

ANALISI DEL CHAOS TRAMITE IL PROGRAMMA

IL PENDOLO E IL CHAOS

Discussioni e commenti

di *Silvia* GRIGOLON e *Silvia* MARIANI

Dipartimento di Fisica, UNIROMA1

Roma, 7 Dicembre 2007

1 Cos'è il *Chaos*?

Nel programma scritto e studiato in laboratorio si è analizzato il *Chaos* tramite il moto di un pendolo semplice sottoposto a fattori di natura perturbativa.

Ma cos'è veramente il *Chaos*?

A tale proposito è sviluppata una teoria, le cui radici risiedono in una profonda osservazione della natura. Difatti ciò che si studia è il mondo circostante, di carattere espressamente caotico: dal moto delle nuvole agli uragani, dall'andamento di azioni finanziarie alla colonna ascendente di fumo di sigaretta che si rompe in spire irregolari. Il chaos è effettivamente una *nuova scienza*, che ha generato oltre a nuovi dubbi e nuovi vocaboli una crisi sul futuro della fisica teorica ¹.

Tuttavia cos'è veramente il chaos è possibile definirlo qualitativamente con un'idea intuitiva e cioè tramite il fatto che in un sistema caotico due istanze del sistema che partono da condizioni iniziali molto simili si separano molto rapidamente. Questo fenomeno, arcano ma affascinante, è conosciuto anche come *effetto farfalla*.

2 L'effetto farfalla e il pendolo

Si dice che il minimo

¹secondo il noto cosmologo Stephen Hawking nell'inventario della sua scienza in una lezione inaugurale del 1980 intitolata *Is the End in Sight of Theoretical Physics?* (È in vista la fine della fisica teorica?)

*battito d'ali
di una farfalla sia
in grado di provocare
un uragano
dall'altra parte
del mondo².*

L'effetto farfalla, come già implicitamente detto, può essere tradotto come *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*³.

Ciò é stato osservato nel programma scritto ed elaborato, che tratta il moto caotico di un pendolo che segue la legge dinamica:

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha - \gamma\dot{\alpha} + f_0\cos(\bar{\omega}t)$$

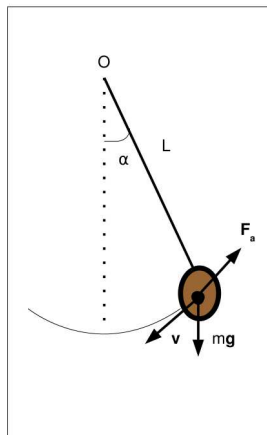


Figura 1: Rappresentazione schematica del sistema

Nella formula sono stati impostati come costanti i valori:

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{1}{Kg\ s}, \quad \omega = 1 \frac{1}{s}, \quad \bar{\omega} = \frac{2}{3} \frac{1}{s}, \quad \alpha(0) = \frac{\pi}{2} m, \quad \dot{\alpha}(0) = 0 \frac{m}{s}$$

con la forza variabile a scelta dell'utente.

² *The Butterfly Effect*, film fantascientifico (2004)

³ cfr. James Gleick, *Chaos*

3 Il programma *IL PENDOLO E IL CHAOS*

Nel programma scritto ed eseguito é stato integrato il moto del pendolo (Figura 1) seguente l'equazione dinamica precedentemente esposta con il Metodo di Runge-Kutta al secondo ordine. Ovviamente la precisione del metodo non é elevatissima ma, come si é constatato negli altri programmi presenti nella cartella del laboratorio é molto efficiente dal punto di vista dello studio fisico di un sistema.

Sono stati studiati tre diversi casi per valori della forza pari a:

$$f_0 = 0.9N, \quad 1.07N, \quad 1.50N$$

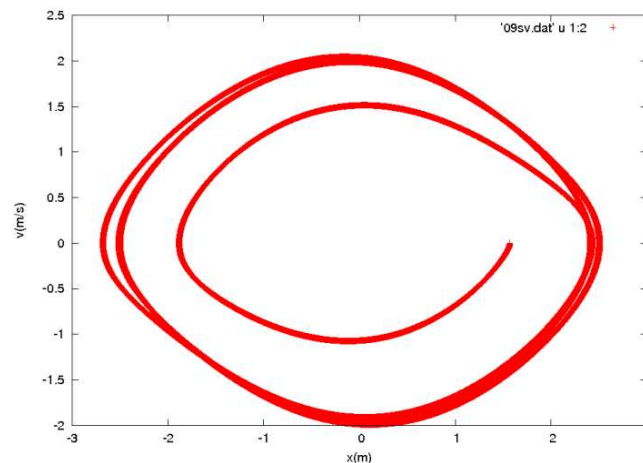


Figura 2: Velocità in funzione della posizione

3.1 Caso 1

Sono stati analizzati tramite i grafici ottenuti con il programma Gnuplot la traiettoria nello spazio delle fasi e gli andamenti in funzione del tempo rispettivamente della posizione e della velocità. Da ciò é stato verificato l'andamento previsto, ossia un'amplificazione delle grandezze che descrivono il sistema al variare della forza. Grazie a questo primo approccio é stato possibile farsi un'idea qualitativa in senso lato del problema.

