2.15), è un insieme di Cantor.

La dimostrazione è praticamente una ripetizione di quella della proposizione 2.21, quindi la omettiamo. Richiamiamo l'attenzione del lettore solo su due punti. Il primo è che si fa uso del fatto che ad ogni passo del processo costruttivo si ha un insieme K_n formato dall'unione di 2^n intervalli chiusi. Questo, che costituisce la parte non banale della dimostrazione, è il contenuto del lemma 2.22. Il secondo punto è che la dimostrazione che K non contiene intervalli si basa sulla proprietà della mappa di essere espandente. Ciò è certamente vero se vale $|f'(x)| > 1$ su ambedue gli intervalli $[0, a]$ e $[0, b]$, con a, b dati dalla (2.14). Questa è l'origine della condizione $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ dell'enunciato. In realtà si può mostrare che K è un insieme di Cantor per $\lambda > 4$, ma l'argomento diventa sensibilmente più complesso.

2.7.4 La dinamica sull'insieme di Cantor

In tutto questo paragrafo manteniamo l'ipotesi che sia $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, e ci occupiamo di descrivere la dinamica sull'insieme di Cantor K . In effetti, la

dinamica è interessante solo su tale insieme, perché tutti i punti che appartengono al complemento di K in $[0, 1]$ vengono inviati prima o poi a $-\infty$. L'obiettivo è dimostrare che la dinamica è caotica.

L'argomento si basa sull'identificazione dell'insieme di Cantor con l'insieme Σ delle successioni di simboli 0, 1.

A tal fine costruiamo una funzione $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definita come segue: ad ogni punto $x \in K$ associamo la successione $s = (s_0 s_1 s_2 s_3) \in \Sigma$ costruita ponendo

$$(2.16) \quad s_k = \begin{cases} 0 & \text{se } f^k(x) \in I_0 = [0, a] , \\ 1 & \text{se } f^k(x) \in I_1 = [b, 1] , \end{cases}$$

dove a, b sono ancora gli estremi dell'intervallo aperto che viene mappato all'esterno di $[0, 1]$.

In breve, osserviamo le iterate successive di x sotto l'azione della mappa, e marchiamo 0 se l'iterata giace nella metà sinistra dell'intervallo $[0, 1]$ e 1 se giace nella metà destra. Ad esempio, abbiamo le rappresentazioni

$$\begin{aligned} x = 0 , \quad \psi(0) &= (000000 \dots) , \\ x = a , \quad \psi(a) &= (010000 \dots) , \\ x = b , \quad \psi(b) &= (110000 \dots) , \\ x = 1 , \quad \psi(1) &= (100000 \dots) . \end{aligned}$$

Nel seguito ci servirà anche una caratterizzazione più dettagliata degli intervalli chiusi che compongono gli insiemi K_n di cui ci siamo serviti per la costruzione dell'insieme di Cantor K . Ripercorriamo il procedimento seguito per la dimostrazione del lemma 2.22. Ricordiamo anzitutto che vale $K_1 = I_0 \cup I_1$. I due intervalli sono rappresentati nel riquadro di sinistra della figura 2.21. Riferendoci al riquadro di destra della stessa figura denotiamo con $I_{00} = [0, c]$, $I_{01} = [d, a]$, $I_{10} = [f, 1]$ e $I_{11} = [b, e]$. La scelta degli indici è fatta col seguente criterio: $I_{jk} \subset I_j$ è il sottointervallo di I_j che viene mappato su I_k . In effetti, osservando la figura vediamo subito che $f(I_{00}) = f(I_{10}) = I_0$ e $f(I_{01}) = f(I_{11}) = I_1$. Inoltre abbiamo $K_2 = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$.

Precedendo iterativamente, definiamo

$$I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_n} = \{x \in I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}} : f^n(x) \in I_{s_n}\} .$$

In altre parole, l'intervallo $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ si spezza in due sottointervalli: $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1} 0}$ che viene mappato da f^n su I_0 , e $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1} 1}$ che viene mappato da f^n su I_1 . Per induzione si mostra facilmente che

$$K_n = \bigcup_{s_0, \dots, s_n \in \{0, 1\}} I_{s_0, \dots, s_n} .$$

Riflettendo su questa costruzione il lettore verificherà che vale

$$I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_n} = \{x \in I_{s_0} : f(x) \in I_{s_1}, \dots, f^n(x) \in I_{s_n}\} .$$

Ciò è rilevante, perché implica che $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_n}$ debba contenere tutti i punti $x \in K$ la cui rappresentazione simbolica $\psi(x)$ inizia con la sequenza $s_1 \dots s_n$.

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il

Lemma 2.24: *Per la mappa logistica con $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ la funzione ψ definita dalla (2.16) è un omeomorfismo tra K e Σ .*

Dimostrazione. Per costruzione, $\psi(x)$ è definita per ogni $x \in K$. Mostriamo che per ogni $s \in \Sigma$ esiste un unico elemento $x = \psi^{-1}(s) \in K$. Sia $s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) \in \Sigma$ una successione arbitraria, ma fissata. Per costruzione, gli intervalli $I_{s_0} \supset I_{s_0 s_1} \supset I_{s_0 s_1 s_2} \supset I_{s_0 s_1 s_2 s_3} \supset \dots$ formano una successione di intervalli chiusi annidati, e nessuno di essi è vuoto. Dunque $\psi^{-1}(s) = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ non è vuoto¹⁶, sicché contiene almeno un punto x che, per la definizione stessa di K , appartiene a K .

Mostriamo che il punto x così determinato è unico. Per contraddizione, supponiamo che esista un secondo punto $y \neq x$ con $\psi(y) = \psi(x) = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$. Allora per ogni n deve valere $x \in I_{s_0 \dots s_n}$ e $y \in I_{s_0 \dots s_n}$, lo stesso intervallo chiuso, sicché deve essere anche $[x, y] \subset I_{s_0 \dots s_n}$. Ne segue che $[x, y] \subset \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n} \subset K$, il che contraddice il fatto che K , essendo un insieme di Cantor, non possa contenere intervalli. Ne concludiamo che $x = y$.

Veniamo ora alla continuità di ψ . Assegnato $\varepsilon > 0$ scegliamo n abbastanza grande perché valga $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Consideriamo l'insieme $K_n = \bigcup_{t_0, \dots, t_n \in \{0,1\}} I_{t_0 \dots t_n}$. Definiamo δ come la minima distanza tra due intervalli distinti $I_{t_0 \dots t_n}$ in K_n . Poiché K_n contiene un numero finito di intervalli è $\delta > 0$. Se $x \in K$ è un punto arbitrario e $y \in K$ soddisfa $|y - x| < \delta$, allora sia x che y appartengono ad un medesimo intervallo $I_{s_0 \dots s_n}$. Allora $\psi(x)$ e $\psi(y)$ hanno in comune i primi $n + 1$ simboli, e per il lemma 2.16 segue $\text{dist}(\psi(x), \psi(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Veniamo infine alla continuità di ψ^{-1} . Per un fissato n definiamo δ_n come il massimo tra i diametri degli intervalli $I_{t_0 \dots t_n}$ che formano K_n . Poiché K è un insieme di Cantor, non può contenere intervalli, e dunque deve valere $\delta_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Assegnato $\varepsilon > 0$ scegliamo n abbastanza grande perché valga $\delta_n < \varepsilon$. Se $s \in \Sigma$ è un punto arbitrario e $t \in \Sigma$ soddisfa $\text{dist}(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}}$ allora, per il lemma 2.16, s e t hanno in comune i primi $n + 1$ simboli. Ne segue che $\psi^{-1}(s)$ e $\psi^{-1}(t)$ appartengono ad un medesimo intervallo $I_{s_0 \dots s_n}$ di K_n , e dunque vale $|x - y| \leq \delta_n < \varepsilon$. Q.E.D.

Non resta ora che dimostrare la

Proposizione 2.25: *L'omeomorfismo $\psi : K \rightarrow \Sigma$ è una coniugazione topologica tra la mappa logistica per $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ e lo shift su Σ .*

Dimostrazione. La dimostrazione è praticamente la definizione stessa, riformulata dicendo che $\psi(x) = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$ significa che $f^k(x) \in I_{s_k}$, con $I_0 = [0, a]$ e $I_1 = [b, 1]$. Da qui segue che $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) \in I_{s_{k+1}}$, e

¹⁶ Si veda [26], teorema 2.38

dunque $\psi(f(x)) = (s_1 s_2 s_3 s_4 \dots) = \sigma(\psi(x))$. *Q.E.D.*

La conclusione di questa lunga costruzione è che la mappa logistica per $\lambda > 2 + \sqrt{5}$ si riconduce alla dinamica su un insieme di Cantor, e che tale dinamica è caotica essendo riconducibile alla dinamica simbolica con l'operazione di shift.