3.2 Caso 2

Come si può notare nelle Figure 2, 3 e 4, l'ampiezza delle oscillazioni tende a crescere nel tempo e la traiettoria nello spazio delle fasi spiralizza (pur sempre mantenendo la forma di un'ellisse) attorno al punto iniziale: é proprio il fenomeno che ci si aspettava, ossia un'amplificazione

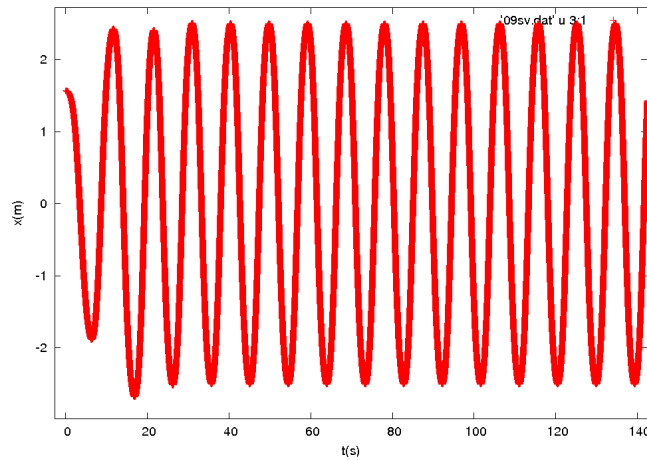


Figura 3: Posizione in funzione del tempo

molto rapida del moto. Sono qui illustrati tali grafici riprodotti tramite il programma *Gnuplot*. Aumentando la forza, sono stati notati dei cambiamenti negli andamenti precedentemente studiati. Infatti sono state ottenute delle variazioni maggiori (che avvengono ancora più rapidamente che nel caso 1) sulla traiettoria nello spazio delle fasi (Figura 5) e sugli andamenti temporali delle grandezze velocità e posizione (Figure 6 e 7).

Ciononostante é bene presentare un caso in cui apparentemente tali differenze appaiono abissali in modo disastroso.

3.3 Caso 3

Sono qui illustrati i grafici del terzo caso e le relative spiegazioni. Si possono notare delle totali differenze con i casi precedentemente presentati. Tuttavia é stato ritenuto opportuno non fermarsi alle apparenze e studiare il fenomeno nel particolare. Infatti in tal modo si é potuto analizzare il moto pi precisamente.

Effettivamente il grafico in Figura 8 non é molto illuminante e si può immaginare la sorpresa (o disperazione) dell'osservatore a tale vista. Tuttavia, come abbiamo ben imparato nel corso (vd. Energia in Eulero-Cromer), é opportuno studiare i grafici delle leggi ruotandoli (se sono rappresentati nello spazio euclideo) o analizzandoli in una scala differente (Figura 9). Tale studio oltre ad essere costruttivo, riserva piacevolissime sorprese. Infatti dopo il mancamento iniziale, ci siamo rese conto che in effetti ciò che risultava non era del tutto infondato, ma denotava quanto forte fosse questo fenomeno, ossia quanto una piccola variazione delle condizioni iniziali possa influenzare un sistema caotico.

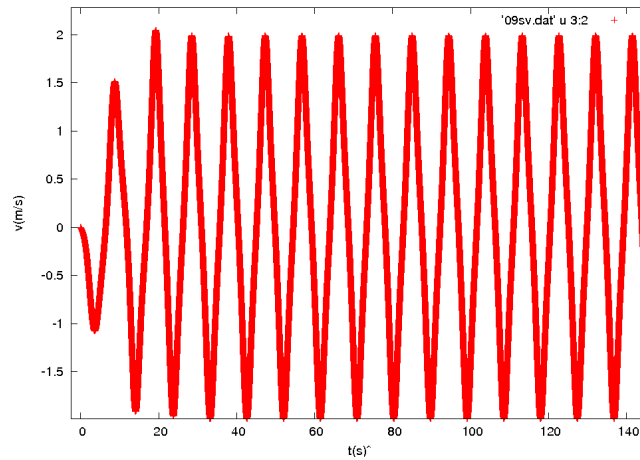


Figura 4: Velocità in funzione del tempo

Come si può notare, si continua ad avere una spirale ma che in questo caso si sposta nel tempo. Ciò è lecito dato che, effettivamente, si ha, dal punto di vista del sistema, un incisivo cambiamento del valore della forza.

Ovviamente ciò che si appura dall'osservazione di tali andamenti, è una diretta conseguenza dell'analisi effettuata precedentemente nel caso del grafico nello spazio delle fasi.

In Figura 10 e in Figura 11 sono rappresentate le relazioni temporali di velocità e posizione.

4 Conclusioni

Da tale studio, si evince che è verificato che in un sistema caotico piccole variazioni delle condizioni iniziali generano dei cambiamenti elevati dal punto di vista qualitativo nelle grandezze velocità e posizione nel tempo. Si utilizza il termine qualitativo poiché effettivamente gli strumenti a nostra disposizione non sono adatti a studiare numericamente il fenomeno (ad esempio nel programma a casa si potevano tranquillamente calcolare i risultati teorici aspettati con semplici derivate o calcolare le equazioni delle traiettorie grazie a semplici strumenti matematici).

Tuttavia il metodo di Runge-Kutta al secondo ordine ha dimostrato nuovamente la sua potenza, permettendoci di studiare un problema al di là delle nostre effettive possibilità e di poter accedere ad un argomento di elevata complessità con strumenti piuttosto semplici. Inoltre tale metodo si è mostrato efficace poiché ha consentito un'analisi intuitiva.

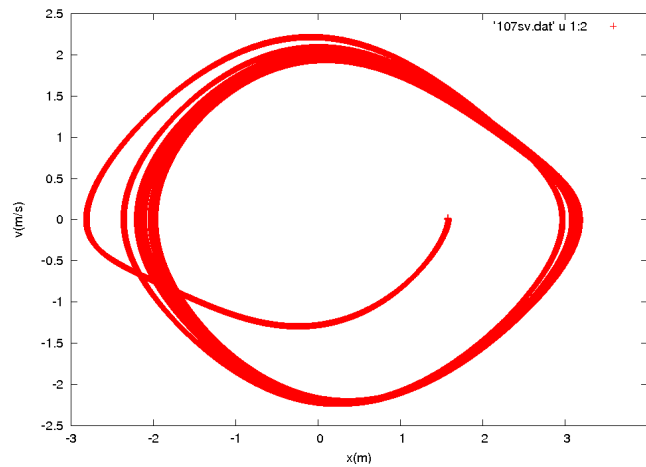


Figura 5: Velocità in funzione della posizione

É stato sorprendente appurare quanto un sistema apparentemente semplice possa risultare di elevata complessità (a tal proposito segnaliamo un sito molto divertente sul quale si possono settare le condizioni iniziali del pendolo e assistere 'in diretta' all'oscillazione:

<http://www.ba.infn.it/~zito/museo/frame4.html>).

In conclusione la morale é che: non tutto ciò che sembra lineare (vd. Figure) é effettivamente tale. Galileo Galilei aveva già sospettato la non-regolarità delle oscillazioni del pendolo: ciononostante non potendo immaginare una situazione caotica utilizzò l'approssimazione che di solito si studia.

Infine si é potuto riflettere su quanto possa essere grande questo ramo della scienza in via di sviluppo, che può portare ad una visione più ampia e profonda della Natura.

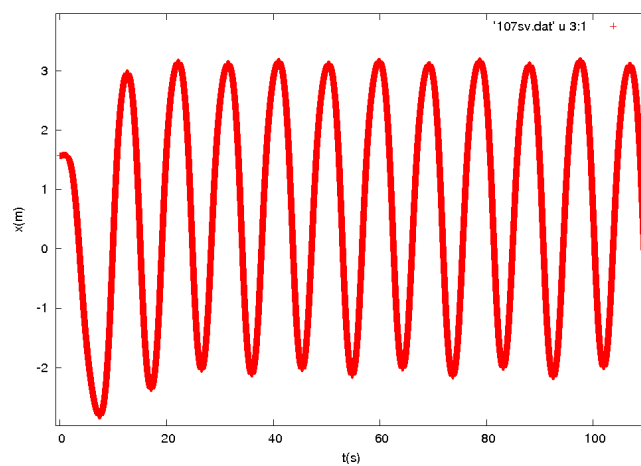


Figura 6: Posizione in funzione del tempo

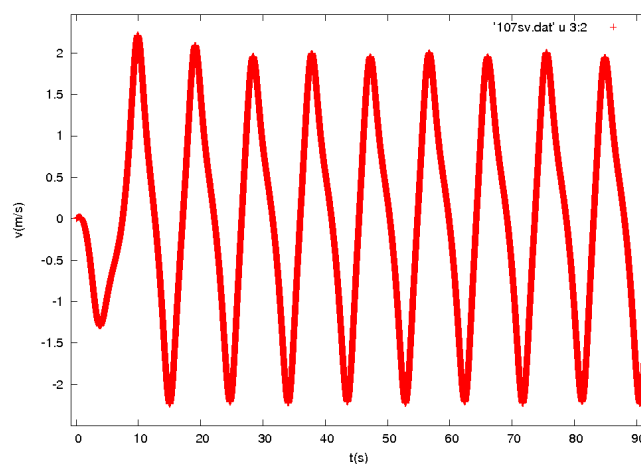


Figura 7: Velocità in funzione del tempo

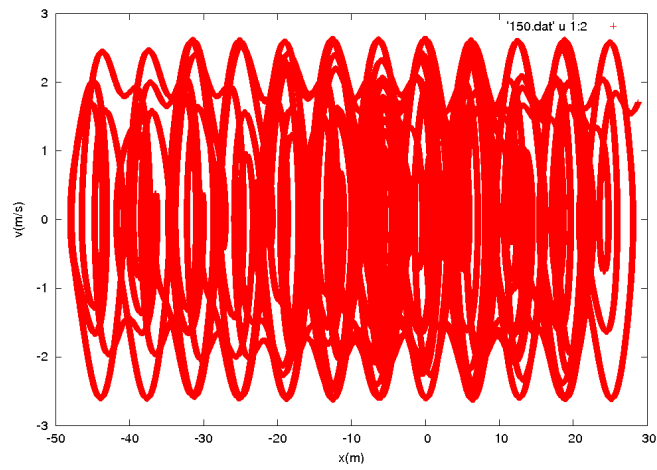


Figura 8: Velocità in funzione della posizione

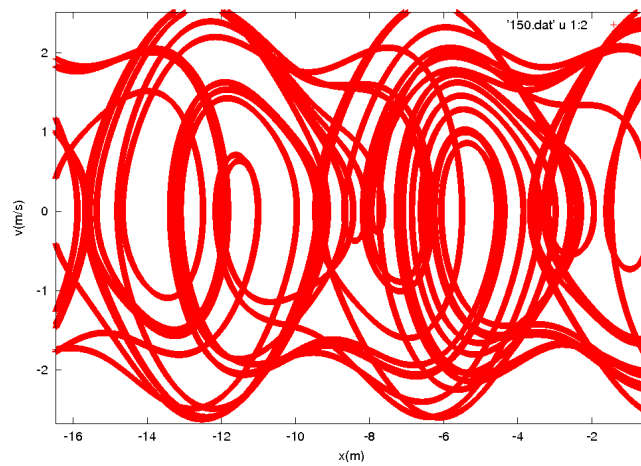


Figura 9: Velocità in funzione della posizione in una scala differente

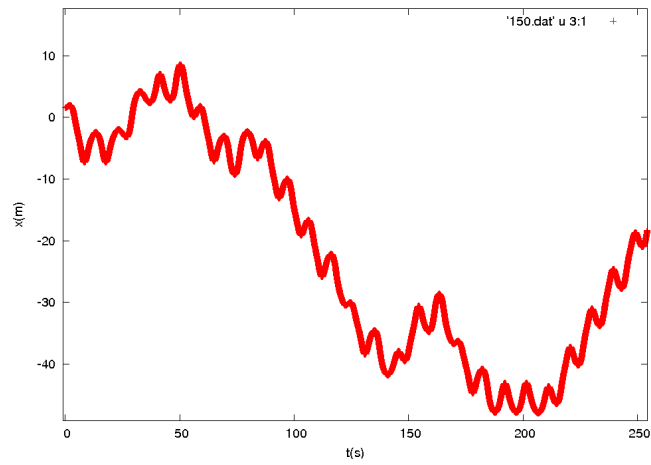


Figura 10: Posizione in funzione del tempo

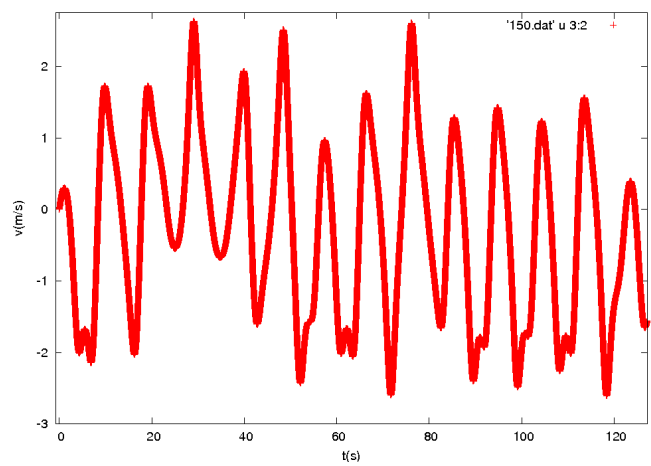


Figura 11: Velocità in funzione del tempo